Ejemplos variables aleatorias continuas

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Un hotel de alta montaña con pistas de esquí dispone de una piscina climatizada se estima que en el mes más frío el coste de Y de la factura energética en euros depende de otra variable aleatoria T que es la temperatura media del mes en grados Celsius según la siguiente relación lineal $Y = 1000 - 6 \cdot T$.

Supongamos que la temperatura de ese mes sigue una distribución normal con media $\mu_T = E(T) = -5$ grados y varianza $\sigma_T^2 = Var(T) = 4$.

- Calcular la media del coste.
- Calcular la desviación típica del coste.

Coste de la climatización de una piscina

Recordemos que

- $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$
- $Var(a \cdot X + b) = a^2 \cdot Var(X)$

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E(Y) = E(1000 - 6 \cdot T) = 1000 - 6 \cdot E(T) \\ &= 1000 - 6 \cdot (-5) = 1000 + 30 = 1030. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= Var(Y) = Var(1000 - 6 \cdot T) = (-6)^2 \cdot Var(T) \\ &= 36 \cdot 4 = 144. \end{aligned}$$

$$\sigma_Y = +\sqrt{\sigma_Y^2} = +\sqrt{144} = 12.$$

Transformación de una v.a. $X \equiv N(\mu, \sigma)$ en una normal estándar

Recordemos que si $X \equiv N(\mu, \sigma)$ entonces $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \equiv N(0,1)$.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Transformación de una v.a. $X \equiv N(\mu, \sigma)$ en una normal estándar

Por ejemplo supongamos que X es una $N(\mu = 1, \sigma = 2)$
Recordemos que

$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Calculemos $P(X \leq 1.25)$ de forma directa con R es

```
pnorm(1.25,mean=1,sd=2)
```

```
## [1] 0.5497382
```

Transformación de una v.a. $X \equiv N(\mu, \sigma)$ en una normal estándar

Aproximando con una normal estándar

$$P(X \leq 1.25) = P\left(\frac{X-1}{2} \leq \frac{1.25-1}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{1.25-1}{2}\right)$$

```
mu=1
sigma=2
(1.25-mu)/sigma
```

```
## [1] 0.125
```

```
pnorm(0.125,mean=0,sd=1)
```

```
## [1] 0.5497382
```

Supongamos que disponemos de cartera de renta variable que tiene un valor medio de 500000 euros una desviación estándar de 15000.

Si X es el valor de la cartera y asumimos que tiene distribución aproximadamente normal ¿cuál es la probabilidad de que el valor de la cartera se encuentre entre 485000 y 520000 euros?

Sea X la variable nos da el valor actual de la cartera de valores.
Nos dicen que X es aproximadamente $N(\mu = 500000, \sigma = 15000)$

$$
\begin{aligned}
P(485000 < X \leq 520000) &= P(X \leq 520000) - P(X \leq 485000) \\
&= F_X(520000) - F_X(485000) \\
&= 0.9088 - 0.1587 \\
&= 0.7501
\end{aligned}
$$

Cartera de valores

```r
pnorm(520000,mean=500000,sd=15000)
```

```
## [1] 0.9087888
```

```r
pnorm(485000,mean=500000,sd=15000)
```

```
## [1] 0.1586553
```

```r
pnorm(520000,mean=500000,sd=15000)-
  pnorm(485000,mean=500000,sd=15000)
```

```
## [1] 0.7501335
```

Cartera de valores

$$\begin{aligned}
P(485000 < X \leq 520000) &= P(X \leq 520000) - P(X \leq 485000) \\
&= P\left(Z \leq \frac{520000 - 500000}{15000}\right) \\
&\quad -P\left(Z \leq \frac{485000 - 500000}{15000}\right) \\
&= F_Z(1.3333) - F_Z(-1) \\
&= 0.9087888 - 0.1586553 \\
&= 0.7501335
\end{aligned}$$

Cartera de valores

```
pnorm((520000-500000)/15000,mean=0,sd=1)
```

```
## [1] 0.9087888
```

```
pnorm((485000-500000)/15000,mean=0,sd=1)
```

```
## [1] 0.1586553
```

```
pnorm((520000-500000)/15000,mean=0,sd=1)-
  pnorm((485000-500000)/15000,mean=0,sd=1)
```

```
## [1] 0.7501335
```

Tiempo de espera en un servicio telefónico de atención al cliente

La compañía de telecomunicaciones Ricardo's Phone (RP) presume de que el tiempo de espera (T) en un servicio de atención al cliente sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$ minuto.

Se pide:

- Calcular la probabilidad de esperar más de 4 minutos a ser atendido.
- El valor esperado y la varianza de T.
- Calcular e interpretar $P(0.4 < T < 2)$.

Tiempo de espera en un servicio telefónico de atención al cliente

La v.a. T tiempo de espera en minutos sigue una ley $Exp(\lambda = 1)$.

Sabemos que

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot t} = 1 - e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

Entonces $P(T > 4) = 1 - P(T \leq 4) = 1 - F_T(4) = 1 - \left(1 - e^{-4}\right) = e^{-4} = 0.0183156.$

Tiempo de espera en un servicio telefónico de atención al cliente

Sabemos también que

$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1} = 1$ y $Var(T) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{1^2} = 1.$

Por último

$$
\begin{aligned}
P(0.4 < T < 2) &= P(T < 2) - P(T \leq 0.4) = F_T(2) - F_T(0.4) \\
&= 1 - e^{-2} - (1 - e^{-0.4}) = e^{-0.4} - e^{-2} \\
&= 0.67032 - 0.1353353 = 0.5349848.
\end{aligned}
$$

Tiempo entre dos averías en una flota de vehículos de transporte

La compañía de transportes EURTRANSA dispone de una amplia flota de autobuses de viajeros y de camiones de transporte de mercancías.

La compañía dispone de un servicio para responder de forma ágil a las averías que puedan sufrir sus autobuses y camiones.

Se define avería grave cuando implica que se tiene que mandar otro vehículo de forma urgente para sustituir al averiado.

Se estima que el tiempo transcurrido entre dos averías graves sigue una ley exponencial de parámetro $\lambda = \frac{1}{15}$ días.

Tiempo entre dos averías en una flota de vehículos de transporte

Se pide:

- El valor esperado y la varianza del tiempo entre dos averías graves
- Calcular la probabilidad que en un mes no se produzca ninguna avería grave .
- Calcular e interpretar $P(15 < T < 30)$.

Tiempo entre dos averías en una flota de vehículos de transporte

La v.a. T tiempo entre dos averías graves sigue una ley $Exp(\lambda = \frac{1}{15})$.

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{15}} = 15 \text{ días.}$$

y

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{15}\right)^2} = 15^5 = 255$$

Su desviación típica es $\sigma_T = 15$ días.

Tiempo entre dos averías en una flota de vehículos de transporte

Sabemos que la función de distribución es

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot t} = 1 - e^{-\frac{1}{15} \cdot t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

Por lo tanto la probabilidad de que en un mes (30 días) no se produzca una avería grave es

$$P(T > 30) = 1 - P(T \leq 30) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{15} \cdot 30}) = e^{-2} = 0.1353353.$$

Por último

$$
\begin{aligned}
P(15 < T < 30) &= P(T < 30) - P(T \leq 20) = F_T(30) - F_T(15) \\
&= 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} \\
&= 0.3678794 - 0.1353353 = 0.2325442.
\end{aligned}
$$

Gráficos cuantil-cuantil, cuantiles muestrales.

- Recordemos que dada un v.a. X el cuantil de orden $0 < p < 1$ es aquel valor tal que $P(X \leq x_p) = p$.
- Cuando tomamos una muestra podemos construir los llamados cuantiles muestrales que consisten en asignar a cada observación la proporción de la muestra que es menor o igual que ese valor en la muestra ordenada.

```
cuantil muestral
-1.6157 -0.9222 -0.7929 -0.7639 -0.0840 0.0820 0.7430 0.8616 0.9366 2.0029
p
 0.1     0.2     0.3     0.4     0.5     0.6    0.7    0.8    0.9     1.0
```

Podemos comparar, por ejemplo, estos cuantiles con los cuantiles teóricos de una $N(0, 1)$

```
cuantil teórico
-1.2816 -0.8416 -0.5244 -0.2533 0.0000 0.2533 0.5244 0.8416  1.2816 Inf
p
 0.1     0.2     0.3     0.4    0.5    0.6    0.7     0.8     0.9    1.0
```

Gráficos cuantil cuantil (QQ-plots)

Como ejemplo aquí tenemos una muestra aleatoria ordenada de una distribución desconocida.

Comparando estas cantidades podemos visualizar si la distribución de la muestra discrepa de la distribución teórica.

Para visualizar estas discrepancias se dibujan los gráficos cuantil-cuantil más conocidos por su nombre en inglés QQ-plots .

Gráficos cuantil cuantil (QQ-plots)

Generamos 100 valores aleatorios de una $N(0,1)$.

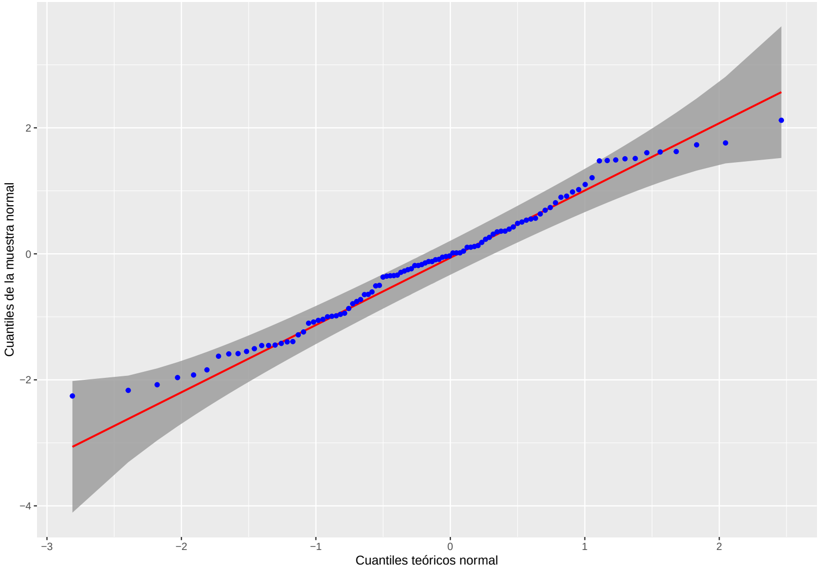
```
##   [1] -0.1225  0.5525  0.3486  0.3596  0.8981 -1.9226
##   [7]  0.2617  0.9156  0.0138  1.7300 -1.0822 -0.2728
##  [13]  0.1820  1.5085  1.6045 -1.8415  1.6233  0.1314
##  [19]  1.4811  1.5133 -0.9424 -0.1857 -1.1011  1.2081
##  [25] -1.6249  0.1054 -1.4554 -0.3540 -0.0937  1.1007
##  [31] -1.9638 -1.4479  1.0194 -1.4214 -0.6045 -1.5835
##  [37] -1.2859 -1.4547 -0.0871  0.5047  0.1164  1.7602
##  [43] -0.3451  2.1200 -0.0344 -0.7922  1.4755 -0.7256
##  [49]  0.3124  0.6920 -0.5003 -2.2559  0.0437 -0.3688
##  [55] -0.9602  0.1038  0.4273 -0.1705 -1.5491 -1.5056
##  [61]  0.0160 -0.1854  0.3919 -0.7567  0.2314 -0.9836
##  [67]  0.5651  1.6168 -0.2520 -1.0559 -0.3482 -0.0430
##  [73] -1.3976  1.4902 -1.0394 -0.2369 -0.9991 -1.3925
##  [79]  0.9820  0.3609 -0.3375 -0.6434 -2.1669  0.6333
##  [85] -0.1449 -1.2400  0.5340 -1.5883 -0.9910  0.4833
##  [91]  0.8106 -0.2937 -0.0535  0.7352  0.0150 -0.1220
##  [97] -0.6468 -0.8679 -0.5087 -2.0776
```

Gráficos cuantil cuantil (QQ-plots)

Ordenamos los 100 valores aleatorios.

```
##   [1] -2.2559 -2.1669 -2.0776 -1.9638 -1.9226 -1.8415
##   [7] -1.6249 -1.5883 -1.5835 -1.5491 -1.5056 -1.4554
##  [13] -1.4547 -1.4479 -1.4214 -1.3976 -1.3925 -1.2859
##  [19] -1.2400 -1.1011 -1.0822 -1.0559 -1.0394 -0.9991
##  [25] -0.9910 -0.9836 -0.9602 -0.9424 -0.8679 -0.7922
##  [31] -0.7567 -0.7256 -0.6468 -0.6434 -0.6045 -0.5087
##  [37] -0.5003 -0.3688 -0.3540 -0.3482 -0.3451 -0.3375
##  [43] -0.2937 -0.2728 -0.2520 -0.2369 -0.1857 -0.1854
##  [49] -0.1705 -0.1449 -0.1225 -0.1220 -0.0937 -0.0871
##  [55] -0.0535 -0.0430 -0.0344  0.0138  0.0150  0.0160
##  [61]  0.0437  0.1038  0.1054  0.1164  0.1314  0.1820
##  [67]  0.2314  0.2617  0.3124  0.3486  0.3596  0.3609
##  [73]  0.3919  0.4273  0.4833  0.5047  0.5340  0.5525
##  [79]  0.5651  0.6333  0.6920  0.7352  0.8106  0.8981
##  [85]  0.9156  0.9820  1.0194  1.1007  1.2081  1.4755
##  [91]  1.4811  1.4902  1.5085  1.5133  1.6045  1.6168
##  [97]  1.6233  1.7300  1.7602  2.1200
```

Gráficos cuantil cuantil (QQ-plots)



Generamos 100 valores aleatorios de una $U(0, 10)$ y los ordenamos.

```
##   [1] 0.1668 0.2478 0.2727 0.3278 0.4789 0.5209 0.5666
##   [8] 0.7277 0.7288 0.7382 0.7760 0.9923 1.1627 1.3542
##  [15] 1.3958 1.7298 1.8742 2.1414 2.1734 2.2489 2.3406
##  [22] 2.4007 2.5157 2.6668 2.6849 2.7274 2.8903 3.6166
##  [29] 3.6500 3.8109 3.8174 3.9249 3.9607 3.9768 4.0860
##  [36] 4.2635 4.4733 4.5127 4.5497 4.6267 4.6531 4.8629
##  [43] 5.0549 5.2368 5.2369 5.3120 5.4196 5.4570 5.4633
##  [50] 5.5227 5.6745 5.7221 6.0324 6.2262 6.3632 6.4044
##  [57] 6.5745 6.6228 6.6822 6.7882 6.8080 6.9313 6.9528
##  [64] 7.0135 7.0968 7.2849 7.5552 7.6343 7.8378 7.9386
##  [71] 8.1499 8.1542 8.2005 8.2198 8.2333 8.3749 8.4600
##  [78] 8.4666 8.6448 8.6754 8.8049 8.8650 8.9797 9.0209
##  [85] 9.1214 9.2996 9.3071 9.3429 9.3490 9.3740 9.4271
##  [92] 9.4569 9.4774 9.5534 9.5731 9.5818 9.6081 9.8299
##  [99] 9.8300 9.9524
```

Gráficos cuantil cuantil (QQ-plots)