Determinar todos los valores posibles de $(2a^2 - b^2 : a^2 - 3b^2)$
Sabiendo que, $5 \mid a$ y $(a : b) = 6$

<u>*Resolución*</u>:

Primero, *coprimicemos* a y b

$$a' = a \cdot \frac{1}{(a:b)} \quad \wedge \quad b' = b \cdot \frac{1}{(a:b)} \qquad\qquad \mid \quad a' \perp b'$$

$$\Rightarrow \quad a = a'(a:b) \quad \wedge \quad b = b'(a:b) \qquad\qquad \mid \quad a' \perp b'$$

Luego, reescribimos:

$$\begin{aligned} & d = (2a^2 - b^2 : a^2 - 3b^2) \\ \Rightarrow \quad & d = (2(6 \cdot a')^2 - (6 \cdot b')^2 : (6 \cdot a')^2 - 3(6 \cdot b')^2) \\ \Rightarrow \quad & d = (6^2(2a'^2 - b'^2) : 6^2(a'^2 - 3b'^2)) \\ \Rightarrow \quad & d = 6^2 \underbrace{(2a'^2 - b'^2 : a'^2 - 3b'^2)}_{\Gamma} \end{aligned}$$

Por ende, es necesario ver los d tales que:

$$\begin{cases} d \mid 2a'^2 - b'^2 \\ d \mid a'^2 - 3b'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid (2a'^2 - b'^2) - 2 \cdot (a'^2 - 3b'^2) \\ d \mid 3 \cdot (2a'^2 - b'^2) - (a'^2 - 3b'^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} d \mid 5a'^2 \\ d \mid 5b'^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (5a'^2 : 5b'^2) \quad \Rightarrow \quad 5(a'^2 : b'^2)$$

Ahora queda ver los valores que puede tomar $(a'^2 : b'^2)$:

$$d \mid a'^2 \Rightarrow d \mid a' \quad \wedge \quad d \mid b'^2 \Rightarrow d \mid b'$$

Ésto vale porque $a \perp b$ implica que $\text{Div}_+(a) \bigcap \text{Div}_+(b) = 1$, es decir que a y b no comparten factores entre sí. Luego, a^2 y b^2 tienen los mismos factores, sólo que *al cuadrado*. Sin embargo, nada de *elevarlos al cuadrado* agregó factores *distintos* a alguno de ambos.

<u>*Ejemplo*</u>:

$$35 \perp 12 \Longleftrightarrow \text{Div}_+(a) \bigcap \text{Div}_+(b) = 1$$

$\text{Div}_+(35) = \{1,5,7,35\} \Rightarrow 35 = 5 \cdot 7$
$\text{Div}_+(12) = \{1,2,3,4,6,12\} \Rightarrow 12 = 2^2 \cdot 3$

$\Rightarrow 35^2 = (5 \cdot 7)^2 = 5^2 \cdot 7^2$
$\Rightarrow 12^2 = (2^2 \cdot 3)^2 = 2^4 \cdot 3^2$

Elevar al cuadrado no agregó factores distintos a ninguno de los números.

$\text{Div}_+(35^2) = \{1,5,7,25,35,49,175,245,1225\}$
$\text{Div}_+(12^2) = \{1,2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,36,48,72,144\}$

Y elevar a un exponente n tampoco añade factores distintos.

$\Rightarrow 35^n = (5 \cdot 7)^2 = 5^n \cdot 7^n$
$\Rightarrow 12^n = (2^2 \cdot 3)^2 = 2^{2n} \cdot 3^n$

Sólo añade más de los mismos factores que tenían.

Por ende, podemos concluír que:

$$\therefore (a'^2 : b'^2) = 1 \iff a' \perp b'$$

Lo cual, implica:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 5(a'^2 : b'^2) = 5 \\ &\Rightarrow \quad (2a'^2 - b'^2 : a'^2 - 3b'^2) \in \{1,5\} \end{aligned}$$

Pues si $a' = 1,\ b' = 0:$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad &(2a'^2 - b'^2 : a'^2 - 3b'^2) = \\ &(2:1) = 1 \end{aligned}$$

Además, $d = 6^2 \cdot \Gamma$

Luego, $\quad d = 6^2 \cdot 1 \quad \vee \quad d = 6^2 \cdot 5$
Pero, $\quad d \neq 6^2 \cdot 5$
Pues, $\quad 5 \mid a \quad \wedge \quad (a:b) = 6 \Rightarrow 5 \nmid b$
Ya que, de lo contrario $(a:b) = 6 \cdot 5$

Juntando todo, podemos concluír que $d \neq 6^2 \cdot 5 \Rightarrow d = 6^2 \cdot 1$, pues

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_5(d) = 1 \\ &\iff \mathrm{v}_5(2a^2 - b^2) \geqslant 1 \\ &\iff \mathrm{v}_5(2a^2) \geqslant 1 \quad \wedge \quad \mathrm{v}_5(b^2) \geqslant 1 \end{aligned}$$

Pero como sé que $b \nmid 5$, entonces $\mathrm{v}_5(b^2) = \mathrm{v}_5(3b^2) = 0$

Por lo que podemos afirmar con certeza: $\underline{\underline{d = 6^2}}$