Social and Economic Networks. Handout 1

Juan José Martín Miralles
Christian Carl Strasser

Universitat de les Illes Balears.

Curso 2017 - 2018

1. **For each of the following graph-theoretical properties, give an example of a real-world network satisfying it (so, for instance, in the first item, you are asked for a directed network and an undirected one):**

   a) **Undirected vs directed**

   Dirigido: Carreteras de autopista.

   No dirigido: Conexión de internet, ya que por el mismo cable hay línea de subida y de bajada.

   b) **Weighted vs unweighted**

   Con peso: Estructura de tuberías de agua de diferentes tamaño o caudal.

   Sin peso: Relaciones de amistad en una red social.

   c) **Multigraph vs simple graph**

   Multigrafo: Conjunto de pueblos, donde para algún par de pueblos hay 2 o más carretas que los conectan.

   Grafo simple: Conjunto de pueblos, donde para cada par de pueblos solo hay 1 carretera que los conectan.

   d) **Connected vs not necessarily connected**

   Conectado: Estructura de corrientes eléctricas para dar luz a todas las ciudades de un pais.

   No necesariamente conectado: El caso en que una tubería de agua se rompa y no pueda llegar agua a un barrio.

   e) **Bipartite vs non-bipartite**

   Bipartito: Conjunto de "amigos en común" en Facebook.

   No bipartito: Dos conjuntos de amigos donde nadie de un grupo conoce a ninguno del otro grupo.

2. **Extend the Handshaking Lemma and its corollary to digraphs and give some real-world application.**

   El lema de Handshaking dice que:

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

donde $|E|$ es el número de aristas del grafo y $d(v)$ es el grado de los vértices.

Para grafos dirigidos (digrafos) tenemos dos tipos de grados sobre los vértices: grados de entrada ($d(v)_{in}$) y grados de salida ($d(v)_{out}$). Por cada arista siempre habrá un grado de entrada y otro de salida, por lo que:

$$|E| = d(v)_{in} = d(v)_{out}$$

Extendiendo el lema de Handshaking, tenemos que

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} d(v)_{in} + d(v)_{out} = 2 \sum_{v \in V} d(v)_{in}$$

por lo que:

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)_{in} + d(v)_{out} \Longrightarrow |E| = \sum_{v \in V} d(v)_{in}$$

para grafos dirigidos.

Por lo tanto, el corolario sería:

$$V_{(d(v)_{in} + d(v)_{out})_{odd}} = 2K$$

es decir, el número de nodos cuya suma de los grados de entrada y grados de salida sea impar debe ser par.

3. **Why, in the proof of Hall's theorem, the graph G_2 satisfies that $|Neigh_{G_2}(S)| \geq |S|$ for every $S \subset V_1 \setminus T$?**

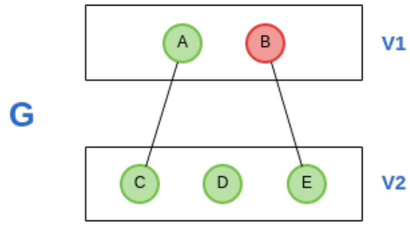
El teorema de Hall satisface $|Neigh_{G_2}(S)| \geq |S|$ para todo $|S| \subset V_1 \setminus T$ para un grafo G_2, porque para poder obtener un grafo G_2, significa que nos encontramos en el caso donde se ha de cumplir que:

a) $|Neigh_G(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq V_1$

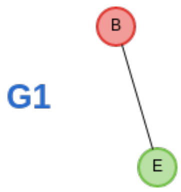
b) $|Neigh_G(T)| = |T|$

Con esto, podemos demostrar, por ejemplo, realizando reducción al absurdo y suponer lo contrario, que $|Neigh_{G_2}(S)| < |S|$ para todo $S \subset V_1 \setminus T$.

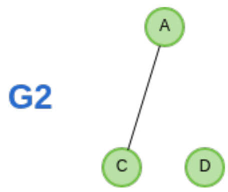
Esto no se cumple para un grafo G:



Donde $T = \{B\}$ y $G_1 = G[T \cup Neigh(T)]$



y $G_2 = G \setminus (T \cup Neigh(T))$



Por lo tanto, como solo hay un conjunto posible de S para $S \subset V_1 \setminus T$ que sería $S = \{A\}$, podemos ver que NO se cumple $|Neigh_{G_2}(S)| < |S|$ porque $1 \not< 1$, y por lo tanto queda demostrado que G_2 sí satisface que $|Neigh_{G_2}(S)| \geq |S|$ para todo $S \subset V_1 \setminus T$.

4. **We say that a node x is *pivotal* for a pair of nodes u, v when $u \neq x$, $v \neq x$, u and v are connected by some path, and x belongs to every shortest path between them.**

$a)$ **For every node in the graph in Fig. 1, find all pairs of nodes for which it is pivotal.**

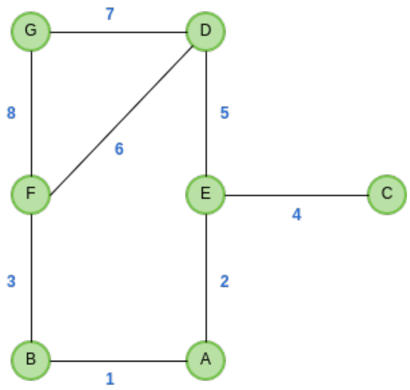


Figura 1: Grafo planar

$x = A \implies \{B - E, B - C\}$

$x = B \implies \{A - F\}$

$x = C \implies \{\emptyset\}$

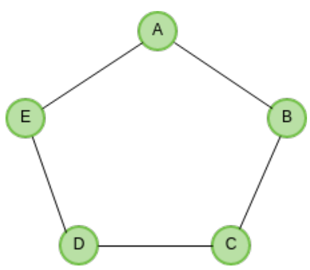
$x = D \implies \{C - F, C - G, E - F, E - G\}$

$x = E \implies \{C - A, C - B, C - D, C - F, C - G, A - D\}$

$x = F \implies \{B - D, B - G\}$

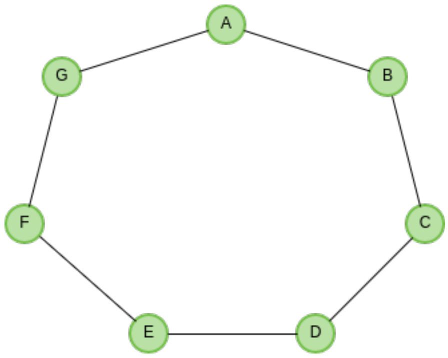
$x = G \implies \{\emptyset\}$

$b)$ **Give an example of a graph where each node is pivotal for some pair of nodes.**



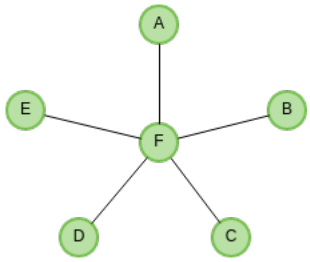
Cada nodo es nodo pivotante de sus vecinos.

$c)$ **Give an example of a graph where each node is pivotal for at least two pairs of nodes.**



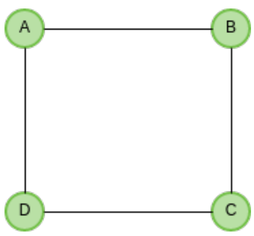
En este grafo cada nodo es nodo pivotante de sus vecinos, además del nodo siguiente al de su vecino. Por ejemplo, el nodo A es nodo pivotante de los nodos vecinos B-G además de C-G y F-B.

d) **Give an example of a graph containing a node that is pivotal for every pair of nodes not containing it.**



El nodo F es el único nodo pivotante para cada par de nodos del grafo.

e) **Give an example of a graph with at least 4 nodes with no pivotal node for any pair of nodes.**



En este grafo no hay nodos pivotantes para cualquier par de nodos, porque siempre existe otro camino igual de corto.

5. **Given a graph $G = (V, E)$, its dual $G^* = (E, E^*)$ is the graph with set of nodes E and, for every $e, e' \in E$, $ee' \in E^*$ iff e and e' are incident in G.**

   a) **Apply the dual construction to the graph in Fig. 1.**

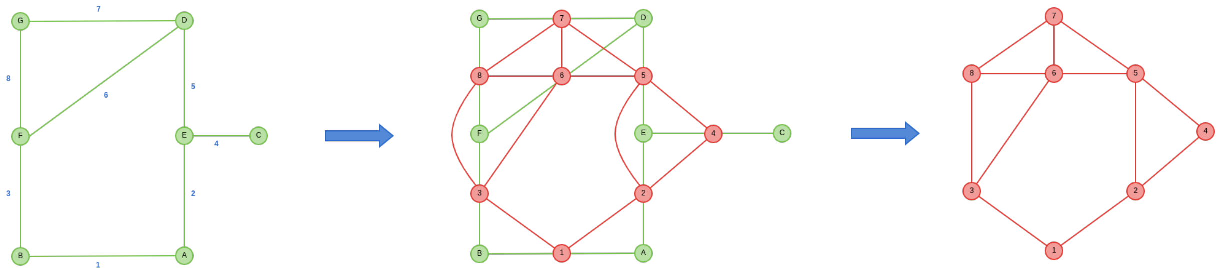


Figura 2: Construcción del grafo dual

   b) **How is the degree of a node $e = uv$ in G^* related to the degrees of u and v in G?**

   El grado de un nodo en el grafo G^* equivale a la suma de los grados de los nodos incidentes en el grafo G menos 2.

$$d(e) = d(u) + d(v) - 2$$

   Es decir, por ejemplo, la arista '8' en el grafo G está unido al nodo G y F cuyos grados son 2 y 3 respectivamente, por lo que;

$$d('8') = d(G) + d(F) - 2 = 2 + 3 - 2 = 3$$

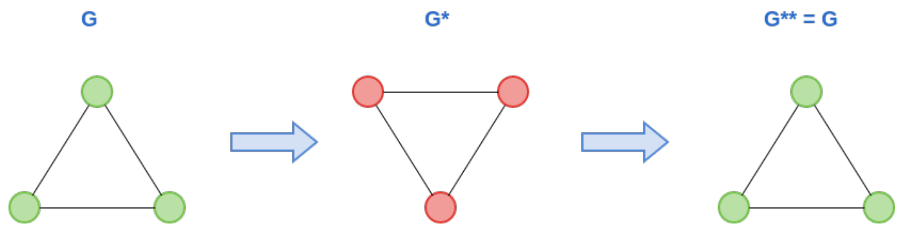
   c) **How is the size of G^* related to information (order, size, degrees, ...) of G?**

   El tamaño de G^*, relacionado con la información de G, viene dada por el valor del grado de un nodo $d(e)$ explicado en el apartado anterior:

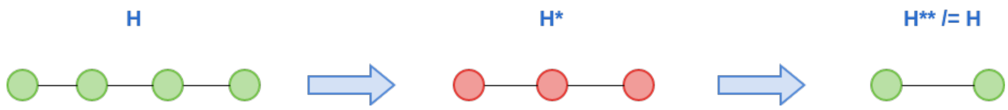
$$|E^*| = \frac{1}{2} \sum d(e) = \frac{1}{2} \sum (d(u) + d(v) - 2)$$

d) **Find a graph G such that the dual of its dual G^* is isomorphic to G, and a graph H such that the dual of its dual H^* is not isomorphic to H.**

El grafo G cuyo dual de su dual G^* es isomórfico a G es:



El grafo H cuyo dual de su dual H^* no es isomórfico a H es:



6. **Prove that if a graph G is not connected, then its complement $\bar{G}$ is connected. Provide an example of a connected graph with at least 4 nodes whose complement is also connected.**

Supongamos que tenemos un grafo G no conexo con dos componentes de dos nodos cada uno. Dado que vw no es una arista en G, sí lo es en $\bar{G}$, por lo que tendremos un camino de v a w en $\bar{G}$.

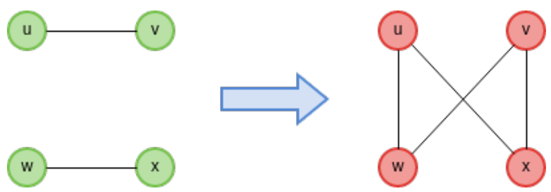


Figura 3: vw no es una arista en G

Por otro lado, si vw fuera una arista en G entonces significaría que v y w están en el mismo componente de G y que se necesitaría otro vértice u (ni uv ni uw son aristas en G) para formar un camino entre v y w en $\bar{G}$.

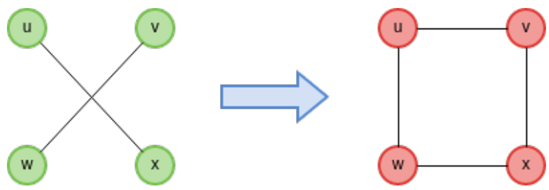


Figura 4: vw es una arista en G

Es decir, dado que cada par de nodos en $\bar{G}$ tendrá un camino, se puede afirmar que $\bar{G}$ es conexo.

7. **Let $G' = G \setminus e$. Prove that: (a) every independent set in G is also independent in G'; (b) there exists some independent set in G' that is not independent in G' . Are (a) and (b) still true if we replace everywhere "independent" by "maximal independent"?**

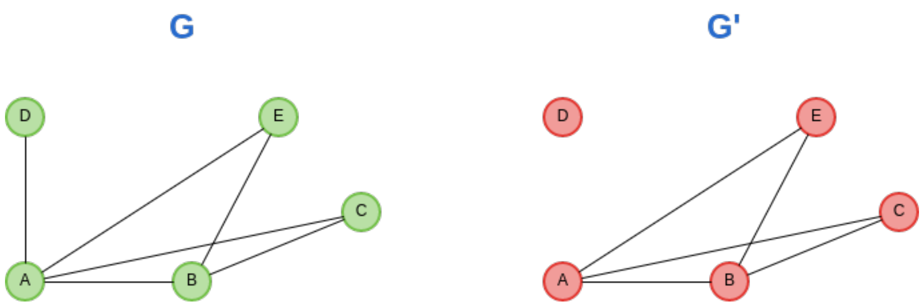


Figura 5: Grafo de ejemplo

a) Por definición, un conjunto de nodos independientes es un conjunto de nodos que no tienen ninguna arista que los conecta directamente, por lo que, quitando aristas para formar cualquier grafo G', los conjuntos de nodos independientes en G también serán independientes en G'. Además, cuantas más aristas se quiten en G para formar G', más conjuntos independientes tendrá G' que no son independientes en G. Por lo tanto, las dos afirmaciones (a) y (b) son verdaderas en este caso.

Ejemplo con el grafo de la figura 5:

$$G \Longrightarrow \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{E\}, \{BD\}, \{CD\}, \{DE\}, \{CE\}, \{CDE\}$$

$$G' \Longrightarrow \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{E\}, \{AD\}, \{BD\}, \{CD\}, \{DE\}, \{CE\}, \{CDE\}$$

donde cada conjunto independiente en G es también independiente en G', y G' tiene un conjunto independiente más que G.

b) Si dos nodos no son independientes en el grafo G, sí que pueden ser independientes en el grafo G' al quitar la arista que conecta estos dos nodos en el grafo G.

En el caso de conjuntos independientes maximales, (a) sería falso porque existen casos donde el conjunto de nodos independientes maximal sería mayor en el grafo G', después de eliminar una arista. No obstante, (b) seguiría siendo verdadero ya que, como hemos mencionado antes, cuantas más aristas se quiten en G para formar G', más conjuntos independientes tendrá G' que no son independientes en G, ocurriendo lo mismo para conjuntos independientes maximales.

Ejemplo con el grafo de la figura 5:

$$G \Longrightarrow \{A\}, \{BD\}, \{CDE\}$$

$$G' \Longrightarrow \{AD\}, \{BD\}, \{CDE\}$$

donde el conjunto independiente $\{A\}$ de G no es independiente en G', y $\{AD\}$ de G' no se encuentra en G.