Curvas / Superfícies

Frederico Damasceno Bortoloti

Adaptado de:

Donghoon Young

Cláudio Esperança

Paulo Roma Cavalcanti

Curvas

Representação de ponto

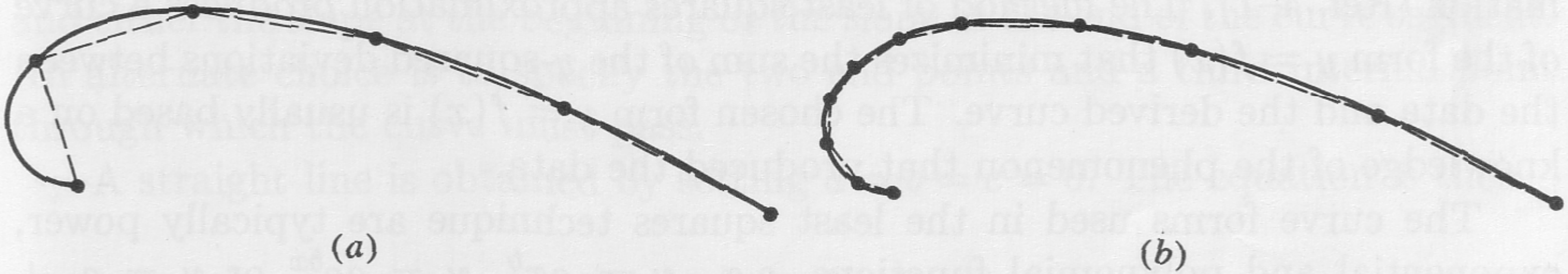
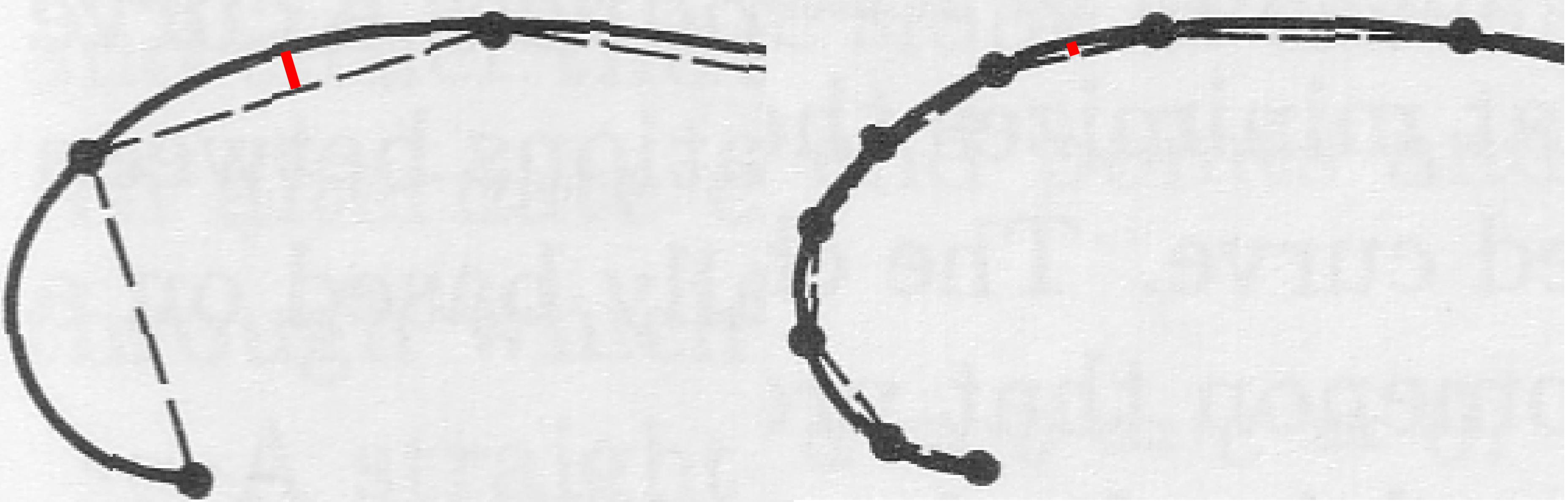


Figure 4–1 Point representations of curves. (a) Equal point density along the curve length; (b) point density increases with decreasing radius of curvature.



* D.F. Rogers, J. A. Adams, Mathematical elements for computer graphics, 2nd ed.

Representação analítica

- Não paramétrica e paramétrica
- Precisão sobre representação de ponto
- Armazenamento compacto
  - Centro do círculo e raio vs. pontos
- Ponto intermediário
  - Quaisquer pontos sobre a curva podem ser calculados
- Mais fácil gerar desenhos
- Mais fácil mudar a curvatura

Representação analítica de curva definida por ponto

- Interpolação
  - Analiticamente definindo uma curva a partir de um conjunto de pontos conhecido
- Ajustada
  - Uma curva que passa por todos os pontos conhecidos
- Satisfatória
  - Uma curva que passa perto de pontos conhecidos

Não paramétrica vs paramétrica

- Classificação matemática
- Não paramétrica
  - – Explícita y = f(x)
  - – Implícita f(x, y) = 0
- Equação implícita de segundo grau geral

$$ax^2 + b2xy + cy^2 + 2dx + 2cy + f = 0$$

Representação implícita

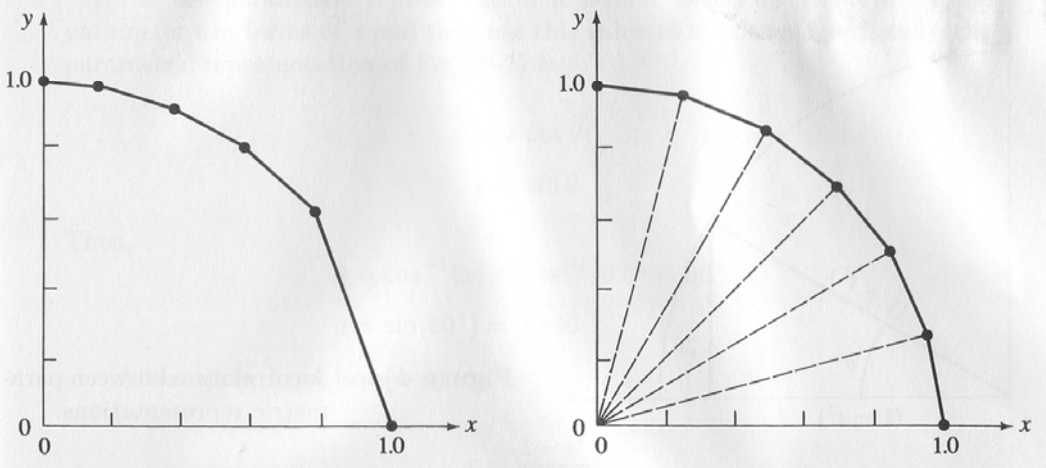
- Curva em 2D: $f(x,y) = 0$
  - Linha: $ax + by + c = 0$
  - Círculo: $x^2 + y^2 – r^2 = 0$
- Superfície em 3D: $f(x,y,z) = 0$
  - Plano: $ax + by + cz + d = 0$
  - Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 – r^2 = 0$

Curvas não paramétricas

- Linha
- Círculo
- Parábola
- Elipse
- Hipérbole

Curvas paramétricas

- Pontos sobre uma curva são representados com uma função de um único parâmetro
  - $x = f(u)$, $y = g(u)$, $z = h(u)$
    - u : variável paramétrica
- Representação paramétrica de uma linha reta



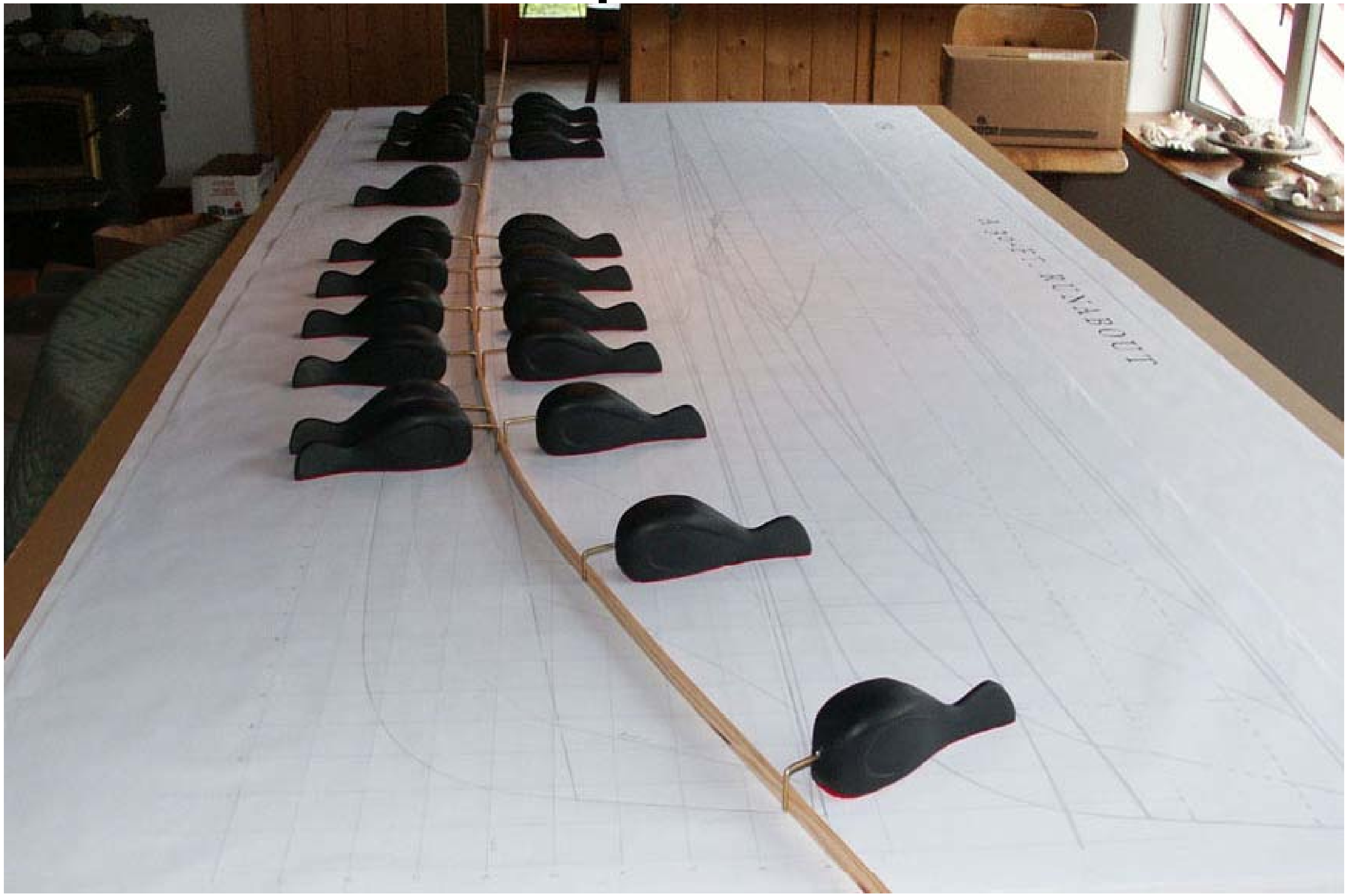
$y = +\sqrt{1 - x^2} \quad 0 \leq x \leq 1$

(*a*)

$x = \cos\theta \quad y = \sin\theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

(*b*)

Spline



- DUCKS SPRINGING A LOFTING BATTEN FOR A HACKER RUNABOUT Courtesy J.D. Ball, NW School of WoodenBoat.

Curvas cúbicas paramétricas

- Spline matemática
  - Foi definida usando polinômios cúbicos
    - Equação de Euler para dobrar momento ao longo do comprimento do feixe (spline)

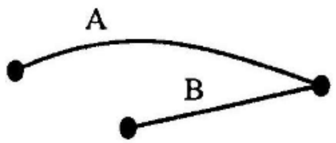
- Polinômios Cúbicos
  - $f(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x$
  - u: $(0 <= u <= 1)$

Especificando curvas

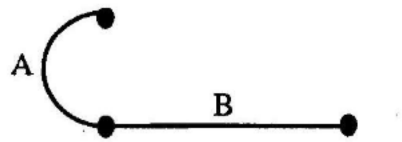
- Pontos de Controle
  - Um conjunto de pontos que influenciam a forma da curva
- Nós
  - Pontos de controle que estão sobre a curva
- Interpolando Splines
  - Curvas que passam através dos pontos de controle (nós)
- Aproximando Splines
  - Pontos de controle meramente influenciam a forma

Continuidade

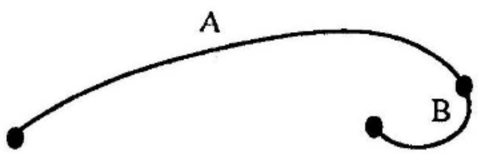
- Duas ou mais curvas nos nós (conectando pontos) para formar uma curva contínua
- Tipos de continuidade
  - Continuidade de ponto
  - Continuidade de tangente
  - Continuidade de curvatura



(a) Point continuity - C^0



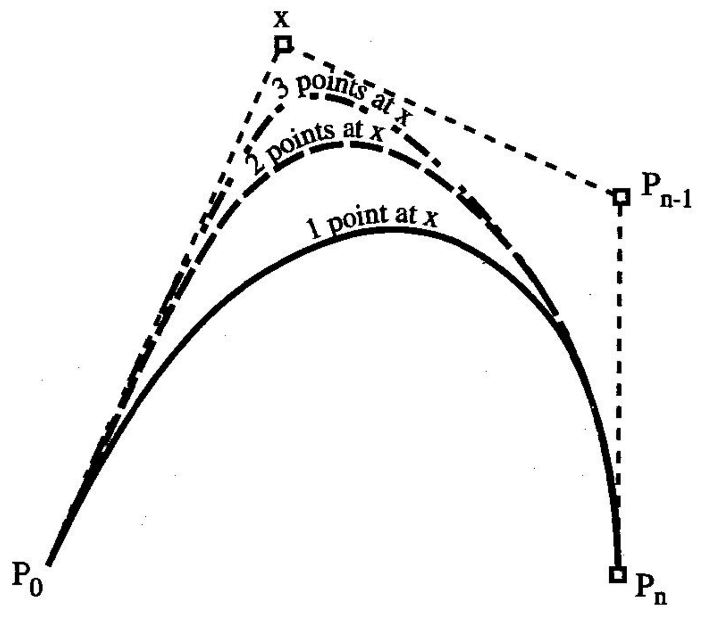
(b) Tangent continuity - C^1

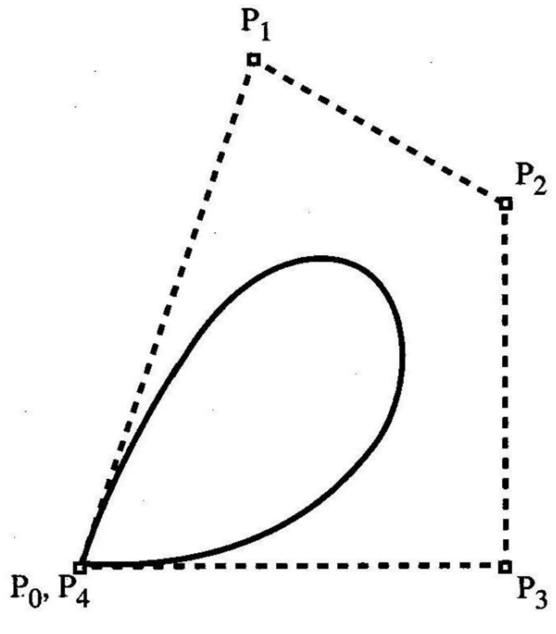


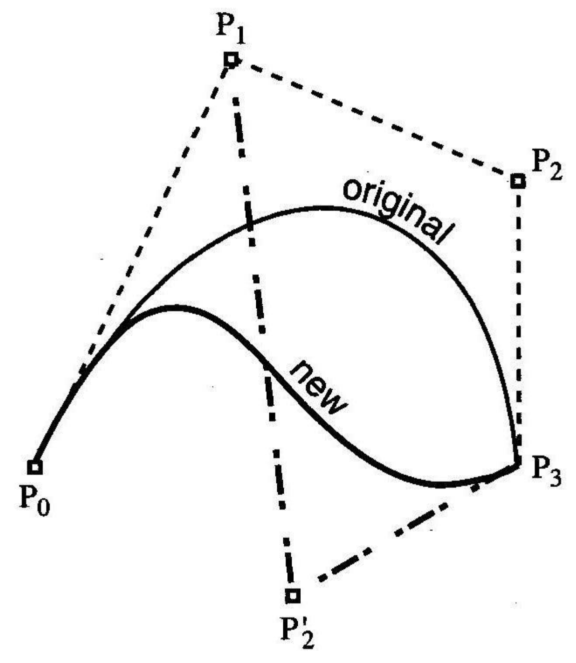
(c) Curvature continuity - C^2

Curvas de Bezier

- Desenvolvidas por Pierre Bezier para descrever o desenho de curvas e superfícies de forma livre
- Polígono definidor
- Primeiro e último ponto
- Vetor tangente

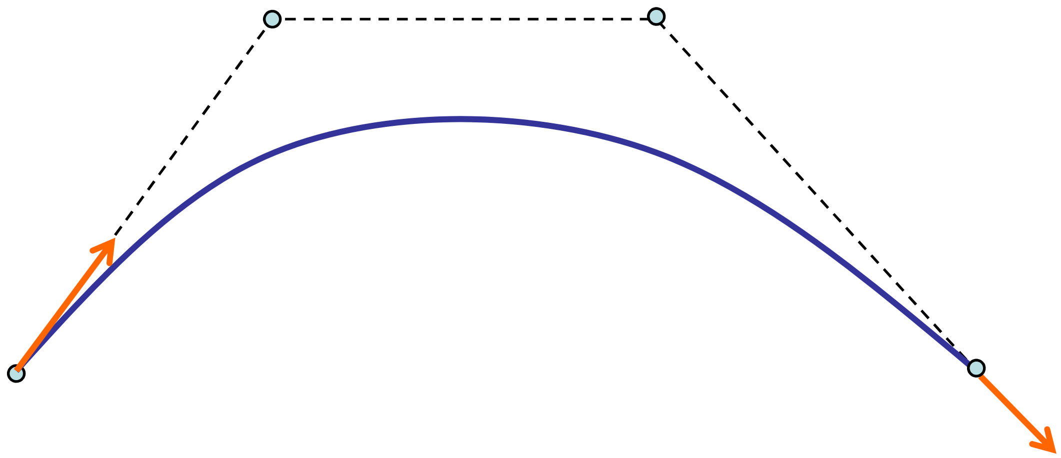






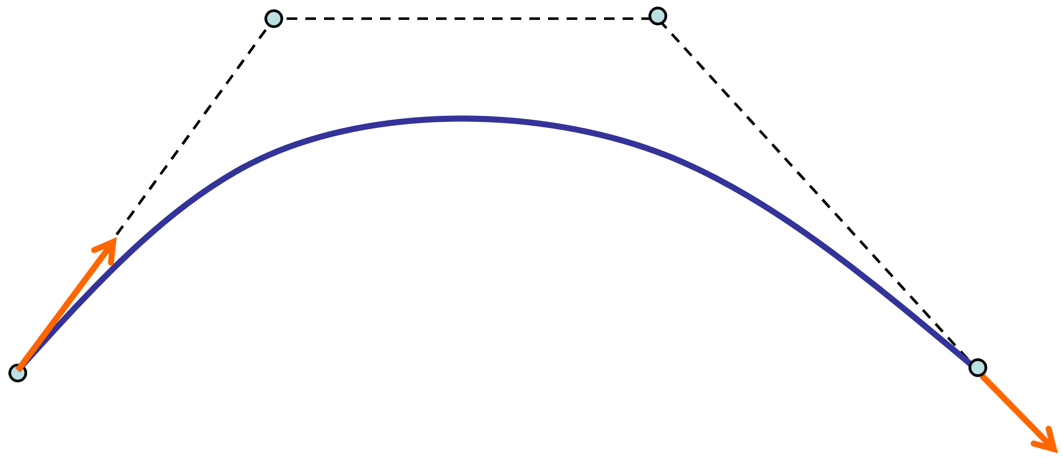
Propriedades de Curva de Bézier

- Continuidade infinita (todas as derivadas são contínuas)
- O grau da curva (do polinômio) é dado pelo número de pontos do polígono de controle menos 1
- A curva de Bézier está contida no fecho convexo do polígono de controle
- A curva interpola o primeiro e último ponto do polígono de controle



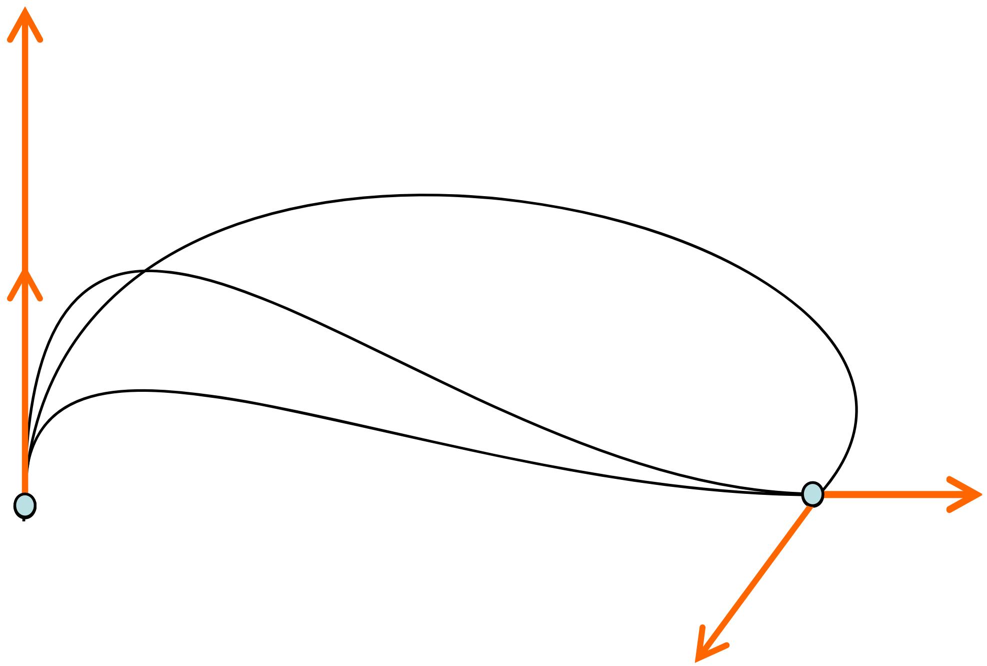
Propriedades de Curva de Bézier

- As tangentes à curva em $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_n$ têm a direção dos segmentos de reta $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_{n\text{-}1}\mathbf{p}_n$, respectivamente
  - Para cúbicas, as derivadas são $3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$ e $3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$
- Transformar os pontos de controle (transf. afim) e desenhar a curva é equivalente a desenhar a curva transformada

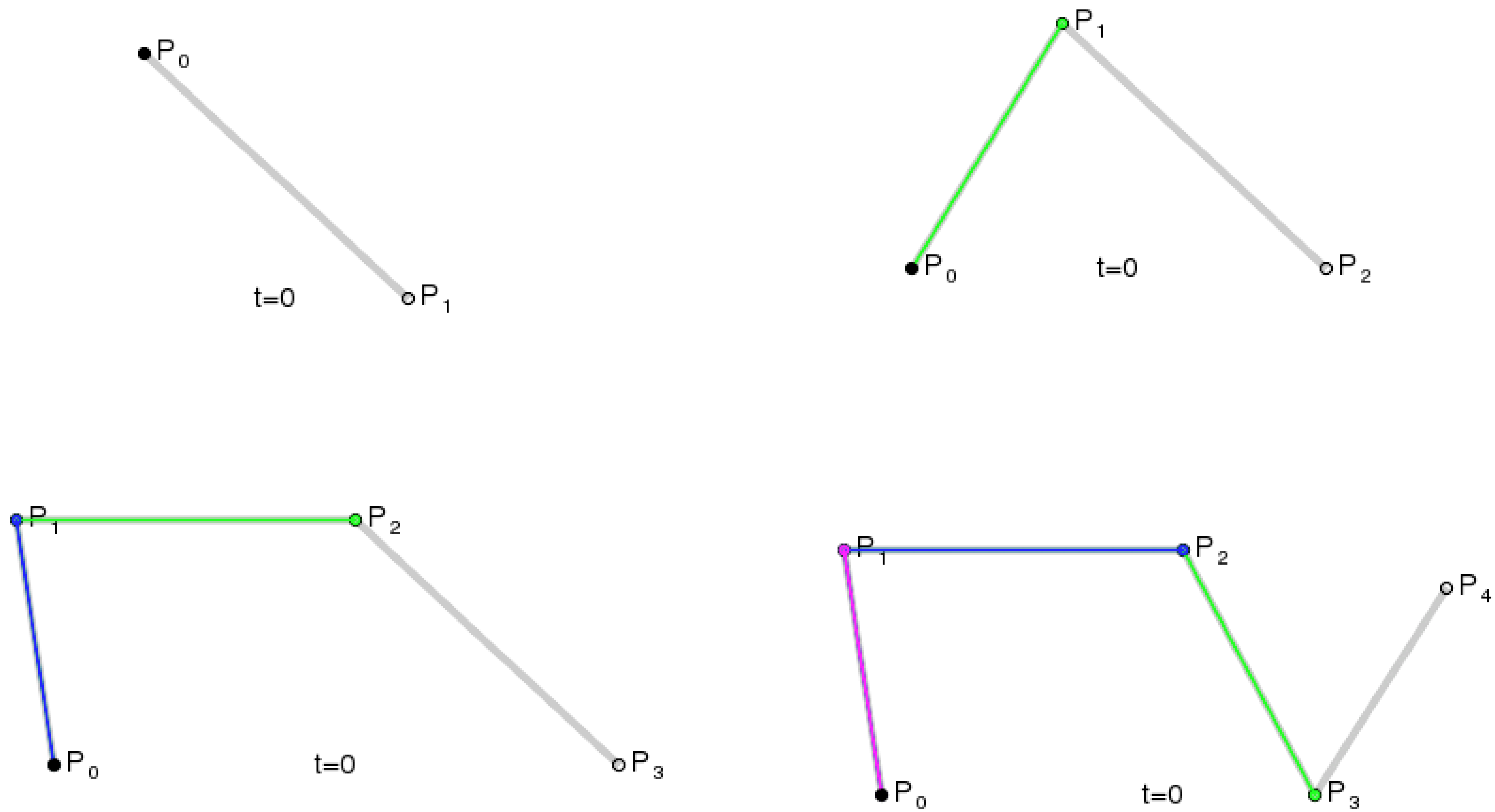


Curvas de Hermite

- Ao invés de modelar a curva a partir de um polígono de controle (Bézier), especifica-se pontos de controle e vetores tangentes nesses pontos
- Vantagem: é fácil emendar várias curvas bastando especificar tangentes iguais nos pontos de emenda
- Exemplos (cúbicas):



Curvas de Bezier



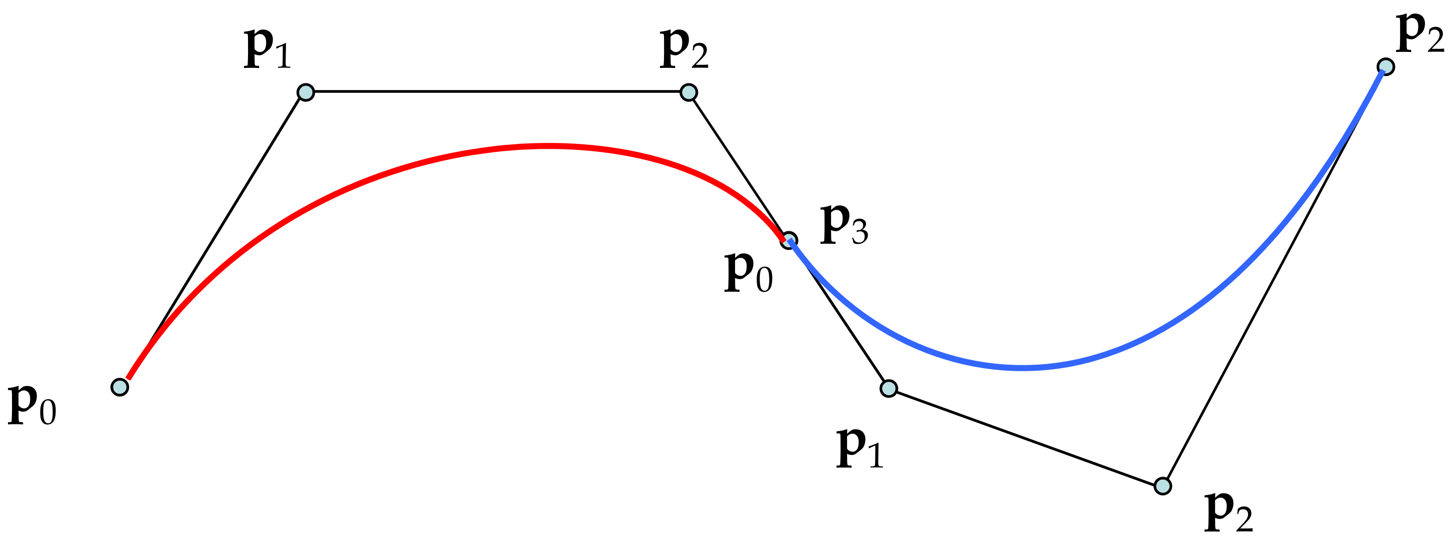
Curvas de Bézier: 1. linear; 2. quadrática; 3. cúbica; 4. quártica.

Curvas Longas

- Curvas Bézier com *k* pontos de controle são de grau *k* – 1
- Curvas de grau alto são difíceis de desenhar
  - Complexas
  - Sujeitas a erros de precisão
- Normalmente, queremos que pontos de controle tenham efeito *local*
  - Em curvas Bézier, todos os pontos de controle têm efeito *global*
- Solução:
  - Emendar curvas polinomiais de grau baixo
  - Relaxar condições de continuidade

Emendando Curvas Bézier

- Continuidade C^0: Último ponto da primeira = primeiro ponto da segunda
- Continuidade C^1: C^0 e segmento $\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$ da primeira com mesma direção e comprimento que o segmento $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ da segunda
- Continuidade C^2: C^1 e + restrições sobre pontos $\mathbf{p}_1$ da primeira e $\mathbf{p}_2$ da segunda

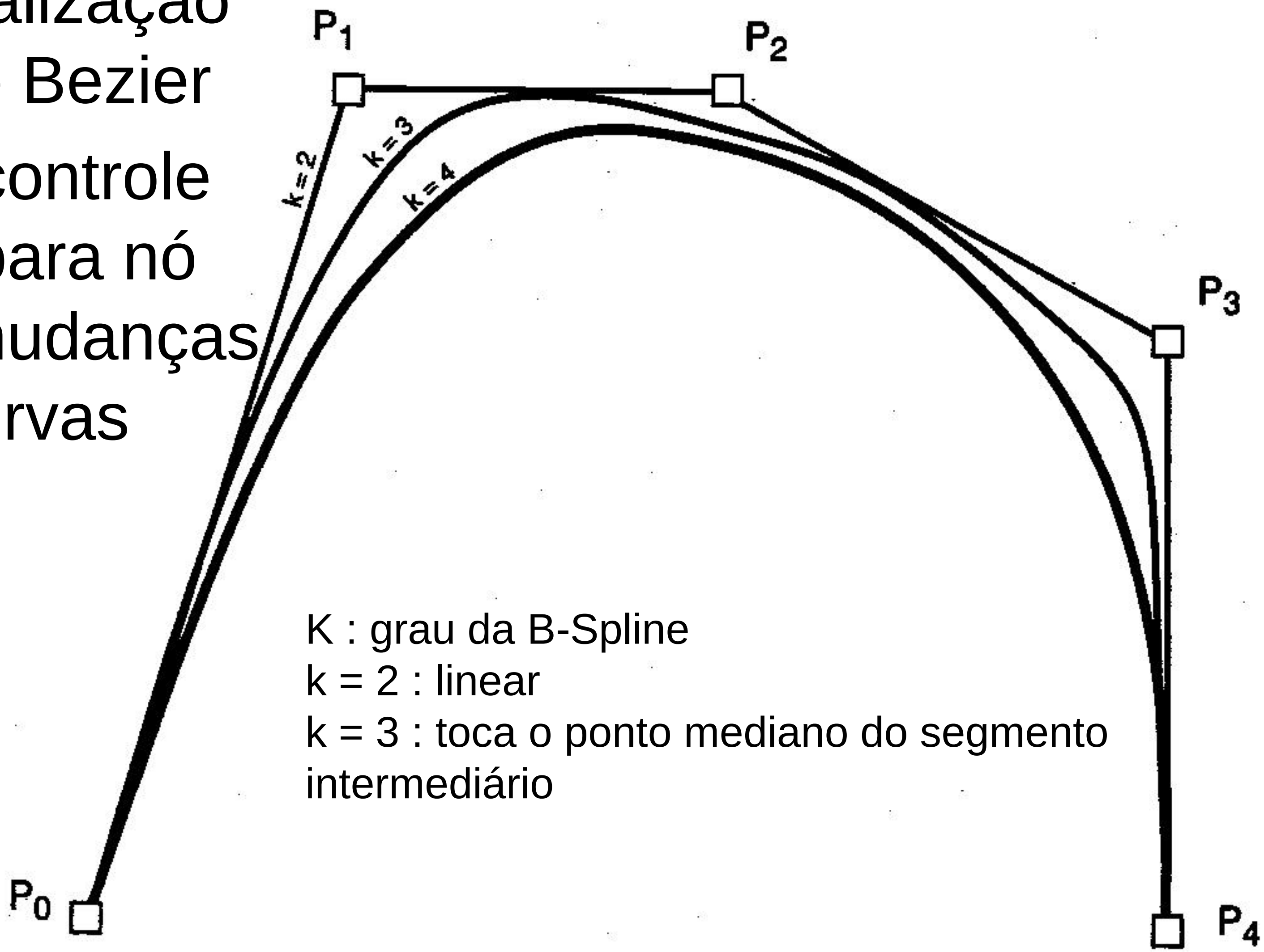


Splines

- A base de Bézier não é própria para a modelagem de curvas longas
  - Bézier única: suporte não local
  - Trechos emendados: restrições não são naturais
- Base alternativa: B-Splines
  - Nome vem de um instrumento usado por desenhistas
  - Modelagem por polígonos de controle sem restrições adicionais
  - Suporte local
    - Alteração de um vértice afeta curva apenas na vizinhança
  - Existem muitos tipos de Splines
  - Se os nós estão equidistantemente distribuídos a spline é **uniforme**, caso contrário é **não-uniforme**.
    - Uma B-spline uniforme de grau d tem continuidade C^{d-1}

Curvas B-Spline

- Uma generalização da curva de Bezier
- Pontos de controle adicionais para nó permitem mudanças locais às curvas



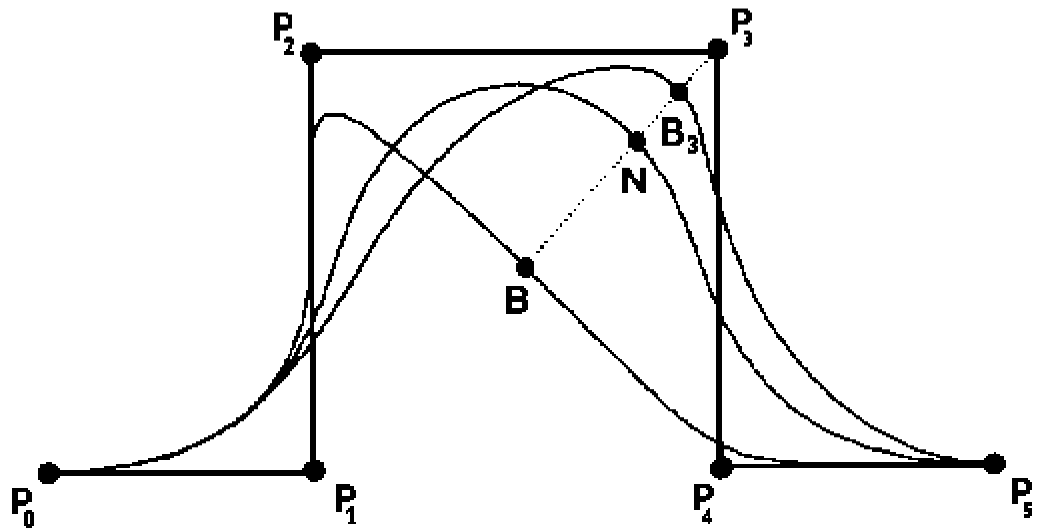
K : grau da B-Spline
k = 2 : linear
k = 3 : toca o ponto mediano do segmento intermediário

Curvas Rational B-Spline

- Provê uma única forma matemática precisa capaz de representar as formas analíticas comuns
- Linhas, planos, curvas cônicas incluindo círculos, curvas de forma livre, superfícies quádricas e esculpidas

NURBS

- Non-Uniform Rational B-Spline
- O peso dos pontos de controle é a diferença



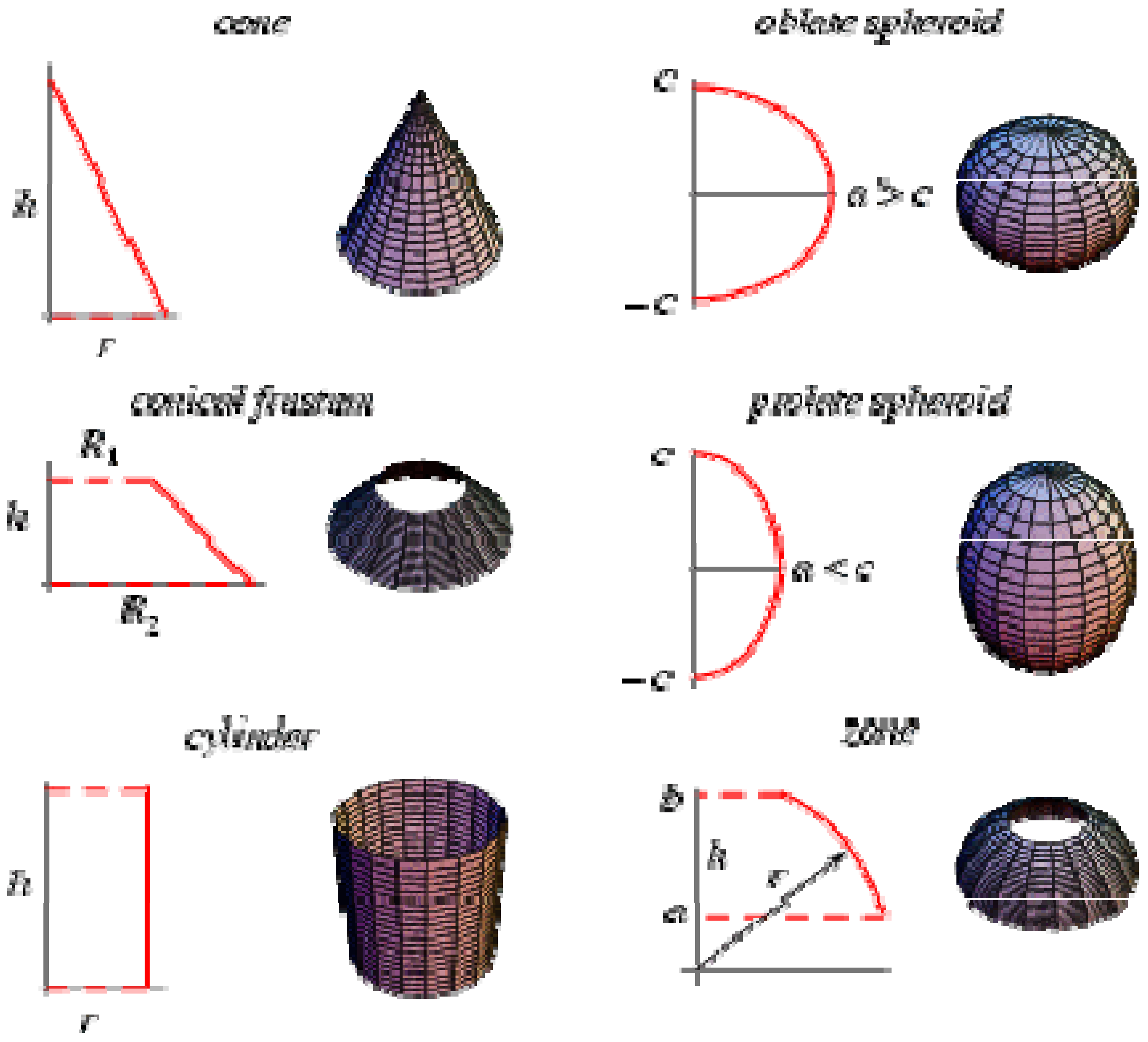
Superfícies

Duas abordagens

- Coons
  - Criar uma superfície matemática de dados conhecidos
- Bezier
  - Criar uma superfície matemática *ab initio*
- Cohen
  - Desenho geral de superfície mostrando um misto das abordagens de Coons e Bezier

Superfície de revolução

- Superfície criada pela rotação de uma curva sobre um plano em torno de uma linha reta (o eixo de rotação) que está sobre o mesmo plano.



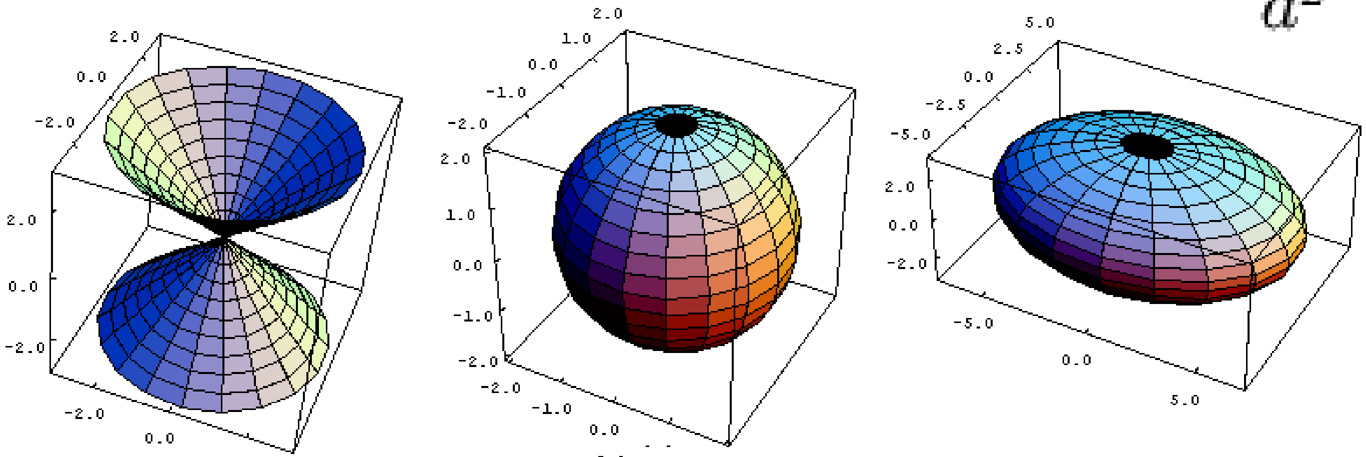
Superfície por caminho

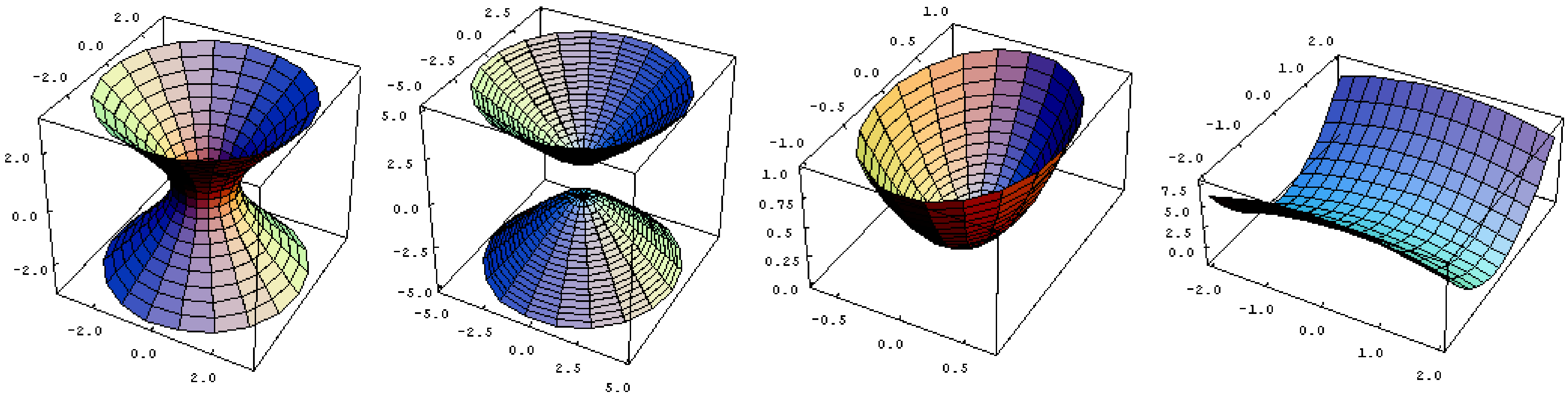
- Superfície criada atravessando uma curva ao longo de um caminho no espaço

Superfície quádrica

- Superfície de uma equação de segundo grau Cartesianas tridimensionais

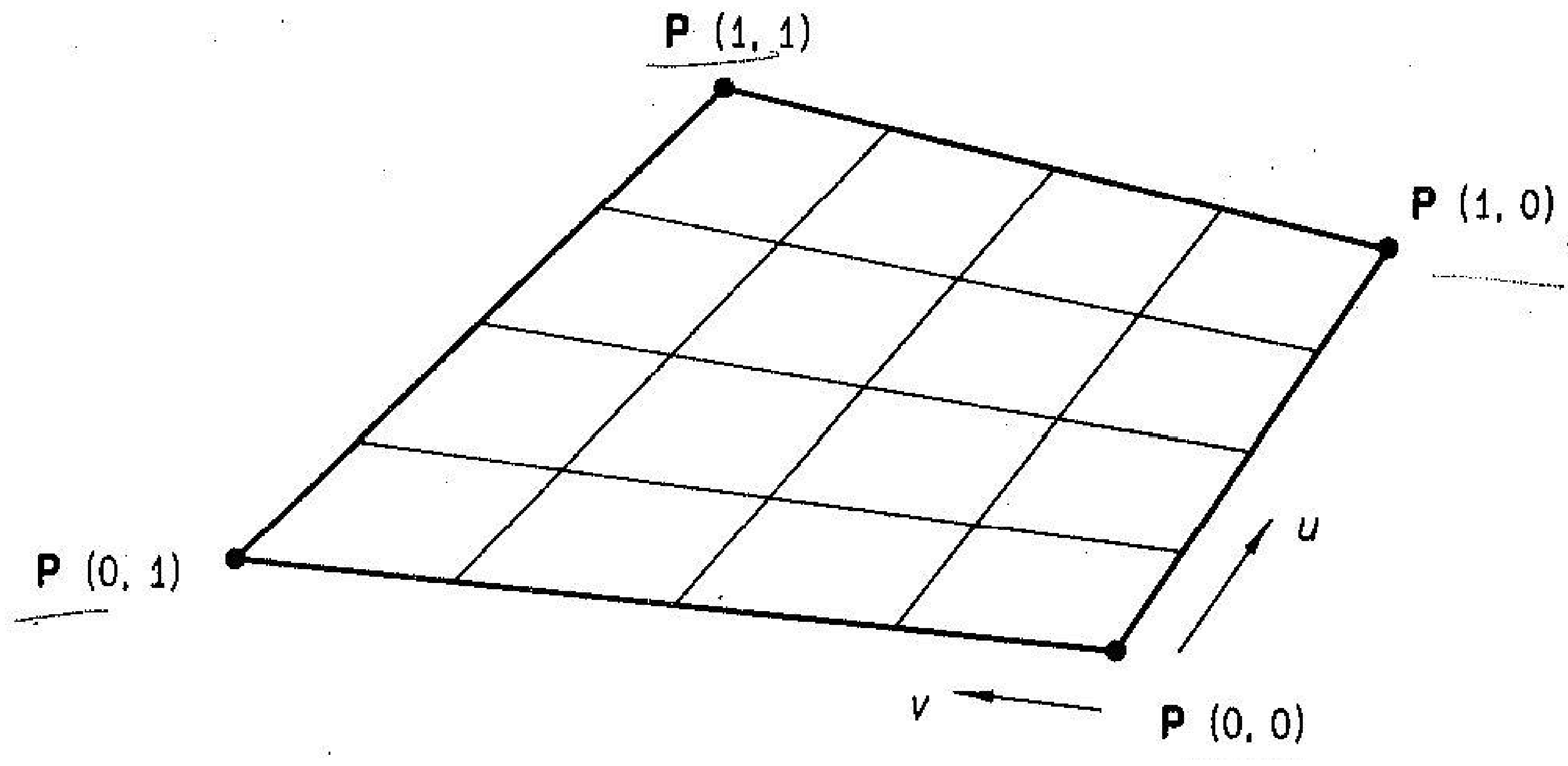
$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1.$$





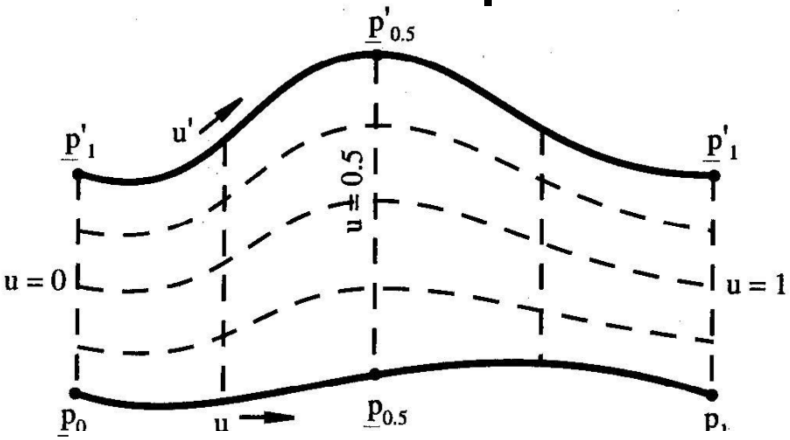
Superfícies bilineares

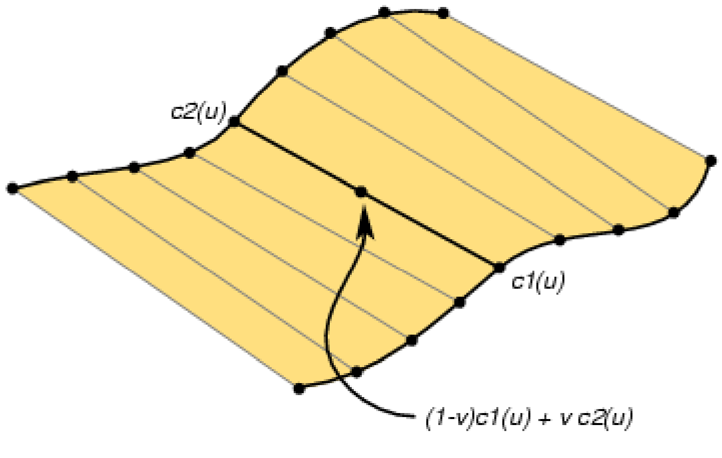
- Interpolação linear entre quatro pontos que não estão no mesmo plano



Superfície regrada

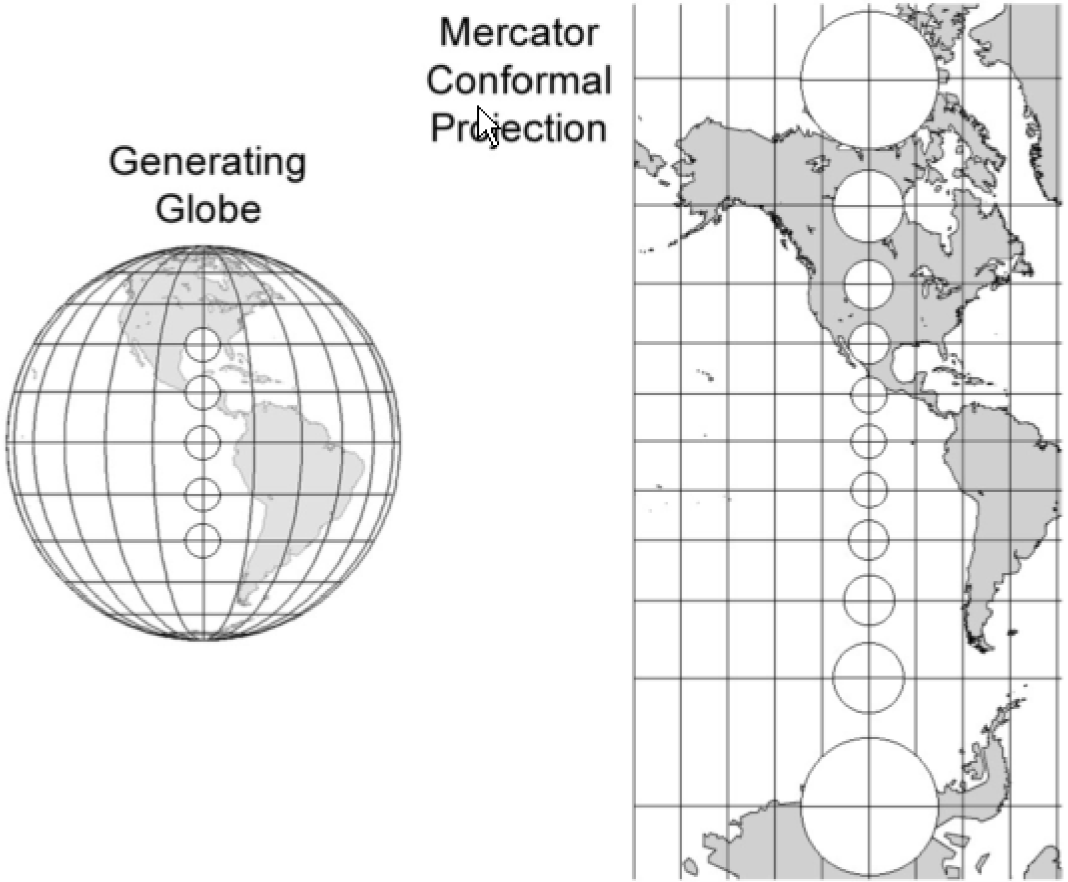
- Contruída juntando 2 curvas por linhas retas entre pontos





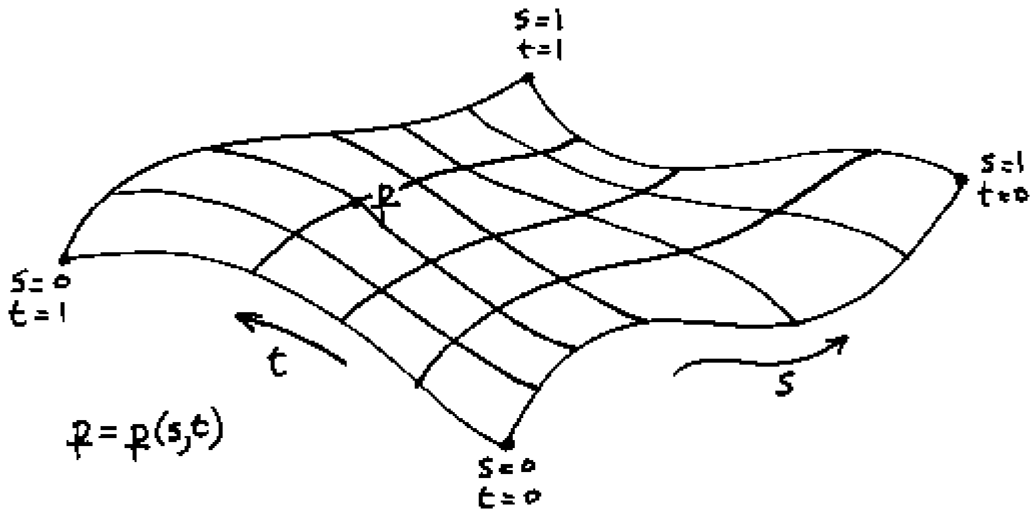
Superfície Desenvolvível

- Uma superfície com uma métrica que pode ser achatada sobre um plano sem distorção (i.e. esticando, comprimindo, cortando). De mesmo modo, é uma superfície que pode ser feita transformando um plano (i.e. dobrando, rolando, recortando, e colando)



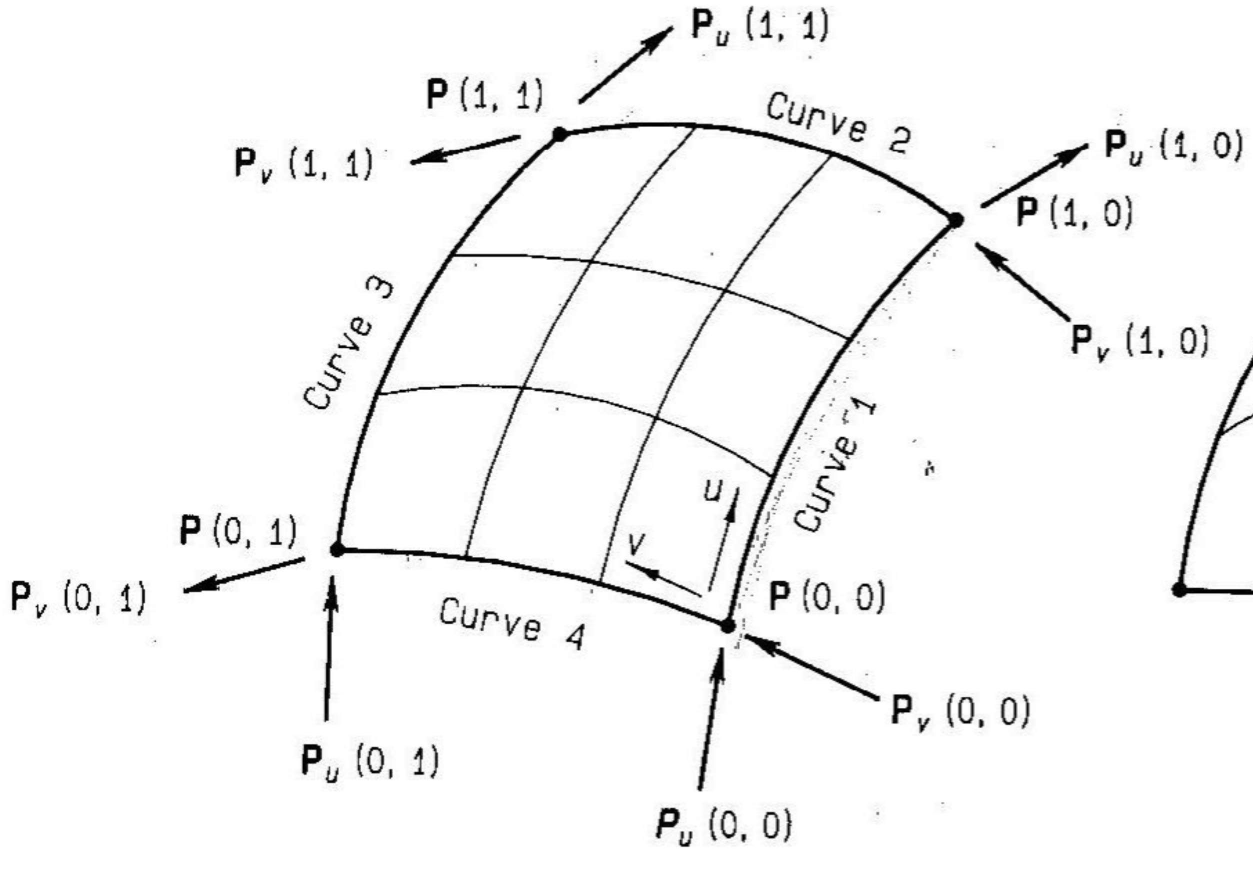
Superfície Linear de Coons

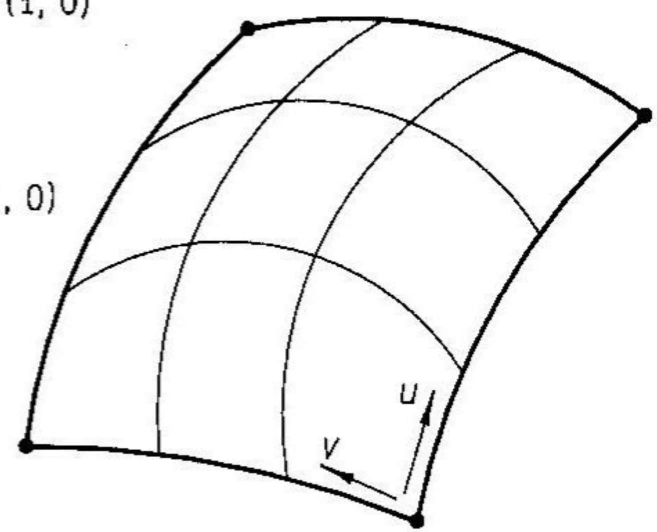
- Interpolação entre quatro curvas de fronteira
- Similar a superfície regrada em duas direções



Remendos cúbicos paramétricos/Superfícies bicúbicas

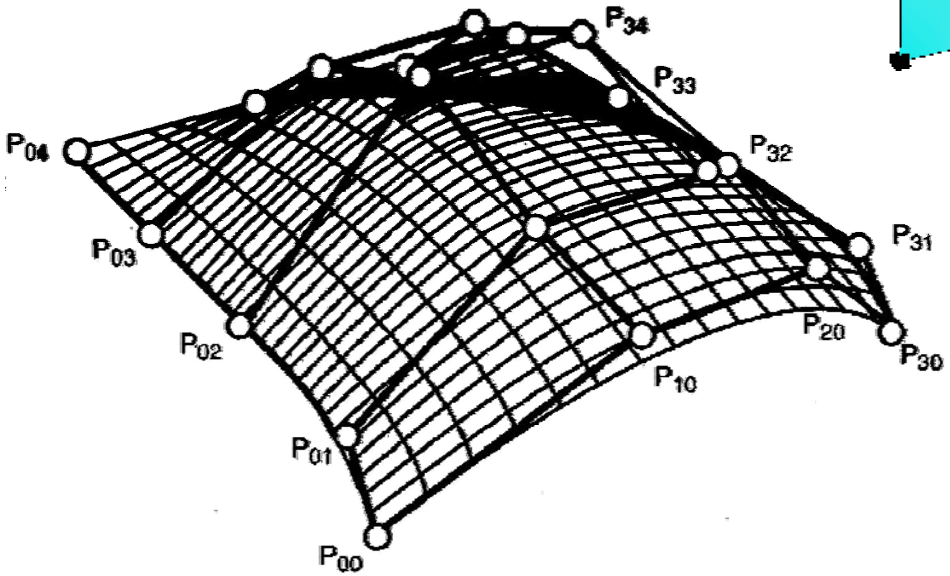
- Curvas cúbicas paramétricas como quatro curvas de fronteira

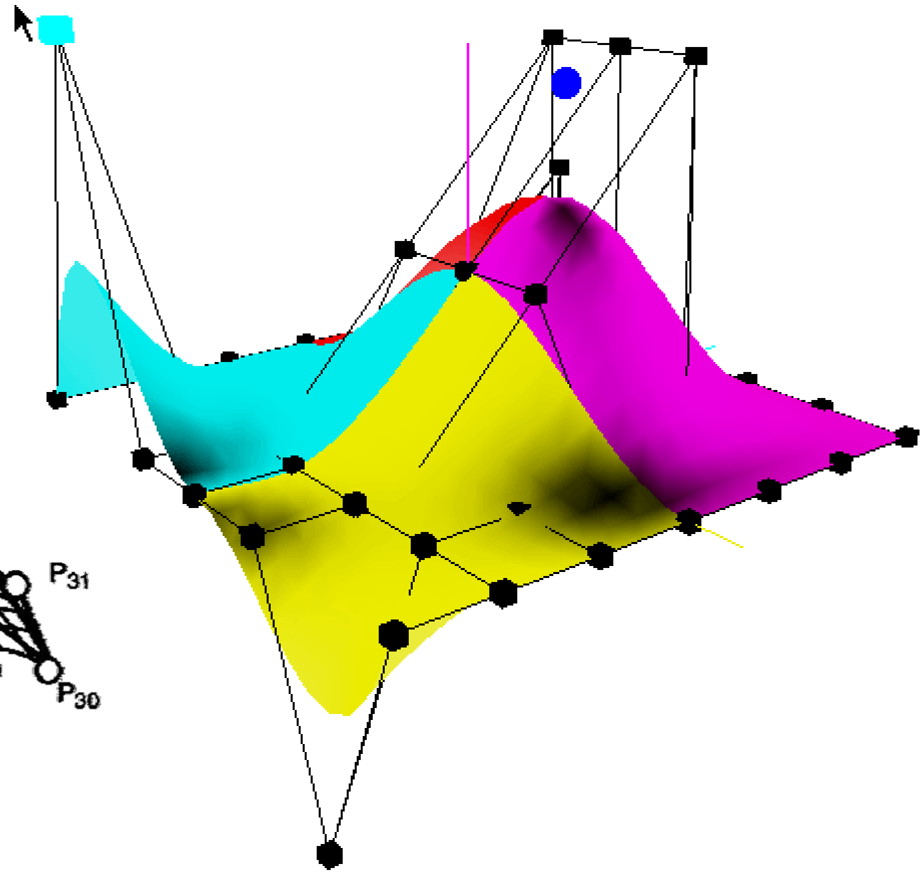




Superfícies Bezier

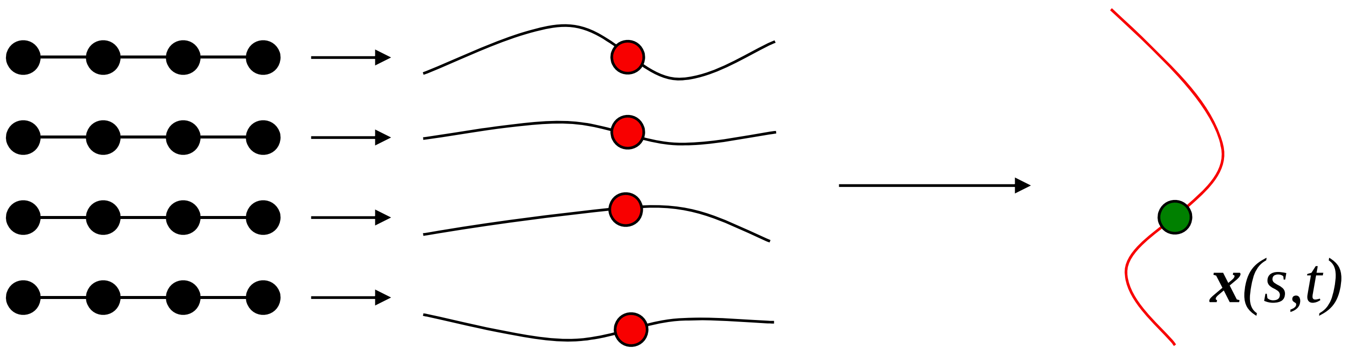
- Curvas Bezier como quatro curvas de fronteira





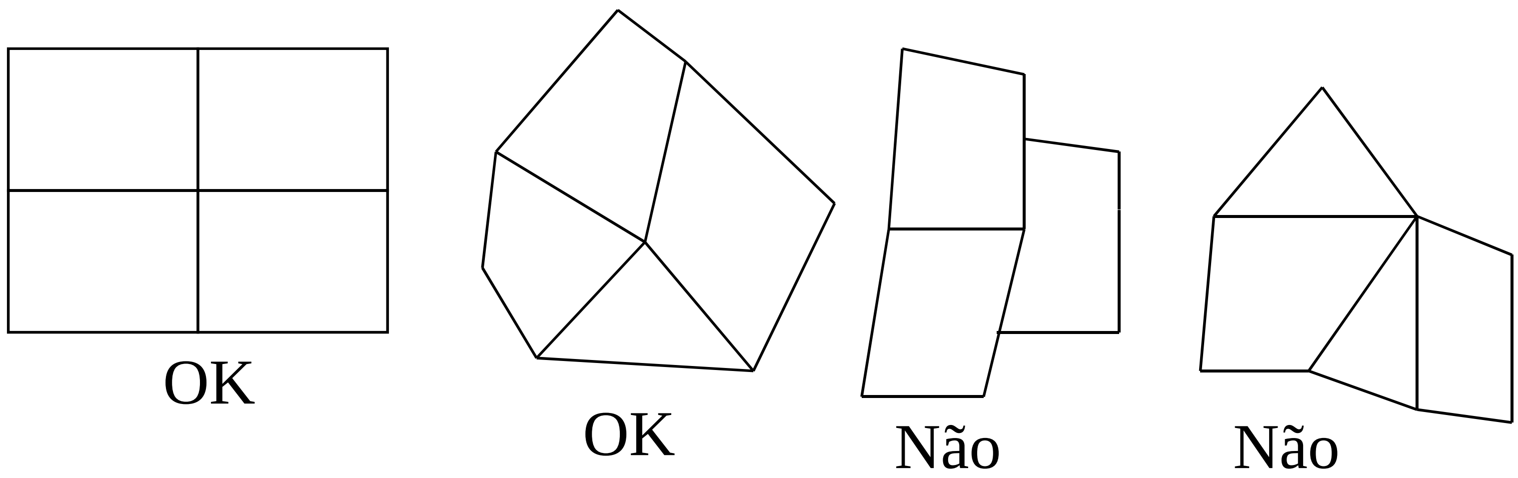
Retalhos de Bézier

- Curvas na fronteira são curvas de Bézier
- *Qualquer* curva para *s* ou *t* constante é uma curva Bézier
- Podemos pensar assim:
  - Cada linha da grade com 4 pontos de controle define uma curva de Bézier para o parâmetro *s*
  - Ao avaliar cada curva para um mesmo *s* obtemos 4 pontos de controle "virtuais"
  - Pontos de controle "virtuais" definem uma curva Bézier em *t*
  - Avaliando esta curva em um dado *t* resulta no ponto ***x****(s,t)*



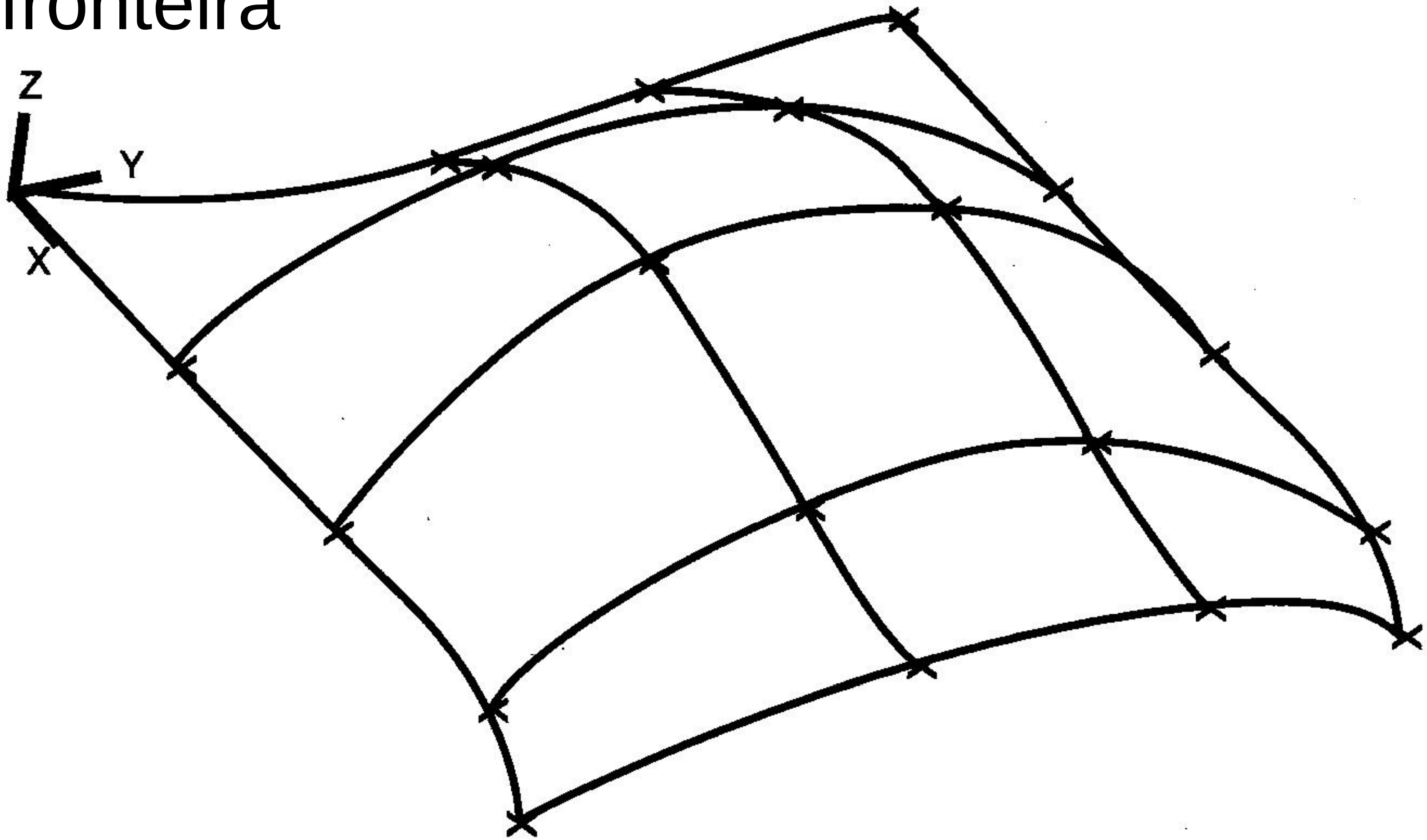
Malhas de Retalhos Bézier

- São malhas compostas de diversos retalhos unidos ao longo de suas fronteiras
  - As arestas das grades de controle precisam se justapor perfeitamente
  - As grades precisam ser retangulares

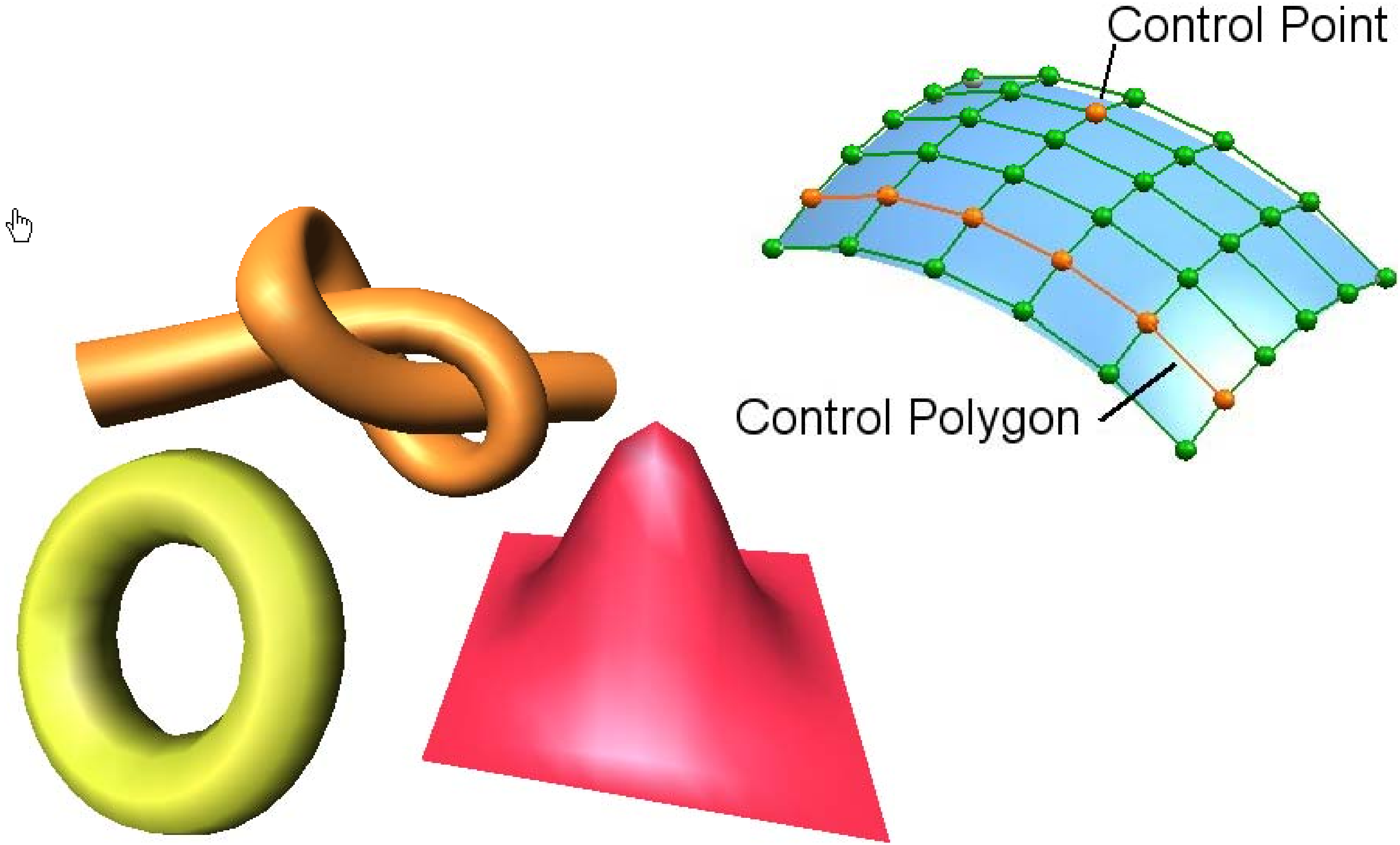


Superfícies B-Spline

- Curvas B-Spline como quatro curvas de fronteira



Superfícies NURBS



Malha de polígono (mesh)

- Coleção de vértices e polígonos que definem a forma de um objeto poliédrico
- Malhas de triângulos ou quadriláteros
  - triangulação
- Bom para caixas, armários, construir exteriores
- Ruim para superfícies curvas