Relações

Relação n-ária ($n \in \mathbb{N}$) sobre X é um subconjunto de X^n

$X = \{1,2,3\}$ $R = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$ ⇐ relação binary sobre X

$X = \{1,2,3,4\}$ $R = \{(x,y) \in X^2 \mid x+y \leq 5\}$ ⇐ relação binária sobre X

$(x,y) \in X \times X \Rightarrow xRy \Leftrightarrow (x,y) \in R$

⇒ Relação de X em Y é um subconjunto de $X \times Y$

↳ quando $X = Y$ temos uma relação binária sobre X

$\text{dom } R = \{x \in X \mid (\exists_y \in Y)\ (x,y) \in R\}$

$\text{im } R = \{y \in Y \mid (\exists_x \in X)\ (x,y) \in R\}$

$R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$ ← relação inversa

$R \to$ relação de X em Y $\quad S \to$ Relação de Y em Z

$R \circ S = \{(x,y) \mid (\exists_a \in Y)\ (x,a) \in R \text{ e } (a,y) \in S\}$

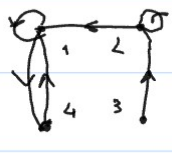
Matriz de Adjacência

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\{0,1\})$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in R \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin R \end{cases}$$

Diagrama

$R = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(3,2),(4,1)\}$



Dizemos que uma relação binaria R sobre X é:

Reflexiva se $(\forall_x \in X)\ xRx$

Irreflexiva se $(\forall_x \in X)\ (x,x) \notin R$

Simétrica se $(\forall_{x,y} \in X)\ xRy \Rightarrow yRx$

Anti-simétrica se $(\forall_{x,y} \in X)\ xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

Transitiva se $(\forall_{x,y,z} \in X)\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Relação de Equivalência - Relação binária reflexiva, simétrica e transitiva

$m, n \in \mathbb{Z}$ $\quad m \sim n \iff |m| = |n|$

Relação identidade sobre $X \Rightarrow \{(x,x) \mid x \in X\}$

Relação universal sobre $\Rightarrow \{(x,y) \mid x, y \in R\}$

R é uma relação de equivalência em X, $a \in X$

classe de equivalência de a (módulo R) $= [a]_R$

$$[a]_R = \{x \in X \mid xRa\} \Leftrightarrow (x,a) \in R$$

Ao conjunto cujos elementos são as classes de equivalência $[a]_R$, com $a \in X$, chamamos conjunto cociente de X por R $\Rightarrow X/R$

$X = \{1,2,3,4,5\}$

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(1,5),(5,1),(2,5),(5,2)\}$

$\downarrow$

relação de equivalência sobre X

$[1] = \{1,2,5\} = [2] = [5]$, $[3] = \{3\}$, $[4] = \{4\}$ $\quad X/R = \{\{1,2,5\},\{3\},\{4\}\}$

Relação de congruência módulo $n \Rightarrow x \equiv_n y \iff (\exists_k \in \mathbb{Z})\, x - y = kn$

- Sejam X um conjunto e R uma relação de equivalência sobre X. Para quaisquer $a, b \in X$, as seguintes afirmações são equivalentes:

$$bRa \quad ; \quad b \in [a]_R \quad ; \quad [b]_R = [a]_R$$

$\Rightarrow$ qqr $x \in X$, $[x]_R \neq \emptyset$ (pela reflexividade)

$\Rightarrow$ qqr $x, y \in X$, $[x]_R = [y]_R$ ou $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ (pela transitividade)

$\Rightarrow X = \bigcup_{x \in X} [x]_R$ (pela reflexividade)

$\Rightarrow$ A relação R fica determinada pelas suas classes de equivalência

Conjunto não vazio de conjuntos não vazios $\{X_i \mid i \in I\}$ é uma partição se:

- $X = \bigcup_{i \in I} X_i$
- $i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$, para quaisquer $i, j \in I$

$A \in \mathcal{P}(x)$: $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$ então $\{A, \bar{A}\}$ é uma partição de X

<u>TEOR</u>: seja X não vazio

1) se R é uma relação de equivalência sobre X, então o conjunto coeciente X/R é uma partição de X

2) se $P = \{X_i \mid i \in I\}$ é uma partição de X e R é a relação binária sobre X definida por $xRy \Leftrightarrow (\exists_i \in I)\ x, y \in X_i$, para quaisquer $x, y - X$:

→ R é relação de equivalência sobre X;

→ $P = X/R$

R.O.P. ⇒ Relação de ordem parcial ⇒ $\leq$ ou $\subseteq$

↳ relação binária reflexiva, anti-simétrica e transitiva

↳ os elementos x e y de X são comparáveis se $x \leq y$ ou $y \leq x$

↳ $\leq$ é uma relação de ordem total (R.O.T) se quaisquer 2 elementos de X são comparáveis

Seja X um conjunto e $\leq$ uma R.O.P sobre X. Dizemos que o par $(X, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado (c.o.p.). Se $\leq$ for uma ordem total $(X, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado ou uma cadeia (c.t.o.)

A relação de inclusão $\subseteq$ definida sobre $P(X)$ é uma relação de ordem parcial em $P(X)$, pelo $(P(X), \subseteq)$ é um c.p.o.

Em $\mathbb{N}$ definimos a seguinte relação binária (relação de divisibilidade) $|$:

$a|b$ (a divide b) $\Leftrightarrow (\exists_c \in \mathbb{N})\ ac=b \Rightarrow (\mathbb{N}, |)$ é c.p.o.

Seja $(X, \leq)$ um c.o.p. y cobre x se $x < y$ e não existe $z \in X$ tal que $x < z < y \Rightarrow x \leq z \leq y \Rightarrow z = x \vee z = y \Rightarrow x << y$

Diagrama de Hasse $\Rightarrow$ representação da relação $\leq$

↳ $x, y \in X$, $x \neq y$, se x cobre y, coloca-se y "acima" de x

Sejam $(X, \leq)$ um c.p.o. e $Y \subseteq X$.

→ $a \in X$ é minorante se $a \leq y$ || majorante se $y \leq a$, $\forall y \in Y$

→ primeiro elemento / mínimo se $a \in Y: a \leq y, \forall y \in Y$

→ último elemento / máximo se $b \in Y: y \leq b, \forall y \in Y$

→ elemento minimal se não existe $b \in Y: b < a$ || maximal se $a < b$

→ ínfimo se $a \in X$ é o maior dos minorantes || supremo menor dos majorantes

Funções

Uma aplicação/função de X em Y é uma relação R de X em Y verificando que, $\forall_x \in X, \exists^1 y \in Y : (x,y) \in R$

$$f : X \longrightarrow Y \qquad (x,y) \in f$$
$$x \longmapsto f(x) = xf = y$$

Conjunto de partida $\Rightarrow X$
de chegada $\Rightarrow Y$
imagem/contradomínio $\Rightarrow$ todas as imagens por f de todos os elementos de X

* todas as funções são relações, mas nem todas as relações são funções *

imagem de A (por meio de f) $\Rightarrow f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

imagem recíproca/pré-imagem de B (por meio de f) $\Rightarrow f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

injetividade $\Rightarrow (\forall_{a,b} \in X)\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ ou $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

sobrejetividade $\Rightarrow f(X) = Y$, i.e. $(\forall_y \in Y)(\exists_x \in X)\ y = f(x)$

bijetividade = injetiva + sobrejetiva $\Rightarrow (\forall_y \in Y)(\exists^1_x \in X)\ y = f(x)$

aplicação identidade $= 1_X,\ id_X,\ I_X \Rightarrow id_X : X \longrightarrow X : (\forall_x \in X)\ id_X(x) = x$

$f : X \to Y \quad (\forall_{x,y} \in X)\ x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f$ é uma aplicação $\neq$ conceito de injetividade

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = x(f \circ g) = (xf)g$$

TEOR:

1) se f e g são injetivas, então $f \circ g$ é injetiva

2) se f e g são sobrejetivas, então $f \circ g$ é sobrejetiva

3) se f e g são bijetivas, então $f \circ g$ é bijetiva

Def:

- Dizemos que uma aplicação $f: X \to Y$ é invertível se $\exists^1 g: Y \to X$: $f \circ g = id_X$ e $g \circ f = id_Y$

→ nestas condições g é a aplicação inversa de f $= f^{-1} = g$

$f^{-1} \circ f = id_Y$ $\quad f \circ f^{-1} = id_X$ $\quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

→ se $f: X \to Y$ é invertível, então $f^{-1}: Y \to X$ é também invertível e $(f^{-1})^{-1} = f$

→ sejam $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ duas aplicações invertíveis. Então, a aplicação $f \circ g: X \to Z$ é invertível e tem-se $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

→ TEOR: Uma aplicação $f: X \to Y$ é invertível se e só se é uma bijeção

Transfinitos

Teorema (Cantor):

$$|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$$

Anzol:

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$1 \longmapsto \{\}$		$1 \notin \emptyset = 1f$
$2 \longmapsto \{1\}$		$2 \notin \{1\} = 2f$
$3 \longmapsto \{1,2\}$		$3 \notin \{1,2\} = 3f$
$4 \longmapsto 5K$		$4 \notin 5K = 4f$
$5 \longmapsto \{\{0\},\{1\},\{2\},\{4\}\}$		$5 \notin 5f$
$6 \longmapsto 2K$		$6 \in 2K = 6f$

Prova: vamos provar que ___?___ função $f: X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ é sobrejetiva

$x \not\mapsto S$

$$S = \{x \in X \mid x \notin xf\}$$

vamos provar que $(\forall x \in X)\ S \neq xf$.

Por absurdo: vamos supor que $S \overset{*}{=} af$, $a \in X$

$X = S \,\dot{\cup}\, (X \setminus S) \Rightarrow$ ou pertence a S ou a $X \setminus S$

$a \in S \Rightarrow a \notin af \overset{*}{=} S$

$a \in X \setminus S \Rightarrow a \notin S = af \Rightarrow a \in S$

$\Rightarrow$ está provado que não pode existir $a \in X$ tal que $af = S$.

↳ logo, f não é sobrejetiva, portanto não é bijetiva

Como $\nexists\, f: X \hookrightarrow \mathcal{P}(X) \Rightarrow |X| \neq |\mathcal{P}(X)|$

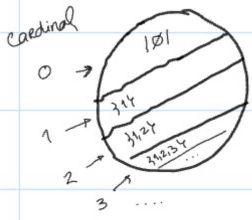
bijetiva

Teorema: Cantor - Schröder - Bernstein

$\exists f: A \hookrightarrow B \quad \& \quad \exists g: B \hookrightarrow A$

Então:

$\exists h: A \hookrightarrow\!\!\!\to B$



? → $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

está relacionado por cardinalidade

$|A| = |B|$

$A \sim B \iff \exists g: A \hookrightarrow\!\!\!\to B$

Def: $|A| \leq |B|$ se $\hookrightarrow$ $\exists f: A \hookrightarrow B$

Ex: $|\{a\}| \leq |\{1,2\}|$

$f: \{a\} \to \{1,2\}$

$a \mapsto 2$

Teorema: $\leq$ é relação de ordem parcial

Prov: Procedimentos

1) $\leq$ é reflexiva

$|A| \leq |A| \Leftarrow \exists f: A \hookrightarrow A$

$x \mapsto x$

2) $\leq$ é simétrica

$\underbrace{|A| \leq |B|}_{\exists f: A \hookrightarrow B} \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$

$\exists f: A \hookrightarrow B \quad \exists g: B \hookrightarrow A$

$A \hookrightarrow B \hookrightarrow A$

$\Downarrow$ T.C-S-B

$\exists h: A \hookrightarrow\!\!\!\to B \iff |A| = |B|$

3) $\leq$ é transitiva

$|A| \leq |B| \leq |C|$

$\Downarrow$?

$|A| \leq |C|$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "fg"'] & B \arrow[r, hook] & C \end{tikzcd}$$

Corolário:

$A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$

Prova: $\exists f: A \hookrightarrow B$

$x \mapsto x$

* Para provar que $A \hookrightarrow\!\!\!\to B$

provar que $\exists f: A \hookrightarrow B$ e

$\exists g: B \hookrightarrow A$

$|]1,4[| = |[1,4]|$

provar: $f:]1,4[\hookrightarrow [1,4]$

$x \mapsto x$

arranjar um conjunto fechado no aberto

$[2,3] \subseteq]1,4[$

$g: [1,4] \hookrightarrow]1,4[$

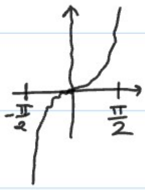
$R: [1,4] \hookrightarrow\!\!\!\to [2,3] \subseteq]1,4[$

$a \neq b$
$c \neq d$

$|[a,b]| = |]a,b[|$ $\qquad$ $|[c,d]| = |]c,d[|$

$a \neq b$

$|[a,b]| = |\mathbb{R}|$



$|\mathbb{R}| \overset{tg}{=} |]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[| = |[a,b]| \quad \forall a \neq b$

$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ & $|\mathbb{N}| \neq |[0,1]| = |\mathbb{R}| \Rightarrow |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

$\aleph_0 \leq |C| \leq \aleph_1 \Rightarrow |C| = \aleph_0 \vee |C| = \aleph_1$

$(\nexists_C)\ \aleph_0 \leq |C| \leq \aleph_1$

15 axiomas $\Rightarrow$ Teoria de conjuntos