Matemática Discreta

2018/19

Grafos - Árvores

Professores João Araújo, Júlia Vaz Carvalho e Manuel Silva

Departamento de Matemática

FCT/UNL

Programa

1. Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções
    1. Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
    2. Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
    3. Funções: bijecções; inversão e composição.
2. Parte 2 - Indução
    1. Definições indutivas
    2. Indução nos naturais e estrutural
    3. Primeiro e segundo princípios de indução
    4. Funções recursivas e provas por indução
3. Parte 3 - Grafos e Aplicações
    1. Generalidades
    2. Conexidade
    3. Árvores
    4. Grafos Eulerianos
    5. Matrizes e grafos

3.3.1. Resultados sobre árvores

Na secção anterior, conhecemos os grafos cadeia, P_n, que são conexos e verificam a seguinte propriedade: qualquer seu arco é uma ponte. Estes grafos são árvores.

A árvore genealógica da sua família é uma árvore?

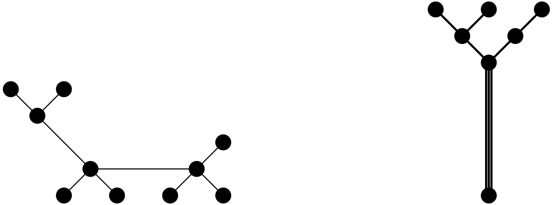
Definição

Designa-se por floresta um grafo sem ciclos e por árvore um grafo conexo sem ciclos.

Observação Uma floresta é um grafo em que cada componente conexa é uma árvore.

3.3. Árvores

Exemplo: Consideremos o seguinte grafo:



Este grafo é uma floresta composta por duas árvores.

Teorema

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo simples, com $n \geq 2$ vértices. Então são equivalentes as afirmações:

(i) *G é um grafo conexo sem ciclos.*

(ii) *G não tem ciclos e tem $n-1$ arcos (ou arestas).*

(iii) *G é conexo e tem $n-1$ arcos (ou arestas).*

(iv) *G é conexo e se $u \in \mathcal{U}$ então $G - u$ é desconexo.*

(v) *$\forall x_i,\ x_j \in X$, tais que $x_i \neq x_j$ existe uma, e uma só, cadeia elementar $x_i - x_j$, em G.*

(vi) *G não tem ciclos e se $u \in (X \otimes X) \setminus \mathcal{U}$ então $G + u$ tem um, e um só, ciclo.*

Dem:
$(i) \Rightarrow (ii)$ Por indução em n.
Para $n = 2$ o resultado é verdadeiro.
Suponhamos o resultado verdadeiro para todo o grafo conexo sem ciclos com um número de vértices inferior ou igual a k, com $k \geq 2$.
Seja $G' = (X', \mathcal{U}')$ um grafo conexo sem ciclos com $k+1$ vértices. Como G' não tem ciclos, todo o arco $u' \in \mathcal{U}'$ é uma ponte.
Logo, $G' - u'$, com $u' \in \mathcal{U}'$, tem duas componentes conexas R_1 e R_2 com k_1 e k_2 vértices, respectivamente. Como R_1 e R_2 são grafos conexos sem ciclos, por hipótese de indução, o número de arcos de R_1 é $k_1 - 1$ e o número de arcos de R_2 é $k_2 - 1$. O número de vértices de G' é $k + 1 = k_1 + k_2$ (retiramos uma aresta, não retiramos vértices). Logo o número de arestas de G' é

$$(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + 1 = (k_1 + k_2 - 1) - 1 + 1 = k - 1 + 1 = k$$

Dem(cont.):
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Demonstremos que G é conexo. Suponhamos que G não é conexo e sejam $R_1, \ldots, R_p$ as componentes conexas de G, com $p \geq 2$. Sejam n_i e m_i, respectivamente, o número de vértices e o número de arcos de R_i, $i = 1, \ldots, p$.
Porque R_i é conexo sem ciclos, temos

$$m_i = n_i - 1 \qquad\qquad i = 1, \ldots, p.$$

então, o número de arcos de G seria

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = \sum_{i=1}^{p} n_i - p = n - p.$$

Como $p \geq 2$, concluiríamos que o número de arcos de G

$$n - p \leq n - 2,$$

o que contradiz a hipótese.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Dado que G tem n vértices e $n-1$ arcos, então para qualquer $u \in \mathcal{U}$, $G-u$ tem n vértices e $n-2$ arcos. Demonstremos que se $G' = G - u$ fosse conexo então o seu número de arcos m' verificaria $m' \geq n-1$, o que é uma contradição com $m' = n-2$. De facto se G' fosse conexo sem ciclos então por $(i) \Rightarrow (ii)$ teriamos $m' = n-1$. Por outro lado se G' fosse conexo com ciclos então retirando arcos pertencentes a ciclos obteriamos um grafo parcial de G ainda conexo e sem ciclos pelo que $m' > n-1$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Como G é conexo, então para quaisquer dois vértices de G existe uma cadeia elementar, da qual são extremidades.
Se existissem dois vértices distintos de G que fossem extremidades de pelo menos duas cadeias elementares distintas, então, em G, existiria um ciclo. Sendo u um arco deste ciclo, como u não era ponte, $G-u$ era conexo, o que contradiz a hipótese.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Se em G existisse um ciclo, então sendo x e y dois vértices distintos deste ciclo, existiriam duas cadeias elementares distintas $x - y$, o que contradiz (v). Logo, G não tem ciclos. Seja $u = \{x_i,\ x_j\} \notin \mathcal{U}$, com $x_i \neq x_j$, vértices de X. Por (v) existe em G uma cadeia elementar $x_i - x_j$, e dado que $x_i \neq x_j$ também é uma cadeia simples. Assim, $x_i - x_j,\ u,\ x_i$ é um ciclo em $G + u$.
Porque G não tem ciclos, então $G + u$ tem no máximo um ciclo.

$(vi) \Rightarrow (i)$ Demonstremos que G é conexo. Suponhamos que G é desconexo e sejam $x_i,\ x_j$ vértices de componentes conexas distintas. Tem-se $\{x_i,\ x_j\} \notin \mathcal{U}$. Como G não tem ciclos e não existem cadeias com extremidades em vértices de componentes conexas distintas, podemos dizer que $G + u$ não tem ciclos, o que contradiz (vi). Logo, G é conexo.

Proposição

Uma floresta com n vértices e p componentes conexas tem $n - p$ arcos.

Dem: Exercício.

Proposição

Existem grafos simples com n vértices e $n - 1$ arcos que não são florestas e, portanto, não são árvores.

Dem: Considere-se $G = C_{n-1} \cup K_1$, com $n \geq 4$.

Proposição

Numa árvore, com $n \geq 2$ vértices, existem pelo menos dois vértices de grau 1.

Dem: Seja G uma árvore com $n \geq 2$ vértices. Seja $(d_1, \ldots, d_n)$ com $d_1 \geq \ldots \geq d_n$, a sequência de graus de G. Como G é conexo e $n \geq 2$ então, $d_n \geq 1$.

impossível pois a raiz e as folhas têm cada uma grau 1, logo no mínimo existe 1 vértice de grau 1

Suponhamos que, no máximo, G tinha um vértice de grau 1, então

$$\sum_{x \in X} d(x) = 1 + \sum_{x \in X, d(x) > 1} d(x) \geq 1 + 2(n-1).$$

Como G é uma árvore com n vértices, o número de arcos é $m = n - 1$, ou seja, $\sum_{x \in X} d(x) = 2(n-1)$. Logo

$$2(n-1) = \sum_{x \in X} d(x) \geq 1 + 2(n-1) = 2n - 1.$$

Dem 2: Seja C uma cadeia maximal na árvore:

$$u, \{u, u_1\}, u_1, \ldots, u_l, \{u_l, v\}, v.$$

Vamos provar que $d(u) = 1$. Se $d(u) > 1$, então $x --- u --- u_1$. Se x é um vértice da cadeia, então temos um ciclo. Absurdo. Se x não pertencer à cadeia, então

$$x, \{x, u\}, u, \{u, u_1\}, u_1, \ldots, u_l, \{u_l, v\}, v$$

é uma cadeia que contém C o que contradiz a maximalidade.

Teorema

Sejam $d_1, \ldots, d_n$, com $n \geq 2$, inteiros tais que

$$d_1 \geq \ldots \geq d_n > 0.$$

Então, existe uma árvore cuja sequência de graus é

$$(d_1, \ldots, d_n)$$

se, e só se

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2.}$$

não pode corresponder à sequência gráfica de uma árvore pois pelo menos 2 vértices têm grau 1

3.3.2. Árvores Maximais

Em certas situações, o grafo conexo que temos não é uma árvore, mas queremos obter, a partir do grafo inicial, um grafo parcial que seja uma árvore.

Teorema

Um grafo é conexo se, e só se, admite uma árvore como grafo parcial.

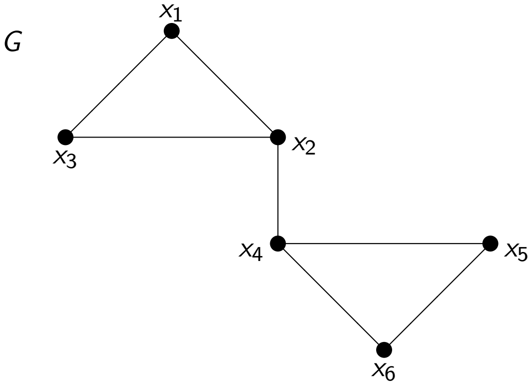
Dem: $\Longleftarrow$ Se um grafo G admite uma árvore como grafo parcial então G admite um grafo parcial conexo, logo é conexo.

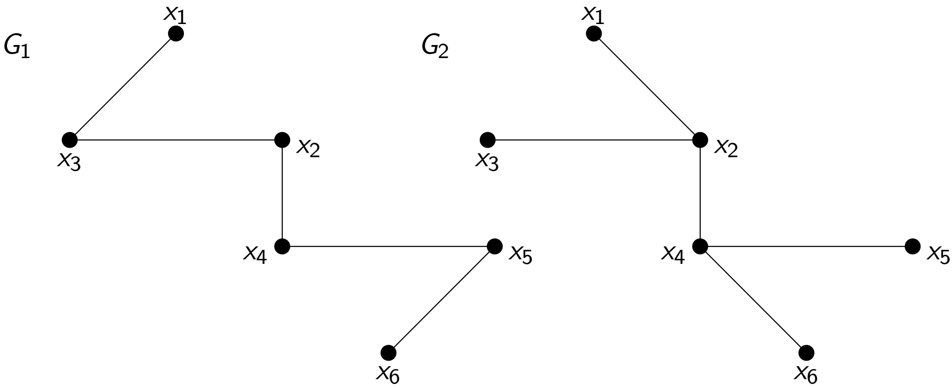
$\Longrightarrow$ Se G não tem ciclos, então G é uma árvore (grafo parcial de G).
Se G tem um ciclo, seja u_1 um arco de um dos ciclos de G. Então u_1 não é ponte, pelo que $G_1 = G - u_1$ é conexo e tem um número de ciclos inferior ao número de ciclos de G. Se $G - u_1$ não tem ciclos então $G_1 = G - u_1$ é árvore (grafo parcial de G). Caso contrário, seja u_2 um arco de um ciclo de $G_1 - u_2 = G_2$.
Porque o número de ciclos de G é finito, procedendo deste modo, obtemos um grafo $G_k = G_{k-1} - u_{k-1}$ que é conexo, sem ciclos. Logo G_k é árvore (grafo parcial de G).

Definição

Seja G um grafo (respectivamente, grafo conexo). Designa-se por floresta (respectivamente, **árvore***) maximal de G qualquer grafo parcial de G, que tenha o mesmo número de conexidade que G e que seja* **floresta** *(respectivamente,* **árvore***).*

Exemplo: Consideremos o seguinte grafo simples,





G_1 e G_2 são duas árvores maximais, não isomorfas de G

Definição

Chamamos grafo ponderado a um par (G, v) em que $G = (X, \mathcal{U})$ é um grafo e v é uma aplicação de $\mathcal{U}$ no conjunto dos números reais.

Se $u \in \mathcal{U}$ designa-se por valor/peso do arco **u** *o número real $v(u)$ e designa-se por* **valor de G***, e representa-se por $v(G)$, o número real*

$$v(G) = \sum_{u \in \mathcal{U}} v(u).$$

Vejamos dois algoritmos para determinar árvores maximais com valor mínimo.

Algoritmo de Kruskal

Seja $(G,\ v)$ um grafo ponderado, sendo $G = (X,\ \mathcal{U})$ um grafo conexo com n vértices.

1º) Escolha-se um arco u_1 de G tal que

$$v(u_1) = \min_{u \in \mathcal{U}} v(u).$$

2º) Se os arcos $u_1, \ldots,\ u_i$ já foram escolhidos, então, sendo $\mathcal{U}_i = \{u_1, \ldots,\ u_i\}$, escolha-se um arco $u_{i+1} \in \mathcal{U}$ tal que

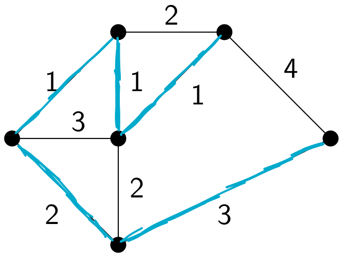
(1) $u_{i+1} \notin \mathcal{U}_i$

(2) $G' = (X,\ \mathcal{U}_i \cup \{u_{i+1}\})$ não tem ciclos

(3) u_{i+1} é de entre os arcos que verificam as condições (1) e (2), um com valor mínimo.

3º) Se já foram escolhidos $n-1$ arcos, então o algoritmo termina. Caso contrário, repita-se 2º).

Exemplo: Consideremos o seguinte grafo ponderado



Calculemos, usando o Algoritmo de Kruskal, uma árvore maximal de valor mínimo.

Algoritmo de Prim

Seja $(G,\ v)$ um grafo ponderado, sendo $G = (X,\ \mathcal{U})$ um grafo conexo com n vértices.

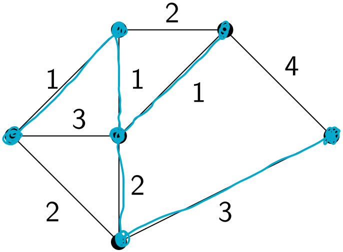
1º) Considere-se um vértice arbitrário de G, que designamos por x_1.

2º) Escolha-se um arco u_1 de G, incidente em x_1, que tenha valor mínimo.

3º) Se os arcos $u_1, ..., u_i$ já foram escolhidos e sendo $X_i = \{x_1, ..., x_{i+1}\}$ o conjunto de vértices formado pela suas extremidades, escolha-se um arco u_{i+1} de valor mínimo entre os arcos $\{x_j, x_{i+2}\}$ de G tal que $x_j \in X_i$ e $x_{i+2} \notin X_i$ (i.e. u_{i+1} é um arco de valor mínimo entre os arcos ainda não escolhidos com precisamente uma extremidade em X_i).

4º) Se já foram escolhidos $n-1$ arcos, então o algoritmo termina. Caso contrário, repita-se 3º).

Exemplo: Com o grafo ponderado do exemplo anterior,



calculemos uma árvore maximal de valor mínimo, mas utilizando o Algoritmo de Prim e partindo do vértice central.

Observações:

• Se temos um grafo simples conexo e queremos uma sua árvore maximal, podemos usar qualquer um dos algoritmos anteriores bastando para isso, atribuir o mesmo valor a todos os arcos do grafo.

• Em geral, em termos de implementação em computador, o Algoritmo de Prim é mais rápido do que o de Kruskal.

Algoritmo da Cadeia mais curta (Djikstra)

Seja (G, v) um grafo conexo ponderado em que v toma valores não negativos e sejam x e y dois vértices distintos de G. Determinemos a cadeia $x - y$ de comprimento mínimo.

Passo 1

1. *Atribua-se a x uma etiqueta definitiva igual a 0;*
2. *Atribua-se a cada vértice x' adjacente a x uma etiqueta temporária igual ao valor do arco $\{x, x'\}$;*
3. *Se ε é o valor da menor das etiquetas temporárias acabadas de atribuir, atribua-se a cada vértice z com etiqueta temporária ε uma etiqueta definitiva de valor ε.*

Passo 2

Se y tem etiqueta atribuída uma etiqueta definitiva, o algoritmo termina. Caso contrário segue-se para o Passo 3.

Passo 3

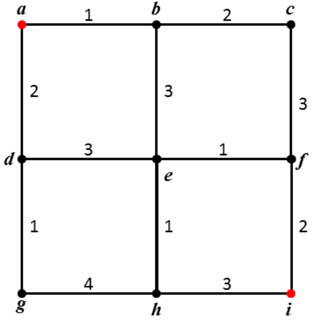
1. *Para cada vértice z ao qual se acabou de atribuir uma etiqueta defiitiva $\overline{\varepsilon}$ e, para cada vértice z' adjacente a z atribua-se a z' uma etiqueta temporária de valor igual a*

$$\overline{\varepsilon} + v(\{z, z'\})$$

   excepto se z' já tem uma etiqueta de valor inferior.
2. *Sendo ε o menor dos valores das etiquetas temporárias já atribuidas, atribua-se a cada vértice z com etiqueta temporária de valor ε uma etiqueta definitiva de valor ε.*
3. *Ir para o Passo 2.*

Exemplo

Consideremos o seguinte grafo ponderado:

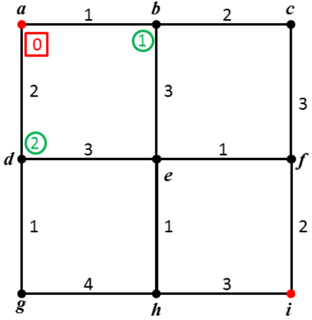


Apliquemos o algoritmo anterior tomando **a** como vértice inicial e **i** como vértice final. Um número junto a um vértice x rodeado por uma circunferência verde corresponde a uma etiqueta temporária do vértice x.

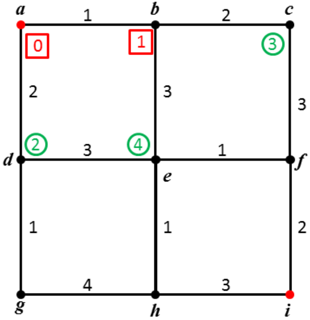
Um número junto a um vértice x rodeado por uma quadrado encarnado corresponde a uma etiqueta definitiva do vértice x.

Dado um vértice x designemos por $\varepsilon_T(x)$ uma etiqueta temporária de x e por $\varepsilon_D(x)$ a etiqueta definitiva de x (se a possuir).

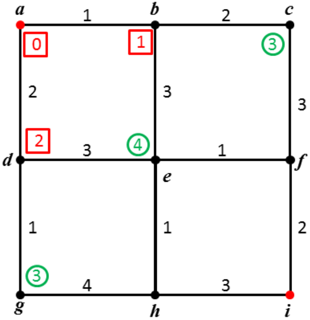
Atribuam-se as seguintes etiquetas
$\varepsilon_D(a) = 0$, $\varepsilon_T(b) = 1$ e $\varepsilon_T(d) = 2$.



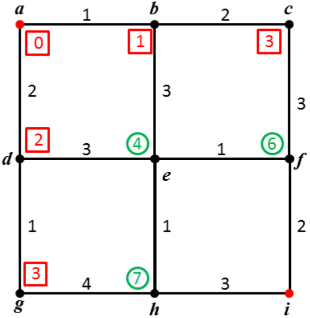
Atribuam-se as seguintes etiquetas
$\varepsilon_D(b) = 1$, $\varepsilon_T(c) = 1 + 2 = 3$ e $\varepsilon_T(e) = 1 + 3 = 4$.



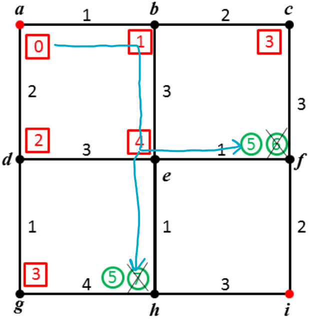
Atribuam-se as seguintes etiquetas
$\varepsilon_D(d) = 2$, $\varepsilon_T(g) = 2 + 1 = 3$ e mantenha-se $\varepsilon_T(e) = 4 < 2 + 3$.



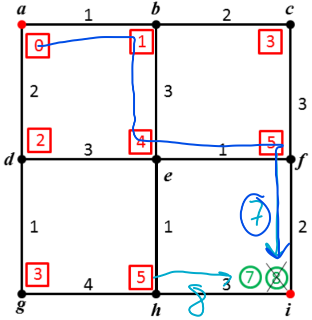
Atribuam-se as seguintes etiquetas
$\varepsilon_{D}(c) = 3, \varepsilon_{D}(g) = 3$, $\varepsilon_{T}(f) = 3 + 3 = 6$ e $\varepsilon_{T}(h) = 3 + 4 = 7$.



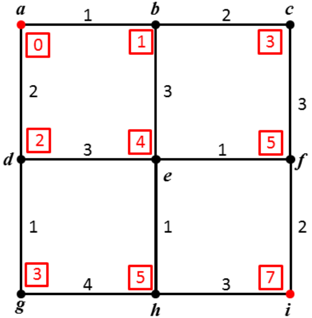
Atribuam-se as seguintes etiquetas
$\varepsilon_{D}(e) = 4$, $\varepsilon_{T}(f) = 4 + 1 < 6$ $\varepsilon_{T}(h) = 4 + 1 < 7$.



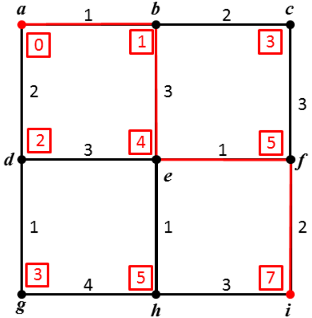
Atribuam-se as seguintes etiquetas
$\varepsilon_D(h) = 5$, $\varepsilon_T(i) = 5 + 3 = 8$.
$\varepsilon_D(f) = 5$, $\varepsilon_T(i) = 5 + 2 = 7 < 5 + 3$.



Atribua-se
$\varepsilon_D(i) = 7$ O ALGORITMO TERMINA!



Partindo do vértice i perceber a partir de que vértice adjacente a i foi atribuida a sua etiqueta definitiva, repetir este processo para este vértice e para os seguintes até chegar ao vértice a. Obtem-se desta forma uma sequência de vértices que dão origem a uma cadeia $a - i$ de valor mínimo.



Uma cadeia mínima $a - i$ é a cadeia $a \to b \to e \to f \to i$.