Matemática Discreta

2020/21
Funções

Professores: *João Araújo, Júlia Vaz Carvalho e Manuel Silva*
Departamento de Matemática
FCT/UNL

Baseados em textos e slides elaborados por professores do Departamento de Matemática

Programa

1. Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções
    1. Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
    2. Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
    3. Funções: bijecções; inversão e composição.
2. Parte 2 - Indução
    1. Definições indutivas
    2. Indução nos naturais e estrutural
    3. Primeiro e segundo princípios de indução
    4. Funções recursivas e provas por indução
3. Parte 3 - Grafos e Aplicações
    1. Generalidades
    2. Conexidade
    3. Árvores
    4. Grafos Eulerianos
    5. Matrizes e grafos

1.3. Funções

Sejam X e Y dois conjuntos. Uma aplicação (ou função) de X em Y é uma relação R de X em Y (i.e. $R \subseteq X \times Y$) verificando que, para qualquer $x \in X$, existe um e um só $y \in Y$ tal que $(x, y) \in R$, ou seja, simbolicamente

$$(\forall x \in X)\ (\exists^1 y \in Y)\ (x, y) \in R.$$

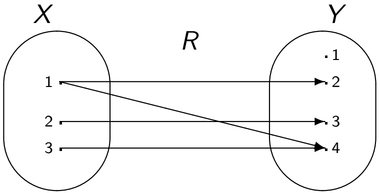
Se f é uma aplicação de X em Y escrevemos $f : X \longrightarrow Y$ e, dado $x \in X$, denotamos por $f(x)$ ou xf o único elemento $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$. (A notação xf é muito prática como veremos mais tarde). Este elemento é designado por imagem de x (por meio de f).

Dada uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$, chamamos:

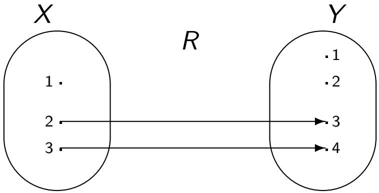
- conjunto de partida de f a X;
- conjunto de chegada de f a Y;
- imagem de f (ou contradomínio de f) ao conjunto das imagens por (meio de) f de todos os elementos $x \in X$:

Exemplos

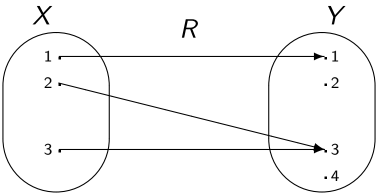
1. Sejam $X = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. Então:
   - $R = \{(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (1,4)\}$ é uma relação de X em Y, mas não é uma aplicação de X em Y.



   - $R = \{(2,3),\ (3,4)\}$ é uma relação de X em Y, mas não é uma aplicação de X em Y.

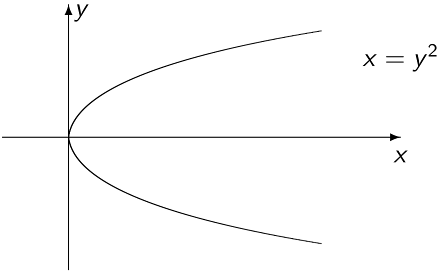


- $R = \{(1,1),\ (2,3),\ (3,3)\}$ é uma aplicação de X em Y.

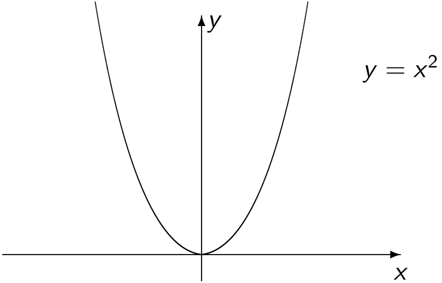


2. Sejam $X = Y = \mathbb{R}$. Então:

- $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\ x = y^2\}$ é uma relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, mas não é uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \; x^2 = y\}$ é uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



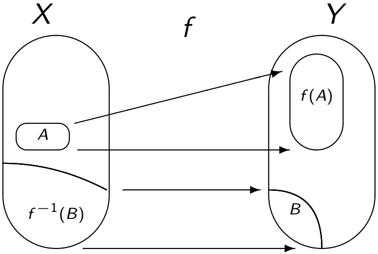
Definição

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação, $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. Designamos por:

- imagem de A (por meio de f) ao conjunto $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$;
- imagem recíproca (ou pré-imagem) de B (por meio de f) ao conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Se $B = \{y\}$, denotamos também $f^{-1}(B)$ por $f^{-1}(y)$.



Exemplo

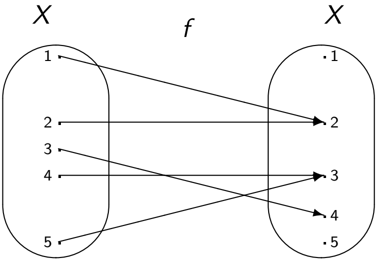
Sejam $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $f : X \longrightarrow X$ tal que $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,

$A = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $B = \{1,\ 2,\ 3\}$. Então,

$Im\, f = \{2,\ 3,\ 4\}$, $f(A) = \{2,\ 4\}$ e

$f^{-1}(B) = \{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$.

Observe-se que $f(f^{-1}(B)) = \{2,\ 3\} \subset B$.



Definição

Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação. Dizemos que:

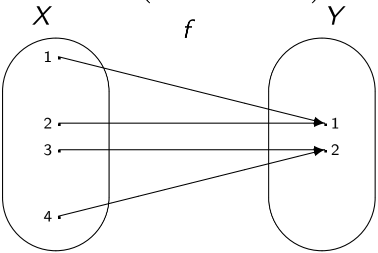
- f é injectiva (ou uma injecção) se $(\forall a, b \in X)$ $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ (equivalentemente, se $(\forall a, b \in X)$ $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$);
- f é sobrejectiva (ou uma sobrejecção) se $f(X) = Y$, i.e. se $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)$ $y = f(x)$;
- f é bijectiva (ou uma bijecção) se for simultaneamente injectiva e sobrejectiva, i.e., equivalentemente, se $(\forall y \in Y)(\exists^1 x \in X)$ $y = f(x)$.

Exemplos

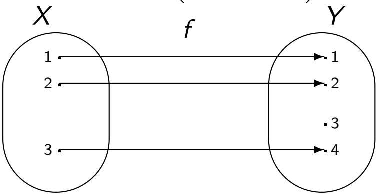
- A aplicação $f : X \longrightarrow X$ do exemplo anterior, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, não é injectiva nem sobrejectiva.
- A aplicação $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n + 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, é injectiva mas não é sobrejectiva.
- Seja X um conjunto qualquer e $f : X \longrightarrow X$ a aplicação definida por $f(x) = x$, para qualquer $x \in X$. Então, f é injectiva e sobrejectiva, donde f é bijectiva. Esta aplicação designa-se por aplicação identidade de X e denota-se por 1_X ou id_X ou I_X.

?

- Sejam $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y = \{1,\ 2\}$ e $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ uma aplicação de X em Y.
  Então f é sobrejectiva mas não é injectiva.



- Sejam $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ e $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ uma aplicação de X em Y.
  Então f é injectiva mas não é sobrejectiva.



Observação

Sejam X e Y conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação. Afirmar que

$$(\forall x,\ y \in X)\ x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

é o mesmo que dizer que f é uma *aplicação*.
Não confundir com o conceito de injectividade!

Teorema

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ duas aplicações. Então a relação composição de g com f, de X em Z, é uma aplicação $f \circ g : X \longrightarrow Z$ que está definida por $(f \circ g)(x) = g(f(x))$, para qualquer $x \in X$.
É na composição que se vê como a notação xf é mais natural que $f(x)$.
De facto, $(f \circ g)(x) = g(f(x))$ enquanto $x(f \circ g) = (xf)g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x)) = (f \circ g)(x)$$

Observação

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ duas aplicações.

- A composta $g \circ f$ está (formalmente) definida se, e só se, $Z = X$;
- Se $Z = X$ então as aplicações $f \circ g$ e $g \circ f$ estão definidas, mas não temos necessariamente $f \circ g = g \circ f$.
  Claro que, se $X \neq Y$, então $f \circ g : X \longrightarrow X$ e $g \circ f : Y \longrightarrow Y$, pelo que $f \circ g \neq g \circ f$. Mas mesmo quando $X = Y$, podemos ter $f \circ g \neq g \circ f$.
  Por exemplo, sejam $X = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ duas aplicações de X em X. Então,
  $$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = f \circ g.$$

Proposição

Sejam $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ e $h : Z \longrightarrow W$ três aplicações. Então, estão definidas as aplicações $(f \circ g) \circ h$ e $f \circ (g \circ h)$ de X em W e temos

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

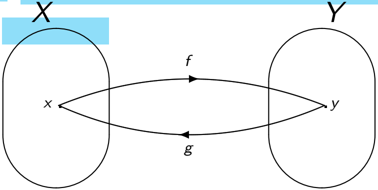
Teorema

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ duas aplicações. Então:

- *Se f e g são injectivas, então $f \circ g$ é injectiva;*
- *Se f e g são sobrejectivas, então $f \circ g$ é sobrejectiva;*
- *Se f e g são bijectivas, então $f \circ g$ é bijectiva.*

Definição

Dizemos que uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é invertível se existir uma ?
aplicação $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g = id_X$ e $g \circ f = id_Y$.



Proposição

Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação invertível. Então, existe uma e uma só aplicação $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g = id_X$ e $g \circ f = id_Y$.

Nas condições da Proposição anterior, à aplicação g chamamos aplicação inversa de f e denotamo-la por f^{-1}: $f^{-1} \circ f = id_Y$ e $f \circ f^{-1} = id_X$.

Observemos ainda que, dados $x \in X$ e $y \in Y$, temos

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Observação

É evidente que, se $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação invertível, então a sua inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ é também invertível e temos $(f^{-1})^{-1} = f$.

Proposição

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ duas aplicações invertíveis. Então, a aplicação $f \circ g : X \longrightarrow Z$ é invertível e tem-se $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Teorema

Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é invertível se e só se é uma bijecção.