7. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$

Primero, establecemos $p(n)$

$$p(n) : \prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n(1-2n)$$

Luego, probamos $p(1)$

$$\begin{aligned} p(1) :& \quad \prod_{i=1}^{1} \frac{1+1}{2i-3} = 2^1 \cdot (1 - 2 \cdot 1) \\ p(1) :& \quad \frac{2}{2 \cdot 1 - 3} = 2 \cdot (-1) \\ p(1) :& \quad -2 = -2 \end{aligned}$$

Por ende, $p(1)$ es verdadero. Ahora probemos el paso inductivo.

$\overbrace{p(n)}^{Verdad\, por\, H.I.} \Rightarrow p(n+1)$:

$$\begin{aligned} p(n+1) :& \prod_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{2i-3} = 2^{n+1}(1-2(n+1)) \\ p(n+1) :& \prod_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{2i-3} = n \cdot 2^{n+2} + 2^{n+1} \end{aligned}$$

Habiendo expandido completamente el término de la derecha, procedamos ahora a reescribir el término de la izquierda.

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{2i-3} = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} n+1+i}{\prod_{i=1}^{n+1} 2i-3}$$

Luego, reescribimos los términos del numerador y el denominador respectivamente.

Primero, el denominador:

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{n+1} 2i-3 = \\ &= \prod_{i=1}^{n} 2i-3 \cdot 2(n+1)-3 \\ &= \prod_{i=1}^{n} 2i-3 \cdot 2n-1 \end{aligned}$$

Luego, para el numerador, hacemos un cambio de variable.
Tal que $i+1=j \Rightarrow j=2$

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{n+1} n+1+i = \\ &= \prod_{j=2}^{n+2} n+j \\ &= \prod_{j=1}^{n} n+j \cdot (n+n+1) \cdot (n+n+2) \cdot \frac{1}{n+1} \\ &= \prod_{j=1}^{n} n+j \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Nótese que para que la igualdad se cumpla, añadimos dos términos ($2n+1$ y $2n+2$) multiplicando al productorio original. Pero como además el nuevo productorio está desplazado una unidad en j, nos sobra el término inicial de $\prod_{j=1}^{n} n+j$ por lo que se lo quitamos, dividiendo al mismo por dicho término $(n+1)$.

Ahora, como $\prod_{j=1}^{n} n+j = \prod_{i=1}^{n} n+i+1$ es nuestra hipótesis inductiva, podemos reemplazar tal que:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n+1} n+1+i}{\prod_{i=1}^{n+1} 2i-3} = \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^{n} n+1+i}{\prod_{i=1}^{n} 2i-3}}_{\text{Hipótesis}} \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}$$

Luego,

$$\therefore \frac{\prod_{i=1}^{n+1} n+1+i}{\prod_{i=1}^{n+1} 2i-3} = 2^n(1-2n) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}$$