Seria 2

Jacek Olczyk

18 stycznia 2019

5. Funkcję $f(x) = \cos(2x)$ interpolujemy na przedziale $[-1, 4]$ w punktach $\{-1, 1, 2, 3, 4\}$ funkcją w będącą wielomianem liniowym na $[-1, 1]$ oraz wielomianem stopnia co najwyżej 3 na $[1, 4]$. Czy taka funkcja w jest wyznaczona jednoznacznie? Oszacuj możliwie dokładnie błąd interpolacji $e = \|f - w\|_{\infty,[-1,4]}$.

   Rozwiązanie. Tak, taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie, ponieważ każdy z wielomianów jest wyznaczony jednoznacznie, jako że wiadomo z wykładu że interpolacja Lagrange'a w $n+1$ węzłach wielomianem stopnia n zawsze istnieje i jest jednoznaczna. Na przedziale $[-1, 1]$ wielomian jest liniowy, a jako że cosinus jest parzysty to w obu węzłach jest ta sama wartość, zatem na całym tym przedziale $w(x) = \cos 2 < 0$. Zatem skoro $\cos 0 = 1$, to na tym przedziale błąd interpolacji wynosi $1 - cos(2)$. Na przedziale $[1, 4]$ możemy ograniczyć z góry błąd używając wzorów z ćwiczeń:

$$\begin{aligned}
\|f - w\|_{\infty,[1,4]} &\leqslant \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[1,4]}}{(n+1)!} \|p\|_{\infty,[1,4]} \\
&\leqslant \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty,[1,4]}}{4!} \|p\|_{\infty,[1,4]} \\
&\leqslant \frac{\|16\cos(2x)\|}{24} \|p\|_{\infty,[1,4]} \\
&\leqslant \frac{2}{3} \|p\|_{\infty,[1,4]} \\
&\leqslant \frac{2}{3} \cdot \frac{3!}{4} \\
&\leqslant 1
\end{aligned}$$

   Jako że $1 < 1 - \cos 2$, to $1 - \cos 2$ jest dokładnym górnym ograniczeniem błędu interpolacji. □

7. Wyznacz wielomian w stopnia co najwyżej 2 optymalny dla funkcji $f(x) = x^3$ w sensie aproksymacji średniokwadratowej w normie $\|g\| = \sqrt{(g,g)}$ zadanej przez iloczyn skalarny $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)xdx$. Oblicz $\|f-w\|$.

Rozwiązanie. Baza $= \{1, x, x^2\}$.

$$G = \begin{bmatrix} \int_0^1 xdx & \int_0^1 x^2dx & \int_0^1 x^3dx \\ \int_0^1 x^2dx & \int_0^1 x^3dx & \int_0^1 x^4dx \\ \int_0^1 x^3dx & \int_0^1 x^4dx & \int_0^1 x^5dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$Gc = F \qquad c = \begin{bmatrix} \frac{4}{35} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{12}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{4}{35} - \frac{6}{7}x + \frac{12}{7}x^2 \\ w(x) - f(x) &= \frac{4}{35} - \frac{6}{7}x + \frac{12}{7}x^2 - x^3 \\ \|w - f\| &= \sqrt{\int_0^1 (w(x) - f(x))^2 xdx} = \\ &= \sqrt{\int_0^1 \frac{16}{1225} - \frac{48}{245}x^2 + \frac{276}{245}x^3 - \frac{776}{245}x^4 + \frac{228}{49}x^5 - \frac{24}{7}x^6 + x^7 dx} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{9800}} = \frac{\sqrt{2}}{140} \end{aligned}$$

□

Jacek Olczyk