

Exercici 2 (2 punts). Hi ha un concurs de TV amb n participants on cada participant escull un enter entre 0 i 1000000. El premi és per als dos concursants que escullen els enters més propers. Dissenyeu un algorisme que, en temps lineal, li digui al presentador quins són els dos concursants guanyadors.

Solució:

Assumim que els n enters triats pels participants es troben emmagatzemats en un vector (si no fos així, els copiariem en temps lineal). Per saber quins són els dos concursants guanyadors podríem:

1. Ordenar els n números triats pels concursants fent servir RADIX-SORT.
2. Recórrer la llista ordenada del punt anterior, guardant quin parell (x, y) de números consecutius té menor diferència entre ells (un qualsevol en cas d'empat).
3. El concursant que havia triat x (un qualsevol d'ells si més d'un ho havia fet) i el concursant que havia triat y (ídem) són els guanyadors.

Considerant la base (radix) $k = 10$, els $10^6 + 1$ números entre els quals han de triar els concursants es poden representar amb $d = \lceil \log_{10}(10^6 + 1) \rceil = 7$ dígit. Aleshores, el RADIX-SORT del pas 1 tindria un temps d'execució de $O(d(n + k)) = O(7(n + 10)) = O(n)$. El recorregut del pas 2 també té cost $O(n)$. Finalment, recuperar quins eren els concursants que havien proposat els números del parell guanyador també es pot fer en temps $O(n)$, ja sigui fent un recorregut addicional pel vector d'entrada, o fent que el vector inicial ja inclogui les tuples d'informació {concursant, número}. Per tant, en total, l'algorisme proposat requereix temps d'execució lineal, tal i com demanava l'enunciat.

Podríem optar per fer servir COUNTING-SORT en comptes de RADIX-SORT però observeu que aleshores el cost del punt 1 seria $O(n + k)$, essent $k = 10^6$. Continua essent lineal (perquè $k = O(1)$) però és una constant que pot ser significativament gran. Tanmateix, els requeriments d'espai per a fer l'ordenació també serien molt majors.

Per demostrar la correctesa, considerem els següents casos:

- La seqüència d'entrada no té repeticions:

L'algoritme és correcte perquè el parell de números més propers de la seqüència d'entrada sempre es trobarà en posicions consecutives si considerem la seqüència ordenada: Sigui S la seqüència d'entrada, i suposem que $d = |a - b|$ és la mínima distància entre tot parell de números de S . Sigui S' la seqüència S ordenada, i siguin i i j les posicions dels elements a i b a S' , respectivament, (és a dir, $S'[i] = a$ i $S'[j] = b$). Si $|i - j| > 1$, aleshores $\exists k : i < k < j : a < S'[k] < b$ i, per tant, $|a - S'[k]| < d$ i $|b - S'[k]| < d$, la qual cosa contradiu la consideració de d com a distància mínima.

- La seqüència d'entrada té repeticions:

L'algoritme és correcte perquè sempre existirà com a mínim un parell de concursants guanyadors que es trobaran en posicions consecutives a la seqüència ordenada. Noteu que el parell guanyador serà un format per concursants que han triat el mateix número i que tots els jugadors que trien el mateix número estaran consecutius a la seqüència ordenada. L'algoritme, doncs, també donarà una resposta correcta.