

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:

No. de libreta:

Carrera:

Álgebra I

Examen final - 27/07/2022

1. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(7 \cdot 3^n - 5^{n+1} : 3^{n+1} + 7 \cdot 5^n)$$

es igual a 2 o 4.

2. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ que verifican simultáneamente:

- $16a + 22b = 162$,
- $a - 2b$ tiene exactamente 5 divisores positivos.

3. En G_{12} se define la relación \mathcal{R} de la siguiente manera:

$$w \mathcal{R} z \quad \text{si y sólo si} \quad wz \in G_6.$$

- (a) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
 (b) Hallar el cardinal de la clase de equivalencia del número complejo i .
4. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado mínimo entre los polinomios **mónicos** que satisfacen simultáneamente que:
- $(X^2 + 2X + 5) \mid (f : f')$,
 - $(X^2 - 4X + 1) \mid (f : f'')$,
 - $f'(2 - \sqrt{3}) = 0$.

Hallar la factorización de f como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

*Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
 Justifique todas sus respuestas.*

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:

No. de libreta:

Carrera:

Álgebra I

Examen final - 03/08/2022

1. Calcular la cantidad de funciones inyectivas

$$f : \{1, 2, \dots, 20\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 50\}$$

que verifican simultáneamente:

- $f(1) < f(3)$,
- $f(2) < f(3)$.

2. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{aligned} a_1 &= 42, \\ a_2 &= 90, \\ a_n &= 3a_{n-1} + (29^n - 11^n)a_{n-2} \quad \text{si } n \geq 3. \end{aligned}$$

Probar que $(6^n : a_n) = 2 \cdot 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Sea $w \in G_{15}$ tal que $w \notin G_3$ y $w \notin G_5$. Hallar el argumento del número complejo

$$(2 + w^3 + \bar{w}^3 + w^6 + \bar{w}^6 + i(2 + w^5 + w^{-5}))^{31}.$$

4. Factorizar el polinomio

$$3X^2 + 210X + 5 \in (\mathbb{Z}/239\mathbb{Z})[X]$$

como producto de polinomios irreducibles en $(\mathbb{Z}/239\mathbb{Z})[X]$. (Nota: el número 239 es primo.)

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Justifique todas sus respuestas.