Matemática Discreta

2020/21

Professores João Araújo Júlia Vaz Carvalho Manuel Silva

Departamento de Matemática

FCT/UNL

Baseados em textos e slides elaborados por professores do Departamento de Matemática

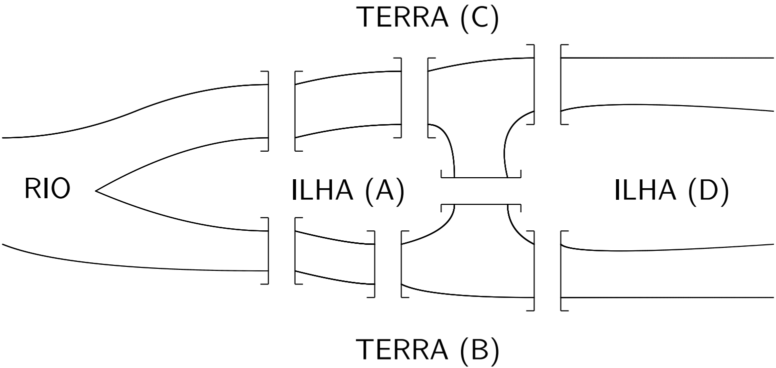
Programa

1. Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções
   1. Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
   2. Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
   3. Funções: bijecções; inversão e composição.
2. Parte 2 - Indução
   1. Definições indutivas
   2. Indução nos naturais e estrutural
   3. Primeiro e segundo princípios de indução
   4. Funções recursivas e provas por indução
3. Parte 3 - Grafos e Aplicações
   1. Generalidades
   2. Conexidade
   3. Árvores
   4. Grafos Eulerianos
   5. Matrizes e grafos

3.1. Generalidades

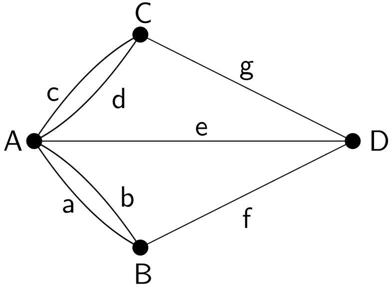
A teoria dos grafos teve a sua origem no estudo de problemas que podemos chamar de “recreativos”. Vejamos alguns destes problemas.

Problema das Pontes de Königsberg: No século XVIII existiam sete pontes ligando diversas regiões da cidade e conta-se que, nos seus passeios, os habitantes se divertiam a tentar encontrar um percurso que lhes permitisse atravessar cada uma das pontes uma, e uma só vez, voltando ou não ao ponto de partida. Dado as suas tentativas resultarem infrutíferas, alguns começaram a acreditar que tal percurso não existia.



Na cidade de Königsberg, antiga capital da Prússia Oriental, o rio Pregel circundava uma ilha e separava-a em duas vertentes.

Para a resolução deste problema podemos construir o seguinte diagrama:

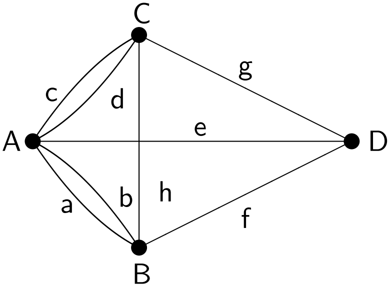


em que os “arcos” a, b, c, d, e, f, g representam as sete pontes e os “vértices” A, B, C, D representam as quatro regiões da cidade que tem interesse considerar.

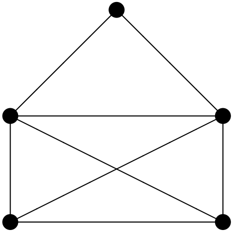
Em 1736 o matemático suíço Leonhard Euler escreve um artigo, considerado o primeiro artigo de teoria de grafos, no qual demonstra a inexistência de um percurso nas condições anteriormente descritas.

Segundo refere L. Saalschütz, em 1875 foi construída uma nova ponte h, ligando as zonas representadas por B e C, após o que se tornou possível efectuar um percurso nas condições referidas, desde que o ponto de partida e de chegada não tivessem de ser o mesmo. Nomeadamente,

$$D \underset{f}{\text{———}} B \underset{a}{\text{———}} A \underset{b}{\text{———}} B \underset{h}{\text{———}} C \underset{g}{\text{———}} D \underset{e}{\text{———}} A \underset{c}{\text{———}} C \underset{d}{\text{———}} A$$



Problemas do mesmo tipo do anterior são aqueles em que se pretende desenhar certas figuras, como por exemplo:



sem levantar o lápis do papel e não passando sobre um “arco” já desenhado.
Para tais problemas será dada uma resposta completa no capítulo com o título de Grafos Eulerianos.

Problema do Percurso do Cavalo num Tabuleiro de Xadrez

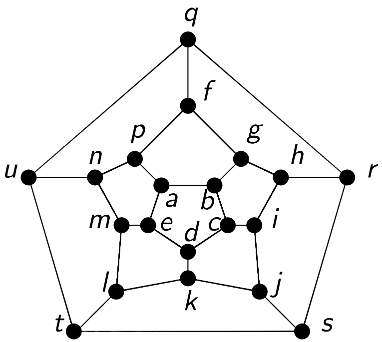
Este problema, tratado por Euler (1759) e Vandermonde (1771) consistia no estudo da existência de uma sequência de movimentos que permitisse a um “cavalo” percorrer, através de movimentos obedecendo às regras usuais de movimentação no jogo de xadrez, as 8×8 “casas” do tabuleiro uma, e uma só, vez regressando à posição de partida.

Observe-se que num tabuleiro de xadrez o número de “casas” brancas é igual ao número de “casas” pretas e que um cavalo através de um único movimento lícito passa de uma ”casa” para outra de cor distinta.

Tal como anteriormente, o problema pode ser estudado considerando um diagrama com $8 \times 8 = 64$ “vértices”, cada um representando um quadrado do tabuleiro e estando dois vértices ligados por um “arco” se, e só se, o cavalo conseguir mover-se entre as respectivas posições, através de um único movimento lícito.

Refira-se que este problema é distinto do anterior. Anteriormente pretendia-se que cada "arco" fosse "percorrido" uma, e uma só, vez. Aqui pretende-se que cada "vértice" seja "visitado" uma, e uma só, vez. Para concretizar este objectivo pode não ser necessário percorrer todos os "arcos".

No âmbito deste problema, em 1857, Hamilton apresenta na Associação Britânica de Dublin um "jogo" que, entre outras versões, tinha uma que envolvia um dodecaedro regular.



Os seus 20 “vértices” representavam 20 cidades importantes e os seus “arcos” representavam ligações entre cidades. Pretendia-se determinar um percurso que permitisse visitar todas as cidades uma, e uma só, vez e regressar à cidade de partida.

Uma solução para este problema é o percurso

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ m,\ l,\ k,\ j,\ i,\ h,\ g,\ f,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u,\ n,\ p,\ a.$$

O problema complicava-se quando se pretendia determinar um percurso nas condições anteriores, mas que iniciasse com o trajecto

$$a,\ b,\ g,\ h,\ i.$$

Este problema conhecido por "Viagem à volta do mundo" é do mesmo tipo do "Percurso do cavalo num tabuleiro de xadrez". Ambos constituem motivação para o estudo que efectuaremos no capítulo dos Grafos Hamiltonianos, terminologia que não está completamente justificada uma vez que, antes de Hamilton, Vandermonde e Kirkman se tinham debruçado sobre este assunto.

Em 1936, exactamente 200 anos após o artigo de Euler sobre as pontes de Königsberg, é publicado o primeiro livro sobre teoria de grafos da autoria de D. König. König é o primeiro a propor chamar "grafos" aos diagramas referidos bem como a estudar de forma sistemática as suas propriedades. Desde essa altura os trabalhos nesta área multiplicam-se, destacando-se os nomes de C. Berge, Ore, Erdos, Tutte e F. Harary.

Actualmente, os grafos são utilizados nas mais diversas áreas. Neste curso já utilizámos estes diagramas quando representámos geometricamente as relações binárias e quando desenhámos diagramas de Hasse.

O nosso estudo vai centrar-se em duas espécies de grafos:
- Grafos orientados;
- Grafos não orientados.

Definição

Chamamos grafo orientado, G, a um par $(X, \mathcal{U})$ em que:

(i) *X é um conjunto finito, não vazio e*

(ii) *$\mathcal{U}$ é um subconjunto do produto cartesiano $X \times X$.*

Cada elemento de X diz-se um vértice de G e o cardinal de X, $|X|$, designa-se por ordem de G.
Os elementos de $\mathcal{U}$ dizem-se os arcos de G e o seu cardinal é designado por tamanho de G.

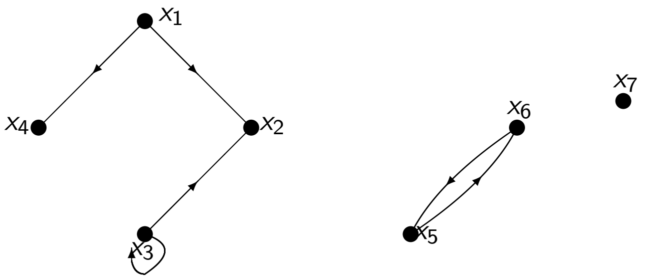
Seja $u = (x_i,\ x_j) \in \mathcal{U}$. Diz-se que u é um arco de x_i para x_j, sendo x_i o vértice/extremidade inicial de u e x_j o vértice/extremidade final de u. Diz-se, ainda, que x_i e x_j são os vértices terminais ou as extremidades de u ou que u é incidente nos vértices x_i e x_j.

Um arco da forma $(x_i,\ x_i)$ diz-se um laço.

É usual representar geometricamente um grafo, no plano, fazendo corresponder a cada vértice um ponto, de tal forma que a vértices distintos correspondam pontos distintos, e fazendo corresponder a cada arco um segmento de recta ou, mais geralmente, uma curva contínua que não se intersecte a si própria, unindo os dois pontos representativos dos seus vértices terminais e não passando por nenhum outro ponto representativo de um vértice. Arcos com iguais extremidades, como $(x_i,\ x_j)$ e $(x_j,\ x_i)$, com $i \neq j$, são representados por curvas não coincidentes e sobre cada curva representativa de um arco é desenhada uma seta "apontando" no sentido do ponto representativo do vértice final.

Exemplo: Uma representação possível para o grafo $G = (X, \mathcal{U})$, em que $X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\}$ e

$$\mathcal{U} = \{(x_1,\ x_2),\ (x_1,\ x_4),\ (x_5,\ x_6),\ (x_6,\ x_5),\ (x_3,\ x_3),\ (x_3,\ x_2)\}:$$



Num grafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$ dois vértices distintos x_i e x_j dizem-se vértices adjacentes se existir, pelo menos, um arco neles incidentes, isto é, x_i e x_j, com $i \neq j$, são vértices adjacentes se $(x_i, x_j) \in \mathcal{U}$ ou $(x_j, x_i) \in \mathcal{U}$. Considera-se que um vértice x_i é adjacente a si próprio se, e só se, $(x_i, x_i) \in \mathcal{U}$.

Dois arcos distintos dizem-se arcos adjacentes se têm, pelo menos, uma extremidade comum. Considera-se que um arco u é adjacente a si próprio se, e só se, u é um laço.

Num grafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$ designa-se por sucessor (respectivamente, predecessor) de um vértice x todo o vértice que seja extremidade final (respectivamente, inicial) de um arco cuja extremidade inicial (respectivamente, final) seja x.

O conjunto dos sucessores e o conjunto dos predecessores de x serão designados, respectivamente, por:

$$\Gamma^{+}(x) = \{y \in X : \ (x,\ y) \in \mathcal{U}\}$$

e

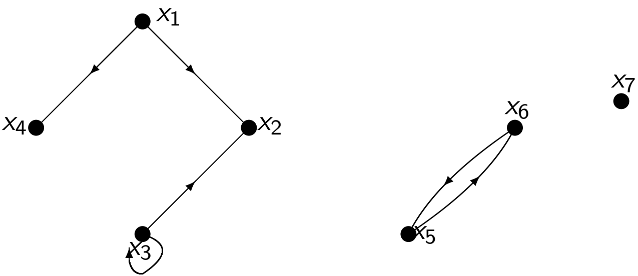
$$\Gamma^{-}(x) = \{y \in X : \ (y,\ x) \in \mathcal{U}\}.$$

Designaremos por $\Gamma(x)$ o conjunto dos vértices adjacentes a x.
Num grafo orientado tem-se

$$\Gamma(x) = \Gamma^{+}(x) \cup \Gamma^{-}(x).$$

Se $\Gamma^{+}(x) = \emptyset$ e $\Gamma^{-}(x) \neq \emptyset$ diz-se que x é um poço.
Se $\Gamma^{+}(x) \neq \emptyset$ e $\Gamma^{-}(x) = \emptyset$ diz-se que x é uma fonte.
Se $\Gamma(x) = \emptyset$ diz-se que x é um vértice isolado.

Exemplo: Usando o exemplo anterior,



temos:

x_1 e x_2 são vértices adjacentes;

Os arcos $(x_1,\ x_2)$ e $(x_3,\ x_2)$ são adjacentes;

$\Gamma^+(x_1) = \{x_2,\ x_4\}$;

$\Gamma(x_3) = \{x_2,\ x_3\}$;

x_1 é uma fonte;

x_4 é um poço;

x_7 é um vértice isolado.

De entre os grafos orientados, existe uma classe muito importante, os grafos orientados sem laços que se designam por digrafos.
Conforme veremos posteriormente, pode suceder que no estudo de certas propriedades dos grafos conhecer a "orientação" dos arcos, ou mais correctamente, distinguir o arco $(x_i,\ x_j)$ do arco $(x_j,\ x_i)$, com $i \neq j$, não se revele importante.

Definição

Dizemos que $G = (X,\ \mathcal{U})$ é um grafo não orientado ou, ainda, que $G = (X,\ \mathcal{U})$ é um grafo simples se:

(i) *X é um conjunto finito, não vazio e*

(ii) *$\mathcal{U}$ é um subconjunto de*

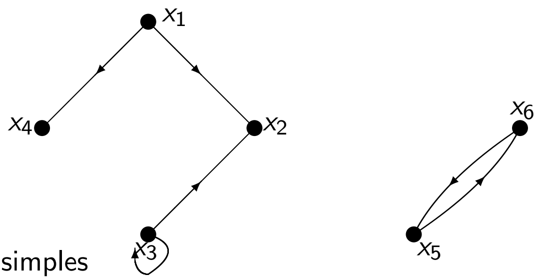
$$X \otimes X = \{\{x,\ y\} :\ x,\ y \in X,\ x \neq y\}.$$

Certas noções anteriormente dadas não têm agora significado. É o caso das noções de extremidade inicial e extremidade final de um arco, de laço, de sucessor e de predecessor de um vértice, de poço e de fonte. As restantes têm uma adaptação que julgamos ser evidente.

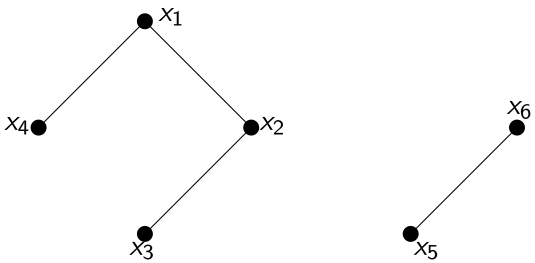
A representação geométrica dos grafos simples obedece aos mesmos princípios que a dos grafos orientados, não figurando apenas a seta representativa da orientação.

Dado um grafo orientado $G = (X, \mathcal{U})$ consideremos o grafo simples $G' = (X, \mathcal{U}')$ que se obtém, eliminando os laços em $\mathcal{U}$ e seguidamente substituindo cada par ordenado $(x_i, x_j) \in \mathcal{U}$ pelo conjunto $\{x_i, x_j\}$. G' diz-se, então, o grafo subjacente a G.

O grafo subjacente ao grafo orientado

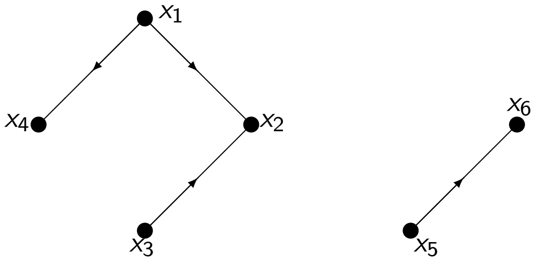


é o grafo simples

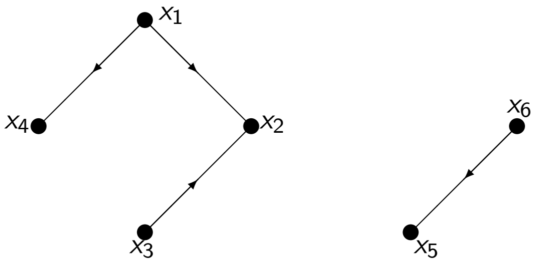


Seja $G = (X,\ \mathcal{U})$ um grafo simples e consideremos um grafo orientado $G' = (X,\ \mathcal{U}')$ em que $\mathcal{U}'$ se obteve de $\mathcal{U}$ substituindo cada arco $\{x_i,\ x_j\}$ ou por $(x_i,\ x_j)$ ou por $(x_j,\ x_i)$, sendo a disjunção uma disjunção exclusiva. Se $\mathcal{U}$ é não vazio, podemos associar a G mais do que um grafo orientado, cada um dos quais se diz um grafo resultante da orientação de G.

Exemplo: Seja $G = (X,\mathcal{U})$ com
$X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5, x_6\}$ e
$\mathcal{U} = \{\{x_1,\ x_2\},\ \{x_1,\ x_4\},\ \{x_5,\ x_6\},\ \{x_3,\ x_2\}\}$.
Um grafo resultante da orientação deste será:



Um outro grafo resultante da orientação do grafo simples inicial será:



Repare-se que unicamente foi alterada a "orientação" do arco $\{x_6,\ x_5\}$. O que nunca conseguimos é, através deste processo, obter o grafo orientado inicial.

Na quase totalidade dos problemas que estudaremos, as definições anteriores de grafo orientado e de grafo simples são as que interessa considerar. Contudo para estudarmos problemas do mesmo tipo do das pontes de Königsberg, teremos que considerar uma outra definição de grafo, que permita a um arco ocorrer repetido.

Definição

Um multiconjunto é um par ordenado (A, m) onde A é um conjunto e $m : A \longrightarrow \mathbb{N}$ uma função.

Para cada $a \in A$, chamamos multiplicidade de a (ou nº de ocorrências de a) ao número natural $m(a)$.

Exemplo: Consideremos o multiconjunto $M = (A, m)$ tal que $A = \{a, b, c\}$, $m(a) = 3, m(b) = 1$ e $m(c) = 2$.
Dizemos que $M = \{a, a, a, b, c, c\}$.

Definição

Chamamos multigrafo *(respectivamente,* multigrafo orientado*), a um par* $G = (X, \mathcal{E})$ *em que:*

(i) X *é um conjunto finito, não vazio e*

(ii) $\mathcal{E} = (\mathcal{U}, m)$ *é um multiconjunto com* $\mathcal{U} \subseteq X \otimes X$ *(respectivamente,* $\mathcal{U} \subseteq X \times X$*).*

Num multigrafo $G = (X, \mathcal{E})$ em que para certos $x_1, x_2 \in X$ se tenha $m(\{x_1, x_2\}) = 3$, isso significa que entre os vértices x_1 e x_2 existem três arcos.

Se no multiconjunto $\mathcal{E}$ o número máximo de vezes que um elemento (arco) ocorre é p dizemos que G é um p-grafo (o grafo do problema das pontes de Königsberg é um 2-grafo não orientado).
Os elementos do multiconjunto $\mathcal{E}$ que são iguais dizemos que constituem arcos paralelos.
Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo (respectivamente, multigrafo orientado). O grau de um vértice x define-se como o número de arcos incidentes em x (respectivamente, o número de arcos incidentes em x mais o número de laços incidentes em x). Representa-se, habitualmente, por $d_G(x)$, ou simplesmente por $d(x)$, se não houver dúvidas sobre qual é o grafo que se está a considerar.

Se G é um multigrafo orientado denomina-se grau exterior (respectivamente, grau interior) do vértice x, e representa-se por $d^+(x)$ (respectivamente, $d^-(x)$) o número de arcos de G que têm x como extremidade inicial (respectivamente, extremidade final).

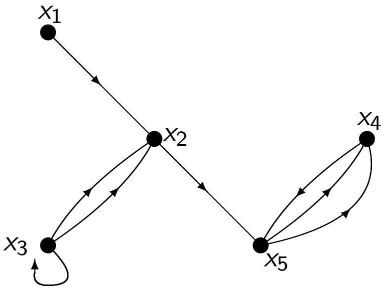
Das definições anteriores resulta que num multigrafo orientado $G = (X,\, \mathcal{U})$ se tem

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x), \qquad \text{para todo o } x \in X.$$

Atenda-se, ainda, a que num grafo orientado $G = (X,\, \mathcal{U})$ se verifica que

$$d^+(x) = |\Gamma^+(x)| \qquad \text{e} \qquad d^-(x) = |\Gamma^-(x)|, \qquad \text{para todo o } x \in X.$$

Exemplo: Consideremos o seguinte multigrafo orientado,



$$d^+(x_1) = 1 \quad , \quad d^-(x_1) = 0$$
$$d^+(x_2) = 1 \quad , \quad d^-(x_2) = 3,$$
$$d^+(x_3) = 3 \quad , \quad d^-(x_3) = 1,$$
$$d^+(x_4) = 1 \quad , \quad d^-(x_4) = 2,$$
$$d^+(x_5) = 2 \quad , \quad d^-(x_5) = 2.$$

O resultado mais conhecido envolvendo os graus dos vértices é o seguinte:

Teorema

Num multigrafo $G = (X, \mathcal{U})$ com m arcos tem-se

(i) $\sum_{x \in X} d(x) = 2m.$

(ii) *Se $G = (X, \mathcal{U})$ é um multigrafo orientado então* $\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in X} d^-(x) = m.$

A demonstração da afirmação (ii) é imediata, se atendermos a que cada arco, independentemente de ser ou não um laço, tem uma, e uma só, extremidade inicial (respectivamente, final) contribuindo, assim, com uma parcela igual a 1 para o somatório $\sum_{x \in X} d^+(x)$ (respectivamente, $\sum_{x \in X} d^-(x)$).
A demonstração de (i) para multigrafos orientados, pode fazer-se utilizando (ii), pois

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X} (d^+(x) + d^-(x)) = \sum_{x \in X} d^+(x) + \sum_{x \in X} d^-(x) = 2m,$$

ou observando que para qualquer multigrafo, orientado ou não, cada arco tem duas extremidades (que podem ser iguais, no caso dos laços) e, portanto, por cada arco existe uma parcela igual a 2 no somatório $\sum_{x \in X} d(x)$.

A afirmação (i) do Teorema anterior é conhecida por Lema do aperto de mãos.

Tal é devido ao paralelo com a seguinte situação:

Suponhamos que n pessoas se encontram numa reunião social e que algumas se cumprimentam com um aperto de mãos. Tal situação pode ser representada por um grafo simples, em que as pessoas são representadas pelos vértices e em que existe um arco incidente em x_i e x_j, com $i \neq j$, se, e só se, as pessoas correspondentes a tais vértices se cumprimentam com um aperto de mãos. Neste caso o grau de um vértice x representa o número de pessoas, que a pessoa correspondente a x cumprimentou, apertando a mão e a igualdade (i) do Teorema afirma, então, que a soma do número de pessoas que cada um dos n presentes na reunião cumprimentou é igual ao dobro do número de apertos de mãos.

Proposição

Num multigrafo, orientado ou não, $G = (X, \mathcal{U})$ é sempre par o número de vértices de G que têm grau ímpar.

Dem: Sejam m o número de arcos de G,

$$X_1 = \{x \in X : \ d(x) \text{ é ímpar}\}$$

e

$$X_2 = \{x \in X : \ d(x) \text{ é par}\}.$$

Tem-se,

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X_1} d(x) + \sum_{x \in X_2} d(x) = 2m.$$

Como $2m$ e $\sum_{x \in X_2} d(x)$ são números pares, concluímos que $\sum_{x \in X_1} d(x)$ é par. Dado que a paridade da soma de $k = |X_1|$ números ímpares é a paridade de k, concluímos que $k = |X_1|$ é um número par. Como $|X_1|$ é o número de vértices de G com grau ímpar, tem-se o resultado pretendido.

Definição

Define-se *sequência de graus* *de um multigrafo ou multigrafo orientado* G*, com* n *vértices, como sendo a sequência*

$$(d_1,\ d_2, \ldots,\ d_n),$$

não crescente, isto é, com

$$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n,$$

cujos elementos são os graus dos vértices de G*.*

Observação: No caso dos multigrafos orientados define-se de forma análoga os conceitos de sequência de graus exteriores e sequência de graus interiores.

Exemplo: Consideremos o multigrafo orientado do exemplo anterior. Como foi visto,

$$\begin{array}{ccc}
d^+(x_1) = 1 & , & d^-(x_1) = 0 \\
d^+(x_2) = 1 & , & d^-(x_2) = 3, \\
d^+(x_3) = 3 & , & d^-(x_3) = 1, \\
d^+(x_4) = 1 & , & d^-(x_4) = 2, \\
d^+(x_5) = 2 & , & d^-(x_5) = 2.
\end{array}$$

Então,
a sua sequência de graus é $(4,\ 4,\ 4,\ 3,\ 1)$,
a sua sequência de graus interiores é $(3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0)$,
a sua sequência de graus exteriores é $(3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1)$.

Definição

Uma sequência de inteiros não negativos $(d_1,\ d_2, \dots,\ d_n)$*, com* $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$*, diz-se uma sequência gráfica se existir um* **grafo simples** *cuja sequência de graus seja* $(d_1,\ d_2, \dots,\ d_n)$.

Proposição

Se $(d_1,\ d_2, \dots,\ d_n)$ *é uma sequência gráfica então* $(d_1,\ d_2, \dots,\ d_n)$ *são inteiros tais que:*

(i) $0 \leq d_i \leq n-1$*, para todo o* $i \in \{1, \dots, n\}$,

(ii) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ *é um número par.*

As condições (i) e (ii) anteriores são, pois, condições necessárias mas não suficientes. Tal verifica-se somente para $n = 1$ e $n = 2$.

Proposição

Para $n \geq 3$ existem sequências não crescentes $(d_1,\ d_2, \ldots,\ d_n)$ de inteiros verificando as condições (i) *e* (ii) *da Proposição anterior e que não são gráficas.*

Dem. Considere-se $d_1 = n - 1$ e $d_n = 0$. Se n é par tome-se $d_2 = 1$ e os restantes elementos da sequência iguais a zero. Se n é ímpar, considerem-se os restantes elementos da sequência nulos.
Finalmente concluímos que não existe nenhum grafo simples que tenha qualquer uma das sequências anteriores como sequência de graus. Se um tal grafo simples existisse teria n vértices sendo um de grau $n - 1$ e, portanto, adjacente a todos os outros. Mas, então, em tal grafo não existiriam vértices de grau zero.

Proposição

Num grafo simples, com $n \geq 2$ vértices, existem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

Dem. Se não existissem dois vértices com o mesmo grau, a sequência de graus do grafo seria

$$(n-1,\ n-2, \ldots,\ 1,\ 0),$$

que não é uma sequência gráfica.

Teorema

A sequência de inteiros não negativos

$$S: \qquad d_1,\ d_2, \ldots,\ d_n$$

com $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, $n \geq 2$ *e* $d_1 \geq 1$ *é uma sequência gráfica se, e só se, a sequência*

$$S': \qquad d_2 - 1, \ldots,\ d_{d_1+1} - 1,\ d_{d_1+2}, \ldots,\ d_n$$

(depois de ordenada por ordem não crescente) é uma sequência gráfica.

Dem.(parcial) Suponhamos que S' é uma sequência gráfica e seja G' um grafo simples cuja sequência de graus é S'. Sejam $x_2, \ldots, x_n$ os vértices de G' e considere-se que

$$d_{G'}(x_i) = \begin{cases} d_i - 1 & \text{se } 2 \leq i \leq d_1 + 1 \\ d_i & \text{se } d_1 + 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Seja G um grafo que se obtenha de G' acrescentando um novo vértice x_1 e os d_1 arcos $\{x_1,\ x_i\}$, para $2 \leq i \leq d_1 + 1$. G é um grafo simples cuja sequência de graus é S e, portanto, S é uma sequência gráfica.

Exemplo: Determinemos se a sequência $(6,\ 5,\ 5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2)$ é uma sequência gráfica.

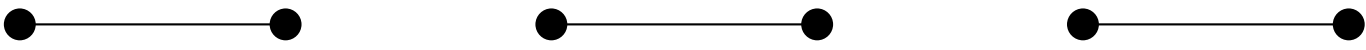
Tem-se:

$$\begin{array}{lcr}
S_1 & : & 6,\ \underline{5,\ 5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,}\ 2,\ 2 \\
S_1' & : & 4,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2 \\
S_2 & : & 4,\ \underline{4,\ 3,\ 2,\ 2,}\ 2,\ 2,\ 1 \\
S_2' & : & 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1 \\
S_3 & : & 3,\ \underline{2,\ 2,\ 2,}\ 1,\ 1,\ 1 \\
S_3' & : & 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1
\end{array}$$

em que de S_i para S_i', $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$, se aplicou o Teorema e de S_i' para S_{i+1}, $i \in \{1,\ 2\}$, se ordenou a sequência por ordem não crescente.

Embora possamos continuar a aplicar o Teorema, concluímos facilmente, que S_3' é uma sequência gráfica, pois um grafo simples da forma

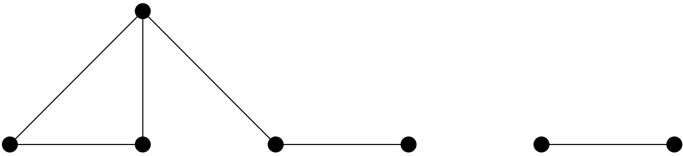
G'



tem S_3' como sequência de graus.

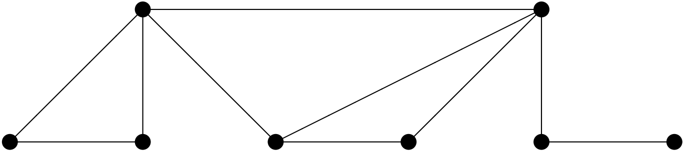
Atendendo à primeira parte da demonstração do Teorema, podemos construir um grafo simples G_3 cuja sequência de graus é S_3. Teremos de acrescentar um novo vértice ao grafo e torná-lo adjacente a 3 vértices de grau 1.

G_3



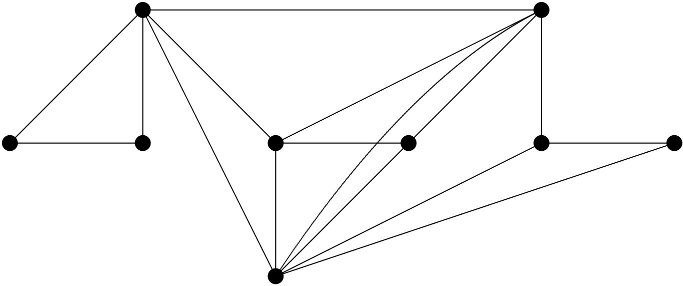
Acrescentando um novo vértice a G_3 e tornando tal vértice adjacente a 4 vértices, nomeadamente ao vértice com grau 3, a um dos de grau 2 e a dois vértices com grau 1, obtemos um grafo cuja sequência de graus é S_2.

G_2



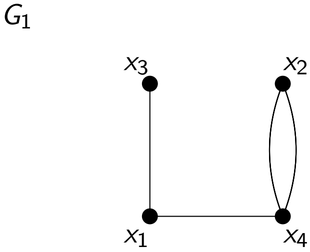
Procedendo de forma análoga, concluímos que o grafo

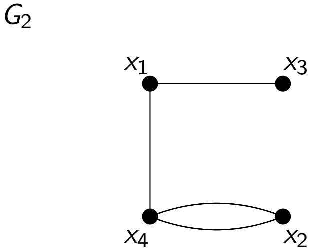
G_1



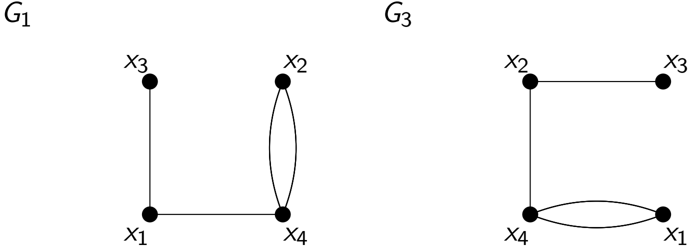
tem sequência de graus S_1.

Dois multigrafos podem parecer diferentes, mas representarem o mesmo multigrafo. É o caso dos multigrafos G_1 e G_2,





No entanto pode acontecer dois multigrafos parecerem semelhantes e representarem multigrafos distintos. É o caso dos multigrafos G_1 e G_3 (enquanto que em G_1 os vértices x_1 e x_3 são adjacentes, em G_3 não o são),



Expressamos esta semelhança dizendo que os multigrafos são **isomorfos**.

Definição

Sejam $H_1 = (X_1,\ \mathcal{U}_1)$ *e* $H_2 = (X_2,\ \mathcal{U}_2)$ *multigrafos não orientados (respectivamente, multigrafos orientados). Diz-se que* H_1 *é isomorfo a* H_2 *se existe uma aplicação bijectiva*

$$\varphi :\ X_1 \longrightarrow X_2$$

tal que, para quaisquer x_i *e* $x_j \in X_1$*, o número de arcos incidentes, em* H_1*, nestes dois vértices (respectivamente, com extremidade inicial em* x_i *e extremidade final em* x_j*) seja igual ao número de arcos incidentes, no multigrafo* H_2*, em* $\varphi(x_i)$ *e* $\varphi(x_j)$ *(respectivamente, com extremidade inicial em* $\varphi(x_i)$ *e extremidade final em* $\varphi(x_j)$*).*

Proposição

A relação de isomorfismo de multigrafos e de multigrafos orientados é uma relação de equivalência.

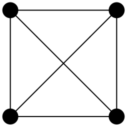
Observação:

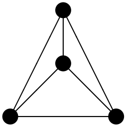
1. Atendendo à simetria da relação de isomorfismo de multigrafos (respectivamente, multigrafos orientados) podemos escrever "H_1 e H_2 são isomorfos".
2. Se $H_1 = (X_1, \mathcal{U}_1)$ e $H_2 = (X_2, \mathcal{U}_2)$ são multigrafos isomorfos, através da bijecção φ, então

$$d_{H_1}(x) = d_{H_2}(\varphi(x)), \qquad \forall x \in X_1.$$

Exemplos:

1. Os multigrafos G_1 e G_3 do exemplo que temos vindo a considerar nesta secção são isomorfos.
2. Os grafos simples



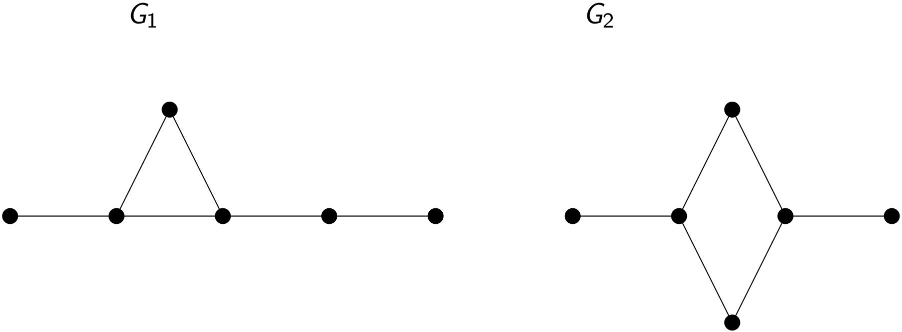


são isomorfos.

Proposição

Multigrafos e multigrafos orientados isomorfos têm sequências de graus iguais.

A reciproca da Proposição anterior é falsa. Os grafos

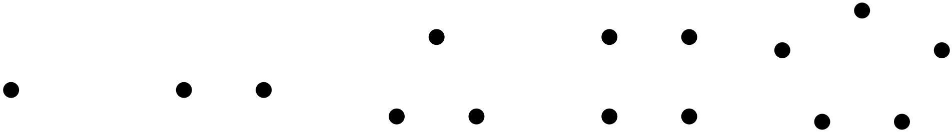


têm a mesma sequência de graus, (3, 3, 2, 2, 1, 1), mas não são isomorfos. Basta atender a que os dois vértices de grau 3 de G_1 são adjacentes, mas o mesmo não sucede aos dois únicos vértices de grau 3 de G_2.

Observação: Multigrafos orientados isomorfos, têm a mesma sequência de graus exteriores e a mesma sequência de graus interiores.

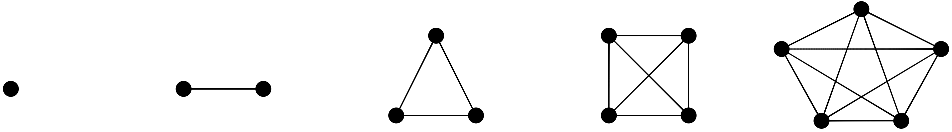
Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples. Se existe $r \in \mathbb{N}_0$ tal que, $d_G(x) = r$, para todo o $x \in X$, dizemos que G é um grafo regular de grau r ou r-regular.

Um grafo simples regular de grau 0, isto é, com todos os vértices isolados, diz-se um grafo nulo e representa-se por, no caso de ter n vértices, N_n.



N_1 $\quad$ N_2 $\quad$ N_3 $\quad$ N_4 $\quad$ N_5

Um grafo simples, com n vértices, regular de grau $n-1$, diz-se um grafo completo e representa-se por K_n. Este grafo tem $\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right) = \frac{n(n-1)}{2}$ arcos, conforme se verifica aplicando o Lema do aperto de mãos.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Como consequência do Lema do aperto de mãos, temos:

Proposição

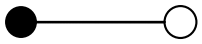
Não existem grafos regulares de grau ímpar com um número ímpar de vértices.

Diz-se que um grafo $G = (X,\ \mathcal{U})$, simples, é bipartido, com classes de vértices X_1 e X_2, se $\{X_1,\ X_2\}$ é uma partição de X e cada arco de G tem extremidade num elemento de X_1 e a outra extremidade num elemento de X_2. A notação utilizada é $G = (X_1, X_2,\ \mathcal{U})$.

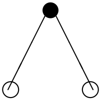
Um grafo simples $G = (X,\ \mathcal{U})$ diz-se p-partido, com classes de vértices $X_1, \ldots X_p$, se $\{X_1, \ldots,\ X_p\}$ é uma partição de X e nenhum elemento de $\mathcal{U}$ tem ambas as extremidades em elementos da mesma classe.

Um grafo p-partido, com $p \geq 2$, em que existe um arco unindo todo o par de vértices pertencentes a classes de vértices distintas diz-se um grafo p-partido completo.

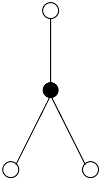
Se o grafo tiver $n_1, \ldots, n_p$ elementos nas classes, representá-lo-emos por $K_{n_1,\ldots,n_p}$. De entre este destacamos os $K_{1,n-1}$ que são os grafos estrelas.



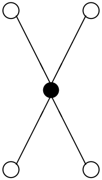
$K_{1,1}$



$K_{1,2}$



$K_{1,3}$



$K_{1,4}$

Seja $G = (X,\ \mathcal{U})$ um grafo simples completo, com $n \geq 2$ vértices. Chamamos torneio a um digrafo resultante da orientação de G.

A menos de isomorfismo, há dois torneios com 3 vértices (resultantes da orientação do K_3).

Diz-se que $G' = (X',\ \mathcal{U}')$ é subgrafo do grafo orientado (respectivamente, não orientado) $G = (X,\ \mathcal{U})$ se $X' \subseteq X$ e $\mathcal{U}' \subseteq (X' \times X') \cap \mathcal{U}$ (respectivamente, $\mathcal{U}' \subseteq (X' \otimes X') \cap \mathcal{U}$).

De entre os subgrafos temos que destacar:

Seja $G = (X,\ \mathcal{U})$ um grafo. Um grafo $G' = (X,\ \mathcal{U}')$ com $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ diz-se um grafo parcial de G. G' obtém-se de G eliminando em $\mathcal{U}$ os arcos pertencentes a $\mathcal{U}'' = \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'$, pelo que pode representar-se por $G - \mathcal{U}''$.

Se $G' = (X',\ \mathcal{U}')$ é um subgrafo de $G = (X,\ \mathcal{U})$ com $\mathcal{U}' = (X' \otimes X') \cap \mathcal{U}$ (se G não é orientado) ou $\mathcal{U}' = (X' \times X') \cap \mathcal{U}$ (se G é orientado), dizemos que G' é o subgrafo de G gerado por X'. Sendo $X'' = X \setminus X'$ representamos G' por $G - X''$.

Se $G = (X,\ \mathcal{U})$ é um grafo orientado (respectivamente, não orientado) e $\mathcal{U}'' \subseteq (X \times X) \setminus \mathcal{U}$ (respectivamente, $\mathcal{U}'' \subseteq (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$) representamos por $G + \mathcal{U}''$ o grafo $(X,\ \mathcal{U} \cup \mathcal{U}'')$.

Seja $G = (X,\ \mathcal{U})$ um grafo simples. Chama-se grafo complementar de G e representa-se por $\overline{G}$, o grafo simples $\overline{G} = (X,\ \overline{\mathcal{U}})$ em que $\overline{\mathcal{U}} = (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$.

Seja $G = (X,\ \mathcal{U})$ um grafo orientado. Chama-se grafo complementar de G e representa-se por $\overline{G}$, o grafo orientado $\overline{G} = (X,\ \overline{\mathcal{U}})$ em que $\overline{\mathcal{U}} = (X \times X) \setminus \mathcal{U}$.