$f: A \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow B \qquad g: B \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow C \qquad f, g$ bijetivas

bijetiva → injetiva
↘ sobrejetiva

→ <u>injetiva</u>

$x, y \in A \qquad x \neq y \qquad f$ injetiva

$$x \neq y \Rightarrow xf \neq yf$$

$$xf, yf \in B$$

$$xf \neq yf$$
$$\Downarrow$$
$$(xf)g \neq (yf)g$$

$$\Rightarrow x \neq y \Rightarrow (xf)g \neq (yf)g \Leftrightarrow x(f \circ g) \neq y(f \circ g)$$

$f \circ g$ é injetiva

→ <u>sobrejetiva:</u>

$f, g$ são sobrejetivas $\forall_y \in$ Imagem da função, $\exists_x \in$ domínio

$$x \longmapsto y$$

$$\forall_y \in B, \exists_x \in A, f(x) = y$$
$$\forall_z \in C, \exists_y \in B, g(y) = z$$

$$z = yg = (xf)g = x(f \circ g)$$

→ então $f \circ g$ é sobrejetiva

→ Como $f \circ g$ é injetiva e sobrejetiva então $f \circ g$ é bijetiva

③ $f: X \longrightarrow Y$ $\quad R = \{(x,y) \mid x,y \in X \text{ e } xf = yf\}$ é relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva)

⇒ Reflexiva: $\quad xRx \quad \forall x \in X$

↳ Como $\forall x \in X$ $\quad xf = xf$ então $(x,x) \in R$

↓ Reflexiva ✓

⇒ Simétrica: $\quad x, y \in X$

↳ $xf = yf$ então $(x,y) \in R$

↓ ...

$yf = xf$ então $(y,x) \in R$

} simétrica ✓

⇒ Transitiva: $\quad x, y, z \in X$

↳ $xf = yf$ então $(x,y) \in R$

$yf = zf$ então $(y,z) \in R$

$xf = yf$ e $yf = zf \Rightarrow xf = zf$ então $(x,z) \in R$

transitiva ✓

⇒ Portanto, como R é Reflexiva, simétrica e transitiva então R é uma relação de equivalência

④ $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

1º passo: $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ injeção de $A \to \mathcal{P}(A)$

2º passo: $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$ não existe sobrejeção de $A \to \mathcal{P}(A)$

1º

$$\exists f: A \hookrightarrow \mathcal{P}(A)$$
$$x \longmapsto \{x\}$$

$\forall a,b \in A \Rightarrow \{a\} = \{b\} \Leftrightarrow ag = bg \Rightarrow a = b$

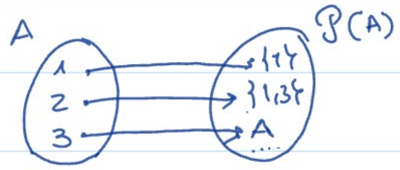
$|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$

2º

$$\cancel{\exists} f: A \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow \mathcal{P}(A)$$
$$a \mapsto\!\!\!\!\times\!\!\!\rightarrow S$$

↳ se não houver sobrejetiva

$$S := \{a \in A \mid \underline{a \notin af}\} \subseteq A$$




$1 \in 1f = \{1\}$
$2 \notin 2f = \{1,3\}$
$3 \in 3f = A = \{1,2,3\}$

$\Big\}\ S = \{2\}$

por absurdo: $x \in A$ $xf = S$

$\dfrac{S}{A \setminus S}$

$x \in S = xf \Rightarrow x \notin S \Rightarrow$ absurdo
$x \notin S = xf \Rightarrow x \in S \Rightarrow$ absurdo

$\Big\}$ impossível


$x = xf \Rightarrow x \in xf \Rightarrow x \notin S$

$x \neq xf \Rightarrow x \in xf \Rightarrow x \in S$

$\Rightarrow f$ não é sobrejetiva $\Rightarrow f$ não é bijetiva $\Rightarrow |A| \neq |\mathcal{P}(A)|$ e

$|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$, prova-se que $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

Teorema CSB

(5) $|[a,b]| = |]a,b[|$

$\hookrightarrow f : [a,b] \hookrightarrow ]a,b[$

ou

$\hookrightarrow f : [a,b] \hookrightarrow ]a,b[$ e $g : ]a,b[ \hookrightarrow [a,b]$

$g : ]a,b[ \hookrightarrow [a,b]$

$x \longmapsto x$

$x,y \in ]a,b[$ , $x \neq y \Rightarrow xg \neq yg \Leftrightarrow x \neq y$ é injetiva

$g(]a,b[) = ]a,b[ \subset [a,b]$

$g : ]a,b[ \hookrightarrow ]a,b[$ então $g : ]a,b[ \hookrightarrow [a,b]$

$|]a,b[| \leq |[a,b]|$

$f : [a,b] \hookrightarrow ]a,b[$ $\quad [c,d] \subseteq ]a,b[$

$x \longmapsto \frac{x}{x+1} + a + 1$ $\Rightarrow$ colocar uma expressão de acordo com o conjunto que nos fornecerem no enunciado

$x,y \in [a,b]$ , $x \neq y \Rightarrow xf \neq yf$

$$\frac{x}{x+1} + \cancel{a} + \cancel{1} \neq \frac{y}{y+1} + \cancel{a} + \cancel{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\cancel{x+1}} \cancel{(x+1)}(y+1) \neq \frac{y}{\cancel{y+1}} \cancel{(y+1)}(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{xy} + x \neq \cancel{yx} + y \Leftrightarrow x \neq y \,//$$

$f$ é injetiva, pois $[c,d] \subset ]a,b[$

$|[a,b]| \leq |]a,b[|$

$\Rightarrow$ Como $|]a,b[| \leq |[a,b]|$ e $|[a,b]| \leq |]a,b[|$

então $|[a,b]| = |]a,b[|$

$\underbrace{|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|}$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$$
$$n \xrightarrow[id]{} n$$

$n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \Leftarrow$

$nf = n \neq m = mf$ logo $f$ é injetiva

Vamos provar que não existe nenhuma função sobrejetiva de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$1g \mapsto 0{,}a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \dots$$
$$2g \mapsto 0{,}a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \dots$$
$$3g \mapsto 0{,}a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \dots$$
$$\dots$$

$b = 0{,}b_1 b_2 b_3 \dots b_n$

$b_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{a_{ii}\}$

$b \neq nf, \forall n \in \mathbb{N}$, logo não existe função sobrejetiva de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$ logo $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

$|\mathbb{R}| = |[0;1]|$

$$f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x$$

$x, y \in [0;1]$, $x \neq y$

$x f = x \neq y = y f$

$f$ é injetiva logo $|[0;1]| \leq |\mathbb{R}|$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$$
$$x \longrightarrow \frac{x}{x+1}$$

$x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$

$x g = \frac{x}{x+1} \neq \frac{y}{y+1} = y g$

$\Leftrightarrow \frac{x}{\cancel{x+1}} \cancel{(x+1)}(y+1) \neq y(x+1)$

$\Leftrightarrow \cancel{xy} + x \neq \cancel{yx} + y$

$\Leftrightarrow x \neq y$

logo $|\mathbb{R}| \leq |[0;1]|$, logo

$|\mathbb{R}| = |[0;1]|$