Tercera Entrega

Joan Andrés Mercado Tandazo

UAM-ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

Problema 7

Trabajando en forma tridimensional y partiendo de la transformación de Lorentz del espacio-tiempo entre sistemas inerciales K y K' que se desplazan según el eje X, deducir de la covariancia Lorentz de las ecuaciones homogéneas de Maxwell la transformación del campo electromagnético.

Resolución:
Las ecuaciones homogéneas de Mawxell son:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{1}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2}$$

En componentes se tiene:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{3}$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} \tag{4}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{5}$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{6}$$

Por otro lado, las transformaciones de Lorentz entre los sistemas K y K':

$$x' = \gamma(x + \beta ct) \tag{7}$$
$$ct' = \gamma(ct + \beta x) \tag{8}$$

Esto nos lleva a la siguiente relación entre operadores diferenciales:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{9}$$
$$\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta c\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{10}$$
$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \tag{11}$$
$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \tag{12}$$

Imponiendo covarianza con las transformaciones de Lorentz se debe tener que en el sistema K' se debe tener la siguiente forma de las ecuaciones de Maxwell:

$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B'_x}{\partial t'} \tag{14}$$

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B'_y}{\partial t'} \tag{15}$$

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B'_z}{\partial t'} \tag{16}$$

Aplicando las ec. (9)-(12) sobre la ec.(13):

$$\gamma\frac{\partial B'_x}{\partial x} + \gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial B'_x}{\partial t} + \frac{\partial B'_y}{\partial y} + \frac{\partial B'_z}{\partial z} = 0 \tag{17}$$

Podemos aplicar las ec. (9) - (12) sobre la componente x de la ecuación de Faraday (14):

$$\begin{aligned}
\partial_y E_z - \partial_z E_y &= -\frac{\gamma}{c}\big(\partial_t B'_x + \beta c \partial_x B'_x\big) \\
\partial_y E_z - \partial_z E_y + \gamma\beta\partial_x B'_x &= -\frac{\gamma}{c}\big(\partial_t B'_x\big) \overset{(17)}{\Rightarrow} \\
\Rightarrow\ \partial_y\big(E'_z - \beta B'_y\big) - \partial_z\big(E'_y + \beta B'_z\big) &= -\frac{\gamma}{c}\partial_t B'_x(1-\beta^2) \\
\partial_y\big(\gamma\big(E'_z - \beta B'_y\big)\big) - \partial_z\big(\gamma\big(E'_y + \beta B'_z\big)\big) &= -\frac{1}{c}\partial_t B'_x
\end{aligned} \tag{18}$$

De la misma forma podemos operar sobre la componente y de la ley de Faraday (15):

$$\begin{aligned}
\partial_z E'_x - \gamma\left(\partial_x + \frac{\beta}{c}\partial_t\right)E'_z &= -\frac{\gamma}{c}(\partial_t + \beta c\partial_x)B'_y \\
\partial_z E'_x - \partial_x\big(\gamma\big(E'_z - \beta B'_y\big)\big) &= \frac{1}{c}\partial_t(\gamma\big(B'_y - \beta E'_z\big))
\end{aligned} \tag{19}$$

Y finalmente sobre la componente z de la ley de Faraday (16):

$$\begin{aligned}
\gamma\left(\partial_x + \frac{\beta}{c}\partial_t\right)E'_y - \partial_y E'_x &= \frac{\gamma}{c}(\partial_t + \beta c\partial_x)B'_z \\
\partial_x\big(\gamma\big(E'_y + \beta B'_z\big)\big) - \partial_y E'_x &= -\frac{1}{c}\partial_t\big(\gamma\big(B'_z + \beta E'_y\big)\big)
\end{aligned} \tag{20}$$

De esta forma, comparando las expresiones (18), (19),(20) con (20) se tiene que la transformación del campo electromagnético entre los sistemas K y K' es de la siguiente forma:

$$E_x = E'_x \tag{21}$$

$$B_x = B'_x \tag{22}$$

$$E_y = E'_y + \beta B'_z \tag{23}$$

$$B_y = B'_y - \beta E'_z \tag{24}$$

$$E_z = E'_z - \beta B'_y \tag{25}$$

$$B_z = B'_z + \beta E'_y \tag{26}$$

□