Sexta entrega

Subgrupo 4:
Juan Manuel Sánchez Arrua,
Jaime Sánchez-Carralero Morato,
Óscar Marzal Bardón,
Joan Andrés Mercado Tandazo

UAM - ELECTRODINÁMICA ClÁSICA

Ejercicio 2

Una partícula de carga q se mueve en el plano XY en una circunferencia de radio a centrado en el origen de coordenadas, con velocidad angular constante ω. En $t = 0$, la partícula está situada en $(a, 0)$. Calcular los potenciales de Liénard-Wiechert en función del tiempo actual t, en puntos en el eje Z.

Resolución:

Las expresiones generales de los potenciales de Liénard-Wiechert son:

$$(1)\quad \begin{cases} \phi(\vec{r}, t) = \dfrac{q}{4\pi\mathcal{R}(t_r)} \dfrac{1}{1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{n})(t_r)} & \text{(1a)} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{\beta}\phi(\vec{r}, t) & \text{(1b)} \end{cases}$$

Como $\vec{r}$ se encuentra en el eje z y el movimiento de la partícula cargada es circular uniforme, se tiene:

$$\vec{\beta}(t_r) = \frac{\omega a}{c}\vec{u}_\theta(t_r) \tag{2}$$

$$\vec{n}(t_r) \in \text{Span}\{\vec{u}_r(t_r),\, \vec{u}_z\} \;\therefore\; (\vec{\beta} \cdot \vec{n})(t_r) = 0 \tag{3}$$

Donde $\vec{u}_\theta(t_r)$ se refiere al vector tangente a la coordenada polar para el tiempo retardado t_r. Por otro lado, como:

$$\mathcal{R}(t_r) = c(t - t_r) = |\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)| = \sqrt{z^2 + a^2} \tag{4}$$

Esta relación se deduce fácilmente por la geométria del problema (Fig.). Cabe aclarar que r_q es el vector de posición de la partícula, y $\vec{r} = z\vec{u}_z$, que está dado por las condiciones del problema. Teniendo estas consideraciones en cuenta, la expresión del potencial vector (1a) se reduce a:

$$\boxed{\phi(z, t) = \phi(z) = \frac{q}{4\pi\sqrt{z^2 + a^2}}} \tag{5}$$

Donde, la independencia con el tiempo es consecuencia de la simetría cilíndrica y las posiciones sobre el eje de simetría elegidas. En cuento al potencial vector por (1b):

$$\vec{A}(z, t) = \vec{\vec{\beta}}(t_r)\phi(z) = \frac{\omega a}{c}\vec{u}_\theta(t_r)\phi(z) \tag{6}$$

Por lo tanto queda determinar el tiempo retardado. Por (4) se tiene:

$$t_r = t - \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{c} \tag{7}$$

Por tanto, el potencial vector tiene esta forma final:

$$\boxed{\vec{A}(z,t) = \frac{q\omega a}{4\pi c\sqrt{z^2+a^2}}\vec{u}_\theta\left(t - \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{c}\right)} \tag{8}$$

$$\boxed{\vec{A}(z,t) = \frac{q\omega a}{4\pi c\sqrt{z^2+a^2}}\left[\cos\left(t - \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{c}\right)\vec{u}_y - \sin\left(t - \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{c}\right)\vec{u}_x\right]} \tag{9}$$

Ejercicio 3

Calcular los campos eléctrico y magnético en función del tiempo actual t, en el centro de la circunferencia del Ejercicio 2.

Resolución:

La expresión general de los campos eléctricos y magnéticos de una partícula son:

$$(10)\quad \begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \dfrac{q}{4\pi\gamma^2(t_r)}\left(\dfrac{\vec{n}-\vec{\beta}}{\mathcal{R}(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\right)(t_r) + \dfrac{q}{4\pi c}\left(\dfrac{\vec{n}\times\left[\vec{n}-\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\right]}{\mathcal{R}(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3}\right)(t_r) & \text{(10a)} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{n}(t_r)\times\vec{E}(\vec{r},t) & \text{(10b)} \end{cases}$$

A las consideraciones (2) y (3) se les añade las siguientes apreciaciones:

$$\dot{\vec{\beta}}(t_r) = -\frac{\omega^2 a}{c}\vec{u}_r(t_r) \tag{11}$$

$$\vec{n} = -\vec{u}_r \quad \because \quad z = 0 \tag{12}$$

$$\gamma^2(t_r) = \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega a}{c}\right)^2} \tag{13}$$

Donde la expresión (12) se debe al punto donde nos piden hallar los campos, i.e el centro de la circunferencia. Por tanto, podemos trabajar sobre el triple producto vectorial:

$$\vec{n}\times\left[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right] \overset{(11),(12)}{=} -\vec{n}\times\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}} = \vec{u}_r\times\frac{\omega a}{c}\vec{u}_\theta\times\left(-\frac{\omega^2 a}{c}\right)\vec{u}_r = -\frac{\omega^3 a^2}{c^2}\vec{u}_\theta \tag{14}$$

De esta forma el campo eléctrico (10a) tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{0},t) &= -\frac{q}{4\pi a^2}\left(1-\left(\frac{\omega a}{c}\right)^2\right)(\vec{u}_r+\vec{u}_\theta)(t_r) - \frac{q\omega^3 a}{4\pi c^3}(t_r) = \\ &= -\frac{q}{4\pi a^2}\left(1-\left(\frac{\omega a}{c}\right)^2\right)\vec{u}_r(t_r) - \frac{q}{4\pi}\left(\frac{\omega}{ca} - \frac{\omega^3 a}{c^3} + \frac{\omega^3 a}{c^3}\right)\vec{u}_\theta(t_r) \\ &= -\frac{q}{4\pi a^2}\left[\left(1-\left(\frac{\omega a}{c}\right)^2\right)\vec{u}_r(t_r) + \frac{\omega a}{c}\vec{u}_\theta(t_r)\right] \end{aligned} \tag{15}$$

Además en el punto que se solicita, la expresión del tiempo retardado se reduce a $t_r = t - a/c$ de tal forma que la expresión final del campo eléctrico es:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{0},t) &= -\frac{q}{4\pi a^2}\left[\left(1-\left(\frac{\omega a}{c}\right)^2\right)\vec{u}_r(t-a/c)+\frac{\omega a}{c}\vec{u}_\theta(t-a/c)\right] \qquad (16)\\ \vec{E}(\vec{0},t) &= -\frac{q}{4\pi a^2}\left[\vec{u}_x\left(1-\left(\frac{\omega a}{c}\right)^2\right)\cos(\omega t-\omega a/c)-\frac{\omega a}{c}\sin(\omega t-\omega a/c)+\right.\\ &\quad\left.+\vec{u}_y\left(1-\left(\frac{\omega a}{c}\right)^2\right)\sin(\omega t-\omega a/c)+\frac{\omega a}{c}\cos(\omega t-\omega a/c)+\right] \qquad (17)\end{aligned}}$$

Aplicando la expresión (10b) se tiene:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{0},t)=\vec{n}(t_r)\times\vec{E}(\vec{0},t_r)=\frac{q\omega}{4\pi ac}\vec{u}_z} \qquad (18)$$

Donde de nuevo, la independencia en el tiempo es fruto de las simetrías y del punto estudiado.