Problema 4.14 - (Responsables d'embarcacions)

a) *Demostreu que, per a qualsevol entrada $V_1, \dots, V_n$, hi ha una assignació justa.*

Demostrar que existeix una assignació justa és equivalent a demostrar que a la xarxa de flux proposada a classe com a solució,[1] el flux amb valor màxim és sempre n. Per fer-ho, analitzarem la capacitat dels (s,t)-talls.

D'una banda, veiem que el tall $(\{s\} \cup A \cup B, \{t\})$ té capacitat n, per la qualcosa sabem que $MaxFlow(\mathcal{N}) \leq n$.

Demostrem ara que qualsevol altre tall té capacitat $\geq n$:

1. Considerem un tall (S,T), on $|T| > 1$.
2. Anomenem els diferents subconjunts de nodes que crea aquest tall de la següent forma (vegeu Fig. 1): $A_1 = S \cap A$, $A_2 = T \cap A$, $B_1 = S \cap B$, i $B_2 = T \cap B$.
   Analitzem les arestes que creuen el tall:
   (2.1) El tall conté totes les arestes entre B_1 i t (amb capacitat 1); en total $|B_1|$.
   (2.2) Dividim B_2 en dos subconjunts, $B_2 = B_2^1 \cup B_2^2$, on (vegeu Fig. 2):
   B_2^1 són els viatges de B_2 amb algun viatger a A_1, i $B_2^2 = B_2 \setminus B_2^1$ són la resta.
   Els viatges a B_2^1 contribueixen al tall amb almenys una aresta de capacitat 1 (des d'A_1); en total $\geq |B_2^1|$.
   (2.3) Tots els viatgers dels viatges a B_2^2 són a A_2; una aresta (s,x) on $x \in A_2$ contribueix al tall amb capacitat $\lceil S_x \rceil$. Per tant, tenim:

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in A_2} \lceil S_x \rceil \geq \sum_{x \in A_2} S_x \geq \sum_{x \in A_2} \left(\sum_{y \in B | x \in V_y} \frac{1}{|V_y|} \right) \\
\geq \sum_{y \in B_2^2 | x \in V_y} \frac{1}{|V_y|} \\
= \sum_{y \in B_2^2} \left(\sum_{x \in V_y} \frac{1}{|V_y|} \right) = |B_2^2|.
\end{aligned}$$

3. Sumant el totes de les contribucions al tall tenim[2]:

$$cut(S,T) \geq |B_1| + |B_2^1| + |B_2^2| = |B| = n.$$

Donat que tots els talls tenen capacitat $\geq n$, i sabem d'un amb capacitat $= n$, podem afirmar que el tall de capacitat mínima té capacitat $= n$. Aplicant el *Teorema Max-Flow Min-Cut* sabem, doncs, que $MinCut(\mathcal{N}) = MaxFlow(\mathcal{N}) = n$.

[1] Recordeu que la xarxa $\mathcal{N}$ proposada a classe ha estat la següent:

- Nodes: $\{s,t\} \cup A \cup B$,
  on $|A| = m$ amics i $|B| = n$ viatges.
- Arestes i capacitats: $E_1 \cup E_2 \cup E_3$, on:
  $E_1 = \{(s,x) \mid x \in A\}$ amb capacitat $\lceil S_x \rceil$,
  $E_2 = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B, x \in V_y\}$ amb capacitat 1,
  $E_3 = \{(y,t) \mid y \in B\}$ amb capacitat 1.

[2] Observeu que les arestes que van d'A_2 a B_1 no formen part del $cut(S,T)$.

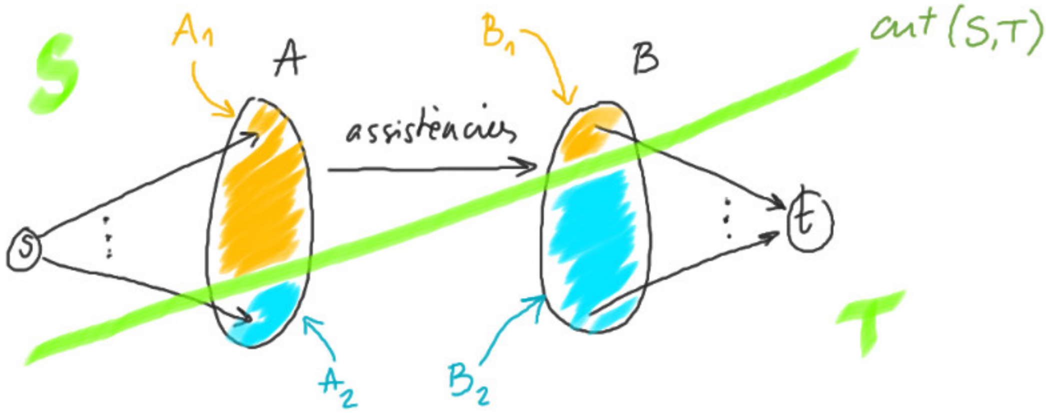

Figura 1: Distinció dels subgrups de nodes que defineix un $cut(S,T)$.

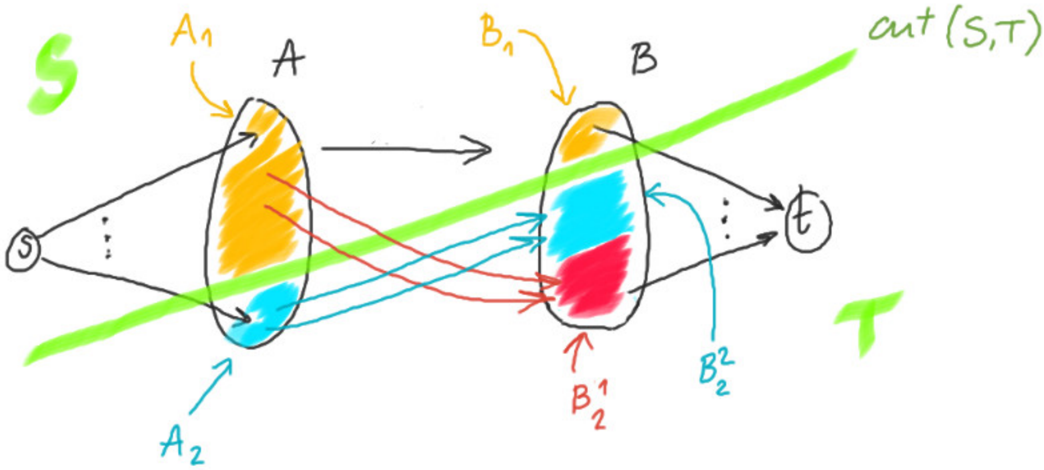

Figura 2: Detalls de la classificació dels nodes de B_2 del $cut(S,T)$.