

Problema 3.16 - Telescopi

Possible solució (1/2)

Sigui $M(i)$ (amb $0 \leq i \leq n$) el nombre màxim d'events del conjunt $\{1, \dots, i\}$ que s'hi poden observar, incloent-hi l'event i , i assumint que el telescopi està a la posició 0 a temps 0 i a la posició d_i a temps i . Quan les condicions siguin impossibles, aleshores $M(i) = -\infty$. Amb aquesta definició:

- L'objectiu del problema és calcular $M(n)$.
- Els casos base són: $M(0) = 0$, que indica que a l'instant 0 no hem observat res, però el telescopi està a la posició 0.
- Per a $1 \leq i \leq n$, les solucions es calculen segons la següent recurrència:

$$M(i) = \begin{cases} 1 + \max_{j \leq i: |d_i - d_j| \leq i - j} \{M(j)\} & , \text{ si } \{j \leq i : |d_i - d_j| \leq i - j\} \neq \emptyset \\ -\infty & , \text{ altrament} \end{cases}$$

Observeu que la recurrència indica que, si podem observar l'event i , prèviament hem d'observar algun event compatible amb ell. De la forma de la recurrència es dedueix que per tal d'emplenar la taula necessitem temps (i espai) $O(n^2)$. Finalment, per obtenir el conjunt d'events observats n'hi ha prou amb fer un recorregut des de la posició n traçant els valors on s'ha obtingut el màxim de la recurrència.

Possible solució (2/2)

Sigui $V(i)$ (amb $1 \leq i \leq n$) el nombre màxim d'events del conjunt $\{i, \dots, n\}$ que s'hi poden observar, incloent-hi l'event n , i assumint que el telescopi està a la posició 0 a temps 0 i a la posició d_i a temps i . Amb aquesta definició:

- L'objectiu del problema és calcular $V(1)$.
- Els casos base són: $V(n) = 1$, que indica que del conjunt $\{n\}$ observem 1 event.
- Sigui $postc(i)$ el conjunt d'events posteriors a l'event i i compatibles amb ell, és a dir,

$$postc(i) = \{j \mid i < j \leq n, |d_j - d_i| \leq j - i\}$$

- Per a $1 \leq i < n$, les solucions es calculen segons la següent recurrència:

$$V(i) = \begin{cases} \max_{j \in postc(i)} \{1 + V(j), V(i+1)\} & , \text{ si } |d_n - d_i| \leq n - i \\ V(i+1) & , \text{ altrament} \end{cases}$$

Observeu que la recurrència indica que, si des de l'event i podem arribar a observar l'event final n , aleshores tenim dues opcions: a) observar l'event i i mirar quin event observar a continuació d'ell (buscant entre els compatibles amb ell), o b) no observar-lo i passar al següent. Si, d'altra banda, des de l'event i no podem arribar a observar l'últim event, aleshores no l'hem de considerar i passem a mirar el següent event de la llista. La complexitat espacial es redueix a $O(n)$.