

Sexta entrega

Subgrupo 4:
Juan Manuel Sánchez Arrua,
Jaime Sánchez-Carralero Morato,
Óscar Marzal Bardón,
Joan Andrés Mercado Tandazo

UAM - ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

Ejercicio 2

Una partícula de carga q se mueve en el plano XY en una circunferencia de radio a centrado en el origen de coordenadas, con velocidad angular constante ω . En $t = 0$, la partícula está situada en $(a, 0)$. Calcular los potenciales de Liénard-Wiechert en función del tiempo actual t , en puntos en el eje Z .

Resolución:

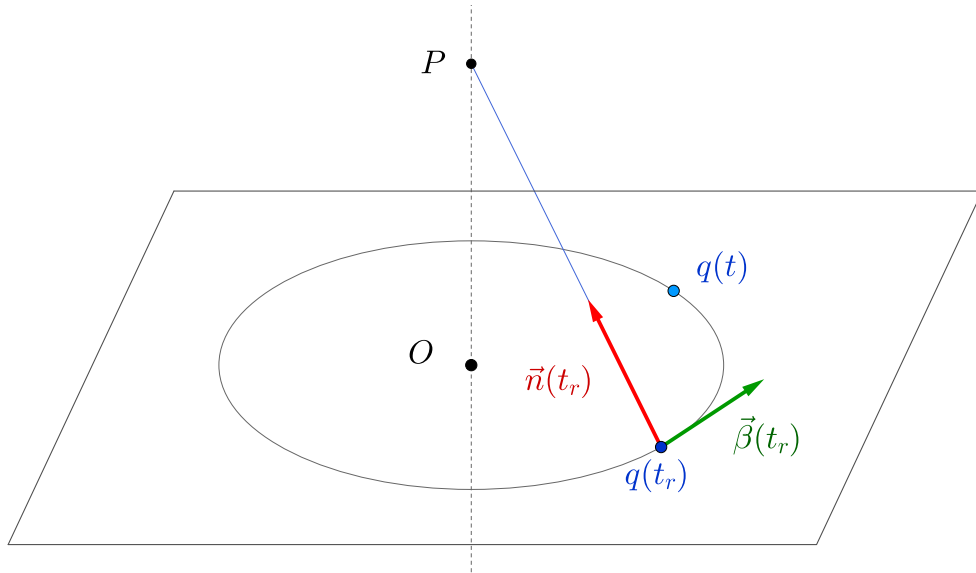


Fig. 1: Representación gráfica del problema

Las expresiones generales de los potenciales de Liénard-Wiechert son:

$$(1) \quad \begin{cases} \phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\mathcal{R}(t_r)} \frac{1}{1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})(t_r)} & (1a) \\ \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{\beta}\phi(\vec{r}, t) & (1b) \end{cases}$$

Como \vec{r} se encuentra en el eje z y el movimiento de la partícula cargada es circular uniforme, se tiene:

$$\vec{\beta}(t_r) = \frac{\omega a}{c} \vec{u}_\theta(t_r) \quad (2)$$

$$\vec{n}(t_r) \in \text{Span}\{\vec{u}_r(t_r), \vec{u}_z\} \therefore (\vec{\beta} \cdot \vec{n})(t_r) = 0 \quad (3)$$

Donde $\vec{u}_\theta(t_r)$ se refiere al vector tangente a la coordenada polar para el tiempo retardado t_r . Por otro lado, como:

$$\mathcal{R}(t_r) = c(t - t_r) = |\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)| = \sqrt{z^2 + a^2} \quad (4)$$

Esta relación se deduce fácilmente por la geometría del problema (Fig.). Cabe aclarar que r_q es el vector de posición de la partícula, y $\vec{r} = z\vec{u}_z$, que está dado por las condiciones del problema. Teniendo estas consideraciones en cuenta, la expresión del potencial vector (1a) se reduce a:

$$\boxed{\phi(z, t) = \phi(z) = \frac{q}{4\pi\sqrt{z^2 + a^2}}} \quad (5)$$

Donde, la independencia con el tiempo es consecuencia de la simetría cilíndrica y las posiciones sobre el eje de simetría elegidas. En cuanto al potencial vector por (1b):

$$\vec{A}(z, t) = \vec{\beta}(t_r)\phi(z) = \frac{\omega a}{c} \vec{u}_\theta(t_r)\phi(z) \quad (6)$$

Por lo tanto queda determinar el tiempo retardado. Por (4) se tiene:

$$t_r = t - \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{c} \quad (7)$$

Por tanto, el potencial vector tiene esta forma final:

$$\boxed{\vec{A}(z, t) = \frac{q\omega a}{4\pi c\sqrt{z^2 + a^2}} \vec{u}_\theta \left(t - \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{c} \right)} \quad (8)$$

$$\boxed{\vec{A}(z, t) = \frac{q\omega a}{4\pi c\sqrt{z^2 + a^2}} \left[\cos \left(t - \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{c} \right) \vec{u}_y - \sin \left(t - \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{c} \right) \vec{u}_x \right]} \quad (9)$$

Ejercicio 3

Calcular los campos eléctrico y magnético en función del tiempo actual t , en el centro de la circunferencia del Ejercicio 2.

Resolución:

La expresión general de los campos eléctricos y magnéticos de una partícula son:

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\gamma^2(t_r)} \left(\frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\mathcal{R}^2(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \right) (t_r) + \frac{q}{4\pi c} \left(\frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{\mathcal{R}(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \right) (t_r) \end{aligned} \right. \quad (10a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{n}(t_r) \times \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (10b)$$

A las consideraciones (2) y (3) se les añade las siguientes apreciaciones:

$$\dot{\vec{\beta}}(t_r) = -\frac{\omega^2 a}{c} \vec{u}_r(t_r) \quad (11)$$

$$\vec{n} = -\vec{u}_r \therefore z = 0 \quad (12)$$

$$\gamma^2(t_r) = \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2} \quad (13)$$

Donde la expresión (12) se debe al punto donde nos piden hallar los campos, i.e el centro de la circunferencia. Por tanto, podemos trabajar sobre el triple producto vectorial:

$$\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \stackrel{(11),(12)}{=} -\vec{n} \times \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} = \vec{u}_r \times \frac{\omega a}{c} \vec{u}_\theta \times \left(-\frac{\omega^2 a}{c} \right) \vec{u}_r = -\frac{\omega^3 a^2}{c^2} \vec{u}_\theta \quad (14)$$

De esta forma el campo eléctrico (10a) tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{0}, t) &= -\frac{q}{4\pi a^2} \left(1 - \left(\frac{\omega a}{c} \right)^2 \right) (\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)(t_r) - \frac{q\omega^3 a}{4\pi c^3}(t_r) = \\ &= -\frac{q}{4\pi a^2} \left(1 - \left(\frac{\omega a}{c} \right)^2 \right) \vec{u}_r(t_r) - \frac{q}{4\pi} \left(\frac{\omega}{ca} - \frac{\omega^3 a}{c^3} + \frac{\omega^3 a}{c^3} \right) \vec{u}_\theta(t_r) \\ &= -\frac{q}{4\pi a^2} \left[\left(1 - \left(\frac{\omega a}{c} \right)^2 \right) \vec{u}_r(t_r) + \frac{\omega a}{c} \vec{u}_\theta(t_r) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Además en el punto que se solicita, la expresión del tiempo retardado se reduce a $t_r = t - a/c$ de tal forma que la expresión final del campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{0}, t) = -\frac{q}{4\pi a^2} \left[\left(1 - \left(\frac{\omega a}{c} \right)^2 \right) \vec{u}_r(t - a/c) + \frac{\omega a}{c} \vec{u}_\theta(t - a/c) \right] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{0}, t) &= -\frac{q}{4\pi a^2} \left[\vec{u}_x \left\{ \left(1 - \left(\frac{\omega a}{c} \right)^2 \right) \cos(\omega t - \omega a/c) - \frac{\omega a}{c} \sin(\omega t - \omega a/c) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \vec{u}_y \left\{ \left(1 - \left(\frac{\omega a}{c} \right)^2 \right) \sin(\omega t - \omega a/c) + \frac{\omega a}{c} \cos(\omega t - \omega a/c) \right\} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Aplicando la expresión (10b) se tiene:

$$\vec{B}(\vec{0}, t) = \vec{n}(t_r) \times \vec{E}(\vec{0}, t_r) = \frac{q\omega}{4\pi a c} \vec{u}_z \quad (18)$$

Donde de nuevo, la independencia en el tiempo es fruto de las simetrías y del punto estudiado.