Apontamentos

de

Matemática Discreta

Ano Lectivo 2014/2015

Henrique Cruz

Conteúdo

1 Agrupar Objectos: Conjuntos **1**
1.1 Teoria intuitiva de conjuntos 1
1.2 Conjunto universal e conjunto vazio 3
1.3 Igualdade de conjuntos 4
1.4 Conjunto Potência 5
1.5 Operações com conjuntos 5
1.6 Exercícios resolvidos 7
1.7 Exercícios Propostos 10

2 Comparar objectos: Relações **15**
2.1 Produto cartesiano de conjuntos 15
2.2 Operações com relações 17
2.3 Partições e relações de equivalência 19
2.4 O fecho de uma relação 23
2.4.1 O fecho reflexivo 24
2.4.2 O fecho simétrico 25
2.4.3 O fecho transitivo 25
2.5 Funções 26
2.6 Relações de ordem 29
2.6.1 Diagramas de Hasse 30
2.6.2 Reticulados 33
2.6.3 Reticulados distributivos e álgebras de Boole 39

3 Indução Matemática **47**
3.1 Primeiro Princípio de Indução 47
3.2 Segundo Princípio de Indução 52

3.3 Definições recursivas e Indução Estruturada . . . 55
3.3.1 Definição recursiva de uma função ou sequência . . . 56
3.3.2 Definição recursiva de conjuntos . . . 57
3.4 Indução Estrutural . . . 58
3.5 Indução Generalizada . . . 59

4 Contar Objectos: Combinatória 64
4.1 Princípios Fundamentais da Contagem . . . 64
4.2 Arranjos . . . 66
4.3 Permutações circulares . . . 70
4.4 Combinações . . . 72
4.5 Princípio da gaiola dos pombos . . . 77
4.6 O Teorema Binomial e Teorema Multinomial . . . 79

Introdução

Estas notas têm por objectivo auxiliar os Alunos do primeiro ciclo de Engenharia Informática na unidade curricular de **Matemática Discreta**. Obviamente, estas notas não pretendem (e não o fazem !) de forma alguma, substituir as aulas.

É muito importante corrigir eventuais erros que se encontrem nestas folhas. Assim, solicitamos aos leitores que, caso encontrem erros, o favor de os comunicar via E-Mail, para **hcruz@ubi.pt**.

Obviamente, agradecemos aos leitores quaisquer observações e sugestões que de algum modo levem a uma melhoria destas notas.

Capítulo 1

Agrupar Objectos: Conjuntos

Neste capítulo faremos a introdução a umas das teorias fundamentais da Matemática atual: A *Teoria dos Conjuntos*. Iniciaremos este capítulo com a noção intuitiva de conjunto, seguindo a abordagem feita por Georg Cantor em meados do século XIX. De seguida serão apresentadas as relações básicas que podemos estabelecer entre conjuntos: *igualdade, inclusão, inclusão própria e exclusão,* e vamos também descrever as duas formas mais comuns de definir conjuntos. Apresentaremos algumas operações básicas com conjuntos: *intersecção, união, diferença e complementação*; as operações união e intersecção serão generalizadas a coleções arbitrárias de conjuntos. Vamos também introduzir o conceito fundamental de *conjunto potência* de um conjunto, isto é o conjunto de todos os seus subconjuntos.

1.1 Teoria intuitiva de conjuntos

A Teoria de Conjuntos é uma área cuja importância é por demais reconhecida no quadro da Matemática actual, e essencial em muitas áreas do conhecimento como as ciências da computação. A forma como abordaremos a Teoria dos Conjuntos nestes apontamentos, segue a abordagem feita no final do século XIX por Georg Cantor (1845-1918), que definiu conjunto como sendo *uma colecção de objectos claramente distinguíveis uns dos outros, chamados* **elementos***, e que pode ser pensada como um todo.* É claro que não estamos na presença de uma definição rigorosa de conjunto. Estamos apenas na presença de uma explicação baseada na noção intuitiva de "colecção". Sem ter definido previamente o que se entende por colecção esta não será uma definição rigorosa para o termo conjunto. A fim de evitar definições circulares, os conceitos de conjunto e de elemento de um conjunto são duas noções que não se definem; um conceito quando é definido, é o em termos de outros conceitos mais simples e não é habitual considerar conceitos logicamente mais simples que os de conjunto e elemento de um conjunto. Conjunto e elemento de um conjunto são assim termos primitivos que se admite serem do conhecimento de todos (pelo menos de todos os que estudam Matemática). Esta secção destina-se a relembrar conceitos baseados na noção de conjunto aqui considerado de forma intuitiva. Trata-se de um conceito de extraordinária importância pois grande parte da Matemática dos nossos dias pode ser construída a partir dele. Por este facto, o estudo da construção de conceitos de Matemática a partir da noção primitiva de conjunto é muitas vezes se designado por **Fundamentos de Matemática**.

Um conjunto designa-se geralmente por uma letra maiúscula, reservando-se as letras minúsculas para os seus elementos. A expressão simbólica

$$x \in A$$

lê-se ≪x **pertence a** A≫ e significa que x é elemento de A. A negação de $x \in A$ representa-se simbolicamente por

$$x \notin A$$

e lê-se ≪x **não pertence a** A≫ (significa que x não é elemento de A).

Visto que um conjunto é uma coleção de objetos, um conjunto fica conhecido ou determinado quando forem conhecidos os seus elementos. Assim, se dois conjuntos A e B têm exactamente os mesmos elementos, então eles são afinal o mesmo conjunto, e podemos escrever $A = B$.

Um conjunto pode ser descrito em **extensão** (quando o número dos seus elementos for finito[1] e suficientemente pequeno) enumerando explicitamente todos os seus elementos colocados entre chavetas e separados por vírgulas ou em **compreensão**, enunciando uma propriedade que caracteriza todos os seus elementos (isto é, uma propriedade que os seus e só os seus elementos possuam).

Exemplos:

1. Conjunto das vogais $V = \{a, e, i, o, u\}$, descrito em extensão;

2. Conjunto dos números naturais pares

$$P = \{p \in \mathbb{N} : p = 2q \ \text{ para algum } q \in \mathbb{N}\},$$

[1]ver secção 1.3

descrito em compreensão.

A ideia de que um conjunto é determinado pelos seus elementos, isto é, pela sua extensão (enumerando os seus elementos ou dando uma propriedade comum a todos eles) é uma ideia fundamental da Teoria de Conjuntos.

1.2 Conjunto universal e conjunto vazio

Intuitivamente poderia parecer razoável que se considerasse como conjunto qualquer colecção de objectos (reais ou imaginários). Tal atitude, porém, conduz a situações paradoxais, como se deu conta o filósofo inglês Bertrand Russel, por volta de 1901. Bertrand Russel começa por observar que se se adoptar a concepção intuitiva de conjunto então pode dizer-se que alguns conjuntos são membros de si próprios enquanto outros não o são. Um conjunto de elefantes, por exemplo, não é um elefante e, portanto, não é um elemento de si próprio; no entanto, o conjunto de todas as ideias abstractas é , ele próprio, uma ideia abstracta, pelo que pertence a si próprio. As propriedades *ser membro de si próprio* e não ser membro de si próprio parecem assim ser propriedades. Não tem que ser assim: trata-se de uma mera convenção para facilitar o estudo, perfeitamente adequadas para definir conjuntos. Mas, como se verá, estas propriedades conduzem à criação de um paradoxo. Suponha-se (se possível) que se define o conjunto A como sendo o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si próprios, isto é ,

$$\mathbf{A} = \{X : X \notin X\}.$$

Coloca-se então a questão de saber se A é ou não elemento de si próprio. Se A não for membro de si próprio, $A \notin A$, então satisfaz a propriedade definidora de A e, portanto, $A \in \mathbf{A}$; se A pertence a si próprio, $A \in A$ então não satisfaz a propriedade definidora de A e, portanto, $A \notin \mathbf{A}$. De cada uma das possíveis hipóteses pode deduzir-se a sua negação, o que constitui um paradoxo. Para eliminar possibilidades deste tipo supor-se-á, de ora em diante, que os conjuntos considerados são todos constituídos por elementos de um conjunto U suficientemente grande, chamado **conjunto universal** ou **universo**. A ideia de um conjunto universal estará sempre presente mesmo quando não seja explicitamente mencionado. Em Matemática há conjuntos que constituem muito frequentemente os universos do discurso sendo, por isso, conveniente dispôr de nomes para eles. Alguns exemplos de tais conjuntos, dos mais importantes, são:

$\mathbb{R} = \{x : x \text{ é um número real}\}$;

$\mathbb{Q} = \{x : x \text{ é um número racional}\} = \{x : x = \dfrac{a}{b} \text{ , } a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}$;

$\mathbb{Z} = \{x : x \text{ é um número inteiro}\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$;

$\mathbb{N} = \{x : x \text{ é um número natural}\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;

Os símbolos $\emptyset$ ou $\{\}$ usam-se para denotar o conjunto vazio (conjunto sem elementos) que pode ser descrito, por exemplo, em compreensão por

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é simultaneamente par e impar }\},$$

ou

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é primo e } 32 \leq x \leq 36\}.$$

1.3 Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos são iguais se e só se tiverem os mesmos elementos. Se um conjunto A for igual a um conjunto B escreve-se $A = B$. Para verificar se dois conjuntos são iguais basta verificar se todo o elemento de A é elemento de B e se todo o elemento de B é elemento de A.

Se todo o elemento de A for elemento de B (independentemente do facto de todo o elemento de B poder ser ou não elemento de A) dir-se-á que o conjunto A **está contido** no conjunto B. Denotamos por $A \subseteq B$ e também se diz que A é **subconjunto** de B. Se os conjuntos A e B forem iguais então ter-se-á $A \subseteq B$ e, simultaneamente, $B \subseteq A$; reciprocamente, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ se verificarem simultaneamente então tem-se $A = B$.

Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$ dir-se-á que A é **subconjunto próprio** ou **parte própria** de B e escreve-se $A \subset B$.

De acordo com estas definições resulta que qualquer que seja o conjunto A, temos $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$. Considere-se a prova de, por exemplo, $\emptyset \subseteq A$ qualquer que seja o conjunto A. Esta prova pode ser feita por uma técnica chamad de *redução ao absurdo*. Suponhamos que existe um conjunto A para o qual a inclusão $\emptyset \subseteq A$ é falsa. Então $\emptyset$ possui um elemento que não pertence a A; ora como $\emptyset$ não possui elementos então aquela relação verifica-se sempre.

1.4 Conjunto Potência

Nesta secção vamos apresentar uma construção necessária no capítulo seguinte, onde estudaremos relações definidas num conjunto. Trata-se do conceito de *conjunto potência* de um conjunto. Seja X um conjunto qualquer. Partindo de X podemos definir um novo conjunto, o conjunto potência de X, representado por $\mathcal{P}(X)$, e cujos elementos são todos os subconjuntos de X.

Exemplo 1.4.1 *Seja* $X = \{a, b, c\}$*. Então*

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Note-se que $\mathcal{P}(X)$ *tem* 8*, isto é* 2^3 *elementos.*

Nota 1.4.1 *Não se esquecer os elementos "extremos" de* $\mathcal{P}(X)$*; "menor" de todos eles,* $\emptyset$ *e o maior de todos eles, o próprio* X*. Note-se também que* a, b *e* c **não são** *elementos de* $\mathcal{P}(X)$*, mas sim os conjuntos* $\{a\}, \{b\}$ *e* $\{c\}$*.*

1.5 Operações com conjuntos

Nesta secção, vamos considerar A e B dois conjuntos arbitrários.

Denota-se por $A \cup B$ a **união** (ou **reunião**) de A com B, que é o conjunto cujos elementos são os elementos de A e os elementos de B. Mais geralmente, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem conjuntos então a sua união

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

é o conjunto constituído pelos elementos que pertencem pelo menos a um dos conjuntos A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pode traduzir-se esta definição por

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algum } \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

A **intersecção** de A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto cujos elementos pertencem *simultaneamente* a A e a B. Analogamente, para $i = 1, 2, \ldots, n$, se A_i forem conjuntos então

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x : x \in A_i \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Os conjuntos A e B dizem-se **disjuntos** se e só se $A \cap B = \emptyset$, isto é, se não possuírem elementos comuns.

A **diferença**[2] entre A e B é o conjunto denotado por $A - B$ e definido por

$$A - B = \{x : x \in A \;\text{ e }\; x \notin B\},$$

ou seja, é o conjunto constituído pelos elementos de A que não pertencem a B. Em particular, se $A = U$, o universo, o conjunto $U - B = \{x : x \notin B\}$ dá-se o nome de conjunto **complementar** de B e denota-se por $\overline{B}$.

De seguida vamos ver algumas propriedades das operações com conjuntos estudadas até ao momento:

Teorema 1.5.1 *(Propriedade distributiva.) Sendo A,B e C três conjuntos arbitrários, tem-se:*

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Demonstração: Uma forma de mostrar a veracidade destas igualdades consiste em verificar que cada um dos seus membros está contido no outro. Far-se-á esta verificação para a primeira alínea deixando a outra a cargo do leitor interessado, como exercício. Para mostrar que se tem $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ é suficiente verificar que qualquer elemento $x \in A \cap (B \cup C)$ também pertence ao conjunto $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. De facto, se x pertence $A \cap (B \cup C)$ então x pertence a A e a $B \cup C$ ou seja que x pertence a A e x pertence a B ou x pertence a C. Então x pertence a A e a B, isto é , $x \in A \cap B$, ou x pertence a A e a C, isto é , $x \in A \cap C$. Consequentemente, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, e portanto,

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C), \tag{1.1}$$

[2] Esta operação já é familiar, por exemplo, $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$.

como se pretendia mostrar. Suponha-se agora que $s \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Então $s \in A \cap B$ ou $s \in A \cap C$, ou seja, s pertence simultaneamente a A e B ou s pertence simultaneamente a A e C. Portanto, s pertence a A e pertence a B ou a C, donde resulta

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C). \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2) resulta a igualdade pretendida. ♣

Teorema 1.5.2 *(Leis de De Morgan) Sendo A e B dois conjuntos arbitrários, tem-se:*

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Demonstração: Tal como no teorema anterior, far-se-á a demonstração da primeira alínea deixando a segunda a cargo do leitor interessado, como exercício. Para mostrar que se tem $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ é suficiente verificar que qualquer elemento $x \in \overline{A \cap B}$ também pertence ao conjunto $\overline{A} \cup \overline{B}$. Da hipótese feita resulta que se x não pertence a $A \cap B$ e, portanto, não pertence simultaneamente a A e a B. Logo pertencerá ao complementar de A, $\overline{A}$ ou pertencerá ao complementar de B, $\overline{B}$ isto é , $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ e portanto

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{1.3}$$

Suponha-se agora que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Então $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$ e, portanto, $x \notin A$ ou $x \notin B$, donde decorre que $x \notin A \cap B$. Consequentemente, $x \in \overline{A \cap B}$ e portanto,

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}. \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4) resulta a igualdade pretendida. ♣

1.6 Exercícios resolvidos

1. Sejam A e B dois conjuntos. Prove as chamadas *Leis de Absorção*:

   (a) $A \cup (A \cap B) = A$;

(b) $A \cap (A \cup B) = A$.

RESOLUÇÃO: Vamos usar o método de inclusão mútua. Seja $x \in A \cup (A \cap B)$. Então per definição de união

$$x \in A \quad \text{ou} \quad x \in A \cap B.$$

Em ambos os casos vem $x \in A$ logo $A \cup (A \cap B) \subseteq A$.

Seja agora $x \in A$. Então x é elemento de $A \cup X$, qualquer que seja o conjunto X. Fazendo $X = A \cap B$ vem

$$x \in A \cup (A \cap B).$$

$\square$

Provemos agora que $A \cap (A \cup B) = A$. Vamos usar novamente o método de inclusão mútua. Seja $x \in A \cap (A \cup B)$. Então

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \in A \cup B.$$

Como $x \in A$ vem $A \cap (A \cup B) \subseteq A$.

Seja agora $x \in A$. Então $x \in A \cup B$. Por definição de intersecção $x \in A \cap (A \cup B)$, e portanto

$$A \subseteq A \cap (A \cup B).$$

$\square$

2. Sejam A, A', B e B' conjuntos. Mostre que se:

   (a) Se $A \subseteq A'$ então $A - B \subseteq A' - B$;

   (b) Se $B \subseteq B'$ então $A - B' \subseteq A - B$;

RESOLUÇÃO: Suponhamos que $A \subseteq A'$ e seja $x \in A - B$ Então, por definição de diferença de conjuntos,

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \notin B.$$

Como $x \in A$ e $A \subseteq A'$ concluímos que $x \in A'$. Então

$$x \in A' \quad \text{e} \quad x \notin B,$$

logo,

$$x \in A' - B.$$

Provámos assim que todo o elemento de $A - B$ é também elemento de $A' - B$ portanto, $A - B \subseteq A' - B$. $\square$

Passemos à alínea seguinte:

Suponhamos que $B \subseteq B'$, e seja $x \in A - B'$. Então, por definição de diferença de conjuntos,

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \notin B'.$$

Se x não é elemento de B' então x também não é elemento de B porque $B \subseteq B'$. Podemos então escrever

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \notin B.$$

Isto significa que $x \in A - B$ logo

$$A - B' \subseteq A - B.$$

$\square$

3. Sejam A, B e C conjuntos. Prove ou refute:

$$(A - B) - C = A - (B - C).$$

RESOLUÇÃO: A afirmação é **falsa**:

Seja $A = B = C = X \neq \emptyset$. Então,

$$(A - B) - C = (X - X) - X = \emptyset - X = \emptyset,$$

e

$$A - (B - C) = X - (X - X) = X - \emptyset = X.$$

1.7 Exercícios Propostos

1. Considere os conjuntos

$$\begin{array}{lll} A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} & B = \{4, 1, 3\} & C = \{1, 3, 5\} \\ D = \{\{1\}, 1, 2, \{2\}, 3, \{3\}, 4, \{4\}\} & E = \{4, \{3\}, 2, 1\} & F = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\} \end{array}$$

   e sejam dados $a_1 = 1$, $a_2 = \{2\}$, $a_3 = 2$, $a_4 = \{2, 1\}$ e $a_5 = \{3\}$.

   Estabeleça as relações de pertence e/ou inclusão (ou nenhuma delas) existentes entre cada a_i $(i = 1, \ldots, 5)$ e cada um dos conjuntos A, B, C, D, E e F.

2. Defina cada um dos seguintes conjuntos através de uma propriedade adequada:

   (a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$;

   (b) $B = \{\ldots, -1/3125, 1/256, -1/27, 1/4, -1, 1, 4, 27, 256, 3125, \ldots\}$;

   (c) $C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots\}$;

   (d) $D = \{1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots\}$

3. Determine os elementos de cada um conjuntos

   (a) $A = \{x^2 - x : x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$;

   (b) $B = \{(-1)^n : n \in \mathbb{N}_0\}$;

   (c) $C = \{x \in \mathbb{N}_0 : x^2 + 22 = 13x\}$.

4. Determine quais dos conjuntos seguintes são iguais:

$$\begin{aligned} &A = \{-n+1 : n \in \mathbb{Z}\}, && D = \{-2p+2 : p \in \mathbb{Z}\}, \\ &B = \{2m+2 : m \in \mathbb{Z}\}, && E = \{5q : q \in \mathbb{Z}\}, \\ &F = \{2r : r \in \mathbb{Z}\}, && G = \{5-s+1 : s \in \mathbb{Z}\}, \\ &C = \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

5. Qual é a cardinalidade dos seguintes conjuntos

$$\{1, 2, \emptyset\}, \ \ \{1, \{1, \{\emptyset\}\}\}, \ \ \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{\{1\}\}\}$$

6. Seja $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ o conjunto universal. Dados os conjuntos

$$A = \{1, 3, 8, 7\}, \quad B = \{1, 3, 4, 5, 7\} \quad \text{e} \quad C = \{0, 2, 4, 6, 8\},$$

defina em extensão os conjuntos:

(a) $A - B$;
(b) $B \cup C$;
(c) $B \cup \overline{C}$;
(d) $A - (B \cup C)$;
(e) $(A - B) \cup (A - C)$;
(f) $(A - B) \cup C$;
(g) $A \cup \emptyset$;
(h) $B - \emptyset$;
(i) $A \cap \emptyset$;
(j) $\overline{U}$.

7. Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer contidos no universo U. Mostre que:

(a) $A \cup \overline{A} = U$;
(b) $A \cap \overline{A} = \emptyset$;
(c) $A - B \subseteq A$;
(d) $\overline{\overline{A}} = A$;
(e) $A - B = A \cap \overline{B}$.

8. Sejam A e B dois subconjuntos do universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tais que

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}\,, \ \ A \cap B = \{3\}\,, \ \ A - B = \{1, 2\}\,, \ \ \overline{A} = \{4, 5, 6\}\,.$$

Determine A, B e $B - A$.

9. As seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas? Apresente uma demonstração para as afirmações verdadeiras ou um contraexemplo para as afirmações falsas. **Não confundir $\subseteq$ com $\subset$.**

   (a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$;

   (b) Se $A \subseteq B$ e $C \subseteq B$ então $A \subseteq C$;

   (c) Se $A \subset B$ então $A \subseteq B$ e $B \nsubseteq A$;

   (d) Se $A \subseteq B$ então $A \subset B$ ou $A = B$;

   (e) Se $A = B$ então nem $A \subset B$ nem $B \subset A$;

   (f) Se nem $A \subset B$ nem $B \subset A$ então $A = B$;

   (g) Se $A \subseteq B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$;

   (h) Se $A \subset B$ e $B \subseteq C$ então $A \subset C$.

10. Mostre que os conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ e $\{\{\emptyset\}\}$ são distintos dois a dois;

11. Mostre que se A for um subconjunto do conjunto vazio então $A = \emptyset$.

12. Dado um conjunto arbitrário A,

    (a) será A elemento do conjunto $\{A\}$?

    (b) será $\{A\}$ elemento do conjunto $\{A\}$?

    (c) será $\{A\}$ um subconjunto de $\{A\}$?

13. Dados os conjuntos

$$A = \{5, 10, 15, 20, \ldots\} \quad B = \{7, 17, 27, 37, ...\} \quad C = \{300, 301, 302, \ldots, 399, 400\}$$
$$D = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...\} \quad E = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \ldots\}$$

    Indique, para cada um deles, uma propriedade que o especifique completamente.

14. Indique quais dos conjuntos que se seguem são iguais:

$$A = \{-1, 1, 2\} \quad B = \{-1, 2, 1\} \quad C = \{0, 1, 2\}$$
$$D = \{2, 1, -1, -2\} \quad E = \{x : x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = 1\}$$

15. Determinar em extensão os seguintes conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 8 = x + 3\} \qquad B = \{x \in \mathbb{N} : (x-2)(x-5) = 0\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + 22 = 13x\} \qquad D = \{x \in \mathbb{N} : \sqrt{x-1} + \sqrt{3x-2} = 3\}$$
$$E = \{x \in \mathbb{N} : (x+1)(x+2) < 11\}$$

16. Indique quais dos conjuntos que se seguem são finitos e os que são infinitos:

    (a) O conjunto das linhas do plano que são paralelas ao eixo yy.

    (b) O conjunto das letras do alfabeto.

    (c) O conjunto dos múltiplos de 10.

    (d) O conjunto das raízes da equação $x^{38} + 42x^{23} - 17x^{18} - 2x^5 + 19 = 0$

    (e) O conjunto das circunferências centradas na origem.

17. Sendo P, Q e R três conjuntos, indicar quais das afirmações que se seguem são verdadeiras.

    (a) Se P é um elemento de Q e Q é um subconjunto de R, então P é um elemento de R;

    (b) Se P é um elemento de Q e Q é um subconjunto de R, então P é também um subconjunto de R;

    (c) Se P é um subconjunto de Q e Q é um elemento de R, então P é um elemento de R;

    (d) Se P é um subconjunto de Q e Q é um elemento de R, então P é um subconjunto de R.

18. Sendo P, Q,R três conjuntos, prove que:

    (a) $(P - Q) - R = P - (Q \cup R)$;

    (b) $(P - Q) - R = (P - R) - Q$;

    (c) $(P - Q) - R = (P - R) - (Q - R)$;

19. Chama-se **diferença simétrica** de dois conjuntos A e B ao conjunto constituído pelos elementos que pertencem a A ou a B, mas não a ambos simultaneamente. Denotando por $A \Delta B$ a diferença simétrica de A e B , mostre que $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

20. Se a diferença simétrica entre dois conjuntos A e B for igual ao conjunto A que poderá dizer-se a respeito de A e B?

21. Quais das igualdades que se seguem são verdadeiras e quais são falsas:

    (a) $A\Delta(B \cap C) = (A\Delta B) \cap (A\Delta C)$;
    (b) $A\Delta(B \cup C) = (A\Delta B) \cup (A\Delta C)$;
    (c) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$;
    (d) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$;
    (e) $A \cup (B\Delta C) = (A \cup B)\Delta(A \cup C)$.

22. Se a diferença simétrica de A e B for igual à diferença simétrica de A e C poderá concluir-se que se tem, necessariamente, $B = C$?

23. Sejam A e B dois conjuntos.

    (a) Se $A \subseteq B$ então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$;
    (b) Prove ou refute, apresentando um contra-exemplo, que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;
    (c) Prove ou refute, apresentando um contra-exemplo, que $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;

Capítulo 2

Comparar objectos: Relações

2.1 Produto cartesiano de conjuntos

Os conjuntos $\{a,b\}$, $\{b,a\}$ são iguais porque têm os mesmos elementos; a ordem pela qual se escrevem os elementos é irrelevante. Em certas situações, porém, é necessário distinguir "conjuntos"com os mesmos elementos colocados por ordens diferentes ou "conjuntos"nos quais um mesmo elemento aparece mais que uma vez. Tais situações aparecem, por exemplo, em geometria analítica plana onde a cada ponto do plano se associa o par de números reais (x,y) que são as suas coordenadas: $(2,3)$ e $(3,2)$, por exemplo, são coordenadas de dois pontos distintos. Expressões como estas são designadas por **pares ordenados**. À expressão do tipo (a,b,c) chamamos **ternos ordenados** e, de um modo geral, as expressões da forma $(a_1,a_2,...,a_n)$ designam-se por **n-uplos** ou **sequências ordenadas de n elementos**.

Dois pares ordenados são iguais se tiverem o mesmo primeiro elemento e o mesmo segundo elemento, isto é, $(a,b)=(c,d)$ se e só se $a=c$ e $b=d$. Considerações análogas se podem fazer relativamente à igualdade de dois n-uplos.

Definição 2.1.1 *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Chamamos o* **produto cartesiano** *de A por B, e representa-se por $A\times B$, o conjunto de todos os pares ordenados (a,b) tais que $a\in A$ e $b\in B$, ou seja*

$$A\times B=\{(a,b):a\in A\wedge b\in B\}\ .$$

No caso particular em que $A=B$ obtemos o conjunto $A^2=\{(a_1,a_2):a_1,a_2\in A\}$.

Esta definição pode ser estendida a mais de dois conjuntos de modo natural. Assim, sendo A, B e C três conjuntos quaisquer, o produto cartesiano de A por B por C, denotado por

$A \times B \times C$, é o conjunto de todos os ternos ordenados (x, y, z) onde $x \in A, y \in B$ e $z \in C$:

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) : x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\} .$$

Analogamente, o produto cartesiano de n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, é definido por

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n\} .$$

Se, em particular, tivermos $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ obtemos

$$A^n = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in A \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n\},$$

que é a potência cartesiana de ordem n do conjunto A.

Definição 2.1.2 *Chamamos* **relação binária** *de A para B a todo o subconjunto não vazio R do produto cartesiano $A \times B$. No caso particular em que $A = B$ então R diz-se uma relação binária definida em A.*

Exemplo:

Sejam dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{t, s\}$.

Então $A \times B = \{(1, t); (1, s); (2, t); (2, s); (3, t); (3, s)\}$.

Considere $R = \{(1, t); (2, s); (3, t)\}$. Como R é um subconjunto não vazio de $A \times B$, logo R é uma relação binária de A para B.

Como $(1, t) \in R$, dizemos que 1 se relaciona (ou está relacionado) por meio de R com t. Mas por $(2, t) \notin R$, dizemos que 2 não se relaciona com t por meio da relação R.

Notação: Em vez de $(a, b) \in R$ podemos escrever aRb.

Exercícios

1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Determine
   (a) $A \times (A - \{2\})$;
   (b) A^2.

2. Considere $card(A) = 4$. Determine $card(A^3)$.

3. Sejam dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$ e $C = \{4, 5, 6\}$.

   (a) Descrever em extensão os conjuntos $A{\times}B, B{\times}A$ e $A{\times}C$;

   (b) Dar exemplos de relações de A para B e de B para A com quatro elementos;

4. Sejam A, B, C e D conjuntos arbitrários. Provar ou dar contra-exemplos para as seguintes conjecturas:

   (a) $A{\times}(B \cup C) = (A{\times}B) \cup (A{\times}C)$;

   (b) $A{\times}(B \cap C) = (A{\times}B) \cap (A{\times}C)$;

   (c) $(A{\times}B) \cap (\overline{A}{\times}B) = \emptyset$;

   (d) $[A \subseteq B \wedge C \subseteq D] \Rightarrow A{\times}C \subseteq B{\times}D$;

   (e) $A \cup (B{\times}C) = (A \cup B){\times}(A \cup C)$;

   (f) $A \cap (B{\times}C) = (A \cap B){\times}(A \cap C)$;

   (g) $(A{\times}B) \cap (C{\times}D) = (A \cap C){\times}(B \cap D)$

2.2 Operações com relações

Como as relações são conjuntos podemos aplicar-lhes as operações com conjuntos vistas no capítulo anterior. Assim, se R e S são duas relações de A para B isto é dois subconjuntos de $A \times B$ podemos definir as relações $R \cap S$, $R \cup S$ ou a relação $\overline{R} = (A \times B) - R$. Esta última relação é chamada de **complementar** da relação R. Para além destas relações existe uma outra relação que se pode construir a partir da relação R que é chamada a **relação inversa** de R e representada por R^{-1}. Se R é uma relação de A para B, R^{-1} é uma relação de B para A (um subconjunto de $B \times A$) definida por

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}.$$

Vejamos ainda mais duas operações com relações: a **junção** e a **composição**. Começemos pela junção de relações. Suponhamos que na divisão de pessoal de uma empresa, um funcionário possui uma base de dados com os números de identificação e o nome de todos os trabalhadores da empresa. Outro funcionário da mesma divisão possui outra base de dados com o nome e de todos os trabalhadores da empresa e a respectiva morada (ou moradas). Cada uma destas bases de dados pode ser vista como uma relação binária. De facto, tendo um conjunto A de todos os números de identificação dos trabalhadores da empresa, um conjunto B com os nomes dos trabalhadores da mesma empresa e um conjunto C de todas as moradas dos trabalhadores dessa empresa, uma das bases de dados será um subconjunto R de $A \times B$ e a outra base de dados será um subconjunto S de $B \times C$. Claro que estas relações têm algumas propriedades especiais. Por exemplo, a cada número de identificação não podemos associar mais do que um nome. Claro que a cada funcionário pode ser associada mais do que uma morada (residência habitual, de férias etc). Pretendemos construir uma única base de dados contendo toda a informação. Uma maneira de construir essa base de dados será construir uma relação de $A \times B \times C$ formada pelos ternos (a, b, c) em que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$. Isto é claramente uma operação entre duas relações binárias. A relação (base de dados) resultante contém toda a informação pretendida. Podemos assim definir uma nova operação com relações a *junção* das relações $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$ definida for

$$j(R, S) = \{(a, b, c) \in A \times B \times C : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}.$$

Ainda que a operação "junção"seja muito utilizada quando se trabalha com bases de dados, ela não ocorre com frequência no nosso dia à dia. Existe no entanto outra operação, a **composição**, que ocorre com maior frequência na vida diária. Esta operação foi estudada no século XIX por Augustus de Morgan que lhe chamou "produto relativo de relações"mas atualmente é conhecida por composição. Dadas as relações $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$ a sua composição, $S \circ R$ (lê-se S após R), é uma relação binária de A em C (um subconjunto de $A \times C$) dado por

$$S \circ R = \{(a, c) : \text{ existe } \ x \in B \ \text{ tal que } \ (a, x) \in R \wedge (x, c) \in S\}.$$

Exercícios

1. Sejam R e S são duas relações de A para B. Mostre que

   (a) $(R^{-1})^{-1} = R$;

   (b) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;

   (c) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;

(d) $(A \times B)^{-1} = B \times A$;

(e) $(\overline{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}$;

(f) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$;

(g) Se $A = B$ então $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$;

(h) Se $R \subseteq S$ então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

2. Sejam R_1,R_2 e R relações definidas num conjunto A. Mostre que

(a) $(R_1 \cup R_2) \circ R = (R_1 \circ R) \cup (R_2 \circ R)$;

(b) $R \circ (R_1 \cup R_2) = (R \circ R_1) \cup (R \circ R_2)$;

(c) Mostre que nem sempre se tem $(R_1 \cap R_2) \circ R = (R_1 \circ R) \cap (R_2 \circ R)$ mas $(R_1 \cap R_2) \circ R \subset (R_1 \circ R) \cap (R_2 \circ R)$;

2.3 Partições e relações de equivalência

Definição 2.3.1 *Seja A um conjunto não vazio. Chama-se partição de A a uma família P de subconjuntos não vazios de A tais que:*

1. *Cada elemento de A pertence a um e um só conjunto de P;*

2. *Se A_1 e A_2 forem dois elementos distintos da partição P então $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.*

Portanto, a união de todos os subconjuntos de A que pertencem a P é igual a A.

Exemplo:

Seja $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Considere os seguintes subconjuntos de A:

$$A_1 = \{a, b, c, d\},\ A_2 = \{a, c, e, f, g, h\},\ A_3 = \{a, c, e, g\},\ A_4 = \{b, d\},\ A_5 = \{f, h\}\ .$$

Então

- $\{A_1, A_2\}$ não é uma partição de A visto que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$;

- $\{A_1, A_5\}$ também não é uma partição de A visto que $e \notin A_1$ e $e \notin A_5$;

- a família $\{A_3, A_4, A_5\}$ é uma partição de A.

Definição 2.3.2 *Seja A um conjunto não vazio e R uma relação binária definida em A.*

A relação $R \subseteq A^2$ diz-se uma **relação de equivalência** *em A se satisfizer as seguintes propriedades:*

1. *Reflexividade:* $\forall_{a \in A} : (a, a) \in R$ *, ou seja,* $\forall_{a \in A} : aRa$
2. *Simetria:* $\forall_{a,b \in A} : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ *, ou seja,* $\forall_{a,b \in A} : [aRb \Rightarrow bRa]$
3. *Transitividade:* $\forall_{a,b,c \in A} : [(\ (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R\ ) \Rightarrow (a, c) \in R]$ *, ou seja,*

   $\forall_{a,b,c \in A} : [(\ aRb \wedge bRc\ ) \Rightarrow aRc]$.

Definição 2.3.3 *Sejam A um conjunto e R uma relação de equivalência em A.*

Chama-se **classe de equivalência** *de um elemento $a \in A$ ao conjunto dos elementos de A que se relacionam com $a \in A$ por meio da relação R, denotado por $[a]$. Ou seja,*

$$[a] = \{x \in A : (x, a) \in R\}\ .$$

O elemento $a \in A$ designa-se por **representante** da classe.

Teorema 2.3.1 *Seja R uma relação de equivalência definida num conjunto A. Então:*

1. *Cada elemento de A pertence à sua classe de equivalência, isto é , $a \in [a]$, qualquer que seja $a \in A$ e portanto $[a] \neq \emptyset$;*
2. *A reunião de todas as classes de equivalência é igual ao conjunto A, isto é, $\cup_{a \in A}[a] = A$;*
3. *Dados dois elementos $a, b \in A$ tem-se aRb se só se $[a] = [b]$ isto é,*

$$\forall_{a,b \in A} : aRb \Leftrightarrow [a] = [b]$$

4. *Se para de dois elementos $a, b \in A$, $(a, b) \notin R$ então $[a] \cap [b] = \emptyset$.*

Demonstração:

1. Seja $a \in A$. Já vimos que se $R \subseteq A^2$ é uma relação de equivalência então R é uma relação reflexiva logo aRa é uma proposição verdadeira e, portanto, $a \in [a]$.

2. Decorre imediatamente de (1).

3. Sejam $a, b \in A$. Se $[a] = [b]$ então, como $a \in [a]$ e $[a] = [b]$ vem $a \in [b]$, donde, aRb. Reciprocamente, suponha-se que se tem aRb. Então se $x \in [a]$ tem-se xRa e, portanto, atendendo à transitividade de R será também xRb o que significa que $x \in [b]$. Isto significa que, qualquer que seja $x \in A$, se $x \in [a]$ tem-se também que $x \in [b]$; de modo semelhante (usando adicionalmente a simetria da rela¸cão R) se prova que qualquer que seja $x \in A$ se $x \in [b]$ então será necessariamente $x \in [a]$. Consequentemente $[a] = [b]$.

4. Equivale a provar que se $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ então aRb. Se existir $x \in A$ tal que $x \in [a]$ e $x \in [b]$ então tem-se que xRa e xRb, donde, por simetria e transitividade, se tem também aRb, como se pretendia mostrar.

Definição 2.3.4 *Seja A um conjunto e R uma relação de equivalência em A.*

Ao conjunto de todas as classes de equivalência determinadas em A por R chama-se ***conjunto quociente*** *de A por R e denota-se por A/R. Isto é,*

$$A/R = \{[a] : a \in A\} .$$

Portanto, uma relação de equivalência num conjunto não vazio origina uma partição desse conjunto em classes de equivalência. A afirmação reciproca também é verdadeira:

Teorema 2.3.2 *Seja P uma partição de um conjunto não vazio A e R uma relação definida em A por aRb se e só se a e b pertencem ao mesmo subconjunto pertencente a P. Então R é uma relação de equivalência.*

Demonstração: Exercício.

Exercício resolvido:

Seja dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e considere-se a partição $P = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ de A. Determinar a relação de equivalência de A determinada pela partição P.

Resolução: Uma vez que que queremos construir uma relação de equivalência cujas classes de equivalência são os elementos de P, isto é, $\{1, 2, 3\}$ e $\{4\}$, então a relação de equivalência define apenas duas classes de equivalêcia. Sendo a relação de equivalência será uma relação reflexiva. Portanto, R terá de conter os pares $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$. Os reatantes pares que fazem parte da relação são determinados pelos elementos de P Assim, 4 apenas se relaciona com ele próprio. Quanto a 1, relaciona-se com 2 e 3, logo 2 e 3 relacionam-se com 1, e 2 relaciona-se com 3, logo 3 relaciona-se com 2. Assim,

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4)\}$$

é a relação de equivalência **induzida** em A pela partição P.

Exercícios

1. Mostre que a união e a intersecção de duas relações simétricas é uma relação simétrica.

2. Mostre que R é transitiva se e só se $R \circ R \subseteq R$.

3. Mostre que as relações $R \cap R^{-1}$ e $R \cup R^{-1}$ são relações simétricas.

4. Mostre que uma relação R definida num conjunto A é simétrica se e só se $R = R^{-1}$.

5. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ Quais das relações que se seguem são de equivalência em A?

   (a) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1)\}$

   (b) $\{(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$;

   (c) $\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3),(4,4)\}$.

6. Seja $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } x - y \text{ é inteiro}\}$. Mostre que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

7. Para cada uma das relações de equivalência seguintes determine os respectivos conjuntos quociente:

   (a) No conjunto $\mathbb{N}$ a relação "xRy se e só se $x = y$";

   (b) No conjunto $\{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$;

   (c) Em $\mathbb{Z}$, xRy se e só se $x - y$ múltiplo de 4.

8. Apresente um conjunto S e uma relação R definida em S que seja:

   (a) É reflexiva e simétrica mas não é transitiva;

   (b) É reflexiva e transitiva mas não é simétrica;

(c) Não é reflexiva nem simétrica mas é transitiva;

(d) É reflexiva mas não é simétrica nem transitiva.

9. Para a relação de equivalência T definida em $\{1,2,3,4,5\}$ por

$$\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(3,2),(2,3),(3,3),(4,4),(5,5),(4,5),(5,4)\},$$

determine [4] e [3].

10. Dada a partição $\{\{1,2,3\},\{4\},\{5,6\}\}$ do conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$, determine a correspondente relação de equivalência.

11. Considere em $\mathbb{Z}$ a relação binária $\sim$ dada por "$x \sim y$ se e só se $x-y$ é múltiplo de 5".

    (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência de $\mathbb{Z}$;

    (b) Quantos elementos tem o conjunto quociente $\frac{\mathbb{Z}}{\sim}$?

    (c) Indique um número inteiro $x \neq 75$ tal que $[75]=[x]$. Justifique;

    (d) Indique um número inteiro y tal que $[75] \cap [y] = \emptyset$. Justifique;

    NOTA: [75] representa a classe de equivalência de 75 por esta relação de equivalência.

12. Mostre que se R é uma relação reflexiva e transitiva definida num conjunto A então a relação S definida também em A por

$$S = \{(a,b) \in A \times A : (a,b),(b,a) \in R\},$$

é uma relação de equivalência de A.

2.4 O fecho de uma relação

Seja R uma relação definida num conjunto A ($R \subseteq A \times A$). O **fecho** da relação R a respeito de uma propriedade P é a relação que se obtém de R adicionando o menor número de elementos possível a R de modo que a nova relação tenha a propriedade P. Denotamos por $cl_P(R)$ o fecho da relação R em relação à propriedade P. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. $R \subseteq cl_P(R)$;

2. $cl_P(R)$ tem a propriedade P;

3. Se S é outra relação que satisfaz a propriedade P e se $R \subseteq S$ então $cl_P(R) \subseteq S$.

O próximo teorema apresenta um modo determinar o fecho de uma relação a respeito de uma propriedade P:

Teorema 2.4.1 *Seja R uma relação definida num conjunto A. Então*

$$cl_P(R) = \bigcap_{S \in \mathcal{P}} S,$$

onde

$$\mathcal{P} = \{S \subseteq A \times A : R \subseteq S \text{ e } S \text{ tem a propriedade } P\}.$$

2.4.1 O fecho reflexivo

Definição 2.4.1 *Seja A um conjunto. A relação $\Delta = \{(x, x) : x \in A\}$ é chamada* **relação diagonal** *ou* **relação identidade** *de A.*

Teorema 2.4.2 *Seja R uma relação definida num conjunto A. O* **fecho reflexivo** *da relação R, denotado por $r(R)$, é a relação $R \cup \Delta$.*

Demonstração: A relação $R \cup \Delta$ é uma relação reflexiva porque, para todo $a \in A$, $(a, a) \in \Delta$ logo $(a, a) \in R \cup \Delta$. Seja agora S uma relação reflexiva que contém R. Como S é reflexiva, para todo $a \in A$, $(a, a) \in S$ logo $\Delta \subseteq S$. Como $R \subseteq S$ vem $R \cup \Delta \subseteq S$. Então $R \cup \Delta$ é uma relação reflexiva que está contida em todas as relações reflexivas que contém R. Por definição $R \cup \Delta$ é o fecho reflexivo de R. $\square$

2.4.2 O fecho simétrico

Teorema 2.4.3 *Seja R uma relação definida num conjunto A. O* **fecho simétrico** *da relação R, denotado por $s(R)$, é a relação $R \cup R^{-1}$, onde R^{-1} é a relação inversa de R.*

Demonstração: A relação $R \cup R^{-1}$ é simétrica e $R \subseteq R \cup R^{-1}$. Para concluir a demonstração resta provar que se S é uma relação simétrica e se $R \subseteq S$ então $R \cup R^{-1} \subseteq S$. Seja $(a,b) \in R \cup R^{-1}$. Vamos provar que $(a,b) \in S$. Se $(a,b) \in R \cup R^{-1}$ então,

$$(a,b) \in R \quad \text{ou} \quad (a,b) \in R^{-1}.$$

Se $(a,b) \in R$ então como $R \subseteq S$ vem $(a,b) \in S$.

Se $(a,b) \in R^{-1}$ então $(b,a) \in R$. Como $R \subseteq S$ vem $(b,a) \in S$ e como S é simétrica vem $(a,b) \in S$, o que conclui a demonstração. □

2.4.3 O fecho transitivo

Seja R uma relação definida no conjunto A, isto é $R \subseteq A \times A$, que **não é** transitiva. Como "alargar"a relação R de modo que a obter uma relação transitiva? Como $R \subseteq A \times A$ e $A \times A$ é uma relação transitiva, podemos "completar"a relação R com os elementos necessários para obter $A \times A$. No entanto em geral não é necessário juntar a R tantos elementos. Podemos obter relações transitivas que contenham R mas com menos elementos que $A \times A$. O resultado fundamental que permite esta construção é o seguinte:

Proposição 2.4.1 *A intersecção de duas relações transitivas é uma relação transitiva*

Demostração: Exercício obrigatório

Exercício 2.4.1 *Dê o exemplo de duas relações transitivas cuja união não é transitiva.*

Podemos então definir o fecho transitivo de uma relação S como sendo a intersecção de todas as relações transitivas que contém R, isto é, o fecho transitivo da relação R, $t(R)$ é dado por

$$t(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A : R \subseteq S \quad \text{e} \quad S \quad \text{é transitiva}\ \}$$

Exercícios

1. Seja R uma relação reflexiva definida num conjunto A Prove ou refute, apresentado um contraexemplo.

   (a) $s(R)$ é reflexiva;

   (b) $t(R)$ é reflexiva;

2. Seja R uma relação transitiva definida num conjunto A Prove ou refute, apresentado um contraexemplo.

   (a) $r(R)$ é transitiva;

   (b) $s(R)$ é transitiva;

2.5 Funções

Definição 2.5.1 *Sejam X e Y dois conjuntos. Uma **função** ou **aplicação** f de X para Y é uma relação R de X em Y (isto é $R \subseteq X \times Y$) tal que, para qualquer $x \in X$, existe um e um só $y \in Y$ tal que $(x, y) \in R$. Simbolicamente*

$$\forall_{x \in X} \exists^1_{y \in Y} : (x, y) \in R \, .$$

Habitualmente as aplicações são denotadas pelas letras minúsculas f, g, h,.... Se f é uma aplicação de X em Y escrevemos

$$f : X \longrightarrow Y \, ,$$

e, para cada $x \in X$ denotamos por $f(x)$ o único elemento de Y tal que $(x, y) \in f$. Este elemento $f(x)$ é designado por **imagem** de x por f.

Dada uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ chamamos a X o **conjunto de partida** de f, a Y o **conjunto de chegada** de f e o **contradomínio** de f é o conjunto das imagens, por f, de todos os elementos $x \in X$, isto é

$$CD_f := Im(f) = \{f(x) : x \in X\} = \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\} \, .$$

Exemplo:

Sejam X = {1, 2, 3} e Y = {a; b; c; d}. Então:

1. $R = \{(1,b),(2,c);(3,d);(1;,d)\}$ é uma relação de X em Y , mas não é uma aplicação de X em Y (porquê?) .
2. $R = \{(1,a),(2,c),(3,c)\}$ é uma aplicação de X em Y .
3. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2\}$ é uma relação definida em $\mathbb{R}$ mas não é uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.
4. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 = y\}$ é uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Definição 2.5.2 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação e sejam $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. Designamos por:*

1. **imagem de A (por f)** *ao conjunto* $f^{\rightarrow}(A) = \{f(x) : x \in A\}$ *;*

2. **imagem recíproca (ou pré-imagem) de B (por f)** *ao conjunto*

$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}\,.$$

<u>**Nota:**</u> Se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, uma função $f : X \longrightarrow X$ pode ser representada por

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & \ldots & f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Exemplo:

Sejam $X = \{1,2,3,4,5\}$ e $f : X \longrightarrow X$ a aplicação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Considere $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{2,4\}$. Então,

$$f^{\rightarrow}(A) = \{1,2\} \quad \text{e} \quad f^{\leftarrow}(B) = \{3,4,5\}\,.$$

Definição 2.5.3 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação. Dizemos que:*

1. *f é injectiva se* $\forall_{a,b\in X} : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

   ou, equivalentemente, $\forall_{a,b\in X} : a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ *.*

2. *f é sobrejectiva se $f(X) = Y$ isto é, se* $\forall_{y\in Y}\exists_{x\in X} : y = f(x)$ *.*

3. *Uma aplicação que é simultaneamente injectiva e sobrejectiva diz-se* **bijectiva**.

Exemplo:

1. A aplicação $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n + 1$ é injectiva mas não é sobrejectiva (porquê?).

2. Seja X um conjunto qualquer e $f : X \longrightarrow X$ a aplicação definida por $f(x) = x$, para qualquer $x \in X$. Então, f é injectiva e sobrejectiva, donde se conclui que f é bijectiva. Esta aplicação designa-se por aplicação identidade de X e denota-se por 1_X ou id_X.

Exercícios

1. Indique todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

2. Quais das seguintes relações são funções de $X = \{1, 2, 3\}$ para $Y = \{1, 2, 3, 4\}$?

   (a) $f_1 = \{(1, 3); (2, 3); (3, 3)\}$

   (b) $f_2 = \{(1, 3); (1, 1); (2, 3); (2, 1)\}$

   (c) $f_3 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3)\}$

   (d) $f_4 = \{(1, 2)\}$

3. Sejam X e Y dois conjuntos, $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação, sejam A e A' dois subconjuntos de X, e sejam B e B' dois subconjuntos de Y.

   (a) Mostre que:

      i. Se $A \subseteq A'$ então $f^{\rightarrow}(A) \subseteq f^{\rightarrow}(A')$;

      ii. $f^{\rightarrow}(A \cup A') = f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(A')$;

      iii. $f^{\rightarrow}(A \cap A') \subseteq f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(A')$

   (b) Apresentando um exemplo verifique que podemos ter:

i. $f^{\rightarrow}(A \cap A') \neq f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(A')$

ii. $f^{\rightarrow}(A) = f^{\rightarrow}(A')$ com $A \neq A'$

iii. $f^{\rightarrow}(A - A') \neq f^{\rightarrow}(A) - f^{\rightarrow}(A')$

4. Demonstre que:

   (a) Se $B \subseteq B'$ então $f^{\leftarrow}(B) \subseteq f^{\leftarrow}(B')$;

   (b) $f^{\leftarrow}(B \cup B') = f^{\leftarrow}(B) \cup f^{\leftarrow}(B')$;

   (c) $f^{\leftarrow}(B \cap B') = f^{\leftarrow}(B) \cap f^{\leftarrow}(B')$.

2.6 Relações de ordem

Seja A um conjunto não vazio e $R \subseteq A^2$ uma relação binária qualquer definida em A. Como vimos anteriormente, para indicar que um par ordenado $(a,b) \in A^2$ pertence à relação R escrevemos aRb ou $(a,b) \in R$.

A **noção de ordem** é um conceito permanente na vida diária bem como na Matemática, e aparece de muitas formas: primeiro segundo terceiro etc, melhor versus pior, maior versus menor, ...

O nosso objectivo é definir de uma forma rigorosa esta noção de "ser menor". Então o que entendemos por ordem? E por conjunto ordenado? A ordem não é uma propriedade intrínseca do objecto, é a comparação de dois objectos. Por exemplo, com a relação matemática $<$ temos que 0 é menor do que 1. **O que distingue a relação de ordem de outro tipo de relação?** Em primeiro lugar, a relação de ordem tem de ser transitiva; $0 < 1$ e $1 < 10$ logo $0 < 10$. Também terá de ser anti-simétrica isto é, como $2 < 3$ não se pode ter $3 < 2$. Nas relações de ordem existem as estritas e as não estritas. Neste curso usaremos, essencialmente, as não estritas que permitem a hipótese da igualdade: $3 \leq 3$.

Definição 2.6.1 *Chama-se* ***relação de ordem****, definida no conjunto A, a uma relação binária $R \subseteq A^2$ com as seguintes propriedades:*

1. *reflexividade:* $\forall_{a \in A} : aRa$

2. *anti-simetria:* $\forall_{a,b \in A} : [(aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b]$

3. *transitividade:* $\forall_{a,b,c \in A} : [(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc]$

- Se, adicionalmente, R satisfizer a propriedade:

$$\text{dicotómica: } \forall_{a,b\in A} : [aRb \vee bRa]$$

diz-se uma **relação de ordem total**. Por exemplo, a relação $\leq$ em $\mathbb{R}$ é uma relação de ordem total.

- Se R não for uma relação de ordem total, designa-se por **relação de ordem parcial**. Uma relação de ordem parcial definida no conjunto A é habitualmente representada por $\leq$. Ao par $(A, \leq)$ chamamos **conjunto parcialmente ordenado** ou, abreviadamente, c.p.o. .

Exemplos:

1. Seja A uma família de conjuntos. A relação definida em A por "X é um subconjunto de Y"é uma ordem parcial.(Porquê não é total?)

2. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$, qualquer. A relação $\leq$ em A é uma relação de ordem total e é chamada **ordem natural**.

3. A relação R definida em $\mathbb{N}$ por "xRy se e só se x é múltiplo de y"é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{N}$.(Porquê não é total?)

4. Seja X um conjunto e seja $P(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X. Então $(P(X), \subseteq)$ é um c.p.o..

2.6.1 Diagramas de Hasse

Nesta secção iremos ver como podemos representar graficamente um c.p.o..

Definição 2.6.2 *Seja $(P, <)$ um c.p.o. e sejam $x, y \in P$ arbitrários. Dizemos que x é coberto por y se $x < y$* **e** *não existe nenhum elemento $z \in P$ tal que $x < z < y$. Denotamos por $x \vdash y$.*

- Se x é coberto por y, então podemos dizer que y cobre x e escrevemos $y \dashv x$.

Exemplos:

1. Em $\mathbb{N}$, $m \vdash n$ se e só se $n = m + 1$;

2. Em $\mathbb{R}$, não existe nenhum par (x, y) tal que $x \vdash y$;

3. Em $(P(X), \subseteq)$, $A \vdash B$ e só se $B = A \cup \{b\}$, para algum $b \in X - A$.

Seja $(P, \leq)$ um c.p.o..
É possível **representar** P **através de um diagrama** construído do seguinte modo:

1. A cada elemento $x \in P$ associamos um ponto $p(x)$ do plano euclidiano $\mathbb{R}^2$;

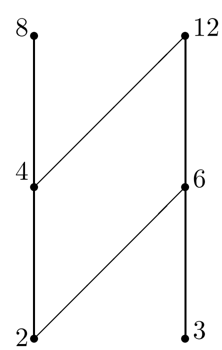
2. Se $x \leq y$ o ponto $p(x)$ tem a segunda coordenada inferior à segunda coordenada de $p(y)$;

3. Se $x \vdash y$ unimos os pontos $p(x)$ e $p(y)$ por um segmento de recta $l(x, y)$;

4. Se $z \in P$ é tal que $z \neq x$ e $z \neq y$ então $p(z)$ não pertence ao segmento de recta $l(x, y)$.

Exemplo:

Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ e defina-se a relação $\leq$ em A por "$x \leq y$ se e só se x divide y".
O diagrama de Hasse deste c.p.o. é



NOTA IMPORTANTE: Note-se que pela relação de ordem **usual** $4 \leq 6$. No entanto, pela relação de ordem do exemplo $4 \not\leq 6$ e $6 \not\leq 4$.

- Como, no exemplo anterior, $4 \not\leq 6$ e $6 \not\leq 4$ dizemos que 6 e 4 não são comparáveis, e escrevemos $4||6$.

  De um modo geral, se dois elementos a e b de um conjunto parcialmente ordenado P tais que $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$ então dizemos que a e b não são comparáveis e escrevemos $a||b$.

Exercícios

1. Considere os seguintes conjuntos

   $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é divisor de } 75\ \}$ e $B = \{\{2\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 8\}\}$.

   Verifique que $(A, |)$ e $(B, \subseteq)$ são ordens parciais.

2. Seja $\mathcal{R}$ uma relação binária definida em A. A relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$ é definida por

   $$a\mathcal{R}^{-1}b \Leftrightarrow b\mathcal{R}a\ ,$$

   quaisquer que sejam os elementos $a, b \in A$. Mostre que:

   (a) $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.

   (b) $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem parcial **se e só se** $\mathcal{R}^{-1}$ é uma relação de ordem parcial.

   (c) $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total **se e só se** $\mathcal{R}^{-1}$ é uma relação de ordem total.

3. Seja ρ a seguinte relação binária em $\mathbb{R}^2$:

   $$(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow a < c \text{ ou } (a = c \text{ e } b \leq d)$$

   em que $<$ e $\leq$ são as relações usuais em $\mathbb{R}$.

   (a) Diga, justificando quais dos seguintes pares pertencem a esta relação:

   $$((1, 5), (2, 3)) \quad ((3, 4), (3, 5)) \quad ((3, 4), (2, 5))$$

   (b) Mostre que ρ é uma relação de ordem total.

4. Sendo $(S, \leq_1)$ e $(T, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados, define-se em $S \times T$ a relação $\leq$ por

   $$(s_1, t_1) \leq (s_2, t_2) \quad \text{se e só se } s_1 \leq_1 t_1 \quad \text{e } s_2 \leq_2 t_2.$$

   Mostre que $\leq$ é uma relação de ordem parcial de $S \times T$.

5. Determine o diagrama de Hasse dos seguintes conjuntos parcialmente ordenados:

   (a) $S = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)(a, b), (a, c), (b, c))\}$;

   (b) $S = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b\}\}$ e $A\mathcal{R}B$ se e só se $A \subseteq B$;

   (c) $S = \{a, b, c, d\}$ e $R = \{(a, a), (b, b)(c, c), (d, d), (a, b), (a, c)\}$.

   (d) $P = \{a, b, c, d, e, f, u, v\}$ e $v < a, v < b, v < c, v < d, v < e, v < f, v < u, a < c, a < d, a < e, a < f, a < u, b < c, b < d, b < e, b < f, b < u, c < d, c < e, c < f, c < u, d < e, d < f, d < u, e < u, f < u$.

6. Considere o c.p.o. $(\mathbb{N}, |)$.

   (a) Dê exemplos de elementos que são incomparáveis.

   (b) Dê exemplos de elementos que cobrem o elemento 2.

   (c) Dê exemplos de elementos cobertos pelo elemento 15.

7. Considere o c.p.o. $(P(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$.

   (a) Dê exemplos de elementos que são incomparáveis.

   (b) O elemento $\{1, 2\}$ cobre que elementos?

2.6.2 Reticulados

Definição 2.6.3 *Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado.*

- *Dizemos que um elemento $p \in P$ é elemento **mínimo** de P se*

$$p \leq x\,, \quad \text{para todo } x \in P.$$

- *Dizemos que um elemento $q \in P$ é elemento **máximo** de P se*

$$x \leq q\,, \quad \text{para todo } x \in P.$$

Cada um destes elementos, se existir, é único.

Exemplos:

1. Seja X um conjunto. Consideremos o conjunto parcialmente ordenado $(P(X), \subseteq)$. O elemento mínimo do conjunto $P(X)$ é $\emptyset$ e o elemento máximo é X.

2. Uma **cadeia** (ou um **conjunto totalmente ordenado**) finita tem sempre elemento máximo e mínimo.

   Uma cadeia infinita pode ter ou não elemento máximo ou mínimo. Por exemplo, a cadeia $\mathbb{N}$ com a relação de ordem usual tem elemento mínimo, 1, mas não tem máximo. Quanto a $\mathbb{Z}$ não tem nem elemento máximo nem elemento mínimo.

Definição 2.6.4 *Seja $(P, \leq)$ um c. p. o..*

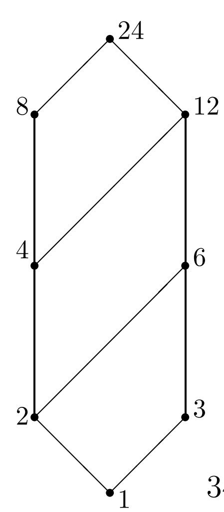
- *Dizemos que $a \in P$ é elemento **minimal** de P se não existir $s \in P$ tal que $s \neq a$ e $s \leq a$.*
- *Dizemos que $b \in P$ é elemento **maximal** de P se não existir $z \in P$ tal que $z \neq b$ e $b \leq z$.*

Exemplos:

1. No último exemplo da secção anterior, 2 e 3 são elementos minimais e 8 e 12 são elementos maximais.

   O c.p.o. $(A, \leq)$ não possui elemento mínimo nem elemento máximo.

2. Seja $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ e defina-se, como anteriormente, a relação $\leq$ em B por "$x \leq y$ se e só se x divide y". O diagrama de Hasse deste c.p.o. é



Este c.p.o. $(B, \leq)$ possui 1 como elemento mínimo e 24 como elemento máximo.

Exercício

1. Investigue a existência de elementos maximais, minimais, de máximo e de mínimo nos seguintes c. p. o. (já estudados antes):

   (a) $S = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c))\}$;

   (b) $S = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b\}\}$ e $A\mathcal{R}B$ se e só se $A \subseteq B$;

   (c) $S = \{a, b, c, d\}$ e $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c)\}$.

   (d) $P = \{a, b, c, d, e, f, u, v\}$ e $v < a, v < b, v < c, v < d, v < e, v < f, v < u, a < c, a < d, a < e, a < f, a < u, b < c, b < d, b < e, b < f, b < u, c < d, c < e, c < f, c < u, d < e, d < f, d < u, e < u, f < u$.

2. Considere o c.p.o. $(D, |)$, em que $|$ representa a relação de divisibilidade e

$$D = \{n \in \mathbb{N} : n|12\} = \mathcal{D}_{12} \ .$$

   (a) Represente o diagrama de Hasse de $(D, |)$.

   (b) Diga, justificando, se

      i. $(D, |)$ tem máximo.

      ii. $(D, |)$ tem mínimo.

      iii. $(\{1, 2, 3, 6\}, |)$ é cadeia.

3. Sejam $(P, \leq_1)$ e $(Q, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados. Uma aplicação $\phi : P \to Q$ diz-se uma imersão de ordem se ϕ satisfaz

$$x \leq_1 y \ \text{ se e só se } \ \phi(x) \leq_2 \phi(y).$$

   Mostre que toda a imersão de ordem é uma aplicação injectiva.

Definição 2.6.5 *Sejam P um c. p. o. e $Q \subseteq P$.*

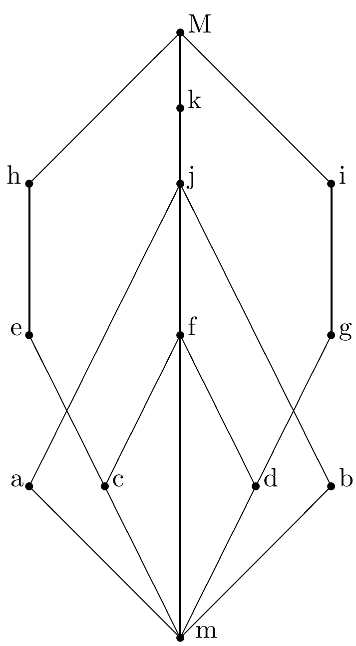
- *Um elemento $y \in P$ é um* ***minorante*** *de Q se $y \leq q$ para todo $q \in Q$.*
- *Um elemento $x \in P$ diz-se um* **majorante** *de Q se $q \leq x$ para todo $q \in Q$.*

Denotamos por Q^U o conjunto de todos os majorantes de Q e por Q^L denotamos o conjunto de todos os minorantes de Q.

Se o conjunto Q^L tem elemento máximo então ele diz-se `ínfimo` de Q. Ao elemento mínimo, se existir, do conjunto Q^U diz-se o `supremo` de Q. Ou seja,

- x é ínfimo de Q se:
  1. x é um minorante de Q;
  2. Se y é outro minorante de Q então $y \leq x$.
- x é supremo de Q se:
  1. x é um majorante de Q;
  2. Se y é outro majorante de Q então $x \leq y$.

Exemplo: Consideremos o c.p.o. $P = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, M, m\}$, cujo diagrama de Hasse é



Consideremos o conjunto $Q = \{a, b, c, d\} \subseteq P$.
Então $Q^U = \{j, k, M\}$, enquanto que $Q^L = \{m\}$.
O conjunto $Q^U = \{a, b, c, d\}^U$ tem elemento mínimo, j. Então j é o supremo de $\{a, b, c, d\}$.
O ínfimo de Q é m, ou seja, o elemento máximo de Q^L.

NOTAÇÃO: Seja P um conjunto parcialmente ordenado e sejam $x, y \in P$. Consideremos o subconjunto de P, $\{x, y\}$.
Se existir o supremo de $\{x, y\}$ então este será denotado por $x \vee y$. Se existe ínfimo de $\{x, y\}$ este será denotado por $x \wedge y$.
De um modo geral, se S é um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado P, $\vee S$ devota o supremo do conjunto S, se existir, enquanto que $\wedge S$ denota o ínfimo de S, também se existir.

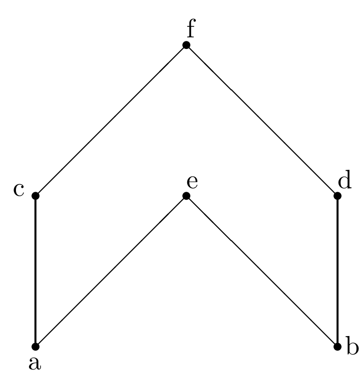
Definição 2.6.6 *Chamamos* **reticulado** *ao conjunto parcialmente ordenado, em que existe supremo e ínfimo de qualquer subconjunto com dois elementos.*

Exemplos:

1. Os conjuntos $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ munido da relação de ordem usual são reticulados: dados dois elementos a e b, $a \wedge b = \min\{a, b\}$ e $a \vee b = max\{a, b\}$

2. Seja X um conjunto e $P(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X. Então, $(P(X), \subseteq)$ é um reticulado: dados $A, B \in P(X)$, $A \vee B := sup\{A, B\} = A \cup B$ enquanto $A \wedge B := inf\{A, B\} = A \cap B$.

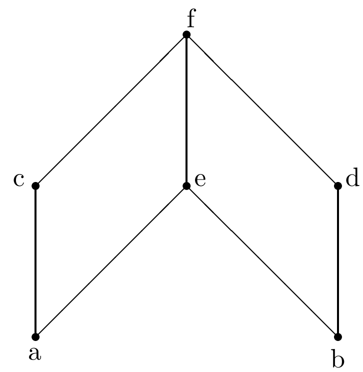
3. O conjunto parcialmente ordenado cujo diagrama de Hasse é



não é um reticulado porque o conjunto $\{e, f\}$ não tem ínfimo.

De facto $\{e, f\}^L = \{a, b\}$, e este conjunto não tem máximo.

4. No conjunto parcialmente ordenado cujo diagrama de Hasse é



o conjunto $\{e, f\}$ tem ínfimo porque $\{e, f\}^L = \{e, a, b\}$ e este conjunto tem máximo.

Temos também $a \wedge c = a$, $a \vee c = c$, $a \wedge f = a$, $a \vee f = f$. Mas, este c. p.o. não é um reticulado porque $a \wedge b$ não existe.

5. Consideremos a relação de ordem parcial definida em $\mathbb{N}$ por

$$x \leq y \quad \text{se e só se} \quad x \text{ divide } y\,.$$

Este c.p.o. é um reticulado pois, para todo $x, y \in \mathbb{N}$, temos

$$x \wedge y = mdc(x, y) \;\text{ e }\; x \vee y = mmc(x, y)\,.$$

Exercício

Seja L um reticulado e sejam $a, b, c, d \in L$. Mostre que:

1. Se $a \leq b$ então $a \wedge b = a$ e $a \vee b = b$;

2. Se $a \leq b$ então $a \vee c \leq b \vee c$ e $a \wedge c \leq b \wedge c$;

3. Se $a \leq b \leq a \vee c$ então $a \vee c = b \vee c$.

Teorema 2.6.1 *Seja L um reticulado. Então, $\wedge$ e $\vee$ satisfazem, para todo $a, b, c \in L$,* *1. Leis Associativas*

(a) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$*;*

(b) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$*;*

2. Leis Comutativas

(a) $a \wedge b = b \wedge a$*;*

(b) $a \vee b = b \vee a$*;*

3. Idempotência

(a) $a \wedge a = a$*;*

(b) $a \vee a = a$*;*

4. Leis de Absorção

(a) $a \vee (a \wedge b) = a$*;*

(b) $a \wedge (a \vee b) = a$*.*

2.6.3 Reticulados distributivos e álgebras de Boole

Antes de introduzir o conceito de reticulado distributivo vamos apresentar um lema que nos vai conduzir aos conceitos que são objecto de estudo desta secção.

RECORDE QUE: Considere o c.p.o. $(P, \preceq)$ e sejam $x, y \in P$.
Dizer $(x, y) \in \preceq$ é o mesmo que $x \preceq y$ e também que $y \succeq x$.

Lema 2.6.1 *Seja L um reticulado e sejam $a, b, c \in L$. Então*

1. $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$*;*

2. $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$*.*

Demonstração: 1) Por definição de ínfimo,

$$a \wedge b \leq a \quad \text{e} \quad a \wedge c \leq a.$$

Portanto, a é majorante do conjunto $\{a \wedge b, a \wedge c\}$ e consequentemente,

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a. \tag{2.1}$$

Por outro lado,

$$a \wedge b \leq b \leq b \vee c$$

e

$$a \wedge c \leq c \leq b \vee c.$$

Portanto, $b \vee c$ é majorante de $\{a \wedge b, a \wedge c\}$ e obtemos,

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq b \vee c. \tag{2.2}$$

Por (2.1) e (2.2) concluímos que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ é um minorante do conjunto $\{a, b \vee c\}$, pelo que, atendendo à definição de ínfimo,

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$$

2) Exercício. $\diamond$

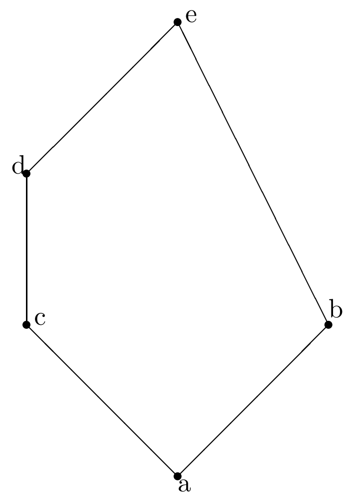
Verificámos, com o lema anterior, que para todo o reticulado L e todo $a, b, c \in L$ temos sempre

1. $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
2. $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

No entanto, nem sempre são válidas as igualdades

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

como podemos verificar no seguinte exemplo de um reticulado dado pelo diagrama de Hasse:



Neste reticulado, com os elementos b, c, d temos

$$d \wedge (c \vee b) = d \wedge e = d$$

e

$$(d \wedge c) \vee (d \wedge b) = c \vee a = c\,.$$

Portanto, $d \wedge (c \vee b) \neq (d \wedge c) \vee (d \wedge b)$.

Este facto sugere a seguinte definição:

Definição 2.6.7 *Um reticulado L diz-se distributivo se para todo $a, b, c \in L$*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)\,.$$

Lema 2.6.2 *Seja L um reticulado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;

2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Demonstração: 1) $\Rightarrow$ 2)
Como por hipótese 1) ocorre temos

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c].$$

Uma vez que

$$(a \vee b) \wedge a = a, \ \text{(porquê?)}$$

e

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \ \text{(porquê?)},$$

vem

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge (a \vee c) &= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \\ &= [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee (b \wedge c). \end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 1) Exercício. $\diamond$

NOTAÇÃO: Seja R um reticulado. Se R tem elemento máximo ele será representado por 1 e se R tem elemento mínimo ele será representado por 0.

Definição 2.6.8 *Seja R um reticulado com mínimo 0 e máximo 1. Seja $a \in R$. Chamamos complemento de a ao elemento $b \in R$ tal que*

$$a \vee b = 1 \quad e \quad a \wedge b = 0\,.$$

Proposição 2.6.1 *Seja L um reticulado distributivo com mínimo e máximo denotados por 0 e 1 respectivamente. Se um elemento $a \in L$ tem complemento, então o complemento de a é único.*

Demonstração: Sejam b e c dois complementos de a. Como temos

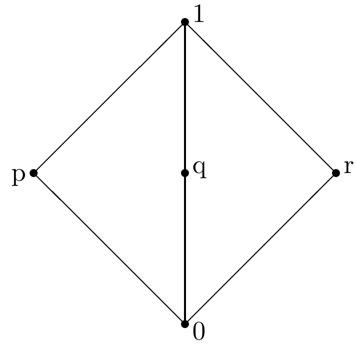
$$1 \wedge b = b \ \text{(porquê?)} \quad \text{e} \quad a \vee c = 1 \ \text{(porquê?)},$$

vem

$$\begin{aligned} b &= b \wedge 1 \\ &= b \wedge (a \vee c) \\ &= (b \wedge a) \vee (b \wedge c) \\ &= 0 \vee (b \wedge c) \\ &= (b \wedge c) \\ &\leq c. \end{aligned}$$

Portanto $b \leq c$. De modo análogo $c \leq b$ donde concluímos $b = c$. $\diamond$

Note-se que se o reticulado não for distributivo o complemento pode não ser único, como se mostra no seguinte exemplo:



Este reticulado não é distributivo uma vez que

$$p \wedge (q \vee r) = p \wedge 1 = p \quad \text{e} \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r) = 0 \vee 0 = 0\,.$$

Portanto, $p \wedge (q \vee r) \neq (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Note-se ainda que

$$p \wedge q = 0 \;\; \text{e} \;\; p \vee q = 1$$

e $$p \wedge r = 0 \;\; \text{e} \;\; p \vee r = 1.$$

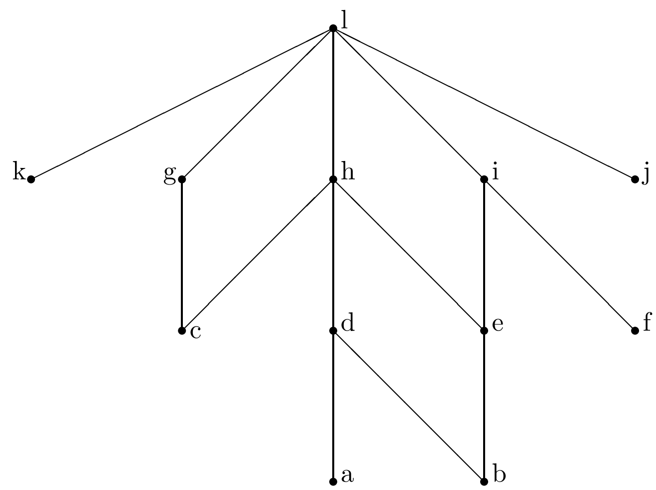
Logo q e r são complementos de p.

Definição 2.6.9 *Seja L um reticulado. Dizemos que L é uma* **álgebra da Boole** *se L é um reticulado distributivo com máximo e mínimo e todo o elemento tiver complemento.*

NOTAÇÃO: Seja B uma álgebra de Boole e $a \in B$. O complemento de a será denotado por a'.

Exercícios

1. Seja A o conjunto parcialmente ordenado cujo diagrama de Hasse é



Determine, se existir,

(a) o elemento máximo de A;

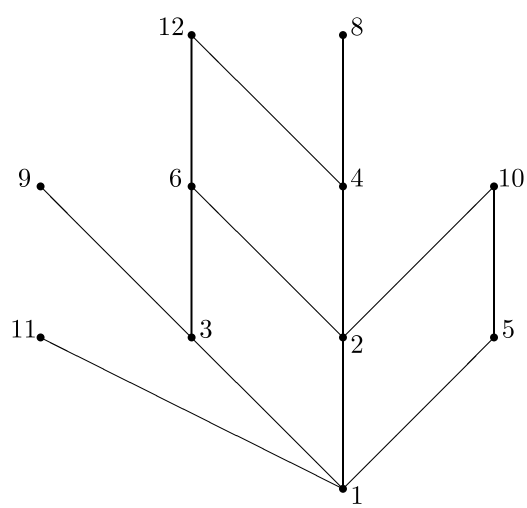
(b) o elemento mínimo de A;

(c) os elementos maximais;

(d) os elementos minimais;

(e) Sendo $S = \{c, d, e\}$, determine S^U, S^L, $\wedge S$ e $\vee S$;

2. Resolva o exercício anterior para o c. p. o. cujo diagrama de Hasse é



e sendo $S = \{1, 3\}$.

3. Sejam a, b e c elementos de um c.p.o. tais que $a \neq b$, $a \vdash c$ e $b \vdash c$. Mostre que $\vee\{a, b\} = c$.

4. Seja $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Considere o c. p. o. $(Q, |)$, onde $|$ denota a relação "divide".

   (a) Desenhe o grafo de $(Q, |)$.

   (b) Determine, se existir, $\vee\{4, 6\}$,$\vee\{2, 3\}$,$\vee\{2, 3, 6\}$ e $\vee\{1, 5\}$.

5. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48\}$ e considere definida em A a relação $\leq$ dada por "$x \leq y$ se e só se x divide y".

   (a) Construa o diagrama de Hasse deste conjunto parcialmente ordenado;

   (b) Indique, se existirem, os elementos maximais, minimais, máximo e mínimo deste c. p. o.;

   (c) Seja $S = \{8, 12\}$. Determine os conjuntos S^U e S^L;

   (d) Se existirem, determine os elementos $8 \wedge 12$ e $8 \vee 12$;

   (e) $(A, \leq)$ é um reticulado? Justifique

6. Seja R um reticulado. Mostre que se R é um reticulado distributivo então, para quaisquer $a, b, c \in R$,

$$(a \wedge b = a \wedge c \;\text{ e }\; a \vee b = a \vee c) \;\Rightarrow b = c.$$

7. Seja B uma álgebra de Boole. Mostre que

   (a) $0' = 1$;

   (b) $1' = 0$;

   (c) $a'' = a$;

   (d) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$;

   (e) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.

8. Mostre que as seguintes afirmações são válidas numa álgebra de Boole:

(a) $(a \wedge b) \vee (a' \wedge b) \vee (a \wedge b') \vee (a' \wedge b') = 1$;

(b) $(a \wedge b) \vee (a' \wedge c) \leq (a \wedge b) \vee (a' \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

9. Prove que numa álgebra de Boole $y \leq x'$ se e só se $x \wedge y = 0$.

10. Prove que numa álgebra de Boole $y \geq x'$ se e só se $x \vee y = 1$.

11. Seja B uma álgebra de Boole e sejam $x, y \in B$. Mostre que $x = y$ se e só se $(x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = 0$.

12. Prove que numa álgebra de Boole B, $x = 0$ se e só se $(x \wedge z') \vee (x' \wedge z) = z$, para todo $z \in B$.

13. Sejam a, b, c, d, e elementos de uma Álgebra de Boole. Simplifique:

(a) $(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge c') \vee (a \wedge b')$; (**Solução:** a)

(b) $(a \wedge b \wedge c') \wedge (a' \vee b' \vee c')$; (**Solução:** $a \wedge b \wedge c'$)

(c) $(a \vee b \vee c) \wedge (a' \vee b' \vee c)$; (**Solução:** $(a \wedge b') \vee (a \wedge b') \vee c$)

(d) $[(a \wedge c)' \vee b \vee d]' \vee [c \wedge (a \wedge c \wedge d)']$; (**Solução:** $c \wedge (a' \vee d')$)

(e) $[(a \vee b) \wedge c]' \vee [d \wedge (c \vee b)]'$; (**Solução:** $(a' \wedge b') \vee c' \vee d'$)

(f) $(a' \wedge b' \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c')$; (**Solução:** $(a' \wedge c) \vee b$)

(g) $(a' \wedge b) \vee (a \wedge b') \vee (a \wedge b)$; (**Solução:** $a \vee b$)

(h) $[a' \wedge b' \wedge c' \wedge (a \vee b \vee c')]'$; (**Solução:** $a \vee b \vee c$)

(i) $a' \wedge (a \vee b) \vee c' \vee (c \wedge b)$; (**Solução:** $c' \vee b$)

(j) $[(a \vee b' \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b') \wedge (a' \wedge b)$; (**Solução:** 0)

(k) $[(a \vee b' \vee (a \wedge b')] \wedge [(a \wedge b) \vee (a' \wedge c) \vee (b \wedge c)]$; (**Solução:** $(a \wedge b) \vee (a' \wedge b' \wedge c)$)

(l) $[(a \wedge b) \vee c \vee d] \wedge (c \vee d') \wedge (c \vee d' \vee e)$; (**Solução:** $(a \wedge b \wedge d') \vee c$)

(m) $a' \wedge b \wedge [d' \vee (d \wedge c')] \vee [a \vee (a' \wedge c \wedge d)] \wedge b$; (**Solução:** b)

(n) $(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b' \vee c) \wedge (c' \vee d) \wedge (a \vee d)$; (**Solução:** $(c' \wedge a) \vee (a \wedge d) \vee (c \wedge d)$)

Capítulo 3

Indução Matemática

3.1 Primeiro Princípio de Indução

Se, no universo $\mathbb{N}$, representamos uma propriedade por $\mathrm{P}(n)$ e se:

- $\mathrm{P}(1)$ é verdadeira,
- $\mathrm{P}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n+1)$ (a propriedade é **hereditária**), então $\mathrm{P}(n)$ é verdadeira para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Este enunciado pode tornar-se mais intuitivo, usando uma imagem. Imaginemos uma fileira de soldados de chumbo, colocados de tal modo que, se qualquer cair para a frente, o que lhe segue também cai. Um outro exemplo, que surge com alguma frequência nos meios de comunicação e o das peças de dominó.

Exemplos:

1. Mostre que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Resolução: Utilizando o princípio de indução anteriormente apresentado,

i) Para $n = 1$, temos

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Portanto, a propriedade é válida para $n = 1$.

ii) Suponhamos a propriedade válida para $n = k$, isto é, para $k \in \mathbb{N}$ é válida a relação:

$$\text{hipótese de indução: } \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k\,(k+1)}{2} \ ,$$

$$\text{tese: } \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2} \ .$$

Mas,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^{k} i \ + \ (k+1) \\ &= \frac{k\,(k+1)}{2} + (k+1) \quad \text{por hipótese,} \\ &= \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Concluímos assim que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

□

Nota 3.1.1 *Este método de demonstração pode aplicar-se em conjuntos ordenados que tenham primeiro elemento.*

2. Prove que 10^n é múltiplo de 8, $\forall\, n \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2\}$.

Resolução: Para provar a veracidade desta afirmação, vamos considerar como primeiro elemento $n = 3$. O leitor deve verificar que a propriedade não é válida para $n = 1$ e para $n = 2$. Depois, vamos verificar que ela é hereditária.

i) Para $n = 3$, $10^3 = 1000 = 125 \times 8$. Portanto, a propriedade é válida para $n = 3$. Vamos de seguida verificar se a propriedade é hereditária.

ii) Suponhamos que a propriedade é válida para um natural k, isto é, $10^k = \dot{8}$, isto é, existe um número p tal que $10^k = 8 \times p$.

Temos:

$$\text{hipótese de indução: } 10^n \text{ é múltiplo de } 8\,,$$

$$\text{tese: } 10^{n+1} \text{ é múltiplo de } 8\,.$$

Facilmente se verifica que

$$10^{n+1} = 10^n \times 10 = \underbrace{8 \times p \times 10}_{\text{Hipótese}} = 8 \times (p \times 10)\,.$$

$\square$

3. Mostre, utilizando o princípio de indução matemática que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Resolução: i) Para $n = 1$, temos

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{0} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 = 1^1.$$

ii) Hipótese de Indução: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$

Tese: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} = 2^{n+1}.$

É fácil ver que

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} &= \tbinom{k+1}{0} + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} + \binom{k+1}{k+1} \overset{(*)}{=} \sum_{p=1}^{k} \left(\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1} \right) + 2 \\
&= \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p-1} + 2 \overset{(**)}{=} \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} + \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} + \binom{k}{k} + \binom{k}{0} \\
&= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} = 2 \times \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} = 2 \times 2^n = 2^{n+1}\,.
\end{aligned}$$

$\square$

(*) fórmula conhecida do 12^o Ano

(**) usando uma mudança de variável: $p - 1 \hookrightarrow p$

4. Prove por indução que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 2^n > n.$$

Resolução: i) Para $n = 1$, $2 > 1$, P.V.

ii) Hipótese de Indução: $2^n > n$, para $n = 1, 2, \ldots, k$.

Tese: $2^{n+1} > n + 1$.

É fácil ver que

$$2^{k+1} = 2^k \times 2 > k \times 2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > k + k > k + 1,$$

pois $k \geq 1$. Portanto, $2^{k+1} > k + 1$.

$\square$

5. Prove que, apesar de hereditária, não é verdadeira a seguinte propriedade:

$$5n + 3 = \dot{5}.$$

Resolução:

Hipótese: $5n + 3 = \dot{5}$.

Tese: $5\,(n + 1) + 3 = \dot{5}$.

É fácil verificar que $5\,(n + 1) + 3 = (5n + 3) + 5 = \dot{5}$.

No entanto, para $n = 5$, temos $25 + 3 = 28 = 7 \times 2 \times 2 \neq \dot{5}$. $\square$

6. Prove, utilizando o princípio de indução que,

$$(n + 1)! \leq (n + 1)^{n+1}, \quad \forall\, n \; \in \mathbb{N}.$$

Resolução: (a) Para $n = 1$, $2! \leq 2^2$, P.V.

(b) Hipótese: $(n + 1)! \leq (n + 1)^{n+1}$.

Tese: $(n + 2)! \leq (n + 2)^{n+2}$.

Basta ter em conta que

$$
\begin{aligned}
(n+2)! &= (n+2)(n+1)! \\
&\leq (n+2)(n+1)^{n+1} \leq (n+2)(n+2)^{n+1} \\
&\leq (n+2)^{n+2}
\end{aligned}
$$

$\square$

3.2 Segundo Princípio de Indução

Se, num dado conjunto ordenado $\mathcal{C}$,

- $\mathrm{P}(m)$ é verdadeira, sendo m o menor elemento de $\mathcal{C}$,
- $\mathrm{P}(k)$ for verdadeira para todo o $k = m, \ldots, n$ (hipótese de indução) e implica que $\mathrm{P}(n+1)$ seja verdadeira,

então a propriedade $\mathrm{P}(n)$ verifica-se para todo o natural $n \geq m$.

Exemplo:

Se n é um número natural maior do que 1 então n pode ser escrito como o produto de números primos ou como o produto de um número primo pela unidade.

Resolução: i) Para $n = 2$, temos

$$2 = 2 \times 1.$$

ii) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geqslant 2$. Admitamos que já mostrámos que todo $i \in \mathbb{N}$, tal que $2 \leqslant i \leqslant n$, é ou primo ou produto de números primos.

I. $n+1$ é primo

$$n + 1 = (n+1) \times 1$$

II. $n+1$ não é primo

$$n + 1 = x \times y, \qquad 2 \leqslant x, y \leqslant n+1$$

Por hipótese,

$x =$ produto de n.^{os} primos <u>ou</u> $x =$ (número primo) $\times 1$

$y =$ produto de n.^{os} primos <u>ou</u> $y =$ (número primo) $\times 1$

Consequentemente,

$n + 1 = x \times y =$ produto de números primos.

$\square$

Porque motivo a Indução Matemática é um técnica válida de demostração? A validade do método de indução vem de um facto fundamental do conjunto dos inteiros positivos conhecido por **Princípio da Boa Ordenação**:

Princípio da Boa Ordenação: Qualquer conjunto não vazio de inteiros positivos tem elemento mínimo.

Seja $P(n)$ uma condição definida em $\mathbb{N}$ tal que $P(1)$ é uma proposição verdadeira e dado $k > 1$ se $P(k)$ é uma proposição verdadeira também $P(k+1)$ é uma proposição verdadeira. Então o Primeiro Príncipio de indução garante que $P(n)$ é uma proposição verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Porquê? A demonstração é feita por redução ao absurdo e usando Princípio da Boa Ordenação. Suponhamos que existe pelo menos um inteiro positivo $s \in \mathbb{N}$ tal que $P(s)$ é uma proposição falsa. Então o conjunto S de todos os inteiros positivos n para os quais $P(n)$ é falsa é um conjunto não vazio. Pelo Princípio da Boa Ordenação S tem um elemento mínimo m. Note-se que m não pode ser igual a 1 porque sabemos que $P(1)$ é uma proposição verdadeira. Então $m > 1$. Como m é o elemento mínimo de S e $m > 1$ vem que $m - 1 \notin S$. Então $P(m-1)$ é uma proposição verdadeira. Mas, se $P(m-1)$ é uma proposição verdadeira então o Princípio de Indução obriga a que $P(m)$ seja também uma proposição verdadeira. Mas m é o elemento mínimo de S logo $m \in S$ e portanto $P(m)$ tem de ser uma proposição falsa. Chegamos a uma contradição.

Exercícios 3.2

1. Usando o método de indução matemática mostre que dados os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e B,

   (a) $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_1 \cup B) \cap \ldots \cap (A_n \cap B)$;

   (b) $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_1 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$;

(c) $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$;

(d) $\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$;

2. Mostre, utilizando o método de indução matemática, que:

   (a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

   (b) $\left(1 + \dfrac{1}{3}\right)^n \geq 1 + \dfrac{n}{3}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

   (c) $n^2 < 2^n < n!$, para todo $n \in \mathbb{N},\ n > 4$;

   (d) $3^n > n^3$, para todo $n \geq 4$;

3. Pelo método de indução matemática, prove que:

   (a) $n^3 + 2n$ é divisível por 3 para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$

   (b) $3^n + 7^n - 2$ é divisível por 8, $\forall n \in \mathbb{N}$

   (c) $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ é divisível por 21, para todo $n \in \mathbb{N}$;

   (d) $3^{2n} - 2^n$ é múltiplo de 7, para todo $n \in \mathbb{N}$;

   (e) $5^{2(n-1)+1} + 1$ é múltiplo de 6, para todo $n \in \mathbb{N}$

4. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4.$$

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja H_n o n-ésimo **número harmónico**, isto é,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

   Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

   (a) $1 + \frac{1}{n} \leq H_{2^n} \leq n + 1$;

   (b) $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = (n+1)H_n - n$.

6. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

7. Mostre que

   (a) $2C_2^k + C_1^k = k^2$;

   (b) Use a alínea anterior para provar que para todo o $n \geq 3$,

$$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = 2C_3^{n+1} + C_2^{n+1}.$$

8. Considere a condição $P(n)$: $5^n + 1$ é múltiplo de 4.

   (a) Prove que $\forall n \in \mathbb{N}_0, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

   (b) Prove que a condição $P(n)$ não é universal em $\mathbb{N}_0$.

9. Prove que é verdadeira a proposição:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

10. Observe que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\times 2} &= 1 - \frac{1}{2}\\ \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} &= 1 - \frac{1}{3}\\ \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} &= 1 - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

   (a) Indique uma condição na variável n sugerida por estas igualdades.

   (b) Prove que a condição encontrada é universal em $\mathbb{N}\backslash\{1\}$.

3.3 Definições recursivas e Indução Estruturada

Por vezes é difícil definir um objeto explicitamente. No entanto certos objetos podem ser definidos à custa deles próprios. Esse processo é chamado de **recursão**. Podemos usar a recursão para definir certas sequências, funções ou conjuntos. Comecemos com a definição recursiva de funções:

3.3.1 Definição recursiva de uma função ou sequência

Normalmente as sequências são definidas usando um fórmula explícita. Por exemplo a sequência das potências de 2, isto é a sequência

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...,$$

pode ser dada explicitamente através da fórmula

$$a_n = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4....$$

No entanto esta sequência também pode ser definida recursivamente do seguinte modo: Definimos $a_0 = 1$, e em seguida apresentamos como calcular um termo da sequência usando o anterior. Neste caso podemos dizer que

$$a_{n+1} = 2.a_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4....$$

Portanto, quando definimos uma seqência recursivamente, indicamos como cada termo pode ser calculado à custa dos anteriores. Isso permite o uso da indução para provar certas propriedades da sequência.

Definição 3.3.1 *Para definir recursivamente uma sequência ou uma função no conjunto dos inteiros não negativos, necessitamos das seguintes etapas:*

Passo Básico: *Indicar o valor da função em* 0 *ou no conjunto* $\{0, 1, \dots, k\}$.

Passo Recursivo: *Indicar como calcular o valor da função num inteiro a partir dos valores que a função toma em inteiros menores.*

Exemplo 3.3.1 *Seja* f *a função definida recursivamente no conjunto dos inteiros não negativos por*

1. $f(0) = 2$;
2. $f(n + 1) = 2f(n) + 1$.

Calcule $f(1)$, $f(2)$ *e* $f(3)$.

RESOLUÇÃO: Da definição recursiva de f vem:

1. $f(1) = 2f(0) + 1 = 4 + 1 = 5$;

2. $f(2) = 2f(1) + 1 = 10 + 1 = 11$;

3. $f(3) = 2f(2) + 1 = 22 + 1 = 23$.

Exercício 3.3.1 *1. Calcule $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$, sendo f uma função definida recursivamente por $f(0) = 1$ e:*

(a) $f(n+1) = f(n) + 2$;

(b) $f(n+1) = 3f(n)$;

(c) $f(n+1) = 2^{f(n)}$;

(d) $f(n+1) = f(n)^2 + f(n) + 1$.

2. Calcule $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ e $f(5)$, sendo f uma função definida recursivamente por $f(0) = f(1) = 1$ e:

(a) $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$;

(b) $f(n+1) = f(n)f(n-1)$;

(c) $f(n+1) = f(n)^2 + f(n-1)$;

(d) $f(n+1) = \frac{f(n)}{f(n-1)}$.

3.3.2 Definição recursiva de conjuntos

Tendo visto como as funções podem ser definidas recursivamente, vamos agora ver como definir recursivamente um conjunto.Tal como na definição recursiva de uma função, para definir recursivamente um conjunto necessitamos de um **passo básico** e um **passo recursivo**. No passo básico apresentamos uma coleção inicial de elementos do conjunto que pretendemos definir. No passo recursivo apresentamos uma regra para determinar novos elementos do conjunto a partir de outros já conhecidos

Exemplo 3.3.2 *Seja S um conjunto definido recursivamente por:*

1. **Passo básico:** $3 \in S$;

2. **Passo recursivo:** *$x \in S$ e $y \in S$ então $x + y \in S$.*

Indique quatro elementos de S.

RESOLUÇÃO: Sabemos que $3 \in S$. Da definição recursiva de S vem que $3+3 = 6$ também pertence a S. Se $3, 6 \in S$, pela definição recursiva de S vem que $3 + 6 = 9$ e $6 + 6 = 12$ são elementos de S. Portanto $3, 6, 9$ e 12 são elementos de S.

3.4 Indução Estrutural

Para provar certos resultados em conjuntos definidos recursivamente em geral usamos uma forma de Indução Matemática conhecida por **Indução Estrutural**. A demostração por indução estrutural consiste em duas partes:

Passo básico: Provar que o resultado é válido para os elementos que pertencem à coleção inicial que aparece no passo básico da definição recursiva do conjunto.

Passo recursivo: Supondo que o resultado é válido para os elementos utilizados para calcular um novo elemento, prover que o resultado também é válido para esse novo elemento.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 3.4.1 *Consideremos novamente o conjunto S definido recursivamente por:*

1. **Passo básico:** *$3 \in S$;*

2. **Passo recursivo:** *$x \in S$ e $y \in S$ então $x + y \in S$.*

Vamos mostrar que todos os elementos de S são múltiplos de 3.

RESOLUÇÃO: Como o conjunto S é definido recursivamente, podemos usar a indução estrutural para mostrar que todos os elementos de S são múltiplos de 3. O passo básico da indução estrutural consiste em mostrar que todos os elementos da coleção existente no passo básico da definição recursiva de S são múltiplos de 3. Essa coleção é apenas formada pelo 3 que é múltiplo de 3. No passo recursivo de S verificamos que cada novo elemento de S é igual à soma de dois elementos já existentes em S. Então, no passo recursivo da indução estrutural só temos de mostar que se esses dois elementos são múltiplos de 3, a sua soma também é um múltiplo de 3

Exercício 3.4.1 *1. Seja S um subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definido recursivamente do seguinte modo:*

PASSO BÁSICO: $(0,0) \in S$*;*

PASSO INDUTIVO: Se $(a,b) \in S$ *então* $(a+2, b+3) \in S$*.*

(a) Indique cinco elementos de S;

(b) Mostre que se $(a,b) \in S$ então $a+b$ é múltiplo de 5*.*

2. Seja S um subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definido recursivamente do seguinte modo:

PASSO BÁSICO: $(0,0) \in S$*;*

PASSO INDUTIVO: Se $(a,b) \in S$ *então* $(a, b+1) \in S$*,* $(a+1, b+1) \in S$ *e* $(a+2, b+1) \in S$*.*

(a) Indique cinco elementos de S;

(b) Mostre que se $(a,b) \in S$ então $a \leq 2b$.

3.5 Indução Generalizada

O Princípio de Indução Matemática pode ser extendido para conjuntos totalmente ordenados, onde seja válido o Princípio da Boa Ordenação. Um desses conjuntos é $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ com a relação de ordem definida do seguinte modo:

Dados $(x,y), (z,w) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ dizemos que

$$(x,y) \preceq (z,w),$$

se e só se

$$x < z \quad \text{ou} \quad x = z \ \text{ e } \ y \leq w.$$

Esta relação é conhecida por **relação de ordem lexicográfica**. O conjunto $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ com esta relação de ordem é um conjunto bem ordenado, isto é, satisfaz o Princípio da Boa Ordenação. Isto significa que podemos definir recursivamente uma função em $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ e usar uma variante da Indução Matemática para provar resultados sobre essa função. Essa variante da Indução Matemática é conhecida por Indução Generalizada.

Exercício 3.5.1 *Considere a função definida recursivamente do seguinte modo:*

$$a(m,n) = \begin{cases} 0 & se \quad m = n = 0 \\ a(m-1,n)+1 & se \quad n = 0 \;\; e \;\; m > 0 \\ a(m,n-1)+n & se \quad n > 0 \end{cases}.$$

1. *Calcule* $a(1,1)$ *e* $a(3,0)$;

2. *Mostre que para todo* $m \in \mathbb{N}_0$, $a(m,0) = m$;

3. *Mostre que*

$$a(m,n) = m + \frac{n(n+1)}{2},$$

para todo $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

RESOLUÇÃO:

1. Note-se que

$$a(1,1) = a(1,0) + 1 = a(0,0) + 1 + 1 = 2$$

e

$$(3,0) = a(2,0) + 1 = a(1,0) + 2 = a(0,0) + 3 = 3.$$

2. Vamos mostrar que para todo $m \in \mathbb{N}_0$,

$$a(m,0) = m.$$

Podemos usar o Primeiro Princípio de Indução:

Passo básico: Se $m = 0$, usando a definição vem

$$a(0,0) = 0.$$

Seja $k \geq 1$.

Passo Indutivo:

Hipótese de Indução: $a(k,0) = k$;

Tese de Indução: $a(k+1,0) = k+1$;

Usando a definição de a temos

$$a(k+1,0) = a(k,0) + 1.$$

Mas, a hipótese de indução afirma que $a(k,0) = k$. Então

$$a(k+1,0) = a(k,0) + 1 = k+1,$$

Como se pretendia provar.

3. Para mostrar que

$$a(m,n) = m + \frac{n(n+1)}{2},$$

para todo $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ podemos usar a Indução Generalizada. O passo básico consiste em mostrar que a fórmula é válida para o elemento mínimo de $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Como estamos a trabalhar com a relação de ordem lexicográfica o elemento mínimo é $(0,0)$. Assim,

$$a(0,0) = 0 = 0 + \frac{0(0+1)}{2}.$$

Passo Indutivo:

Seja $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $(m,n) \neq (0,0)$.

Hipótese de Indução: $a(m',n') = m' + \frac{n'(n'+1)}{2}$ para todo $(m',n') \preceq (m,n)$;

Tese de Indução $a(m,n) = m + \frac{n(n+1)}{2}$.

Se $(m,n) \neq (0,0)$, atendendo à forma como está definida a função a basta considerar dois casos:

Caso 1: $m > 0$ e $n = 0$;

Caso 2: $n > 0$;

Caso 1: Se $m > 0$ e $n = 0$ então

$$a(m,n) = a(m,0) = a(m-1,0) + 1.$$

Como $(m-1,0) \preceq (m,0)$ usando a hipótese de indução temos que

$$a(m-1,0) = m-1 + \frac{0(0+1)}{2} = m-1.$$

Substituindo vem

$$a(m,0) = m - 1 + 1 = m = m + \frac{0(0+1)}{2}.$$

Caso 2: $n > 0$; Neste caso,

$$a(m,n) = a(m,n-1) + n.$$

Como $(m,n-1) \preceq (m,n)$, usando a hipótese de indução,

$$a(m,n-1) = m + \frac{(n-1)n}{2}.$$

Então,

$$a(m,n) = a(m,n-1) + n = m + \frac{(n-1)n}{2} + n = m + \frac{n^2 - n + 2n}{2} = m + \frac{n(n+1)}{2},$$

como se pretendia provar.

Exercícios 3.5

1. Seja $a(m,n)$ a função definida recursivamente em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do seguinte modo:

$$a(m,n) = \begin{cases} 5 & \text{se} \quad m = n = 1 \\ a(m-1,n)+2 & \text{se} \quad n = 1 \text{ e } m > 1 \\ a(m,n-1)+2 & \text{se} \quad n > 1 \end{cases}.$$

   (a) Calcule $a(1,2)$ e $a(2,2)$;

   (b) Prove que para todo $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$a(m,n) = 2(m+n)+1.$$

2. A função definida recursivamente em $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ por

$$A(m,n) = \begin{cases} 2n & \text{se} \quad m = 0 \\ 0 & \text{se} \quad m \geq 1 \text{ e } n = 0 \\ 2 & \text{se} \quad m \geq 1 \text{ e } n = 1 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & \text{se} \quad m \geq 1 \text{ e } n \geq 2 \end{cases},$$

   é conhecida por função de Ackermann e tem um papel importante no estudo da complexidade de certos algoritmos.

   (a) Calcule $A(1,0)$, $A(1,1)$, $A(0,1)$, $A(2,2)$ e $A(2,3)$;

   (b) Mostre que para qualquer $m \in \mathbb{N}$, $A(m,2) = 4$;

   (c) Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $A(1,n) = 2^n$;

   (d) Mostre que $A(m,n) \geq 2n$ para qualquer $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;

   (e) Mostre que $A(m,n+1) \geq A(m,n)$, qualquer que seja $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$;

   (f) Prove que $A(m+1,n) \geq A(m,n)$, qualquer que seja $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$;

   (g) Prove que $A(m,n) \geq n$, qualquer que seja $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Capítulo 4

Contar Objectos: Combinatória

A Análise Combinatória é uma das áreas mais antigas da Matemática. Existem registos de 2200 A. C. na China antiga, onde a Análise Combinatória era utilizada na construção de quadrados mágicos. Durante muitos séculos estes assuntos foram abordados de um pontos de vista recreativo, mas atualmente a Análise Combinatória é uma das áreas da da Matemática cujas aplicações podem ser encontradas numa grande variedade de problemas. A Análise Combinatória serve de base a várias Teorias Matemáticas como por exemplo, a Teoria das Probabilidades, a Teoria de Grupos, a Teoria de Números, Topologia, Programação Matemática, a as suas aplicações podem ser encontradas em assuntos assuntos tão diversos como Otimização, Ciências da Computação, Física, Estatística ou Genética.

A Análise Combinatória estuda a formação, contagem e propriedades dos agrupamentos que se podem formar segundo determinadas regras, com um número finito de elementos de natureza qualquer. Neste capítulo vamos estudar várias formas de agrupar elementos os elementos Os agrupamentos que vamos estudar são fundamentalmente, de dois tipos: *arranjos* e *combinações*.

4.1 Princípios Fundamentais da Contagem

O problema da contagem de objetos é um problema que está presente em numerosos problemas. Por exemplo, para estimar o tempo que um programa leva a ser executado precisamos de contar o número de vezes que uma certa rotina é executada. Um Engenheiro Informático precisa muitas vezes de saber quantas representações diferentes são geradas por uma sequência finita de $0'$s e $1'$s.

Como todas as áreas da Matemática a Análise Combinatória baseia-se em princípios que vamos aceitar sem a necessidade de demonstração:

Princípio da adição: Se um certo evento pode ocorrer de n_1 maneiras distintas, se um segundo evento pode ocorre e de n_2 maneiras distintas, se um terceiro evento pode ocorrer de n_3 maneiras distintas e assim sucessivamente até chegar a um $k-$ésimo evento pode ocorrer de n_k maneiras distintas, e se nenhum dos eventos tem uma solução comum então o número total de maneiras de **ocorrer um** dos k eventos é $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$.

Princípio da multiplicação: Se um certo evento pode ocorrer de n_1 maneiras distintas e se, após este evento, um segundo evento pode ocorre e de n_2 maneiras distintas e, após este evento, um terceiro evento pode ocorrer de n_3 maneiras distintas, ..., um $k-$ésimo evento pode ocorrer de n_k maneiras distintas, então o número de maneiras em que os eventos podem ocorrer na ordem ordem indicada é $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k$.

Exemplo 4.1.1 *Numa livraria existem 6 livros distintos em Francês, 10 livros distintos em Alemão e 8 livros distintos em Inglês. De quantas maneiras distintas podemos escolher 3 livros, um de cada idioma?*

RESOLUÇÃO: A escolha de três livros, um em cada idioma é na realidade uma sequência de três eventos:

Evento 1: Escolha de um livro em Francês;

Evento 2: Escolha de um livro em Alemão;

Evento 3: Escolha de um livro em Inglês;

O Evento 1 tem 6 resultados possíveis. O evento2 tem 10 resultados possíveis e o evento 3 tem 8 resultados possíveis. Pelo Princípio da Multiplicação há $6 \times 10 \times 8$ maneiras de escolher os 3 livros, um de cada idioma.

Exemplo 4.1.2 *Continuando com o exemplo anterior, de quantas maneiras distintas podemos escolher 2 livros, um em cada edioma?*

RESOLUÇÃO: A escolha de 2 livros, um em cada edioma pode ocorrer de três maneiras distintas correspondendo a três eventos que não ocorrem simultaneamente:

Evento 1: Escolha de um livro em Francês e um em Alemão;

Evento 2: Escolha de um livro em Inglês e um em Alemão;

Evento 3: Escolha de um livro em Francês e um em Inglês;

Cada um destes eventos é por sua vez uma sequência de dois eventos. Por exemplo, o Evento 1 é uma sequência de dois eventos: "Escolher de um livro em Francês" e " Escolher um livro em Alemão". Então pelo Princípio de multiplicação o Evento 1 ocorre de $6 \times 10 = 60$ maneiras distintas. De modo análogo vem que Evento 2 ocorre de $8 \times 10 = 80$ e o Evento 3 ocorre de $6 \times 8 = 48$ maneiras distintas. Pelo Princípio da Adição temos $60 + 80 + 48 = 188$ maneiras de escolher 2 livros, um em cada edioma.

Exemplo 4.1.3 *Com o alfabeto português tradicional de* 23 *letras quantas matrículas de automóvel pode haver ?*

As matrículas portuguesas são do tipo $LL-DD-DD$, $DD-LL-DD$ *ou* $DD-DD-LL$ *onde* L *representa uma das* 23 *letras do alfabeto e* D *um algarismo de* 0 *a* 9*. Consideremos no caso* $LL-DD-DD$*. No lugar do primeiro* L *pode estar qualquer uma das* 23 *letras e, independentemente disso, no lugar do segundo* L *também podem estar* 23 *letras. A cada uma das possibilidades, podemos associar* 10^4 *escolhas para os* 4 *dígitos.*

Assim, pode haver

$$(23)^2 * 10^4$$

matrículas da forma $LL-DD-DD$*. Pelo Princípio da Adição o número total de matrículas é* $3 * (23)^2 * 10^4$.

4.2 Arranjos

Seja S um conjunto e seja

$$(s_1, \ldots, s_r), \tag{4.1}$$

uma **sequência ordenada** de r elementos de S **não necessariamente distintos**. Duas sequências

$$(s_1, \ldots, s_r) \quad \text{e} \quad (s'_1, \ldots, s'_r),$$

são iguais se

$$s_i = s'_i, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Dado um conjunto com n elementos, todo o agrupamento de quaisquer r destes objectos, numa dada ordem, diz-se um **arranjo com repetição** ou **arranjo completo** dos n objectos, tomados r a r. A r chamamos o **comprimento** do arranjo. Portanto, dizemos que (4.1) é um arranjo com repetição dos elementos de S de comprimento r.

No caso de, em cada agrupamento, cada elemento entrar uma só vez, têm-se **arranjos simples** ou **arranjos sem repetição**.

Notação 1 *O número total de arranjos com repetição de comprimento r que podemos construir com os n elementos de um conjunto S é representado por*

$${}^{n}\overline{A}_r.$$

Teorema 4.2.1 *O número total de arranjos completos de n elementos tomados r a r é n^r, isto é,*

$${}^{n}\overline{A}_r = n^r.$$

Demostração: Um arranjo completo dos n elementos de um conjunto S tomados r a r não é mais do que um resultado possível de uma sequência de r eventos com n resultados possíveis. Cada um desses eventos é simplesmente a escolha de um elemento de S:

Evento 1: Escolha de um elemento de S;

Evento 2: Escolha de um elemento de S;

Evento 3: Escolha de um elemento de S;

$\vdots$

Evento r: Escolha de um elemento de S.

Cada um destes eventos tem n resultados possíveis. Pelo Princípio da Multiplicação há n^r resultados possíveis para esta sequência de eventos. ♣

Exemplo 4.2.1 *Um cofre tem 3 discos, cada um com as mesmas 23 letras e só pode ser aberto quando se coloca uma determinada letra de cada um dos discos numa determinada posição. Supondo que se ignora o segredo do cofre, de quantas maneiras diferentes se pode colocar as letras dos discos nas referidas posições ?*

É fácil ver que o valor é dado por ${}^{23}\overline{A}_3 = 23^3$.

Notação 2 *O número total de* **arranjos simples** *ou* **arranjos sem repetição** *de comprimento r que podemos construir com os n elementos de um conjunto S é representado por*

$$A_r^n.$$

Teorema 4.2.2 *O número total de arranjos simples de n elementos tomados r a r, $r \leq n$ é dado por*

$$A_r^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}. \tag{4.2}$$

Demostração: Observemos que cada arranjo simples n elementos tomados r a r é um resultado possível de uma sequência de r eventos. O primeiro evento que é a escolha do primeiro elemento do arranjo simples tem n resultados possíveis; O segundo evento que é a escolha do segundo elemento do arranjo simples tem $n-1$ resultados possíveis; o terceiro elemento pode ser escolhido de $n-2$ maneiras. Continuando esta sequência, o $r-$ésimo elemento do arranjo pode ser escolhido de $n-(r-1)$ maneiras distintas. Usando o Princípio da Multiplicação obtemos (4.2). ♣

Exemplo 4.2.2 *Uma prateleira dispõe de espaço para* 6 *livros. De quantas maneiras é que se podem dispor é* 10 *livros (todos diferentes) nesse espaço ?*

$$\underline{10} \quad \underline{9} \quad \underline{8} \quad \underline{7} \quad \underline{6} \quad \underline{5}$$

Logo,

$$A_6^{10} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!}.$$

Os arranjos simples que se podem formar com n objectos, sendo n o número total de elementos do conjunto, e de comprimento n designam-se por **permutações** de grau n. Por outras palavras, as *permutações* são arranjos simples n elementos e de comprimento n. O número total de *permutações simples* é que podemos construir com n elementos é representado por P_n.

Corolário 4.2.1 *O número total de permutações simples é que podemos construir com* n *elementos de um conjunto é igual a* $n!$*, isto é,*

$$P_n = n!. \tag{4.3}$$

Demonstração: Exercício

As *permutações completas* são aquelas em que os elementos se podem repetir. O número de permutações completas é

$$\overline{P}_n = n^n. \tag{4.4}$$

Consideremos agora o seguinte problema:

Exemplo 4.2.3 *Quantas palavras* <u>*distintas*</u> *de* 14 *letras se podem construir com as letras da palavra "MANIFESTAMENTE"?*

NOTA: Por uma palavra entendemos uma sequência destas 14 letras com ou sem significado.

RESOLUÇÃO: Como a palavra MANIFESTAMENTE tem 14 letras e como cada palavra que queremos construir é formada por estas 14 letras, existem 14! sequências (palavras) que podemos construir. Porém como algumas letras estão repetidas estas sequências não são todas distintas. Consideremos a seguinte tabela:

M	A	N	T	E	F	I	S
2	2	2	2	3	1	1	1

Verificamos que a letra M aparece 2 vezes, logo dada uma sequência formada pelas 14 letras da palavra "MANIFESTAMENTE" podemos construir outra sequência exatamente igual trocando entre si as duas letras M que aparecem na sequência. Como a sequência tem 3 letras iguais a "E", trocando estas letras entre si obtemos exatamente a mesma sequência. Obtemos assim 3! sequências exatamente iguais á sequência dada inicialmente. Então para cada sequência dada existem 2!2!2!2!3! exactamente iguais a esta. Logo há

$$\frac{14!}{2!2!2!2!3!}$$

palavras distintas que podemos construir com as 14 letras da palavra "MANIFESTAMENTE".

Notação 3 *Seja X uma coleção de n objectos de contendo n_i objectos idênticos a i, $i = 1, \ldots, k$. O número de sequências* **distintas** *que podemos construir com os n elementos de X é representado por*

$$A^n(p_1; p_2; \ldots; p_k).$$

Generalizando o racioncínio feito no exemplo anterior podemos provar o resultado sequinte:

Teorema 4.2.3 *Dados os números inteiros positivos n e p_1,$p_2, \ldots, p_k$ satisfazendo $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$,*

$$A^n(p_1; p_2; \ldots; p_k) = \frac{n!}{p_1!p_2! \ldots p_k!}.$$

Definição 4.2.1 *Sejam $n, n_1, \ldots, n_k$ inteiros não negativos tais que $n = n_1 + \ldots + n_k$. Os inteiros da forma*

$$\left(\begin{array}{ccc} & n & \\ n_1 & \ldots & n_k \end{array}\right) := \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}$$

são designados por **números multinomiais**.

4.3 Permutações circulares

Suponhamos que os n elementos se encontram dispostos sobre uma circunferência e escolhamos sobre a circunferência um sentido de movimento.

A cada disposição de n elementos sobre a circunferência, correspondem n permutações distintas obtidas, cada uma delas, começando a contagem num momento diferente

$a_1a_2a_3a_4a_5a_6$,	$a_2a_3a_4a_5a_6a_1$,	$a_3a_4a_5a_6a_1a_2$
$a_4a_5a_6a_1a_2a_3$,	$a_5a_6a_1a_2a_3a_4$,	$a_6a_1a_2a_3a_4a_5$

À disposição $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ sobre a circunferência, correspondem n permutações, $a_1a_2\dots a_{n-1}a_n$, $a_2a_3\dots a_na_1$, $\dots$ $a_na_1\dots a_{n-1}$, que se dizem *permutações circulares* da primeira ou de qualquer uma delas.

Quantas são as disposições distintas de n elementos sobre uma circunferência?

Seja P° o seu número. Como vimos anteriormente, cada disposição dá origem a n permutações. Como o total de permutações é $n!$, logo,

$$\begin{aligned} nP^\circ &= n! \\ P^\circ &= \frac{n!}{n} = (n-1)!. \qquad (4.5) \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.1 *Determine o número de maneiras em que* 6 *senhoras e* 6 *senhores se podem sentar à volta de uma mesa redonda, se eles têm de se sentar alternadamente e se o SENHOR A deve sentar-se junto à Senhora B.*

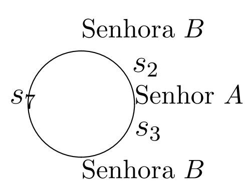
Comecemos por ver a sequência de eventos que dão origem á solução final:

Evento 1: Sentar os 6 homens na mesa redonda;

Evento 2: Sentar a Senhora B ao lado do Senhor A;

Evento 3: Sentar as restantes cinco senhoras;

Comecemos por considerar uma mesa redonda com 6 lugares. O Evento 1 pode ocerrer 5! maneiras diferentes. Coloquemos de seguida 6 cadeiras entre os senhores já sentados. O evento 2 pode ocorrer de duas maneiras diferentes dado que a SENHORA B pode sentar-se à direita ou à esquerda do SENHOR A, como mostra a seguinte representação do problema:



Por fim sentamos as 5 senhoras nos lugares livres. Existem 5! maneiras distintas de os fazer. Assim, pelo Princípio da Multiplicação existem

$$2 \times 5! \times 5! = 28800$$

maneiras distintas de sentar as doze pessoas de acordo com o enunciado.

4.4 Combinações

Chamamos *combinações de n elementos*, tomados r a r aos agrupamentos que se podemos formar com esses n elementos, de modo que, dois agrupamentos consideram-se diferentes desde que difiram em pelo menos num elemento.

Como no caso dos arranjos podemos considerar **combinações simples**, quando não há repetição de elementos e **combinações completas**, quando há reutilização de elementos.

> O número de combinações simples de n elementos tomados r a r, não é mais do que o número de subconjuntos com r elementos que se podem construir a partir de um conjunto com n elementos.

Esse número é representado por C_r^n ou $\binom{n}{r}$.

Exemplo 4.4.1 *As combinações simples das letras a, b, c e d tomados* 3 *a* 3 *são abc, abd, acd e bcd. Note-se que para cada combinações simples das letras a, b, c e d tomados* 3 *a* 3*, existem* $3! = 6$ *arranjos simples formados pelas mesmas 3 letras da combinação:*

Combinações	***Arranjos***
abc	*abc, acb, bac, bca, cab, cba*
abd	*abd, adb, bad, bda, dab, dba*
acd	*acd, adc, cad, cda, dac, dca*
bcd	*bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb*

Portanto,

$$A_3^4 = C_3^4 \times P_3 \quad \Leftrightarrow \quad C_3^4 = \frac{A_3^4}{P_3},$$

de um modo geral visto que cada combinação simples dá origem a $P_r = r!$ permutações, temos

$$A_r^n = C_r^n P_r \Leftrightarrow C_r^n = \frac{A_r^n}{P_r}. \tag{4.6}$$

Vamos agora estudar *combinações completas* de n elementos, tomados r a r, ou seja, combinações com repetição dos elementos que se podem podem construir a partir de um conjunto com n elementos. Representamos esse número por

$$\overline{C}_r^n$$

Exemplo 4.4.2 *As combinações completas de quatro letras a, b, c e d tomadas 3 a 3 são: abc, abd, acd, bcd, aab, aac, aad, bba, bbc, bbd, cca, ccb, ccd, dda, ddb, ddc, aaa, bbb, ccc e ddd.*

Existem 20 combinações das 4 letras tomadas 3 a 3, ou seja $\overline{C}_3^4 = 20$.

Teorema 4.4.1 *O número de combinações completas de n elementos tomados r a r é*

$$\overline{C}_r^n = C_r^{n+r-1}. \tag{4.7}$$

Demonstração: Seja S um conjunto com n objectos. Para simplificar vamos supor que $S = \{1, \ldots, n\}$. Seja

$$a_1, a_2, \ldots, a_r,$$

uma combinação dos n elementos de S, não necessariamente distintos, tomados r a r, e admitamos que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_r$. Seja agora

$$S^* = \{1, 2, \ldots, n+r-1\}.$$

Então

$$\{a_0 + 0, a_1 + 1, \ldots, a_r + r - 1\}$$

é um subconjunto de S^* (porquê?).

Verificamos ainda que existe uma bijeção do conjunto de todas as conbinações completas dos n elementos de S tomados r a r e o conjunto de todos os subconjuntos de S^* com r elementos:

$$a_1, a_2, \ldots, a_r \to \{a_0 + 0, a_1 + 1, \ldots, a_r + r - 1\}.$$

Mas o número de subconjuntos de S^* com r elementos é C_r^{n+r-1}. Consequentemente,

$$\overline{C}_r^n = C_r^{n+r-1}.$$

Exercício 4.4.1 *1. Supondo que não são permitidas repetições,*

(a) Quantos números com 3 algarismos podem ser construídos a partir dos números $2, 3, 4, 5, 6, 7e9$*;*

(b) Quantos desses números são menores que 400*;*

(c) Quantos desses números são pares;

(d) Quantos desses números são impares.

2. Resolva o exercício anterior supondo que as repetições são permitidas.

3. De quantos modos podemos colocar 7 pessoas numa fila de 7 cadeiras? e numa mesa redonda?

4. Determine n sabendo que

(a) $A_2^n = 72$;

(b) $A_4^n = 42.A_2^n$;

(c) $2.A_2^n + 50 = A_2^{2n}$.

5. Quantas diagonais tem

(a) um octógono;

(b) um hexágono;

6. *Quantas diagonais tem um polígono regular com n lados?*

7. *Que polígono regular tem :*

   (a) *o mesmo número de lados e diagonais;*

   (b) *o número de lados é o dobro do número de diagonais;*

   (c) *o número de lados é o triplo do número de diagonais;*

   (d) *35 diagonais;*

8. *Determine o número de maneiras de distribuir:*

   (a) *10 estudantes por 12 quartos, um por cada quarto;*

   (b) *10 telefones idênticos por 12 quartos, um por cada quarto;*

   (c) *10 telefones coloridos (4 vermelhos, 3 brancos e 3 verdes) por 12 quartos, um por cada quarto;*

9. *Existem* 3 *apartamentos que recebem 3 ou 4 inquilinos. Determine o número de maneiras de alugar os apartamentos a 10 estudantes.*

10. *De quantas maneiras 4 livros de História, 3 livros de Matemática 3 livros de Química e 2 livros de Sociologia podem ser colocados numa parteleira de modo que os livros da mesma matéria fiquem juntos.*

11. *Determine o número de maneiras de sentar n homens e n mulheres numa mesa redonda de modo que os homens e as mulheres ocupem lugares alternados.*

12. *Determine o número de maneiras de sentar r de n pessoas numa mesa redonda e as restantes noutra mesa redonda.*

13. *Determine o número de maneiras de sentar n homens e m mulheres, $m < n$, numa mesa redonda de modo que as mulheres não fiquem juntas.*

14. *Os n elementos da presidência de uma comissão incluem um presidente e dois vice-presidentes. Determine o número de maneiras de os distribuir por uma mesa redonda de modo que os vice-presidentes estejam um de cada lado do presidente.*

15. *Determine o número de maneiras de distribuir dez livros por quatro estudantes de modo que cada estudante receba pelo menos dois livros.*

16. *Determine o número de maneiras de distribuir sete lápis e sete canetas idênticas por cinco estudantes de modo que cada estudante receba pelo menos um lápis e uma caneta.*

17. *A administração de um clube é constituída por 8 homens e 7 mulheres. Existe um casal nessa administração. Pretende-se construir uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres. Quantos comissões se podem formar supondo que estas podem conter o marido ou a esposa mas não ambos.*

18. *Uma delegação de quatro estudantes é selecionada de modo a participar numa reunião.*

    (a) *Quantas delegações podem ser formadas sabendo que há doze alunos que podem ir?*

    (b) *Quantas delegações podem ser formadas, sabendo que dos doze alunos há dois que são casados e só irão juntos?*

    (c) *Quantas delegações podem ser formadas, sabendo que dos doze alunos há dois que não se falam e não podem juntos?*

19. *Sejam n, a, b e c inteiros positivos tais que $n+1 = a+b+c$. Prove que*

$$\binom{n}{a-1 \quad b \quad c} + \binom{n}{a \quad b-1 \quad c} + \binom{n}{a \quad b \quad c-1} = \binom{n+1}{a \quad b \quad c}.$$

4.5 Princípio da gaiola dos pombos

Alguns dos mais profundos e complicados resultados existentes na moderna Teoria da Combinatoria derivam de uma proposição muito simples conhecida por *Princípio da gaiola dos pombos*:

Se n gaiolas abrigam $n+1$ ou mais pombos então pelo menos uma gaiola abriga dois ou mais pombos.

EXEMPLO:

1. *Considere um torneio onde n jogadores, onde cada jogador joga com todos os outros. Supondo que cada jogador vence pelo menos uma vez, mostre que existem pelo menos dois jogadores com o mesmo número de vitórias.*

   RESOLUÇÃO: O número de vitórias que cada jogador pode ter varia entre 1 e $n-1$. Estes $n-1$ números correspodem às gaiolas que vão abrigar os n pombos (os jogadores).

2. *Mostre quem em qualquer grupo de pessoas há sempre pelo menos duas que conhecem o mesmo número de pessoas do grupo.*

   RESOLUÇÃO: Seja X um grupo de n pessoas e seja k o número de pessoas desse grupo que não conhece ninguém desse grupo.

   (a) Se $k>1$ existem pelo menos duas pessoas que não conhecem ninguém do grupo e a afirmação é válida.

   (b) Se $k=0$ seja x_i o número de pessoas do grupo conhecidas pela pessoa i, $i=1,\ldots,n$. Então para cada pessoa i, $1 \leq x_i \leq n-1$. Como temos n pessoas e x_i varia entre 1 e $n-1$ concluímos que os valores de x_i não podem ser todos distintos. Então existem i e j tais que $x_i = x_j$.

   (c) Se $k=1$ ignoramos essa pessoa e repetimos o raciocínio anterior substituindo n por $n-1$.

3. *Se 5 pontos colocados aleatoriamente num triângulo equilátero de lado 2, mostre que existem sempre 2 pontos cuja distância é menor do que 1.*

RESOLUÇÃO: Vamos dividir o triângulo em quatro triângulos equiláteros de lado 1. Como vamos distribuir os 5 pontos por quatro triângulos, pelo Princípio da Gaiola dos Pombos dois pontos ficarão no interior do mesmo triângulo, pelo que a sua distância é inferior a 1.

4. *Se 10 pontos colocados aleatoriamente num triângulo equilátero de lado 3, mostre que existem sempre 2 pontos cuja distância é menor do que 1.*

RESOLUÇÃO: Exercício

5. *Se 5 pontos colocados aleatoriamente num quadrado de lado 2, mostre que existem sempre 2 pontos cuja distância é menor do que* $\sqrt{2}$.

RESOLUÇÃO: Exercício.

Mostre que em qualquer conjunto de doze números números naturais existem sempre dois cuja diferença é divisível por 11.

RESOLUÇÃO: Considere os conjuntos de todos os restos possíveis da divisão de um número por 11...

6. *Mostre que em qualquer conjunto de sete números naturais existem sempre dois cuja soma ou diferença é divisível por 10.*

RESOLUÇÃO: Exercício

7. *Mostre que em qualquer subconjunto com* 7 *elementos do conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, 11\}$*, existem dois elementos nesse subconjunto cuja soma é igual a 12.*

4.6 O Teorema Binomial e Teorema Multinomial

Sejam x, a_1, a_2 e a_3 arbitrários e consideremos o produto

$$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3).$$

Efectuando alguns cálculos, verificamos que

$$\prod_{i=1}^{3}(x + a_i) = x^3 + (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)x + a_1a_2a_3. \tag{4.8}$$

No caso geral, temos

$$\prod_{i=1}^{n}(x + a_i) = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \cdots X_{n-1}x + S_n, \tag{4.9}$$

onde

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 + \cdots + a_n \\ S_2 &= a_1a_2 + \cdots + a_{n-1}a_n \\ &\vdots \\ S_n &= a_1a_2\cdots a_n, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \text{Número de termos de } S_1 &= C_1^n = n, \\ \text{Número de termos de } S_2 &= C_2^n = \frac{n \times (n-1)}{2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

De um modo geral, o número de termos de S_r é C_r^n. Suponhamos agora que $a_i = a$, $i = \overline{1, n}$. Temos então

Teorema 4.6.1 (Teorema Binomial) *Se a e x são variáveis e n é um inteiro positivo, então,*

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k x^{n-k}. \tag{4.10}$$

Este resultado pode ser demonstrado utilizando o Princípio de Indução Matemática.

EXEMPLOS: Vamos de seguida apresentar alguns exemplos:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + b^5$$

Os coeficientes das potências sucessivas de $a+b$ podem ser colocados numa configuração designada por *Triângulo de Pascal.*

$$C_0^0 = 1$$

$$C_0^1 = 1 \qquad\qquad C_1^1 = 1$$

$$C_0^2 = 1 \qquad\qquad C_2^0 = 2 \qquad\qquad C_2^2 = 1$$

$$C_0^3 = 1 \qquad\qquad C_1^3 = 3 \qquad\qquad C_2^3 = 3 \qquad\qquad C_3^3 = 1$$

Vamos de seguida apresentar algumas propriedades do desenvolvimento de $(x+a)^n$:

$\mathbf{P}_1$ O número de parcelas do desenvolvimento de $(x+a)^n$ é igual a $n+1$.

Corresponde às <u>combinações completas</u> das duas letras x e a, tomadas n a n, isto é, a

$$\overline{C}_n^2 = C_n^{2+n-1} = \frac{(n+1)!}{1!n!} = n+1.$$

$\mathbf{P}_2$ O $(r+1)-$ésimo termo é

$$C_r^n x^{n-r} a^r$$

$\mathbf{P}_3$ Os coeficientes dos termos equidistantes das extremidades são iguais.

EXERCÍCIO: Desenvolva e simplifique $(2x+3y^2)^3$.
RESOLUÇÃO: Pelo Teorema Binomial,

$$(2x+3y^2)^3 = \binom{3}{0}(2x)^0(3y^2)^3 + \binom{3}{1}(2x)^1(3y^2)^2 + \binom{3}{2}(2x)^2(3y^2) + \binom{3}{3}(2x)^3(3y^2)^0.$$

Uma vez que

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \text{e} \quad \binom{3}{3} = 1,$$

vem

$$(2x+3y^2)^3 = 27y^6 + 54xy^4 + 54x^2y^2 + 8x^3.$$

Exercício 4.6.1 *1. Desenvolva e simplifique:*

(a) $(x+3y)^3$*;*

(b) $(2x-y)^4$*;*

2. Obtenha e simplifique a parcela de $(2x^2-y^3)^8$ *que contém* x^{10}*.*

3. Obtenha e simplifique a parcela de $(3xy^2+z^2)^7$ *que contém* y^6*.*

Teorema 4.6.2 (Teorema Multinomial): *Sejam k e n inteiros positivos e x_1, x_2, ..., x_k variáveis. Então:*

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_n^{n_k}, \tag{4.11}$$

onde o somatório percorre todos os inteiros não negativos n_1, n_2, n_3, ..., n_k tais que $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$.

EXERCÍCIO: Obtenha e simplifique a parcela de $(2x^3 - 3xy^2 + z^2)^6$ que contém x^{11} e y^4.

RESOLUÇÃO: O termo geral do desenvolvimento é

$$\left(\begin{array}{ccc} & 6 & \\ a & b & c \end{array}\right) (2x^3)^a \, (-3xy^2)^b \, (z^2)^c = \left(\begin{array}{ccc} & 6 & \\ a & b & c \end{array}\right) 2^a \, (-3)^b x^{3a+b} \, y^{2b} \, z^{2c}.$$

Então a parcela que contém x^{11} e y^4 é aquela em que $3a + b = 11$ e $2b = 4$, isto é, á parcela em que $b = 2$ e $a = 3$. Como $a + b + c = 6$ vem $c = 1$. Substituindo resulta que a parcela que contém x^{11} e y^4 é

$$\left(\begin{array}{ccc} & 6 & \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right) 2^3 \, (-3)^2 \, x^{11} \, y^4 \, z^2 = -4320 \, x^{11} \, y^4 \, z^2.$$

Exercício 4.6.2 *1. Obtenha e simplifique a parcela de $(2x^2 - y^3 + z)^7$ que contém x^4 e y^6;*

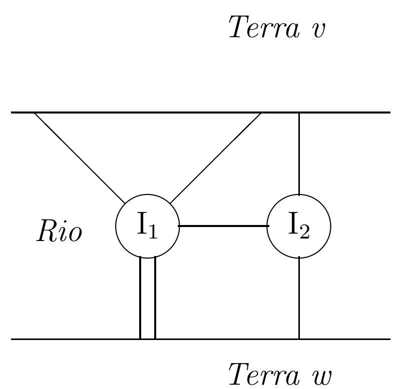
2. Obtenha e simplifique a parcela de $(xy - y^2 + 2z)^6$ que contém x^3 e y^5.

Capítulo 5

Teoria de Grafos

5.1 Introdução

O primeiro problema da teoria de Grafos foi o das pontes de Könisberg, resolvido pelo matemático Leonard Euler. Uma cidade possuia um rio com duas ilhas conectadas por sete pontes como está indicado no esquema que se segue:



O problema consistia em determinar se era possível caminhar de um ponto qualquer da cidade e retornar a esse ponto passando por cada ponte exactamente uma vez. Euler resolveu este problema criando um *grafo* em que a terra firme corresponde a um vértice e cada ponte corresponde a uma aresta.

Quando caminhamos por um vértice, nós temos que entrar e sair dele (ou vice-versa, no caso do ponto inicial), o que significa que usamos um par de arestas de cada vez que passamos por um vértice. Uma vez que o grafo acima possui vértices com um número ímpar de arestas, a resposta para o problema é **NÃO**.

De seguida são apresentados alguns problemas que podem ser resolvidos utilizando a teoria de Grafos:

P$_1$: Um vendedor deve passar por várias cidades e voltar ao ponto inicial. Qual o trajecto com menor distância possível ?

P$_2$: Como ir de uma cidade a para a cidade c passando pelo menor número de cidades ?

P$_3$: Dado um projecto de conexões de um circuito integrado. Este projecto poderá ser implementado numa placa de circuitos sem cruzamentos entre as conexões ?

5.2 Algumas definições

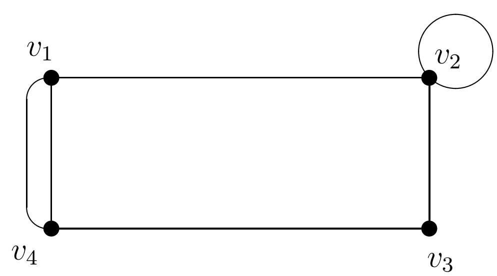
Nesta secção introduziremos conceitos básicos e notações da teoria de grafos.

Definição 5.2.1 *Chamamos* ***grafo*** *a um par $\mathcal{G}(\mathcal{V}, E)$ onde $\mathcal{V}$ é o conjunto finito não vazio cujos elementos são designados por vértices e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos de $\mathcal{V}$ a que chamamos arestas.*

Exemplo 5.2.1 *Considere $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$, onde $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e o conjunto das arestas é*

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_2, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_4\}\}.$$

A aresta $\{v_2, v_2\}$ designa-se por lacete ou laço; a repetição do conjunto $\{v_1, v_4\}$ significa que entre os vértices v_1 e v_4 existem duas arestas.

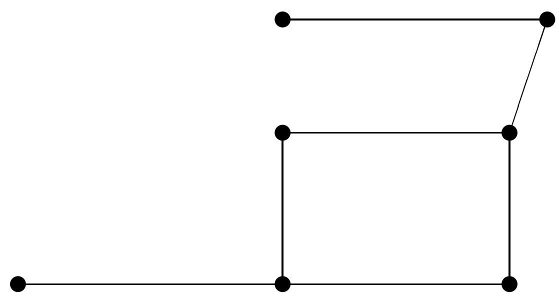


Um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ diz-se **trivial** quando o conjunto dos vértices tem unicamente um elemento.

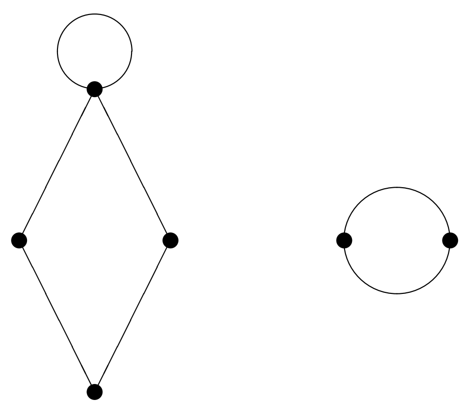
Um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ diz-se **simples** se não tem lacetes nem arestas múltiplas (isto é, um par de elementos que aparece em E mais que uma vez).

Exemplo 5.2.2

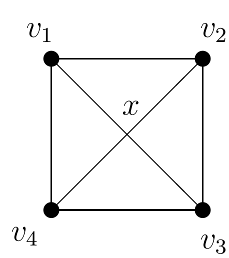
1. *Grafo simples:*



2. *Grafos não-simples:*



Duas arestas de um grafo podem intersectar-se num ponto que não seja um vértice. Por exemplo, no grafo



x não é vértice.

Os grafos nos quais as arestas se intersectam unicamente nos vértices são designados por grafos **planares**.

Definição 5.2.2

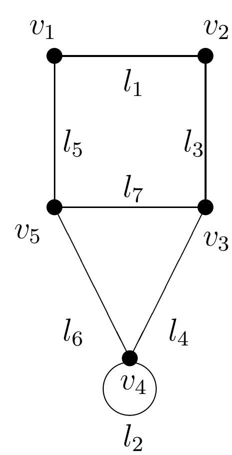
1) Dois vértices v e w de um grafo $\mathcal{G}$ dizem-se **adjacentes** *se existir uma aresta que os une. Dizemos também que os vértices são* **incidentes** *relativamente a essa aresta.*

2) O **grau de um vértice** *é igual ao número de arestas que incidem nesse vértice. Denotamos o grau de um vértice v por $d_{\mathcal{G}}(v)$.*

3) Chamamos **vértice isolado** *a um vértice de grau zero e chamamos* **vértice terminal** *ou* **ponto extremo** *a um vértice de grau um.*

4) Duas arestas dizem-se **adjacentes** *se existe um vértice que os une.*

Exemplo 5.2.3 *Considere o seguinte grafo:*



Neste grafo,

- *os vértices v_1 e v_2 são adjacentes;*
- *o vértices v_1 e a aresta l_1 são incidentes;*

- *o grau do vértice v_2 é dois;*
- *o grau do vértice v_5 é três;*
- *o grau do vértice v_4 é quatro (**cada lacete conta como duas arestas no cálculo do grau de um vértice**).*

Teorema 5.2.1 *Para qualquer grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ é válida a igualdade*

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{G}}(v) = 2|E|, \tag{5.1}$$

onde $|E|$ representa o número de elementos de E, isto é, o número de arestas.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos o grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ tal que $|E|$ arestas. Como cada aresta contribui com dois graus, a soma dos graus de todos os vértices em $\mathcal{G}$ é igual a $2|E|$.

■

Exercício 5.2.1 *Mostre que se $\mathcal{G}$ é um grafo simples com n vértices e m arestas então,*

$$m \leq \frac{1}{2} n (n-1) \ .$$

Resolução: Seja $\mathcal{G}$ um grafo simples com n vértices. Como se viu anteriormente, o número máximo de arestas que ele pode ter é dado por

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Logo, $m \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

□

Exercício 5.2.2 *Mostre que em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.*

Resolução: Se houver um número ímpar de vértices de grau ímpar então a soma dos graus será ímpar, o que contradiz o teorema **??**. □

Exercício 5.2.3 *Seja $\mathcal{G}$ um grafo simples com pelo menos dois vértices. Mostre que $\mathcal{G}$ contém pelo menos dois vértices com o mesmo grau.*

Resolução: Seja $\mathcal{G}$ um grafo com n vértices. O grau máximo que um vértice de $\mathcal{G}$ pode ter é $(n-1)$. Admitamos que os vértices de $\mathcal{G}$ têm todos diferentes graus.

Então,

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{G}}(v) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1),$$

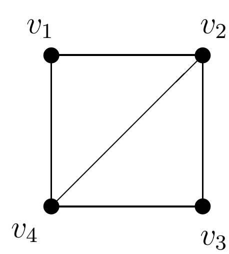
isto é, tem de haver um vértice isolado (grau 0) e um vértice ligado a todos os outros, isto é, um vértice de grau $(n-1)$. O que é uma contradição.

□

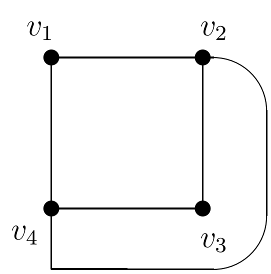
5.3 Isomorfismo de Grafos

Consideremos um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$, arbitrário. Obviamente, este pode ser desenhado de muitas formas distintas.

Por exemplo, o grafo



também pode ser representado na forma

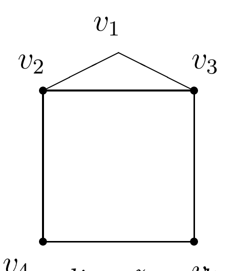


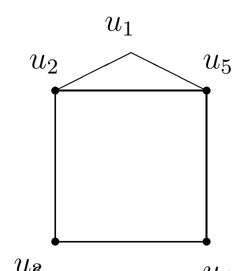
Temos representações diferentes do mesmo grafo. Utilizando uma linguagem mais rigorosa, dizemos que dois objectos com a mesma cardinalidade e a mesma estrutura são **isomorfos**. Ou seja,

Definição 5.3.1 *Sejam* $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ *e* $\mathcal{G}' = (\mathcal{G}', E')$ *dois grafos. Dizemos que* $\mathcal{G}$ *e* $\mathcal{G}'$ *são* **isomorfos** *e escrevemos* $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}'$ *se existe uma aplicação bijectiva* $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ *tal que* $\{u, v\} \in E$ *se e só se* $\{f(u), f(v)\} \in E'$.

Dois grafos isomorfos têm o mesmo número de vértices e os vértices u e $f(u)$ têm o mesmo grau. Assim, para provar que dois grafos não são isomorfos basta procurar uma propriedade invariante para os isomorfismos e verificar que essa propriedade é satisfeita por um grafo mas não é satisfeita pelo outro grafo.

Exemplo 5.3.1 *Os grafos seguintes são isomorfos*





Considerando a aplicação g *definida de* $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ *para* $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, *da seguinte forma:*

$$g(v_1) = u_1, \quad g(v_2) = u_2, \quad g(v_3) = u_5, \quad g(v_4) = u_3, \quad g(v_5) = u_4\,,$$

ela é um isomorfismo de grafos.

Contudo uma aplicação bijectiva f *também definida de* $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ *para* $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, *em que*

$$f(v_1) = u_1, \quad f(v_2) = u_5, \quad f(v_5) = u_4\,.$$

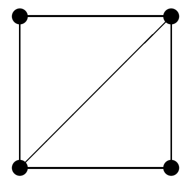
não é um isomorfismo de grafos. De facto, é fácil ver que $\{v_3, v_5\}$ *é uma aresta do grafo* $\mathcal{G}_1$ *e que*

$$\{f(v_3), f(v_5)\} = \{f(v_3), u_4\}$$

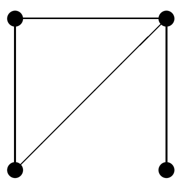
tem que ser uma aresta de $\mathcal{G}_2$. *Consequentemente,* $f(v_3) = u_3$ *ou* $f(v_1) = u_5$. *Por outro lado,* $\{v_2, v_3\}$ *é uma aresta de* $\mathcal{G}_1$ *mas,* $\{f(v_2), f(v_3)\} = \{u_5, u_3\}$ *não é uma aresta de* $\mathcal{G}_2$.

Um **subgrafo** do grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ é um grafo $\mathcal{G}' = (\mathcal{V}', E')$ tal que $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ e $E' \subseteq E$, e representa-se por $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$.

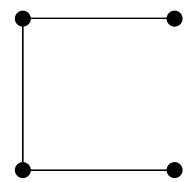
Exemplo 5.3.2 *Consideremos o grafo $\mathcal{G}$:*



Os grafos abaixo são subgrafos do grafo $\mathcal{G}$:



$\mathcal{G}_1$



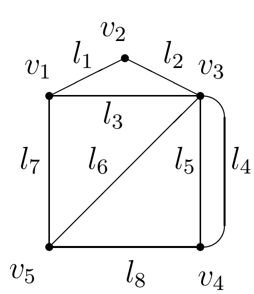
$\mathcal{G}_2$

Um subgrafo $\mathcal{G}' = (\mathcal{V}', E')$ do grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ em que $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$ é designado por **subgrafo gerador** (ou abrangente) de $\mathcal{G}$.

No exemplo anterior, tanto $\mathcal{G}_1$ como $\mathcal{G}_2$ são subgrafos geradores de $\mathcal{G}$.

5.4 Matrizes de Incidência e de Adjacência

Consideremos o seguinte grafo



onde v_1 e v_2 são vértices adjacentes, assim como o são v_1 e v_5. As arestas $l_1 = \{v_1, v_2\}$, $l_3 = \{v_1, v_3\}$, $l_7 = \{v_1, v_5\}$ são incidentes em v_1.

Definição 5.4.1 *Dado o grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ com n vértices, chamamos* **matriz de adjacência** *de $\mathcal{G}$ e denotaremos por $A(\mathcal{G})$ 'a matriz quadrada de ordem $n \times n$ cujo elemento da linha i e coluna j é igual ao número de arestas que unem os vértices v_i e v_j.*

Exemplo 5.4.1

1. *Relativamente ao grafo anterior a matriz de adjacência é a matriz*

$$A(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. *Relativamente ao grafo do exemplo 6.2.1, anterior a matriz de adjacência é*

$$A(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5.4.1 *Prove que se A é a matriz de adjacência de um grafo $\mathcal{G}$ então A é uma matriz simétrica e mostre que, se $\mathcal{G}$ é simples, a soma das entradas de cada linha ou coluna é igual ao grau do vértice correspondente.*

Resolução: Seja $A_{n \times n}$ uma matriz de adjacência de um grafo com n vértices. Da Álgebra linear sabemos que A é simétrica se e só se $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Sejam i e j dois inteiros não superiores a n. Então,

i) Por definição de matriz de adjacência, cada elemento da matriz ou é igual a zero ou igual a um. Consideremos o caso em que $a_{ij} = 1$. O caso $a_{ij} = 1$ corresponde ao caso em que o vértice v_i é adjacente ao vértice v_j, e consequentemente, o vértice v_j é adjacente ao vértice v_i. Isto é, $a_{ij} = a_{ji} = 1$.

ii) O caso $a_{ij} = 0$ corresponde ao caso em que o vértice v_i não é adjacente ao vértice v_j, e consequentemente, o vértice v_j não é adjacente ao vértice v_i. Isto é, $a_{ij} = a_{ji} = 0$.

Portanto, a matriz A é simétrica.

$\square$

Exercício 5.4.2 *A que corresponde o traço da matriz de adjacência de um grafo?*

Resolução: Corresponde ao número de lacetes.

$\square$

Definição 5.4.2 *Dado o grafo* $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ *onde* $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *e* $E = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$, *chamamos* **matriz de incidência** *de* $\mathcal{G}$ *e denotaremos por* $M(\mathcal{G})$ *à matriz do tipo* $n \times m$ *cujo elemento na linha* i *e coluna* j *é igual ao número de vezes que* v_i *é incidente en* l_j.

Assim temos $M(\mathcal{G}) = [m_{ij}]$, com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, onde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o vértice } v_i \text{ é incidente relativamente a } l_j, \\ \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 5.4.2 *Considerando novamente o exemplo anterior, a matriz de incidência é*

$$M(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 5.4.3 *A que é igual a soma dos elementos de uma linha da matriz de incidência de um grafo simples?*

Resolução: É igual ao grau do vértice correspondente a essa linha.

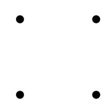
$\square$

5.5 Outros tipos de Grafos

As definições anteriores permitem-nos introduzir outros tipos de grafos.

♣ Grafo nulo

Dizemos que um grafo é **nulo** quando o conjunto das arestas é um conjunto vazio. Por exemplo:

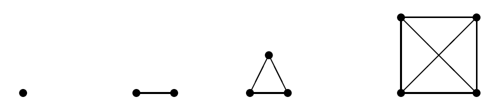


♣ Grafo completo

Um grafo **completo** é um grafo simples em que qualquer par de vértices é adjacente, isto é, existe uma aresta a unir qualquer par de vértices.

Um grafo completo de n vértices representa-se por K_n.

Por exemplo:



K_1 K_2 K_3 K_4

Um grafo completo tem $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas[1].

♣ Grafo regular

Chamamos grafo **regular** de grau r a um grafo cujos vértices têm todos grau r.

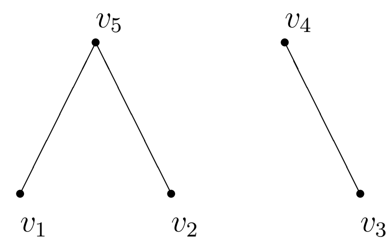
Por exemplo, K_n é um grafo regular de grau $n-1$.

♣ Grafo bipartido

Um grafo $\mathcal{G}$ em que o conjunto dos vértices pode ser **particionado** em dois subconjuntos $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$, de forma a que cada aresta de $\mathcal{G}$ une um vértice de $\mathcal{V}_1$ e a um vértice de $\mathcal{V}_2$ diz-se um grafo **bipartido**.

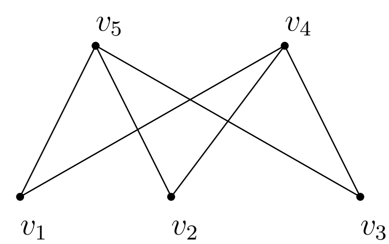
[1] Ver exercício 6.2.1

Por exemplo, no caso do seguinte grafo



temos $\mathcal{V}_1 = \{v_5, v_4\}$ e $\mathcal{V}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Num grafo bipartido, em que cada vértice de $\mathcal{V}_1$ é adjacente a todos os vértices de $\mathcal{V}_2$ diz-se um grafo *bipartido completo*. Como exemplo, podemos considerar o grafo



Denotemos por $K_{r,s}$ o grafo bipartido completo onde r e s são os número de vértices que pertencem a $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ respectivamente. O exemplo anterior seria representado por $K_{2,3}$. É fácil concluir que $K_{r,s}$ tem $r+s$ vértices e rs arestas.

5.6 União e Soma de grafos

Existem várias formas de combinar grafos de modo a construir um grafo maior.

A **união** de dois grafos $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, E_1)$ e $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, E_2)$, onde $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ são disjuntos, é o grafo cujo conjunto dos vértices é $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ e o conjunto das arestas é $E_1 \cup E_2$. Este novo grafo será designado por $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$.

A **soma** dos grafos $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ é o grafo cujo conjunto dos vértices é $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ e o conjunto das arestas é $E_1 \cup E_2$ **reunido** com o conjunto de todas as arestas que unem cada vértice de $\mathcal{G}_1$ a todos os vértices de $\mathcal{G}_2$.

Observação 5.6.1

i) Estas definições podem estender-se a qualquer grafo finito,

ii) Ambas as operações são comutativas e associativas.

Exercício 5.6.1 *Sejam G, H e K grafos simples. Prove ou refute a veracidade das seguintes expressões*

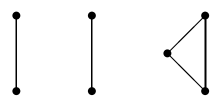
i) $G \cup (H + K) = (G \cup H) + (G \cup K)$;

ii) $G + (H \cup K) = (G + H) \cup (G + K)$.

Resolução:

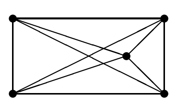
i) Vamos provar que a afirmação é falsa.

Consideremos os grafos

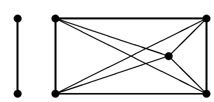


$\mathcal{G}$ $\quad \mathcal{H}$ $\quad \mathcal{K}$

Temos portanto,

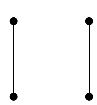


$\mathcal{H} + \mathcal{K}$

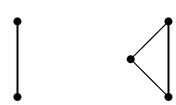


$\mathcal{G} \cup (\mathcal{H} + \mathcal{K})$

Por outro lado,

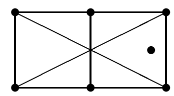


$\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$



$\mathcal{G} \cup \mathcal{K}$

E a soma dos grafos $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ *e* $\mathcal{G} \cup \mathcal{K}$ *é igual ao grafo*

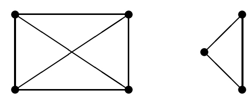


$(\mathcal{G} \cup \mathcal{H}) + (\mathcal{G} \cup \mathcal{K})$

Verificámos então que $(\mathcal{G} \cup \mathcal{H}) + (\mathcal{G} \cup \mathcal{K}) \neq \mathcal{G} \cup (\mathcal{H} + \mathcal{K})$.

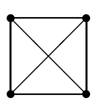
ii) *Vamos mostrar que* $\mathcal{G} + (\mathcal{H} \cup \mathcal{K}) \neq (\mathcal{G} + \mathcal{H}) \cup (\mathcal{G} + \mathcal{K})$

Utilizando os mesmos grafos que na alínea anterior temos

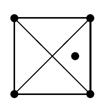


$\mathcal{G} + (\mathcal{H} \cup \mathcal{K})$

Por outro lado



$\mathcal{G} + \mathcal{H}$



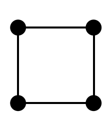
$\mathcal{G} + \mathcal{K}$

□

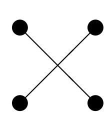
5.7 Complementar de um Grafo Simples

Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ *um grafo simples. Chamamos grafo* **complementar** *de* $\mathcal{G}$, *denotando-o por* $\bar{\mathcal{G}}$, *ao grafo simples cujo conjunto de vértices é* $\mathcal{V}$ *e dois vértices são adjacentes em* $\bar{\mathcal{G}}$ *se e só se não o são em* $\mathcal{G}$.

Exemplo 5.7.1



$\mathcal{G}$



$\bar{\mathcal{G}}$

O **complementar** do grafo completo K_n é um grafo nulo.

Exercício 5.7.1 *Um grafo simples diz-se* **autocomplementar** *se é isomorfo ao seu complementar. Mostre que o número de vértices de um grafo autocomplementar é* $4k$ *ou* $4k+1$ *onde* $k \in \mathbb{Z}$.

Resolução: Seja $\mathcal{G}$ um grafo autocomplementar. O grafo $\mathcal{G}$ tem o mesmo número de arestas que $\bar{\mathcal{G}}$ (porquê ?).

Um grafo auto complementar com n vértices tem $\frac{n\times(n-1)}{4}$ arestas (**Prove !**).

Seja k o seu número de arestas. Obviamente, para $n \in \mathbb{N}$, devemos impor a condição $\frac{n\times(n-1)}{4} = k \in \mathbb{N}$. Isto é,

$$4k = n \times (n-1)\,, \tag{5.2}$$

para algum $k \in \mathbb{N}$.

Uma vez que $n \in \mathbb{N}$, temos que $n = 4k$, ou $n = 4k+1$, ou $n = 4k+2$ ou $n = 4k+3$.

Assim, quando $n = 4k$ segue-se que $n\,(n-1) = 4k\,(4k-1)$; quando $n = 4k+1$ obtemos $n\,(n-1) = 4k\,(4k+1)$; se $n = 4k+2$ obtemos que $n\,(n-1) = 4k\,(4k+3)+2$ e para $n = 4k+3$ segue-se que $n\,(n-1) = 4\,(4k^2+5k+1)+2$.

Consequentemente, os únicos valores de n que verificam (**??**) são $n = 4k$ ou $n = 4k+1$.

□

5.8 Caminhos e Circuitos

Definição 5.8.1 *Seja* $\mathcal{G}$ *um grafo. Uma sequência finita de arestas da forma* $\{v_0, v_1\}$, $\{v_1, v_2\}$, $\ldots$, $\{v_m, v_{m-1}\}$ *é designada por* **sequência de arestas**. *Esta sequência também poderá ser representada do seguinte modo*

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_m.$$

1. *Uma sequência de arestas têm associada uma sequência de vértices. O vértice* v_0 *é designado por* **vértice inicial** *e o vértice* v_m *é designado por* **vértice final**.

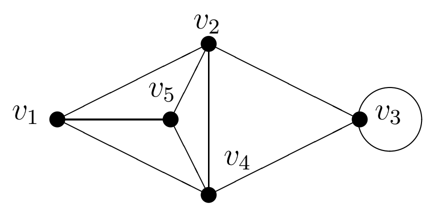
2. *O comprimento de uma sequência de arestas é igual ao seu número de arestas.*

3. *Uma sequência de arestas em que todas as arestas são distintas é designada por* **pista**.

4. *Se numa pista todos os vértices são distintos, excepto possivelmente o primeiro e o último é designado por* **caminho**.

5. *Uma pista em que $v_0 = v_m$ diz-se* **fechada**. *De modo análogo se define caminho* **fechado**. *Uma pista fechada é designada por* **circuito**.

Exemplo 5.8.1 *Considere o grafo*



Como exemplo de uma sequência de arestas de comprimento 7, *podemos apresentar*

$$v_1 \to v_2 \to v_5 \to v_4 \to v_2 \to v_3 \to v_3 \to v_2,$$

e como exemplo de uma pista, podemos considerar

$$v_1 \to v_5 \to v_2 \to v_4 \to v_5\,.$$

Como exemplo de **circuitos**, *podemos considerar* $v_1 \to v_2 \to v_4 \to v_1$ *e* $v_3 \to v_3$.

Teorema 5.8.1 *Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ um grafo bipartido. Então, todo o circuito de $\mathcal{G}$ tem comprimento par.*

Demonstração: Seja $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_m \to v_1$ um circuito de $\mathcal{G}\,(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ e suponhamos, sem perder a generalidade, que $v_1 \in \mathcal{V}_1$.

Como $\mathcal{G}\,(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ é um grafo bipartido, $v_2 \in \mathcal{V}_2$, $v_3 \in \mathcal{V}_1$ e assim sucessivamente. Então $v_m \in \mathcal{V}_2$ e consequentemente, o comprimento é par.

■

Um grafo diz-se **conexo** se e só se entre dois vértices existe sempre um caminho. Um grafo que não é conexo é designado por **desconexo**.

Exercício 5.8.1 *Prove que se $\mathcal{G}$ é um grafo que possui dois circuitos contendo a aresta e então $\mathcal{G}$ possui um circuito que não possui a aresta e.*

Resolução: Comecemos por considerar 2 circuitos que contenham a aresta e. Temos portanto,

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to \cdots \to v_{m-2} \to \underbrace{v_{m-1} \to v_m}_{\text{aresta } e} \to v_{m+1} \to \cdots \to v_1,$$

e

$$v'_1 \to v'_2 \to v'_3 \to \cdots \to v'_{m-2} \to \overbrace{v_{m-1} \to v_m}^{}_{\text{aresta } e} \to v'_{m+1} \to \cdots \to v'_1.$$

Então o circuito

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{m-2} \to v_{m-1} \to v'_{m-2} \to \cdots \to v'_1 \to \cdots \to v_m \cdots \to v_1$$

é um circuito que não contem a aresta e.

$\square$

Exercício 5.8.2 *Seja $\mathcal{G}$ um grafo simples. Prove que $\mathcal{G}$ e $\bar{\mathcal{G}}$ não podem ser ambos desconexos.*

Resolução: Suponhamos que $\mathcal{G}$ é desconexo e sejam u e v dois vértices de $\mathcal{G}$. Então, podemos considerar os seguintes casos:

Caso 1 Não existe nenhum caminho a unir os vértices u e v. Então não existe em $\mathcal{G}$ uma aresta a unir os vértices u e v. Neste caso, tal aresta existe em $\overline{\mathcal{G}}$.

Caso 2 Existe, em $\mathcal{G}$ uma caminho a unir os vértices u e v. Como $\mathcal{G}$ é desconexo, então existe um vértice u' que não está ligado por nenhuma aresta aos vértices u e v. Logo as arestas $\{u, u'\}$ e $\{u', v\}$ estão em $\bar{\mathcal{G}}$ e existe um caminho em $\bar{\mathcal{G}}$ que une u a u' e u' a v.

Conclusão: $\bar{\mathcal{G}}$ é conexo.

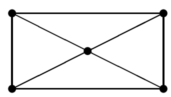
$\square$

5.9 Grafos Eulerianos

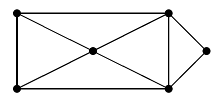
Vamos começar esta secção com uma definição.

Definição 5.9.1 *Um grafo $\mathcal{G}$,* **conexo***, diz-se* **Euleriano** *se $\mathcal{G}$ contêm uma pista fechada que passa por todas as arestas de $\mathcal{G}$ uma e uma só vez e que designamos por* **Pista de Euler***.*

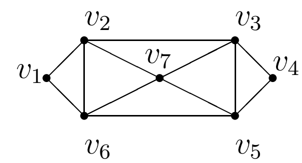
Exemplo 5.9.1 *Consideremos os grafos $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ e $\mathcal{G}_3$ definidos da seguinte forma*



$\mathcal{G}_1$



$\mathcal{G}_2$



$\mathcal{G}_3$

Os grafos $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ não são grafos Eulerianos. No entanto o grafo $\mathcal{G}_3$ é Euleriano. A pista de **Euler** *é*

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_6 \to v_7 \to v_5 \to v_3 \to v_7 \to v_2 \to v_6 \to v_1.$$

Para mostrar que um grafo é ou não Euleriano, não o faremos utilizando a definição pois o processo pode ser muito moroso. Para isso, apresentamos o seguinte teorema:

Teorema 5.9.1 *Um grafo conexo $\mathcal{G}$ é Euleriano se e só se todo o vértice tem grau par.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos supor em primeiro lugar que o grafo é Euleriano. Seja $\mathcal{P}$ uma pista de Euler do grafo $\mathcal{G}$. Seja u a origem de $\mathcal{P}$. De cada vez que um vértice v ocorre em $\mathcal{P}$, como vértice intermédio, duas arestas de v são incidentes em v (uma aresta "chega"a v e a outra "parte"de v). Como $\mathcal{P}$ passa por todas as arestas exactamente um vez, então $d_{\mathcal{G}}(v)$ é par para todo o $v \neq u$. Mas, $\mathcal{P}$ começa e termine em u. Logo, $d_{\mathcal{G}}(u)$ também é par.

Suponhamos agora que $\mathcal{G}$ é um grafo conexo em que todos os pontos têm grau par. Partindo de um vértice v_0 qualquer vamos passando de um vértice para outro e, independentemente do vértice a que se chegue, é sempre possível passar para outro, excepto o primeiro vértice, v_0. Portanto, é sempre possível definir um circuito fechado partindo do vértice v_0.

Se nesse circuito incluirmos todas as arestas, então estamos perante um circuito de Euler.

Caso contrário, como todos os vértices de $\mathcal{G}$ têm grau par e $\mathcal{G}$ é conexo, este circuito fechado tem que ter um vértice em comum com o subgrafo que inclui as restantes arestas e respectivos vértices.

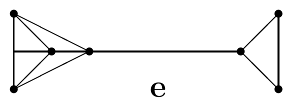
Podemos pois começar nesse vértice e repetir o processo até que todas as arestas de $\mathcal{G}$ terem sido usadas. Os sub-circuitos interligados formam o circuito de Euler.

∎

Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ um grafo e seja $E' \subseteq E$. Denotaremos por $\mathcal{G} - E'$ o subgrafo obtido de $\mathcal{G}$ por remoção das arestas incluídas em E'.

Definição 5.9.2 *Seja $\mathcal{G}$ um grafo conexo. Dizemos que uma aresta e de $\mathcal{G}$ é uma* **ponte** *se a sua remoção aumenta o número de componentes conexas de $\mathcal{G}$.*

Exemplo 5.9.2 *Considere o grafo,*



No grafo anterior, **e** *é uma ponte e não há mais pontes.*

5.10 Algoritmo de Fleury

Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ um grafo de Euler. A seguinte construção é sempre possível e dela resulta um circuito de Euler (por vezes também designado por pista de Euler).

Passo 1 Escolha arbitrariamente um vértice v_0 e percorra todas as arestas arbitrariamente.

Passo 2 Suponhamos que a pista

$$v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{i-1} \to v_i,$$

já foi escolhida. Então, escolhe-se a aresta l_{i+1} de $\mathcal{G} - \{l_1, l_2, \ldots, l_i\}$ tal que:

i) l_{i+1} é incidente em v_i,

ii) a não ser que não haja alternativa, l_{i+1} não é uma ponte de $\mathcal{G} - \{l_1, l_2, \ldots, l_i\}$.

Isto é, para um grafo Euleriano $\mathcal{G}$,

i) Escolha-se qualquer vértice v de $\mathcal{G}$ e defina-se o **vértice corrente** como v e a **circuito corrente** como sendo o **conjunto vazio**.

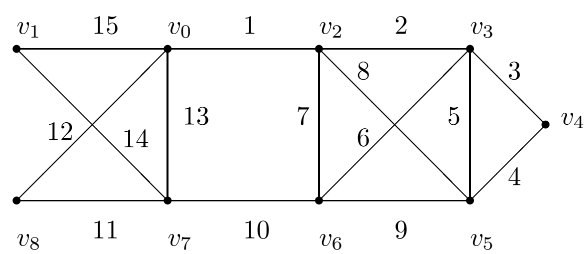
ii) Escolha-se uma aresta e qualquer, incidente no **vértice corrente** mas, escolhendo uma ponte se e só se não existe mais nenhuma alternativa.

iii) Adicione o vértice v ao **circuito corrente** e defina o **vértice corrente** como sendo o vértice que se encontra na outra extremidade da aresta e. Portanto, se e é um laço, o **vértice corrente** não sofre qualquer alteração.

iv) Apague a aresta e do grafo. Elimine quaisquer vértices isolados.

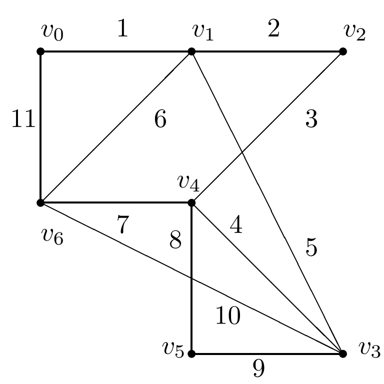
Repita os passos $ii) - iv)$ até que todas as arestas tenham sido removidas. O **circuito** que *sobra* é um circuito de Euler.

Exemplo 5.10.1 *1. Considere o grafo*



$$v_0 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_3 \to v_6 \to v_2 \to v_5 \to v_6 \to v_7 \to v_8 \to v_0 \to v_7 \to v_1 \to v_0.$$

2. Considere o grafo



$$v_0 \to v_1 \to v_2 \to v_4 \to v_3 \to v_1 \to v_6 \to v_4 \to v_5 \to v_3 \to v_6 \to v_0.$$

5.11 Coloração de Grafos

Um problema comum que ocorre quando se trabalha com a representação de regiões na forma de mapas coloridos é como representá-las de forma que cada região fique visivelmente clara e distinta das demais. A solução para esse problema torna-se possível se a cada região for atribuída uma cor e assim cada uma das regiões teria uma coloração distinta das demais. Mas todo esse esforço em se atribuir uma cor para cada região não é necessário, pois existe uma técnica de coloração de mapas que diz ser possível colorir qualquer mapa planar, utilizando-se apenas quatro cores.

Vermelho - **B**

Amarelo - **E**

Verde - **C**

Azul - **F**

Amarelo - **A**

Vermelho - **D**

A teoria da coloração de mapas diz ser possível colorir qualquer mapa planar utilizando no mímino quatro cores, sendo para isso necessária a criação de uma lista de adjacência de todos as regiões. Uma possível abordagem seria representar o problema proposto por uma lista de adjacências onde temos um vector com as regiões que devem ser coloridas e uma lista com os demais elementos que são as regiões adjacentes a este. Para o mapa representado acima, poderiamos ter a seguinte representação:

1. Lista de Adjacências para a região A: [B, C, D]
2. Lista de Adjacências para a região B: [A, C, E]
3. Lista de Adjacências para a região C: [A, B, D, E, F]
4. Lista de Adjacências para a região D: [A, C, F]
5. Lista de Adjacências para a região E: [B, C, F]
6. Lista de Adjacências para a região F: [C, D, E]

Essa representação diz que as regiões B, C e D são adjacentes a A; as regiões A, C e E são adjacentes a B; as regiões A, B, D, E e F são adjacentes a C; e, analogamente é possível chegar às demais relações. Sendo assim, o procedimento para se atribuir as cores certas a cada região é o seguinte:

- Escolhe-se uma região inicial, como por exemplo a região A e atribui-se uma cor a ela.
- para atribuir uma cor para B é verificado se dentre as cores existentes, existe uma que não esteja colorindo nenhuma região adjacente a B, então essa cor deverá ser escolhida. Se todas as cores existentes estiverem sendo utilizadas em regiões vizinhas a B, então uma nova cor é criada.
- o raciocínio é repetido analogamente para cada uma das regiões subsequentes.

Assim sendo, pode-se dizer que todas as regiões foram coloridas com a utilização de apenas quatro cores e que essas regiões não possuem nenhuma região vizinha com a mesma cor que ela possui.

Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ um grafo e $\mathcal{C}$ um conjunto de cores. Uma coloração de $\mathcal{G}$ é uma atribuição de alguma cor de $\mathcal{C}$ para cada vértice de $\mathcal{G}$, tal que dois vértices adjacentes sempre possuam cores distintas. Formalmente podemos declarar o problema acima como:

Definição 5.11.1 (Coloração) *Uma coloração de um grafo* $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ *é uma função* $f : \mathcal{V} \to \mathcal{C}$*, onde* $\mathcal{C}$ *é um conjunto de cores, tal que para cada aresta* (u, v) *de* E *tem-se* $f(u) \neq f(v)$*. Uma* k*-coloração de* $\mathcal{G}$ *é uma coloração que utiliza* k *cores. O número cromático* $X(\mathcal{G})$ *de um grafo* $\mathcal{G}$ *é o menor número de cores* k *tal que existe uma* k*-coloração para* $\mathcal{G}$*.*

Para grafos planares, o problema de coloração está intimamente ligado ao problema das 4 cores em mapas. Encontrar o número cromático de um grafo é uma tarefa bastante difícil e não é conhecido algoritmo eficiente para realizar esta tarefa.

Desta forma tenta-se obter uma aproximação para o problema, objectivando-se encontrar alguma coloração *razoável* para o grafo, i.e., procura-se o número de cores próximo ao número cromático. Um algoritmo simples para o problema de aproximar o número cromático consiste no seguinte:

Algoritmo 1 *Selecciona-se um vértice de* $\mathcal{G}$ *e atribui-se a ele uma cor 1. No passo geral, os vértices* $v_1, v_2, \ldots, v_j$ *já foram coloridos, sendo* k *o número de cores utilizadas. Seja* $\mathcal{C}_i$ *o* *conjunto de vértices que possuem a cor i e considere v_{j+1}. Se existir alguma cor i tal que $\mathcal{C}_i \cap adj(v_{j+1})$ onde $adj(v_p)$ corresponde aos vértices adjacentes ao vértice v_p, colorimos v_{j+1} com a cor i caso contrário atribuímos a v_{j+1} a cor $k+1$.*

5.12 Grafos Hamiltonianos

Definição 5.12.1 *Designa-se por circuito Hamiltoniano a toda a pista fechada que passa por todos os vértices de $\mathcal{G}$ exactamente uma vez. Um grafo que admita um circuito Hamiltoniano diz-se grafo Hamiltoniano.*

Teorema 5.12.1 *Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ um grafo simples com $n = |\mathcal{V}| \geq 3$ vértices. Se para cada par de vértices não adjacentes de $\mathcal{G}$, u e v, $d_{\mathcal{G}}(u) + d_{\mathcal{G}}(v) \geq n$ então o grafo $\mathcal{G}$ é Hamiltoniano.*

Corolário 5.12.1 *Se $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ é um grafo simples com $|\mathcal{V}| \geq 3$ e se para todo o $v \in \mathcal{V}$, $d_{\mathcal{G}}(v) \geq \frac{n}{2}$ então $\mathcal{G}$ é Hamiltoniano.*

Corolário 5.12.2 *Se $\mathcal{G}$ é um grafo bipartido com um número ímpar de arestas, então $\mathcal{G}$ não é Hamiltoniano.*

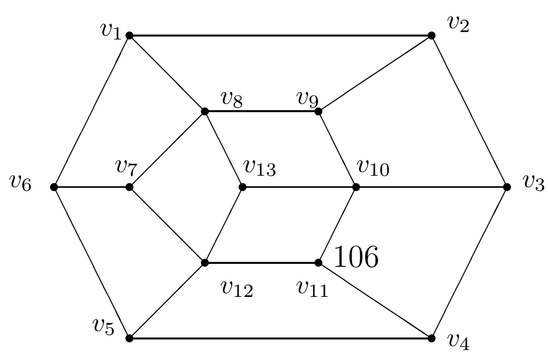
Exercício 5.12.1 *Prove que se $\mathcal{G}$ é um grafo bipartido em que $|\mathcal{V}_1| \neq |\mathcal{V}_2|$então $\mathcal{G}$ não é Hamiltoniano.*

Resolução: Suponhamos, sem perder a generalidade que $|\mathcal{V}_1| > |\mathcal{V}_2|$ e que $\mathcal{G}$ admite um circuito fechado que passa por todos os vértices. Suponhamos que esse circuito é iniciado num vértice de $\mathcal{V}_1$ ao qual se segue um vértice de $\mathcal{V}_2$, ao qual se segue um vértice de $\mathcal{V}_1$, etc ... e assim sucessivamente.

Como $|\mathcal{V}_1| > |\mathcal{V}_2|$, então o circuito fechado passa por todos os vértices de $\mathcal{V}_1$ se puder passar por todos os vértices de $\mathcal{V}_2$ mais do que uma vez. Logo, $\mathcal{G}$ não é Hamiltoniano.

$\square$

Exercício 5.12.2 *Considere o grafo,*

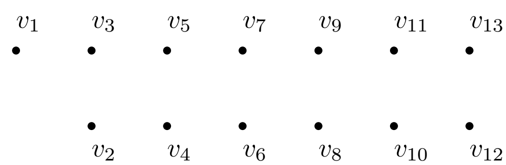


Prove que não é Hamiltoniano.

Resolução: O conjunto dos vértices é:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}\} \\ &= \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, v_{11}, v_{13}\} \cup \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}, v_{12}\}. \end{aligned}$$

Temos ainda que



Verificámos então que o grafo é bipartido e que $|\mathcal{V}_1| = 7 \neq |\mathcal{V}_2| = 6$. Pelo resultado anterior, $\mathcal{G}$ não é Hamiltoniano.

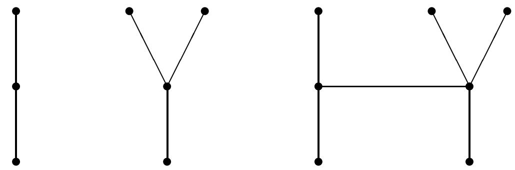
□

5.13 Árvores

Vamos começar esta secção com a definição de árvore.

Definição 5.13.1 *Um grafo $\mathcal{G}$ diz-se uma* **árvore** *se é conexo e não contém circuitos. Um grafo $\mathcal{G}$ diz-se uma* **floresta** *se não contém circuitos. Em consequência, uma floresta conexa é uma árvore.*

Exemplo 5.13.1 *Como exemplos de floresta podemos apresentar os grafos*



Teorema 5.13.1 *Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ um grafo com n vértices. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\mathcal{G}$ é uma árvore;

ii) $\mathcal{G}$ não contém circuitos e tem $n-1$ arestas;

iii) $\mathcal{G}$ é conexo e tem $n-1$ arestas;

iv) $\mathcal{G}$ é conexo e cada aresta é uma ponte;

v) Quaisquer dois vértices estão ligados por um caminho;

vi) $\mathcal{G}$ não contém circuitos mas, ao acrescentarmos uma aresta criamos um circuito.

DEMONSTRAÇÃO:

- $i) \to ii)$ Vamos utilizar o método de indução. Quando $n = 2$, o número de arestas é $2 - 1 = 1$. Vamos supor que o resultado é válido para árvores cujo número de vértices é menor que n. Seja $\mathcal{G}$ uma árvore com n vértices.

  Como $\mathcal{G}$ não contém circuitos, a remoção de uma aresta de $\mathcal{G}$ dá origem a um grafo com 2 componentes que iremos designar por $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ que são árvores com menos de n vértices. Suponhamos que $\mathcal{G}_1$ tem n_1 vértices e que $\mathcal{G}_2$ tem n_2 vértices. Por hipótese, $\mathcal{G}_1$ tem $n_1 - 1$ arestas e $\mathcal{G}_2$ tem $n_2 - 1$ arestas. Uma vez que $n_1 + n_2 = n$, o número de arestas de $\mathcal{G}$ é então

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1.$$

- $ii) \rightarrow iii)$ Suponhamos que $\mathcal{G}$ é desconexo e sejam $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, ..., $\mathcal{G}_r$ as componentes conexas de $\mathcal{G}$. Cada componente conexa não contém circuitos, visto que, por hipótese, $\mathcal{G}$ não contém circuitos. Então em $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, ..., $\mathcal{G}_r$ o número de vértices excede em 1 unidade o número de arestas e consequentemente o número de vértices de $\mathcal{G}$ excede o número de arestas em pelo menos r unidades o que contradiz o facto de que o número de arestas é igual a $n-1$.

- $iii) \rightarrow iv)$ Como $\mathcal{G}$ é conexo e tem $n-1$ arestas, a remoção de uma aresta dá origem a um grafo com n vértices e $n-2$ arestas, o qual é desconexo.

  Nota 5.13.1 *Se o novo grafo com n vértices e $n-2$ arestas fosse conexo então $\mathcal{G}$ tinha um circuito.*

- $iv) \rightarrow v)$ Se $\mathcal{G}$ é conexo, dados dois vértices u e v existe sempre um caminho entre eles. Se esse caminho não é único então $\mathcal{G}$ contém um circuito, o que contradiz o facto de que toda a aresta de $\mathcal{G}$ ser uma ponte.

- $v) \rightarrow vi)$ Se $\mathcal{G}$ contém circuitos então existem dois vértices ligados por dois caminhos diferentes, o que é uma contradição. Se juntarmos uma nova aresta $\{u, v\}$, como u e v já estão ligados por um caminho, então temos um circuito.

- $vi) \rightarrow i)$ Só temos que provar que $\mathcal{G}$ é conexo. Suponhamos que $\mathcal{G}$ não é conexo. Então, ao juntarmos uma aresta que une uma componente conexa a outra não temos nenhum circuito, o que é uma contradição.

■

Exercício 5.13.1 *Seja $\mathcal{G}$ uma floresta com n vértices e com k componentes. Prove que $\mathcal{G}$ tem $n-k$ arestas.*

Resolução: Sejam $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\ldots, \mathcal{G}_k$ as componentes conexas da floresta $\mathcal{G}$. Suponhamos que $\mathcal{G}_i$ tem n_i arestas. Então,

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Como cada $\mathcal{G}_i$, $i = \overline{1, k}$ é árvore, o número de arestas de $\mathcal{G}_i$ é igual a $n_i - 1$. Portanto, o número de arestas de $\mathcal{G}$ é

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} 1 = n - k.$$

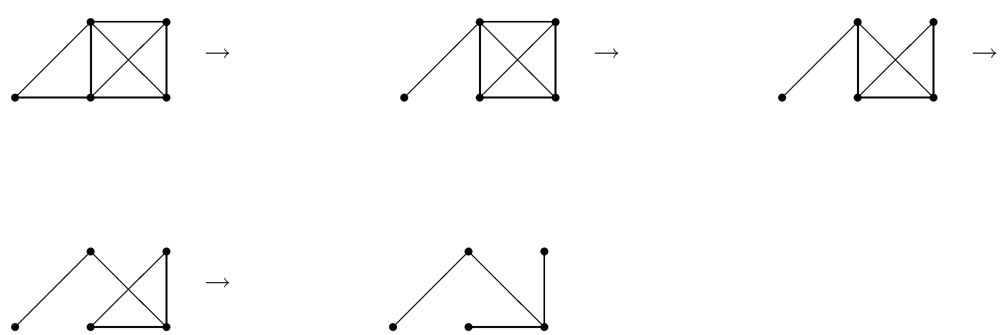
$\square$

Definição 5.13.2 *Uma* **árvore geradora** *de um grafo conexo $\mathcal{G}$ é um subgrafo gerador de $\mathcal{G}$ que é uma árvore.*

Coloca-se a questão: **como construir** uma árvore geradora de um grafo conexo?

O processo é simples: Basta escolher um circuito e remover uma aresta. O grafo resultante ainda é conexo. Depois, resta repetir o processo com os restantes circuitos até não haver circuitos.

Exemplo 5.13.2



Teorema 5.13.2 *O grafo K_n tem n^{n-2} árvores geradoras.*

5.14 Problema da Árvore Minimal

Definição 5.14.1 *Se a cada aresta e do grafo $\mathcal{G}$ associarmos um valor $\omega(e)$ denominado* **comprimento da aresta** e *(por vezes também é designado por* **valor** *ou* **peso***), dizemos que $\mathcal{G}$ é um grafo* **valuado***.*

Definição 5.14.2 (Árvore minimal) *Uma* **Árvore minimal** *é uma árvore gerada a partir das $n-1$ arestas cuja soma dos respectivos comprimentos é mínima. Esta árvore pode ser gerada com o algoritmo Kruskal (ou ganancioso).*

Muitos problemas de optimização consistem em determinar um subgrafo de certo tipo em grafos valuados.

O próximo algoritmo permite determinar a árvore geradora minimal para um grafo valuado.

Algoritmo 2 (de Kruskal) *Sejam n o número de vértices e m o número de arestas de um dado grafo.*
Ordene o conjunto das arestas $E \leftarrow \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ de tal forma que o comprimento da aresta e_k é menor que o comprimento da aresta e_{k+1}, para $k = 1, 2, \ldots, m$ (se existirem arestas com o mesmo comprimento, elas serão ordenadas ao acaso).
O algoritmo de Kruskal, que se apresenta a seguir, deve percorrer o conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ da primeira para a última aresta:

$X \leftarrow \emptyset;$ $\quad k \leftarrow 1$

Enquanto $(|X| < n-1)$ *e* $(k \leq m)$ *fazer*

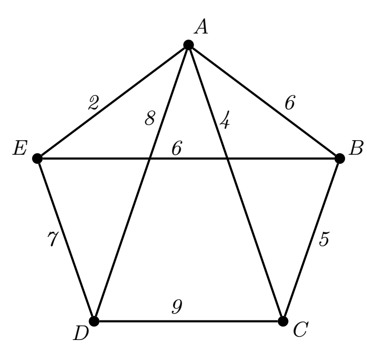
Se $e_k \cup X$ *não contiver nenhum circuito então*

$X \leftarrow X \cup \{e_k\}$

$k \leftarrow k + 1$

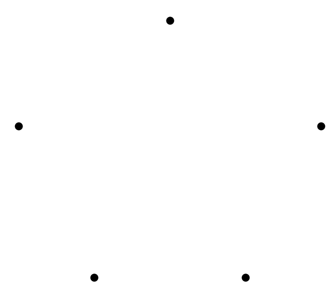
Fim Enquanto.

Exemplo 5.14.1 *Para o seguinte grafo, determine a árvore minimal.*



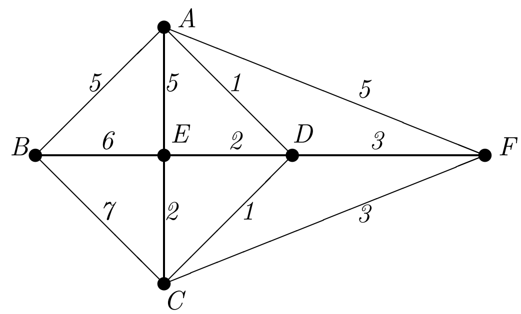
Resolução:

ordem	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
aresta	$\{A,E\}$	$\{A,C\}$	$\{B,C\}$	$\{A,B\}$	$\{B,E\}$	$\{D,E\}$	$\{A,D\}$	$\{C,D\}$
comprimento	2	4	5	6	6	7	8	9



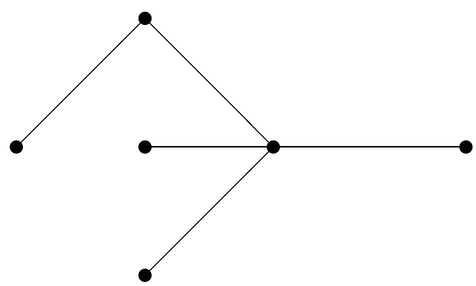
$\square$

Exemplo 5.14.2 *Considerando o grafo abaixo, determine a árvore minimal.*

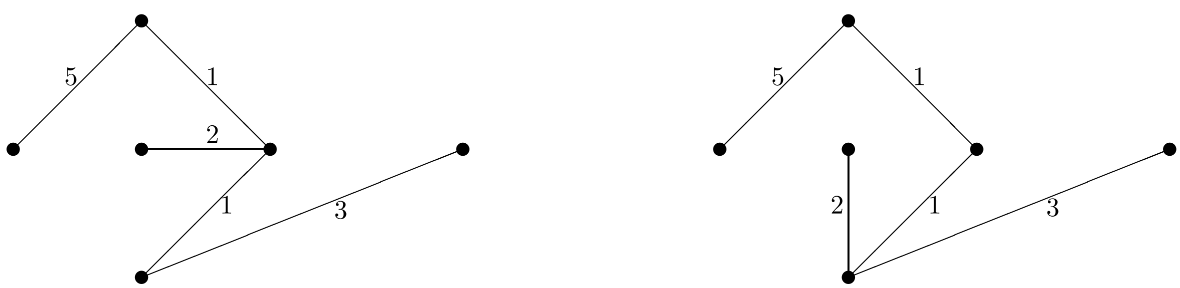


Resolução:

$\{A, D\}$, $\{C, D\}$, $\{E, D\}$, $\{C, E\}$, $\{C, F\}$, $\{D, F\}$, $\{E, A\}$, $\{A, F\}$, $\{A, B\}$, $\{B, E\}$, $\{C, B\}$.



ou então,



□

Teorema 5.14.1 *A árvore geradora que se obtém pelo algoritmo de Kruskal é minimal.*

Demonstração: Seja T a árvore gerador com n vértices que se obtém através do algoritmo de Kruskal. Seja T^* a árvore geradora com o peso menor do que o de T e com o maior número de arestas em comum com ela.

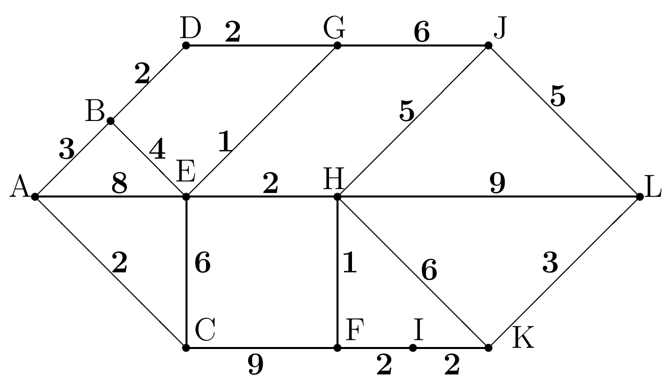
Sejam $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ as arestas de T ordenadas por ordem crescente do seu comprimento e sejam $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_{n-1}^*$ as arestas de T^* ordenadas do mesmo modo. Admitamos que $e_1 = e_1^*$, $e_2 = e_2^*$, $e_{i-1} = e_{i-1}^*$, $e_i \neq e_i^*$, e $e_i = \{x, y\}$, $e_i^* = \{u, v\}$. Ao construir T, quando escolhemos a aresta e_i também podíamos escolher a aresta e_i^*. Se não o fizemos é porque $\omega(e_i^*) \geq \omega(e_i)$. Então a árvore

$$T' = T^* - \{u, v\} + \{x, y\},$$

tem um peso menor ou igual ao de T^* e com mais uma aresta em comum com T, o que é uma contradição. ■

5.15 O problema do caminho mais curto

Suponhamos que temos um mapa onde as letras A a L representam cidades que se encontram ligadas por estradas. As distâncias entre as várias cidades estão indicadas no mapa:



Qual o caminho mais curto de A para L ?

Os caminhos $A \to B \to D \to G \to J \to L$ e $A \to C \to F \to I \to K \to L$ têm ambos comprimento igual a 18. Logo o caminho mais curto não pode exceder as 18 unidades.

O algoritmo de **Dijkstra** (1959) permite resolver este tipo de problemas:

$\pi_s \leftarrow 0;$

$\pi_i \leftarrow \infty, \ \forall i \in \mathcal{V} - \{s\};$

$\xi_i \leftarrow /, \forall i \in \mathcal{V};$

$X \leftarrow \{s\};$

`Enquanto` $X \neq \emptyset$ `fazer`

  $i \leftarrow$ `vértice de` X `tal que` $\pi_i \leq \pi_j, \ \forall j \in X,$

  $X \leftarrow X - \{r\}$

  `Para todo` $(i, j) \in E$ `fazer`

    `Se` $\pi_i + c_{ij} < \pi_j$ `então`

      $\pi_j \leftarrow \pi_i + c_{ij}$

      $\xi_j \leftarrow i$

      `Se` $j \notin X$ `então` $X \leftarrow X \cup \{j\}$

Nota 5.15.1 *Só se deve aplicar este algoritmo quando* $c_{ij} \geq 0$, $\forall (i, j) \in E$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
π_i	0	3	2	$\cancel{\infty}$	8	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$
				5	7	$\cancel{11}$	7	9	12	13	$\cancel{15}$	$\cancel{18}$
						10					14	17

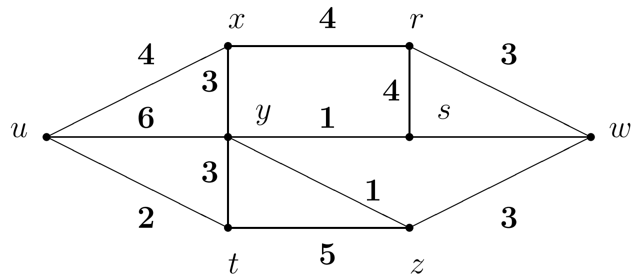
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
ξ_i	/	A	A	B	$\cancel{A}$	$\cancel{C}$	D	E	F	G	$\cancel{H}$	$\cancel{H}$
					B	H					I	K

O caminho mais curto entre A e L é

$$A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{4} E \xrightarrow{2} H \xrightarrow{1} F \xrightarrow{2} I \xrightarrow{2} K \xrightarrow{3} L,$$

que tem por comprimento total 17.

Exercício 5.15.1 *Encontre o caminho mais curto entre u e w onde*



Resolução: Para este grafo temos

	u	x	y	t	r	s	z	w
π_i	0	4	$\cancel{6}$	2	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$	$\cancel{\infty}$
			5		8	6	$\cancel{7}$	9
							6	

	u	x	y	t	r	s	z	w
ξ_i	$/$	$\cancel{u}$	u	u	x	y	$\cancel{t}$	s
		t					y	

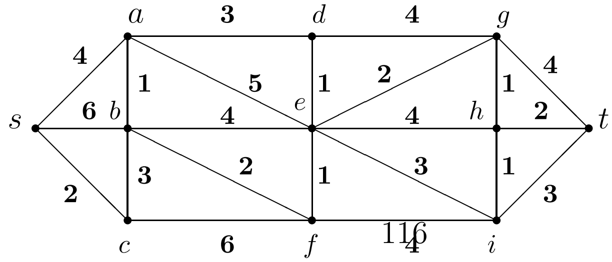
O caminho mais curto de $\underline{u}$ para $\underline{w}$ é portanto

$$u \xrightarrow{2} t \xrightarrow{3} y \xrightarrow{1} s \xrightarrow{3} w,$$

cujo comprimento é igual a 9.

$\square$

Exercício 5.15.2 *Encontre o caminho mais curto entre s e t onde*



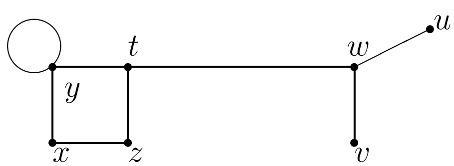
Aplicando o algoritmo temos

	s	a	b	c	d	e	f	g	h	i	t
π_i	0	4	$\cancel{6}$	2	7	$\cancel{9}$	$\cancel{8}$	$\cancel{11}$	$\cancel{12}$	11	$\cancel{14}$
			5			8	7	10	11		13

5.16 Grafos Orientados

Definição 5.16.1 *Um* **grafo orientado** *ou* **digrafo** *é um par* $\mathcal{G}_D = (\mathcal{V}_D, E_D)$ *onde* $\mathcal{V}_D$ *é um conjunto finito e não vazio cujos elementos são designados por vértices e* E_D *é um subconjunto de* $\mathcal{V}_D \times \mathcal{V}_D$ *cujos elementos são designados por* **arcos** *ou* **arestas orientadas**.

Por exemplo, consideremos o grafo



Neste caso, $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ onde $\mathcal{V} = \{x, y, z, t, w, v, u\}$ e

$$E = \{\{x, y\}, \{y, y\}, \{y, t\}, \{t, z\}, \{x, z\}, \{t, w\}, \{w, v\}, \{w, u\}\}.$$

Um grafo dirigido poderá ser, por exemplo, $D = (V_D, E_D)$ onde $V_D = \{x, y, z, t, w, v, u\}$ e

$$E_D = \{(x, y), (y, y), (y, t), (t, z), (x, z), (t, w), (w, v), (w, u)\}.$$

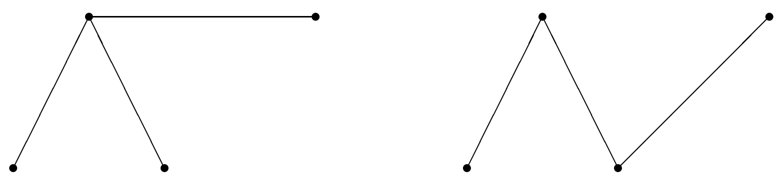
Represente graficamente este digrafo:

Dois vértices u e v, de $\mathcal{G}_D$ dizem-se **adjacentes** se existe um arco em E_D da forma (u, v) ou (v, u). Neste caso, diz-se que u e v são **incidentes** nesse arco.

Se o conjunto dos vértices de $\mathcal{G}_D$ é $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a matriz de adjacência de $\mathcal{G}_D$ é a matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada de ordem n onde a_{ij} representa o número de arcos de v_i para v_j.

Definição 5.16.2 *Dois digrafos dizem-se* **isomorfos** *se existe um isomorfismo de grafos, entre os grafos que lhe são subjacentes, que preserva a ordem dos vértices em cada caso.*

Exemplo 5.16.1 *Como exemplo de dois grafos não isomorfos, podemos apresentar os grafos:*



Um digrafo $\mathcal{G}_D$ é *simples* se não possui laços, isto é, arestas com a forma (v, v), e todos os arcos são distintos.

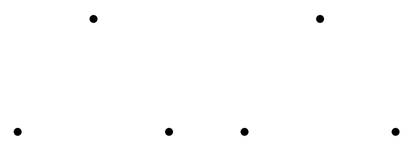
Observe que o grafo subjacente a um digrafo simples não é necessariamente um grafo simples. Construa um exemplo com os seguintes vertices:

Exercício 5.16.1 *Seja $\mathcal{G}_D$ um digrafo simples e conexo com n vértices e m arcos. Mostre que* $n - 1 \leq m \leq n\,(n-1)$

Resolução: Seja $\mathcal{G}_D$ um digrafo simples conexo. O grafo subjacente a $\mathcal{G}_D$ também é um grafo conexo. Então, o seu número de arestas é pelo menos igual a $n-1$ e, em consequência, o número de arcos de $\mathcal{G}_D$ é pelo menos $n-1$. Portanto, $n - 1 \leq m$. O número máximo de arcos de um grafo é dado por $A_2^n = \frac{n!}{(n-2)!} = n \times (n-1)$. Assim, $n - 1 \leq m \leq n \times (n-1)$. $\square$

Exercício 5.16.2 *O inverso de um digrafo $\mathcal{G}_D$ é o digrafo que se obtém invertendo a direcção de cada arco em $\mathcal{G}_D$. Dê um exemplo de um grafo que seja isomorfo ao seu inverso.*

Resolução: Por exemplo, o grafo



$\mathcal{G}_D$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{G}'_D$ $\square$

De um modo natural podem generalizar-se para digrafos as noções de sequência de arestas, pistas e caminhos.

Uma *sequência de arcos* de um digrafo $\mathcal{G}_D$ é uma sequência finita de arcos da forma

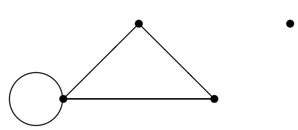
$$(v_0, v_1)\,,\ (v_1, v_2)\,,\ (v_2, v_3)\,,\ \ldots,\ ,(v_{m-1}, v_m)\,,$$

e representa-se por

$$v_0 \to v_1 \to v_2 \to, v_3 \to\ \cdots\ \to v_{m-1} \to v_m.$$

As definições de *pista orientada*, *caminho orientado*, e *circuito orientado* são semelhantes às definições análogas para grafos não orientados.

Exemplo 5.16.2 *Por exemplo,*

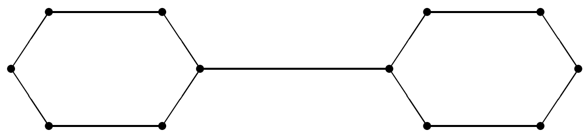


Definição 5.16.3 *Um digrafo $\mathcal{G}_D$ é dito* **conexo** *(fracamente conexo)se o seu grafo subjacente é conexo. Um digrafo $\mathcal{G}_D$ é dito* **fortemente conexo** *se dados dois vértices em $\mathcal{G}_D$, u e v, existe sempre um caminho orientado que os une.*

Um digrafo fortemente conexo é conexo mas o recíproco não é válido.

Definição 5.16.4 *Um grafo $\mathcal{G}$ é dito* **orientável** *se cada aresta de $\mathcal{G}$ pode ser orientada de modo a que o digrafo resultante seja fortemente conexo.*

Exemplo 5.16.3 *Verifique se o seguinte grafo é orientável:*



Teorema 5.16.1 *Um grafo conexo $\mathcal{G}$ é orientável se e só se cada aresta de $\mathcal{G}$ está contida num circuito.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $\mathcal{G}$ um grafo orientável e $\{u, v\}$ uma aresta de $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ é orientável, podemos orientar as arestas de $\mathcal{G}$ de modo a obter um caminho orientado de v para u. Este caminho com o arco (u, v) forma um circuito.

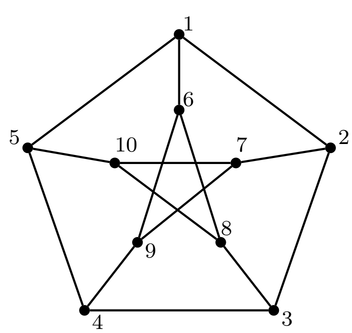
■

($\Leftarrow$) Seja $\{x, y\}$ uma aresta de $\mathcal{G}$. Como $\{x, y\}$ está contida num circuito podemos orientar as arestas desse circuito até formar um caminho fechado. Se esse caminho contém todas as arestas de $\mathcal{G}$, o teorema está demonstrado. Se não, consideramos uma aresta $\{u, v\}$ que não pertença a este circuito mas que seja adjacente a este. Como a aresta $\{u, v\}$ está contida num circuito, podemos orientar as arestas desse circuito até formar um caminho orientado fechado. Prosseguindo deste modo obtemos um digrafo fortemente conexo.

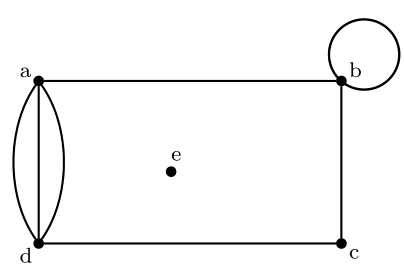
Exercícios

1. Escreva em extensão os conjuntos dos vértices e das arestas de cada um dos seguintes grafos

a)



b)



2. Desenhe o grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ sendo $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}, \{6, 7\}\}$.

3. Desenhe os grafos $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$ e $\mathcal{G}_4$ cada um com 5 vértices e 8 arestas, satisfazendo as seguintes condições:

   (a) $\mathcal{G}_1$ é um grafo simples;

   (b) $\mathcal{G}_2$ não é simples e não contém lacetes;

   (c) $\mathcal{G}_3$ não é simples e não contém arestas múltiplas;

   (d) $\mathcal{G}_4$ não é simples e contém lacetes e arestas múltiplas.

4. Seja

$$M(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Desenhe o grafo $\mathcal{G}$.

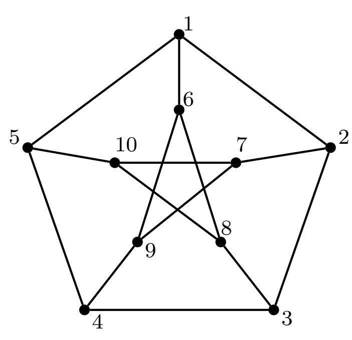
5. Mostre que em qualquer grafo o número de vértices de grau ímpar é par.

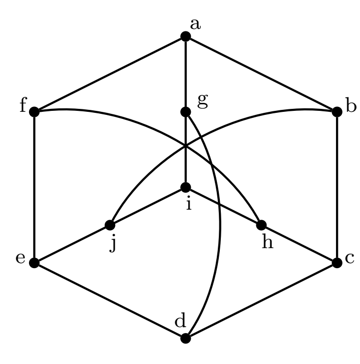
6. Prove que se $\mathcal{G}$ é um grafo simples, $\mathcal{G}$ e $\overline{\mathcal{G}}$ não podem ser ambos desconexos.

7. Seja $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ um grafo simples com $|\mathcal{V}| = n$ e $|E| = r$. Prove que

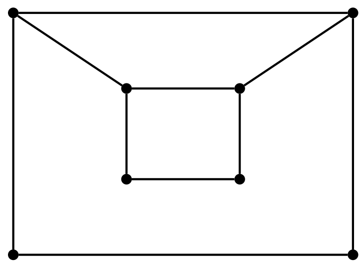
$$tr A(\mathcal{G})^2 = 2r.$$

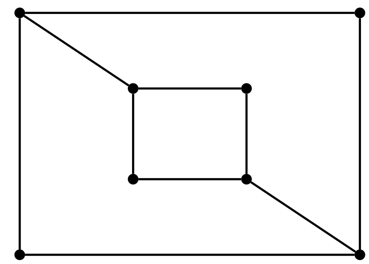
8. Prove que os grafos $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ são isomorfos:





9. Os grafos seguintes não são isomorfos. Justifique.





10. Determine o número de vértices de cada um dos seguintes grafos:

    (a) Tem 9 arestas e é regular de grau 3;

    (b) Tem 10 arestas, dois vértices são de grau 4 os outros são de grau 3.

11. Prove que se $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, E)$ é um grafo regular de grau k então

$$|E| = \frac{1}{2}k|\mathcal{V}|.$$

12. Prove que se $\mathcal{G}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ é um grafo bipartido e regular então $|\mathcal{V}_1| = |\mathcal{V}_2|$.

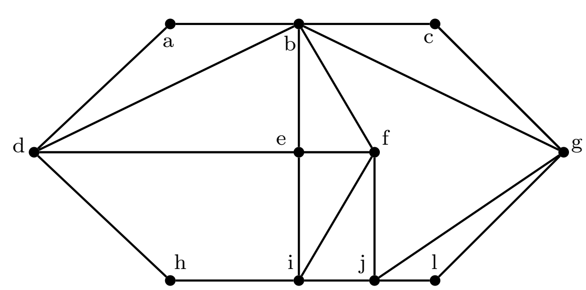
13. Verifique as propriedades seguintes para um dado grafo completo K_n:

    (a) K_n é conexo;

    (b) K_n é Hamiltoniano.

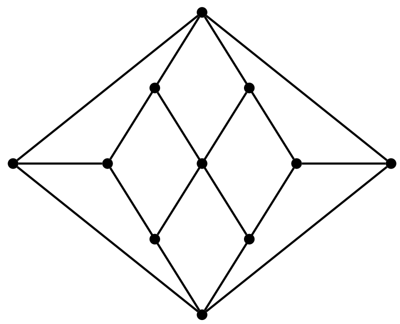
14. Para que valores de n, K_n é um grafo Euleriano?

15. Prove que o grafo seguinte é Euleriano e de seguida encontre um circuito de Euler.

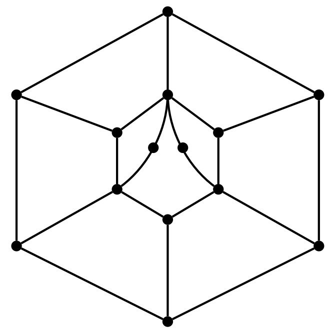


16. Mostre em cada alínea que $\mathcal{G}$ não é Hamiltoniano. Justifique as afirmações.

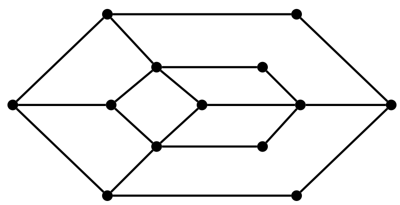
$a)$



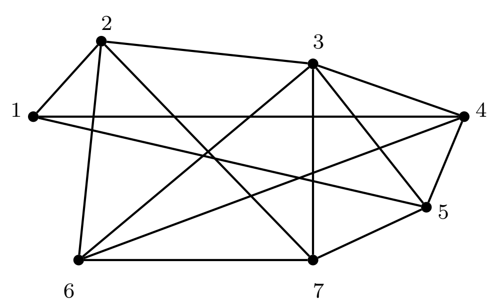
$b)$



$c)$



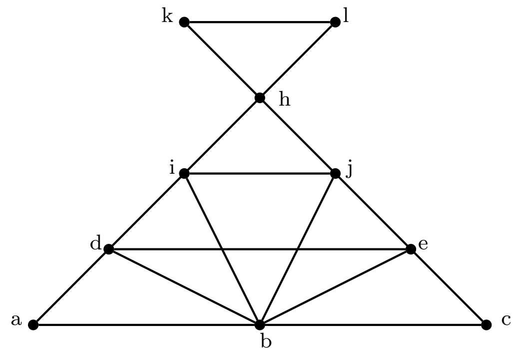
17. Prove que o grafo seguinte é Hamiltoniano e a seguir encontre um circuito de Hamilton.



18. Seja $\mathcal{G}$ um grafo conexo, com $|\mathcal{V}| > 1$ e $|E| < |\mathcal{V}|$. Prove que $\mathcal{G}$ contém pelo menos um vértice de grau 1.

19. Uma árvore tem 80 vértices de grau 4 e os restantes de grau 1. Determine o número total de vértices da árvore.

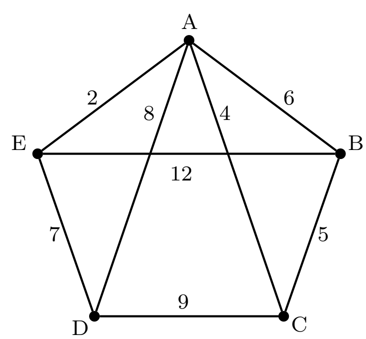
20. Considere o grafo



(a) Este grafo é euleriano? Justifique

(b) Descreva o algoritmo de Fleury e aplique-o a este grafo.

21. Construa a árvore geradora minimal do seguinte grafo valuado, aplicando o algoritmo de Kruskal.



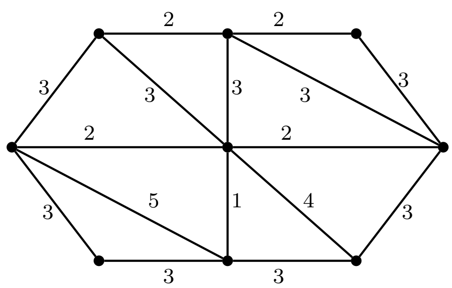
22. Prove que se todos os vértices de um grafo $\mathcal{G}$ são de grau par então $\mathcal{G}$ não tem pontes.

23. Mostre que uma árvore tem pelo menos dois vértices de grau 1.

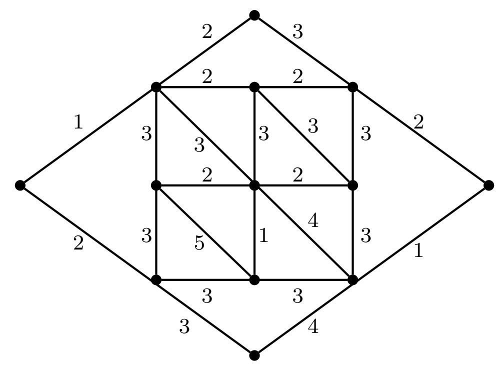
24. Seja $\mathcal{G}$ um grafo simples com 56 arestas. Se o complemento de $\mathcal{G}$ tem 80 arestas, quantos vértices tem $\mathcal{G}$?

25. Use o algoritmo de Kruskal para encontrar a árvore geradora minimal dos seguintes grafos valuados:

a)

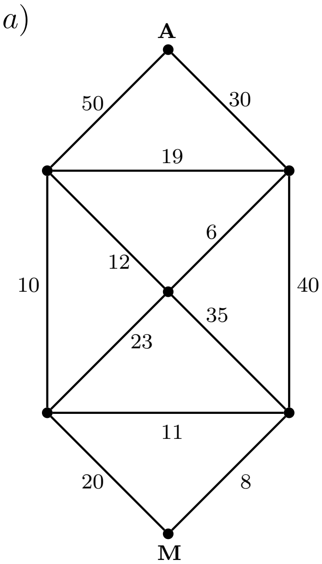


b)



26. Use o algoritmo do caminho mais curto para encontrar o caminho mais curto entre A e M em cada um dos grafos:

a)



b)