Matemática Discreta

Matrizes e Grafos

Professores João Araújo, Júlia Vaz Carvalho, Manuel Silva
Departamento de Matemática
FCT/UNL

Baseados em textos e slides elaborados por professores do Departamento de Matemática

Programa

1. Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções
   1. Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
   2. Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
   3. Funções: bijecções; inversão e composição.
2. Parte 2 - Indução
   1. Definições indutivas
   2. Indução nos naturais e estrutural
   3. Primeiro e segundo princípios de indução
   4. Funções recursivas e provas por indução
3. Parte 3 - Grafos e Aplicações
   1. Generalidades
   2. Conexidade
   3. Árvores
   4. Grafos Eulerianos
   5. Matrizes e grafos

2.5.1. Matriz de adjacências

Uma outra forma de representar um grafo é através de uma matriz quadrada de ordem igual à ordem do grafo.

Definição

Chamamos marcação dos vértices de um grafo $G = (X,\ \mathcal{U})$, com $|X| = n$, a uma aplicação bijectiva ψ de X em $\{1, \ldots,\ n\}$.

Um grafo marcado nos vértices é um par $(G,\ \psi)$ em que G é um grafo e ψ é uma marcação dos vértices de G.

Definição

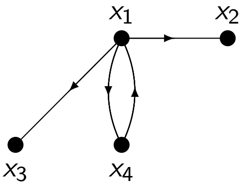
Seja $G = (X, \mathcal{U})$ *um digrafo marcado nos vértices, com* (G, ψ) *e* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. *Chamamos* ***matriz de adjacências*** *de* G, *em relação à marcação* ψ, *à matriz* $A(G) = [a_{ij}]$, *de ordem* n, *tal que*

$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 1 & se\ (x_i,\ x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & se\ (x_i,\ x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Seja (G, ψ) um grafo marcado nos vértices, com $G = (X, \mathcal{U})$ e $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Referimo-nos à marcação $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ para designar a marcação ψ tal que

$$\psi(x_{i_j}) = j, \qquad\qquad j = 1, \ldots, n.$$

Exemplo: Consideremos o digrafo G



A matriz de adjacências de G, em relação às marcações $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ e $(x_2,\ x_3,\ x_1,\ x_4)$ é, respectivamente, a matriz

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A'(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.6. Matrizes e Grafos

As matrizes de adjacências de um digrafo em relação a marcações diferentes são, em geral, diferentes.

Proposição

Sejam A *e* A' *matrizes de adjacências de um digrafo* $G = (X, \mathcal{U})$ *em relação a marcações diferentes dos seus vértices. Então, existe uma matriz de permutação* P *tal que*

$$A' = PAP^{-1}$$

(uma matriz de permutação de ordem n *é uma matriz que se obtém da matriz identidade de ordem* n *efectuando uma troca nas suas linhas).*

Observação:

1 Sendo $G = (X,\ \mathcal{U})$ um digrafo com $X = \{x_1, \ldots,\ x_n\}$, referimos marcação usual dos vértices de G, à marcação $(x_1, \ldots,\ x_n)$. A matriz de adjacências de G, em relação à marcação usual, é a matriz $A = [a_{ij}]$ em que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i,\ x_j) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } (x_i,\ x_j) \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

2 Através da matriz de adjacências $A = [a_{ij}]$ de um digrafo G, em relação à marcação $(x_1, \ldots, x_n)$, podemos determinar o grau exterior e o grau interior de cada vértice de G.

$$d^+(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij},$$

isto é, é a soma dos elementos da linha i de A, da linha i que são iguais a 1, e

$$d^-(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji},$$

isto é, é a soma dos elementos da coluna i de A.

Exemplo: Considerando o grafo do exemplo anterior, cuja matriz de adjacências em relação à marcação $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$, dos seus vértices é

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

temos

$$\sum_{j=1}^{4} a_{1j} = 3 = d^{+}(x_1)$$

e

$$\sum_{j=1}^{4} a_{j3} = 1 = d^{-}(x_3).$$

Teorema

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ *um digrafo marcado nos vértices e* $A = [a_{ij}]$ *a matriz de adjacências de* G*, em relação à marcação usual* $(x_1, \ldots, x_n)$*. Então, na matriz*

$$AA^T = [s_{ij}]$$

s_{ij} *representa o número de sucessores simultâneos de* x_i *e* x_j*, isto é,*

$$s_{ij} = |\Gamma^+(x_i) \cap \Gamma^+(x_j)|.$$

Definição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ *um* **grafo simples** *marcado nos vértices, com* (G, ψ) *e* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. *Chamamos matriz de adjacências de* G*, em relação à marcação* ψ*, à matriz* $A(G) = [a_{ij}]$*, de ordem* n*, tal que*

$$a_{\psi(x_i)\psi(x_j)} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \text{ ou } \{x_i, x_j\} \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{se } \{x_i, x_j\} \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Observação:

1. A matriz de adjacências de um grafo simples tem todos os elementos diagonais nulos.
2. A matriz de adjacências de um grafo simples tem a propriedade de ser simétrica, isto é, $A = A^T$.

Teorema

Seja G um grafo simples.
G é desconexo se, e só se, existe uma marcação dos vértices em relação à qual a matriz de adjacências de G tem a forma

$$\begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix}$$

sendo $A_i, \quad i \in \{1, \ldots, k\}$, uma matriz quadrada e $k \geq 2$.

Teorema

Seja $A = [a_{ij}]$ *a matriz de adjacências de um grafo simples* $G = (X, \mathcal{U})$, *em relação à marcação usual* $(x_1, \ldots, x_n)$. *Então, na matriz*

$$A^k = [a_{ij}^{(k)}], \qquad \text{com } k \in \mathbb{N},$$

$a_{ij}^{(k)}$ *é igual ao número de cadeias* $x_i - x_j$ *com comprimento* k, *existentes em* G.

Observação: Substituindo no Teorema anterior, "grafo simples" por "digrafo" e "cadeia" por "caminho", obtemos um resultado válido.

Exemplo: Com o exemplo anterior, determinemos o número de caminhos $x_4 - x_3$ de comprimento 2, existentes em G. Ora,

$$A(G)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como esta matriz, tem na posição $(4,\ 3)$ um elemento não nulo, usando o Teorema, existe um, e um só, caminho de $x_4 - x_3$, de comprimento 2, em G.

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Seja $G = (X, U)$ *um grafo simples. Chama-se* **matriz de alcançabilidade** *de* G *em relação à marcação usual* $(x_1, \ldots, x_n)$ *dos seus vértices, à matriz* $R(G) = [r_{ij}]$ *de ordem* $n = |X|$*, tal que* r_{ij} *é*

$$\begin{cases} 1 \text{ se existe em G uma cadeia } \mathrm{x_i - x_j} \\ 0 \text{ caso contrario} \end{cases}$$

Proposição

Um grafo simples é conexo se, e só se, a sua matriz de alcançabilidade tem todos os elementos iguais a 1.

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Chama-se **matriz booleana associada** *a uma matriz* $M = [m_{ij}]$ *cujos elementos são inteiros não negativos, à matriz* $M_B = [m'_{ij}]$ *tal que* m'_{ij} *é*

$$\begin{cases} 1 & \text{se } \mathrm{m_{ij}} > 0 \\ 0 & \text{se } \mathrm{m_{ij}} = 0 \end{cases}$$

Teorema

Seja $G = (X, U)$ *um grafo simples com matriz de adjacências* A*, em relação à marcação usual* $(x_1, \ldots, x_n)$ *dos seus vértices. Então a matriz de alcançabilidade de* G*, em relação à mesma marcação é a matriz*

$$R = (I_n + A + A^2 + \ldots A^{n-1})_B.$$

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Seja $G = (X, U)$ um digrafo. Chama-se **matriz de alcançabilidade** *de G em relação à marcação usual $(x_1, \dots, x_n)$ dos seus vértices, à matriz $R(G) = [r_{ij}]$ de ordem $n = |X|$, tal que r_{ij} é*

$$\begin{cases} 1 \text{ se existe em G um caminho } x_i - x_j \\ 0 \text{ caso contrario} \end{cases}$$

Proposição

Um digrafo é conexo se, e só se, a matriz de alcançabilidade do seu grafo subjacente tem todos os elementos iguais a 1.

Proposição

Um digrafo é fortemente conexo se, e só se, a sua matriz de alcançabilidade tem todos os elementos iguais a 1.

Teorema

Seja $G = (X, U)$ *um digrafo com matriz de alcançabilidade* R, *em relação à marcação usual* $(x_1, \ldots, x_n)$ *dos seus vértices. Então os vértices da componente fortemente conexa a que pertence o vértice* x_i *são os vértices* x_j *correspondentes a* $r_{ij} = r_{ji} = 1$.

3.6. Matrizes e Grafos

Definição

Chama-se **marcação dos arcos** *de um grafo* $G = (X, U)$, *com* $|U| = m$, *a uma aplicação bijectiva* $\varphi : U \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$. *Um* **grafo marcado nos vértices e nos arcos** *é um terno* (G, ψ, φ), *onde* G *é um grafo,* ψ *é uma marcação dos vértices de* G *e* φ *é uma marcação dos arcos de* G.

Definição

Seja $G = (X, U)$ *um digrafo marcado nos vértices e nos arcos, sendo* $(x_1, \ldots, x_n)$ *e* $(u_1, \ldots, u_m)$, *respectivamente, a marcação dos vértices e a marcação dos arcos de* G. *Chama-se* **matriz de incidências** *de* G *em relação a tais marcações à matriz* $B(G) = [b_{ij}]$, *do tipo* $n \times m$, *tal que*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \ \text{ se } \ \mathrm{x_i} \ \textit{ é a extremidade inicial do arco } \ \mathrm{u_j} \\ -1 \ \text{ se } \ \mathrm{x_i} \ \textit{ é a extremidade final do arco } \ \mathrm{u_j} \\ 0 \ \text{ se } \ \mathrm{x_i} \ \textit{ não é extremidade arco } \ \mathrm{u_j} \end{cases}$$

Definição

Seja $G = (X, U)$ *um grafo simples marcado nos vértices e nos arcos, sendo* $(x_1, \ldots, x_n)$ *e* $(u_1, \ldots, u_m)$, *respectivamente, a marcação dos vértices e a marcação dos arcos de* G. *Chama-se* **matriz de incidências** *de* G *em relação a tais marcações à matriz* $B(G) = [b_{ij}]$, *do tipo* $n \times m$, *tal que*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } \mathrm{x_i} \textit{ é extremidade do arco } \mathrm{u_j} \\ 0 \text{ se } \mathrm{x_i} \textit{ não é extremidade arco } \mathrm{u_j} \end{cases}$$

Observe-se:

- a partir da matriz de incidências de um digrafo é possível determinar o grau exterior e interior de cada um dos vértices do grafo
- a partir da matriz de incidências de um grafo simples é possível determinar o grau de cada um dos vértices do grafo.

(Como?)

3.7. Curiosidades

- Seja A a matriz de adjacência de um digrafo. Qual o significado de A^T?
- Seja G um grafo. Qual a relação entre A e A^T?
- Seja A a matriz de adjacência de um digrafo. Qual o significado de $\mathrm{tr}A$?
- Sejam A e B duas matrizes de adjacência dos grafos G_1 e G_2 no conjunto $\{1, \ldots, n\}$. O que significa $AB = [a_{ij}]$?
  (Número de caminhos de i até j cujo primeiro passo é em G_1 e o segundo em G_2.)
- Seja A a matriz de adjacência de um digrafo. Se representarmos por $(1, 0, 0)$ o grafo vértice 1, qual o significado de $(1, 0, 0) * A$?
  Ex. $1 \to 2 \leftrightarrow 3 \to 1$.

3.7. Curiosidades (cont.)

- Seja A a matriz de adjacência de um grafo. O que são os vetores próprios?
  É uma área inteira da matemática chamada teoria espectral.
- Seja G um grafo. O que é A^{-1}?
  Grande mistério...
  Coeficiente de Leontief (Nobel da Economia em 1973):
  $L = (I - A)^{-1}$ em
  $$\sum_{k=0}^{\infty} A^k y = (I - A)^{-1} y$$
- Seja A a matriz de adjacência de um digrafo. Qual o significado de $\det A$?
  Dá uma medida complicada da soma do número de ciclos que passa por cada vértice.

3.8. Grafos: para que servem?

- Pontes de Königsberg
- Distâncias (sejam geográficas, sociais, digitais, etc.): GPS, mapas, recomendações, etc.
- Identificação por impressão digital
- Epidemiologia (vértices são as pessoas; arestas com quem contactaram)
- Algoritmo do Google
- Imagem médica