



HAUTE ECOLE D'INGÉNIERIE ET DE GESTION  
DU CANTON DE VAUD

MESURE DE LA MATRICE DE TRANSFERT DE DEUX LENTILLES ÉPAISSES  
LABORATOIRE D'OPTIQUE

---

## **G12 / Matrice de transfert de 2 lentilles / 5**

---

*Auteurs:*

Keroan Ringger

*Responsables:*

Jolissaint Laurent

Bouxin Audrey Tiphaine

18 Oct 2021

## 1 Introduction

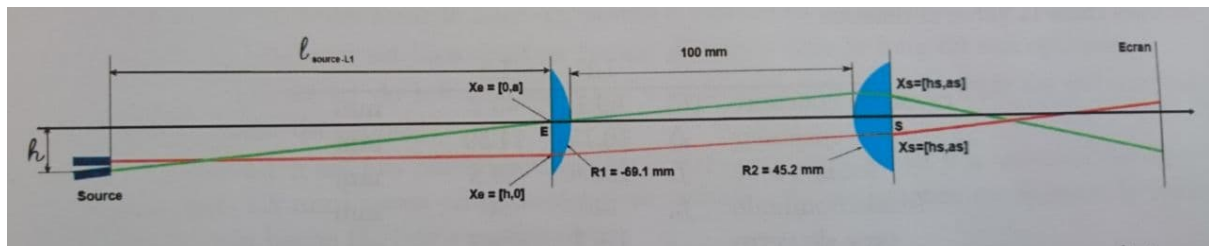
Le but de cette expérience est de mesurer les coefficients de la matrice de transfert d'un système optique composé de deux lentilles épaisses, le tout afin de comparer les coefficients théoriques préalablement calculés avec les résultats de cette expérience.

## 2 Développement théorique

Tout système optique peut être représenté de manière matricielle par une matrice  $\mathcal{H}_{ES}$ , ce qui permet de simplifier des systèmes complexes en cette seule matrice.

$$\begin{bmatrix} h_s \\ n_s \alpha_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_e \\ n_e \alpha_e \end{bmatrix} \equiv X_s = \mathcal{H}_{ES} \cdot X_e$$

où  $X_e$  et  $X_s$  sont respectivement les vecteurs d'entrée et de sortie.



**Figure 1** Schéma système optique

Le vecteur d'entrée

$$X_e = \begin{bmatrix} h_e \\ n_e \alpha_e \end{bmatrix}$$

possède deux composantes.  $h_e$  représente l'écart entre le point d'entrée et le vertex du dioptré;  $\alpha_e$  représente l'angle par rapport à l'horizontale de ce même faisceau d'entrée;  $n_e$  représente l'indice de réfraction du milieu initial. Il en va de façon analogue pour le vecteur de sortie  $X_s$ .

Il est possible de déterminer la matrice  $\mathcal{H}_{ES}$  de deux manières différentes; la première par les calculs théoriques, la deuxième par processus d'expérimentation.

### 2.1 Détermination par calculs

Notre système optique est constitué d'un système de deux lentilles épaisses séparées de 100mm. Une lentille épaisse peut être simplifiée en un sous-système optique de deux lentilles fine, et d'une matrice de transition. Cette dernière peut aussi être appliquée entre les deux lentilles épaisses de notre système.

Une matrice de réfraction (dioptré optique) peut s'écrire de la manière suivante:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix}$$

Ici,  $V$  représente la vergence du dioptré. Elle se calcule comme suit:

$$V \equiv \frac{n_i - n_o}{R}$$

Ici:

- $n_o$ : Indice de réfraction dans l'espace objet
- $n_i$ : Indice de réfraction dans l'espace image
- $R$ : Rayon de courbure du dioptré

Dans le cas particulier où le dioptré n'aurait pas de rayon de courbure et serait un plan horizontal, il est admis que sa vergence est nulle ( $V = 0$ ). De ce fait, sa matrice de réfraction serait la matrice identité:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.2 Matrice de translation

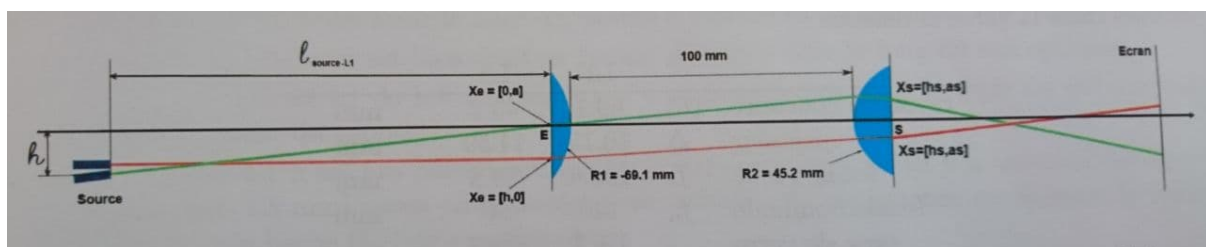
Une matrice de translation permet de calculer matriciellement la translation d'un rayon lumineux entre deux dioptrés, au sein d'un milieu possédant un indice de réfraction homogène et invariant, et se calcule comme suit:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\overline{AB}}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ici:

- $\overline{AB}$ : Distance entre les deux dioptrés
- $n$ : Indice de réfraction du milieu

## 2.3 Modélisation du système optique



**Figure 2** Schéma système optique

Comme nous pouvons le voir sur le schéma, le rayon lumineux va commencer par entrer dans la première lentille épaisse. Le premier dioptré parcouru étant un plan horizontal, sa matrice de réfraction est  $\mathcal{J}$ , suivie d'une matrice de translation, puis d'une matrice de réfraction au dioptré courbé. L'espace de translation entre les deux lentilles se traduit de nouveau par une matrice de translation, suivi de la deuxième lentille épaisse. Cette dernière est à l'inverse simplifiable par un dioptré courbé, suivi d'une matrice de translation, puis d'un plan horizontal.

L'ensemble complet de ces matrices est calculé comme suit:

$$\mathcal{H}_{ES} = \mathcal{J}\mathcal{T}_3\mathcal{R}_2\mathcal{T}_2\mathcal{R}_1\mathcal{T}_1\mathcal{J} \quad (1)$$

Ici:

- T1:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0067 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- R1:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7.4544 & 1 \end{bmatrix}$$

- T2:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- R2:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11.396 & 1 \end{bmatrix}$$

- T3:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0096 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalement, en se référant à l'équation matricielle (1), on obtient la matrice  $\mathcal{H}_{ES}$  suivante:

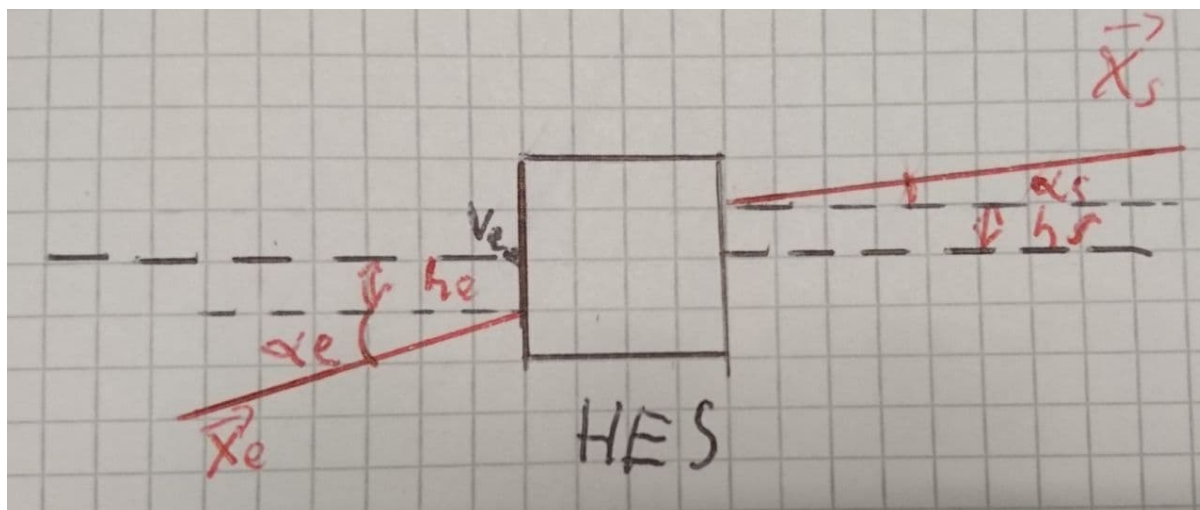
$$\mathcal{H}_{ES} = \begin{bmatrix} 0.1548 & 0.0997 \\ -10.3554 & -0.2090 \end{bmatrix}$$

### 3 Fond théorique de l'expérimentation

Sachant qu'on peut modéliser notre système optique au moyen de la matrice  $\mathcal{H}_{ES}$  comme suit:

$$\begin{bmatrix} h_s \\ n_s \cdot \alpha_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_e \\ n_e \cdot \alpha_e \end{bmatrix}$$

en mesurant le vecteur en sortie du système optique en influant sur son entrée, il devient possible de retrouver les coefficients de la matrice  $\mathcal{H}_{ES}$ . Pour ce faire, il faudra réaliser deux séries de mesures distinctes; la première en figeant l'angle  $\alpha_e$  du vecteur d'entrée à 0, mais en faisant varier sa hauteur, on pourra déduire les coefficients  $h_{11}$  et  $h_{21}$ . Quant aux coefficients  $h_{12}$  et  $h_{22}$ , ils peuvent être obtenus en figeant cette fois-ci  $h_e$  à 0 et en faisant varier  $\alpha_e$ .



**Figure 3** Schéma HES

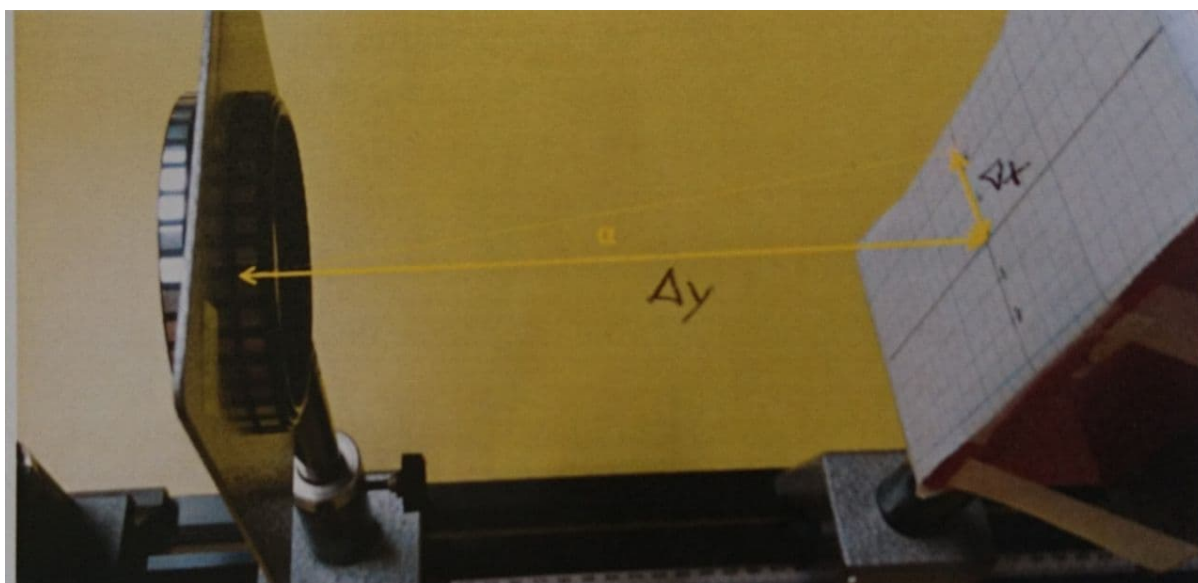
Cet état de fait est dû aux simplifications suivantes de la modélisation matricielle du système optique suivantes:

$$\begin{aligned}\alpha_e = 0 &\rightarrow h_s = h_{11} \cdot h_e; & \alpha_s = h_{21} \cdot h_e \\ h_e = 0 &\rightarrow h_s = h_{12} \cdot \alpha_e; & \alpha_s = h_{22} \cdot \alpha_e\end{aligned}$$

Ces équations prennent en compte le fait que  $n_e$  et  $n_s$  prennent tous les deux en compte l'indice de réfraction de l'air, qui vaut 1.

L'angle en sortie  $\alpha_s$  est déterminé en mesurant l'écart entre le centre du pointeur laser et le centre de la cible ( $\Delta_x$ ), ainsi que la distance entre la cible et la deuxième lentille épaisse du système ( $\Delta_y$ ).

$$\alpha_s = \arctan \frac{\Delta_x}{\Delta_y}$$



**Figure 4** Mesure  $\alpha_s$

## 4 Procédé expérimental

1. Noter la position de l'axe optique (normalement à 100 mm sur l'axe transversal au rail);
2. Mesurer dans le plan de sortie S la distance de sortie du rayon par rapport à l'axe optique en collant l'écran contre la lentille de sortie;
3. Mesurer l'angle du rayon lumineux en éloignant l'écran le plus possible et en mesurant la distance à l'axe optique du spot ainsi que la distance entre la lentille et l'écran;
4. Déplacer le laser par pas de 4mm sur son support et refaire la mesure jusqu'à ce que le polariseur bloque le laser;
5. Remplacer le laser à la hauteur de l'axe optique du système.

## 5 Présentation des données brutes

Pour  $\alpha_s = 0$ :

he [m]	hs [m]	$\Delta_x$ [m]	$\Delta_y$ [m]	$\alpha_s$ [rad]
0	0	0	0.26	0
0.069813170079773	0.001	-0.01	0.254	-0.039349756388605
0.10471975511966	0.0015	-0.01	0.177	-0.056437178311703
0.139626340159546	0.0015	-0.015	0.192	-0.077966633831542
0.174532925199433	0.002	-0.01	0.111	-0.089847539694628
0.20943951023932	0.002	-0.02	0.189	-0.105427751122891
0.244346095279206	0.0025	-0.02	0.151	-0.131683853555638
0.279252680319093	0.0025	-0.02	0.141	-0.14090400627121
0.349065850398866	0.0025	-0.02	0.112	-0.176708856070037
<b>Incertitudes abs.</b>				
0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.017453292519943

Pour  $h_e = 0$ :

$\alpha_E$ [rad]	hs [m]	$\Delta_x$ [m]	$\Delta_y$ [m]	$\alpha_s$ [rad]
0	0	0	0.012	0
0.05235987755983	-0.004	-0.0075	0.58	-0.012930313815177
0.087266462599717	-7.5	0.001	0.852	0.001173708381224
0.10471975511966	-0.0095	-0.005	0.338	-0.014791820507172
0.139626340159546	-13.8	-0.005	0.32	-0.015623728620477
0.174532925199433	-0.016	-0.005	0.25	-0.019997333973151
0.20943951023932	-0.0195	0	0.273	0
0.261799387799149	-0.025	0	0.175	0
<b>Incertitudes abs.</b>				
0.017453292519943	0.0005	0.0005	0.0005	0.017453292519943

Grâce à ces données, nous sommes à même d'effectuer la régression linéaire mentionnée précédemment afin d'établir la matrice  $\mathcal{H}_{ES}$  de façon expérimentale:

$$\mathcal{H}_{ES_{ex}} = \begin{bmatrix} 0.0072 & 3.0360 \\ -0.5018 & 0.0040 \end{bmatrix}$$

## 6 Analyse des données finales

Comme il est possible de le voir, la matrice  $\mathcal{H}_{ES_{ex}}$  a des composantes qui sont passablement éloignées de la matrice  $\mathcal{H}_{ES}$  obtenue par calcul théorique. Cette différence peut notamment s'expliquer par un modèle théorique qui approxime trop les déviations pratiques comme les éventuelles aberrations géométriques, et qui part du principe que les lentilles sont parfaitement alignées. Ce n'est visiblement pas le cas au vu de la matrice  $\mathcal{H}_{ES_{ex}}$  obtenue, qui dévie de plus que sa marge d'incertitude de la matrice  $\mathcal{H}_{ES}$ .

En effet, cet alignement est crucial puisque s'il n'est pas respecté, les angles incidents d'entrée dans les lentilles épaisses sont modifiés à cause du mauvais alignement sur le banc expérimental. De ce fait, les offsets artificiels dûs à la disposition du système optique faussent les mesures d'angle à l'entrée, respectivement la sortie de ces lentilles. De ce fait, il est plus que raisonnable de penser que les mesures obtenues ne représentent pas la réalité et nous fournissent donc une matrice  $\mathcal{H}_{ES_{ex}}$  imparfaite.

Les résultats pratiques obtenus nous révèlent donc que la calibration attentive du banc de test est plus que nécessaire à l'obtention de résultats cohérents, mettant ainsi en lumière le bien-fondé du processus expérimental puisqu'il nous a montré l'alignement imparfait du système.

## 7 Conclusion

Notre manipulation en laboratoire vise à obtenir la matrice  $\mathcal{H}_{ES}$  d'un système optique de deux lentilles épaisses séparées de 100mm de manière théorique, puis expérimentale, afin de les confronter. Cette comparaison nous montre une différence trop importante pour être expliquée seulement par les imprécisions de mesure. Cet écart s'explique par la grande imprécision de notre montage, notamment à cause de la méthodologie et du matériel employé. Toutefois, cette expérience n'est pas un échec puisqu'elle a permis de mettre en lumière l'importance cruciale de l'alignement d'un système optique tel que son objet.