1.1 Series de Fourier

i) Intervalo finito de discontinuidades finita,

La funcion esta definida en $-T/2 \leq t \leq T/2$ y es continua por lo tanto si tomamos un número finito de periodos también existe un número finito de discontinuidades, ya que estas solo existen al pasar a un nuevo periodo

Sin embargo, el teorema de Dirichlet establece que:

$f(t) \quad -T/2 \leq t \leq T/2 \qquad f_{1/2}(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$

donde: $f(x^+) = \lim_{x \to \frac{T}{2}^+} f(x)$

$f(x^-) = \lim_{x \to \frac{T}{2}^-} f(x)$

entonces las discontinuidades convergen también de acuerdo a este teorema.

ii) Número finito de máximos y mínimos en intervo finito

Al ser la serie una suma infinita de senos y cosenos obtenemos periodos con número finito de máximos, por lo tanto tomar un número finito de ~~máximos~~ periodos implica un número finito de máximos.

iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = M$ donde $M < \infty$

Para este caso la condición de una integral finita no puede generalizarse pero tomando el intervalo como un periodo si se garantiza. Sin embargo para las funciones dadas las condiciones anteriores la integración se puede realitar pero no se asegura su convergencia, pero en este caso asumamos la convergencia de la serie a $f(x)$. Obteniendo la convergencia podemos asumir la derivada de la suma como la suma de las derivadas.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t))$$

la derivada de $\frac{a_0}{2}$ ya que los coeficientes son integrales definidas por lo tanto son constantes

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{a_0}{2}\right)^{0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

$$\boxed{= \sum_{n=1}^{\infty} -n\omega_0 a_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) + n\omega_0 b_n \cos(n\omega_0 t)}$$

La integral de la suma se puede realizar del mismo modo que la derivada siempre y cuando la serie converja

$$\int_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} a_0 \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t))$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} a_0 \, dt = \frac{a_0}{2} t \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{a_0}{2}(t_2 - t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} a_n \cos(n\omega_0 t) dt; \quad n\omega_0 t = u \quad du = n\omega_0 dt$$

$$\frac{du}{n\omega_0} = dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{a_n \cos(u) du}{n\omega_0} = \frac{a_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= \frac{a_n}{n\omega_0} (\operatorname{sen}(n\omega_0 t_2) - \operatorname{sen}(n\omega_0 t_1))$$

$$\int_{t_1}^{t_2} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt = \left.\frac{-b_n \cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right|_{t_1}^{t_2}$$

$$= -\frac{b_n}{n\omega_0}\left(\cos(n\omega_0 t_2) - \cos(n\omega_0 t_1)\right)$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} f(x) = \frac{a_0}{2}(t_2-t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0}\left[a_n(\operatorname{sen}(n\omega_0 t_2)-\operatorname{sen}(n\omega_0 t_1)) - b_n(\cos(n\omega_0 t_2)-\cos(n\omega_0 t_1))\right]}$$

1.2. $f(t)=t \quad (-\pi,\pi) \quad f(t+2\pi)=f(t)$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t\,dt \qquad T=2\pi \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}=1$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt=\frac{t^2}{T}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi^2}{T}-\frac{\pi^2}{T}=0$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t\cos(n\omega_0 t)\,dt=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,t\,dt=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,\text{sen}(nt)\,dt=\frac{-2\pi n\,\overset{(-1)^n}{\cancel{\cos(\pi n)}}+2\,\overset{0}{\cancel{\sin(\pi n)}}}{\pi n^2}=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$f(t)=\overset{0}{\cancel{\frac{a_0}{2}}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overset{0}{\cancel{a_n\cos(n\omega_0 t)}}+b_n\sin(n\omega_0 t)\right)$$

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nt)=t$$

1.3.1. $f(t)=t^2 \qquad -\pi\le t\le\pi \qquad f(t+2\pi)=f(t)$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\Rightarrow \zeta(6)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t^2\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt=\frac{1}{\pi}\frac{t^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi^3}{3\pi}-\frac{(-\pi)^3}{3\pi}=\frac{2\pi^{\cancel{3}}}{3\cancel{\pi}}=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(n\omega_0 t)\,dt=\frac{2\pi^2n^2\,\overset{0}{\cancel{\sin(\pi n)}}+4\cancel{\pi n}\,\overset{-1\,0\,1}{\cancel{\cos(\pi n)}}-4\,\overset{0}{\cancel{\sin(\pi n)}}}{\cancel{\pi}n^{\cancel{3}}}$$

$$a_n=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin(nt)\,dt=0$$

$$f(t)=t^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

1.3.2 $$\int t^2\,dt=\int\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)\,dt$$

$$\frac{1}{12}t(t^2-\pi^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nt)$$

usando la identidad de Parseval:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|g(t)|^2\,dt=\frac{1}{4}a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$$g(t)=\frac{1}{12}t(t^2-\pi^2) \qquad a_n=\frac{(-1)^n}{n^3} \qquad a_0=0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{12}(t(t^2-\pi^2))\right)^2 dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$$