Cuarta Entrega

Subgrupo 4:
Juan Manual Sánchez Arrua
Jaime Sánchez-Carralero Morato
Óscar Marzal Bardón
Joan Andrés Mercado Tandazo

UAM-ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

Problema 7

Trabajando en forma tridimensional y partiendo de la transformación de Lorentz del espacio-tiempo entre sistemas inerciales K y K' que se desplazan según el eje X, deducir de la covariancia Lorentz de las ecuaciones homogéneas de Maxwell la transformación del campo electromagnético.

Resolución:
Las ecuaciones homogéneas de Mawxell son:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 & (1a) \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (1b) \end{cases}$$

En componentes se tiene:

$$(2) \begin{cases} \dfrac{\partial B_x}{\partial x} + \dfrac{\partial B_y}{\partial y} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 0 & (2a) \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B_x}{\partial t} & (2b) \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B_y}{\partial t} & (2c) \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B_z}{\partial t} & (2d) \end{cases}$$

Por otro lado, las transformaciones de Lorentz entre los sistemas K y K':

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + \beta ct) & (3a) \\ ct' = \gamma(ct + \beta x) & (3b) \\ y' = y & (3c) \\ z' = z & (3d) \end{cases}$$

Esto nos lleva a la siguiente relación entre operadores diferenciales:

$$(4)\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\right) & \text{(4a)}\\ \dfrac{\partial}{\partial t'} = \gamma\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \beta c\dfrac{\partial}{\partial x}\right) & \text{(4b)}\\ \dfrac{\partial}{\partial y'} = \dfrac{\partial}{\partial y} & \text{(4c)}\\ \dfrac{\partial}{\partial z'} = \dfrac{\partial}{\partial z} & \text{(4d)}\end{cases}$$

Imponiendo covarianza con las transformaciones de Lorentz se debe tener que en el sistema K' se debe tener la siguiente forma de las ecuaciones de Maxwell:

$$(5)\begin{cases}\dfrac{\partial B'_x}{\partial x'} + \dfrac{\partial B'_y}{\partial y'} + \dfrac{\partial B'_z}{\partial z'} = 0 & \text{(5a)}\\ \dfrac{\partial E'_z}{\partial y'} - \dfrac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B'_x}{\partial t'} & \text{(5b)}\\ \dfrac{\partial E'_x}{\partial z'} - \dfrac{\partial E'_z}{\partial x'} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B'_y}{\partial t'} & \text{(5c)}\\ \dfrac{\partial E'_y}{\partial x'} - \dfrac{\partial E'_x}{\partial y'} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B'_z}{\partial t'} & \text{(5d)}\end{cases}$$

Aplicando las ec. (4) sobre la ec.(5a):

$$\gamma\frac{\partial B'_x}{\partial x} + \gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial B'_x}{\partial t} + \frac{\partial B'_y}{\partial y} + \frac{\partial B'_z}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

Podemos aplicar asimismo las ec. (4) sobre la componente x de la ley de Faraday (5b):

$$\begin{aligned}\partial_y E_z - \partial_z E_y &= -\frac{\gamma}{c}\left(\partial_t B'_x + \beta c\partial_x B'_x\right)\\ \partial_y E_z - \partial_z E_y + \gamma\beta\partial_x B'_x &= -\frac{\gamma}{c}\left(\partial_t B'_x\right) \overset{(6)}{\Rightarrow}\\ \Rightarrow\ \partial_y\left(E'_z - \beta B'_y\right) - \partial_z\left(E'_y + \beta B'_z\right) &= -\frac{\gamma}{c}\partial_t B'_x(1-\beta^2)\\ \partial_y\left(\gamma\left(E'_z - \beta B'_y\right)\right) - \partial_z\left(\gamma\left(E'_y + \beta B'_z\right)\right) &= -\frac{1}{c}\partial_t B'_x \end{aligned}\tag{7}$$

De la misma forma podemos operar sobre la componente y de la ley de Faraday (5c):

$$\begin{aligned}\partial_z E'_x - \gamma\left(\partial_x + \frac{\beta}{c}\partial_t\right)E'_z &= -\frac{\gamma}{c}(\partial_t + \beta c\partial_x)B'_y\\ \partial_z E'_x - \partial_x\left(\gamma\left(E'_z - \beta B'_y\right)\right) &= \frac{1}{c}\partial_t(\gamma\left(B'_y - \beta E'_z\right))\end{aligned}\tag{8}$$

Y finalmente sobre la componente z de la ley de Faraday (5d):

$$\begin{aligned}\gamma\left(\partial_x + \frac{\beta}{c}\partial_t\right)E'_y - \partial_y E'_x &= -\frac{\gamma}{c}(\partial_t + \beta c\partial_x)B'_z\\ \partial_x\left(\gamma\left(E'_y + \beta B'_z\right)\right) - \partial_y E'_x &= -\frac{1}{c}\partial_t\left(\gamma\left(B'_z + \beta E'_y\right)\right)\end{aligned}\tag{9}$$

De esta forma, comparando las expresiones (7)-(9) con las ecuaciones de Maxwell en el sistema K' (5) se tiene que la transformación del campo electromagnético entre los sistemas es de la siguiente forma:

$$\begin{cases}E_x = E'_x & \text{(10a)}\\ B_x = B'_x & \text{(10b)}\\ E_y = E'_y + \beta B'_z & \text{(10c)}\\ B_y = B'_y - \beta E'_z & \text{(10d)}\\ E_z = E'_z - \beta B'_y & \text{(10e)}\\ B_z = B'_z + \beta E'_y \qquad \square & \text{(10f)}\end{cases}$$