

## Problemas variables aleatorias continuas

1. El tiempo  $X$  que utiliza un comercial para exponer un producto cuando LO VENDE sigue, aproximadamente, una distribución normal con parámetros  $\mu = 3.45$  minutos y  $\sigma = 1$  minuto.
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga la venta en menos de 4 minutos?
  - b. ¿Y en más de 3.5 minutos?

### Solución

Tenemos que  $X$  es  $N(\mu = 3.45, \sigma = 1)$  tenemos que  $P(X < 4) = 0.7088$

En segundo lugar nos piden  $P(> 3.5) = 1 - P(\leq 3.5) = 0.4801$

Los cálculos los podemos hacer con R

```
round(pnorm(4,mean=3.45,sd=1),4)# apartado a. P(X<4)
```






```
## [1] 0.7088
```

```
round(1-pnorm(3.5,mean=3.45,sd=1),4)# apartado b. P(X>3.5)
```

```
## [1] 0.4801
```

o con Google sheets (u otra hoja de cálculo)

→ [docs.google.com/spreadsheets/d/1iScEw](https://docs.google.com/spreadsheets/d/1iScEw)

<div>  <b>probabilidades_continuas_cuantiles_pro</b> </div> <div>           Archivo Editar Ver Insertar Formato Datos         </div>			
<div>     <div>100% ▾</div> <div>\$ % .0 .00 123 ▾</div> </div>			
5	fx		
	A	B	C
1			
2			
3	Problema 1	mu	sigma
4	X normal	3.45	1
5	P(X<4)=	0.7088	
6	Función	NORMDIST(4, 3.45, 1, TRUE)	
7	P(X>3.5)=1-P(X<=3.5)=	0.4801	
8	Función	1-NORMDIST(3.5, 3.45, 1, TRUE)	

2. El tiempo  $X$  que utiliza un comercial para exponer un producto cuando NO VENDE sigue, aproximadamente, una distribución normal con parámetros  $\mu = 2$  y  $\sigma = 0.8$ .
- ¿Cuál es el cuantil 0.95 de esta variable? Interpretarlo en el sentido de tiempo perdido por el comercial.
  - ¿Cuál es el tiempo perdido en el 40% de las llamadas más cortas?

### Solución

Tenemos que  $X$  es  $N(\mu = 2, \sigma = 0.8)$  tenemos que buscar el cuantil 0.95 es decir el valor  $x_{0.95}$  tal que  $P(X < x_{0.95}) = 0.95$  que es  $x_{0.95} = 2$

En segundo lugar nos piden el cuantil  $x_{0.4}$  es decir el valor  $x_{0.4}$  tal que  $P(X < x_{0.4}) = 0.4$  que es  $x_{0.4} = 1$

Los cálculos los podemos hacer con R

```
round(qnorm(0.95,mean=2,sd=0.8),4)# apartado a, cuantil 0.95
```

```
## [1] 3.3159
```

```
round(qnorm(0.4, mean=2,sd=0.8),4)# apartado b. cuantil 0.4
```

```
## [1] 1.7973
```

o con Google sheets (u otra hoja de cálculo)

9			
10	Problema 2	mu	sigma
11	X normal	1	0.8
12	cuantil 0.95	3.3159	
13	Función	NORMINV(0.95,2,0.8)	
14	cuantil 0.4	1.7973	
15	Función	NORMINV(0.4,2,0.8)	
16			
17			

3. Un centro de atención telefónica por voz (*call center*) recibe por término medio 102 llamadas por hora. Suponed que el tiempo entre llamadas consecutivas es exponencial.
- Sea  $X$  el tiempo entre dos llamadas consecutivas ¿cuál es la distribución de  $X$ ?
  - Calcular la probabilidad que pasen al menos 2.5 minutos hasta recibir la primera llamada.
  - Calcular la probabilidad que pasen menos de 3 minutos hasta recibir la siguiente llamada.
  - Calcular la esperanza y la varianza de  $X$ .

### Solución

- En 60 minutos recibe 100 llamadas así que en un minuto recibe  $\lambda = \frac{102}{60} = 1.7$ . Luego  $X$  = tiempo entre dos llamadas consecutivas en minutos sigue una ley  $Exp(\lambda = 1.7)$
- $P(X > 2.5) = 1 - P(X \leq 2.5) = 0.0143$ .
- $P(X < 3) = P(X \leq 3) = 0.9939$ .
- $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1.7} = 0.5882$  y  $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{1.7^2} = 0.346$ .

Cálculos con R

```
round(1-pexp(2.5,rate=1.7),4)# apartado b.
```

```
## [1] 0.0143
```

```
round(pexp(3,rate=1.7),4)# apartado c.
```

```
## [1] 0.9939
```

o con Google sheets (u otra hoja de cálculo)

18	Problema 3	lambda		
19	X exponencial	1.7		
20	$P(X > 2.5) = 1 - P(X \leq 2.5) =$	0.0143		
21	Función	1-EXPON.DIST(2.5,B19,TRUE)		
22	$P(X \leq 3) =$	0.9939		
23	Función	EXPON.DIST(3,B19,TRUE)		

4. Sea  $X$  una variable aleatoria normal con parámetros  $\mu = 1$  y  $\sigma = 1$ . Calculad el valor de  $b$  tal que  $P((X - 1)^2 \leq b) = 0.1$ .

### Solución

La v.a.  $X$  es  $N(\mu = 1, \sigma = 1)$  nos piden  $b$  tal que  $P((X - 1)^2 \leq b) = 0.1$ .. Notemos que  $b \geq 0$ , además sabemos que  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 1}{1} = X - 1$  sigue una distribución  $N(0, 1)$ .

Tenemos que  $P((X - 1)^2 \leq b) = P(-\sqrt{b} \leq (X - 1) \leq \sqrt{b}) = P(-\sqrt{b} \leq Z \leq \sqrt{b}) = F_Z(\sqrt{b}) - F_Z(-\sqrt{b}) = F_Z(\sqrt{b}) - (1 - F_Z(\sqrt{b})) = 2 * F_Z(\sqrt{b}) - 1$ .

Entonces buscamos  $b$  tal que  $2 * F_Z(\sqrt{b}) - 1 = 0.1$  y de aquí tenemos que

$F_Z(\sqrt{b}) = \frac{1 + 0.1}{2} = 0.55$  luego  $\sqrt{b} = z_{0.55}$  y  $b = \sqrt{z_{0.55}^2}$  donde  $z_{0.55}$  es el cuantil 0.55 de una normal estándar  $P(Z \leq z_{0.55}) = 0.55$ . En definitiva  $b = \sqrt{z_{0.55}^2} = \sqrt{0.1257} = 0.3545$ .

Para el cálculo del cuantil  $z_{0.55}$  con R es

```
z0.55=round(qnorm(0.55,0,1),4)
z0.55
```

```
## [1] 0.1257
```

```
round(sqrt(z0.55),4)
```

```
## [1] 0.3545
```

5. Sea  $Z$  una variable aleatoria  $N(0, 1)$ . Calcular  $P\left(\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 > \frac{1}{16}\right)$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} P\left(\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 > \frac{1}{16}\right) &= 1 - P\left(\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{16}\right) \\ &= 1 - P\left(-\sqrt{\frac{1}{16}} \leq Z - \frac{1}{4} \leq \sqrt{\frac{1}{16}}\right) \\ &= 1 - P\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leq Z \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &= 1 - P(0 \leq Z \leq 0.5) = 1 - (P(Z \leq 0.5) - P(Z \leq 0)) \\ &= 1 - (0.6915 - 0.5) = 0.8085. \end{aligned}$$

6. Un contratista de viviendas unifamiliares de lujo considera que el coste en euros de una contrata habitual es una variables  $X$  que sigue una distribución  $N(\mu = 600000, \sigma = 60000)$
- ¿Cuál es la probabilidad de que el coste del edificio esté entre 560000 y 660000 euros?
  - 0.2 es la probabilidad de que el coste de la vivienda supere ¿qué cantidad?
  - ¿Cuál es el coste mínimo del 5% de las casa más caras?

### Solución

a.  $P(560000 \leq X \leq 660000) = P(X \leq 660000) - P(X \leq 560000) = 0.8413 - \text{round}(\text{pnorm}(560000, \text{mean} = 600000, \text{sd} = 60000), 4)$ .

Con R

```
round(pnorm(660000,mean=600000,sd=60000)-pnorm(560000,mean=600000,sd=60000),4)
```

```
## [1] 0.5889
```

En el 58% de los casos (aproximadamente) el coste se titulará entre esas dos cantidades

- b. Nos piden el valor  $x_0$  tal que  $P(X > x_0) = 0.2$ , es decir el valor que supera el 20% de las viviendas más caras. Este valor será el que deje por debajo el coste del 80% de las casas por lo que es el cuantil 0.8 lo calculamos con R (ejercicio utiliza google sheets para obtener el mismo resultado)

```
qnorm(0.8,mean=600000,sd=60000)
```

```
## [1] 650497.3
```

El 20% de las casas más caras cuestan por encima de 650500 euros aproximadamente.

- c. Ahora somos más ambiciosos y queremos gastar para estar entre el 5% de casas más caras. De manera similar al caso anterior queremos calcular el cuantil  $x_{0.95}$ , lo haremos con R

```
qnorm(0.95,mean=600000,sd=60000)
```

```
## [1] 698691.2
```

El 5% de viviendas más costosas supera los 699000 euros aproximadamente

Con Google sheets (u otra hoja de cálculo)

24					
25	Problema 7	mu	sigma		
26	X normal	600000	60000		
27	P(560000<X<660000)=	0.5889			
28	Función	NORMDIST(660000,B26,C26,TRUE)-NORMDIST(560000,B26,C26,TRUE)			
29	cuantil 0.8	650497.3			
30	Función	NORMINV(0.8,B26,C26)			
31	cuantil 0.95	698691.2			
32	Función	NORMINV(0.95,B26,C26)			
33					
34					

7. Si  $X$  está distribuida uniformemente en  $(0, 2)$  e  $Y$  es una variable exponencial con parámetro  $\lambda$ . Calcular el valor de  $\lambda$  tal que  $P(X < 1) = P(Y < 1)$ .

**Solución**

$X$  sigue una ley  $U(0, 2)$  luego  $F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{x}{2}$  si  $0 < x < 2$  y la variable  $Y$  es una  $Exp(\lambda)$  luego  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - e^{-\lambda \cdot y}$  si  $y > 0$ .

Luego  $P(X < 1) = \frac{1}{2}$  y  $P(Y \leq 1) = 1 - e^{-\lambda \cdot 1}$ . Por lo tanto nos piden el valor de  $\lambda$  tal que  $\frac{1}{2} = 1 - e^{-\lambda}$ .

Así que  $e^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$  luego  $-\lambda = \ln(0.5) = -0.6931472$ . por lo tanto  $\lambda = 0.6931472$ .