Ejercicio 1.3

Termodinámica

a) $PV = NRT$ $\quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{NR}{P} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow$

$$\frac{\frac{\pi r^2 2L}{3}}{T_1} = \frac{\frac{\pi r^2 1L}{3}}{T_2} \Rightarrow \frac{2}{T_1} = \frac{1}{T_2} \qquad 2T_2 = T_1 \qquad T_1 = 400K$$

$T_2 = 200\ K$

b) Por primera ley tenemos

$$\Delta U = Q - \cancel{W}^{\,0} \rightarrow \Delta U = Q \qquad dQ = \frac{3}{2} NR\,dT$$

$$dQ = C_v n\,dT$$

Con ley de Fourier:

$$\frac{dQ}{dt} x = -KA\frac{dT}{dx} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -KA\frac{\Delta t}{x} \Rightarrow C_v n\frac{dT}{dt} = -KA\frac{\Delta t}{x}$$

Para T_1 $\qquad$ Para T_2

$$\boxed{C_v n\frac{dT_1}{dt} = -\frac{KA}{l}(T_1 - T_2)} \; ; \quad C_v n\frac{dT_2}{dt} = -\frac{KA}{l}(T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_v n\frac{dT_2}{dt} = \frac{KA}{l}(T_1 - T_2)}$$

Reorganizando:

$$\frac{dT_1}{dt} = -C(T_1-T_2) \quad ; \quad \frac{dT_2}{dt} = C(T_1-T_2)$$

$$T_1' = -CT_1 + CT_2$$
$$T_2' = CT_1 - CT_2$$

$$\vec{x}' = Ax \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} -C & C \\ C & -C \end{pmatrix}$$

Valores propios

$$\begin{vmatrix} -C-\lambda & C \\ C & -C-\lambda \end{vmatrix} = (-C-\lambda)^2 - C^2 = \cancel{C^2} + 2C\lambda + \lambda^2 - \cancel{C^2} = 0$$

Una solución es $\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$

Ahora $2C\lambda + \lambda^2 = 0$ $\boxed{\lambda_2 = -2C}$

Ahora vectores propios $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} -C & C \\ C & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -Ca + Cb = 0 \\ Ca - Cb = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Ahora tenemos que $\lambda = -2c$

$$\begin{pmatrix} c & c \\ c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

La solución es: (General) $\quad c \approx 93 \simeq 1.04$

$$\vec{X} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2ct}$$

$$T_1 = C_1 - C_2 e^{-2ct} \quad ; \quad T_2 = C_1 + C_2 e^{-2ct}$$

Con las condiciones iniciales

$-c(T_1^0 - T_2^0) = -208 = -C_2$ y para que sea coherente $C_1 = 0$

Solución particular

$$\boxed{T_1 = -208 e^{-2ct} \quad ; \quad T_2 = 208 e^{-2ct}}$$

c) Si a T_1 $\lim\limits_{t \to \infty} -208 e^{-2ct} = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{-208}{\cancel{e^{2ct}}} = 0$

Lo mismo con T_2 si $t \to \infty$ $T_2 = 0$