FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Teste Modelo para o Primeiro Take Home Test

1. Seja X um conjunto não vazio e com pelo menos dois elementos; considere $B \subsetneq X$. Seja $Y \subseteq X$ tal que a seguinte igualdade de conjuntos é verdadeira:

$$(Y \cap B) \cup (B' \cap Y) = Y.$$

Diga qual das seguintes opções é verdadeira:

(a) Não existe Y tal que a igualdade acima seja verdadeira.
(b) A equação tem exatamente uma solução.
(c) A equação tem exatamente duas soluções.
(d) A equação tem pelo menos três soluções.

2. Sejam A e B dois conjuntos não vazios e com intersecção vazia. Seja $P(A \cup B)$ o conjunto das partes de $A \cup B$. Diga qual a cardinalidade do seguinte conjunto:

$$\{C \in P(A \cup B) \mid C \cap A \neq \emptyset\}.$$

(a) $2^{|A|}$ (b) $2^{|A|+|B|}$ (c) $2^{|A|}2^{|B|}$ (d)$(2^{|A|} - 1)2^{|B|}$

3. Sejam A e B dois conjuntos diferentes não vazios e suponha que $A \times B = B \times B$.

Diga qual das seguintes opções é correta:

(a) Esta situação é impossível.
(b) Só é possível se A estiver estritamente contido em B.
(c) Só é possível se B estiver estritamente contido em A.
(d) As afirmações anteriores são falsas.

4. Sejam A e B dois conjuntos não vazios contidos no conjunto finito X com pelo menos 4 elementos. Seja $\emptyset \neq Y \subseteq X$ tal que

$$A \times (B \cup Y) = (A \times B) \cup (A \times Y).$$

Diga qual das seguintes opções é correta:

(a) Não existe nenhum conjunto Y que satisfaça aquela equação.
(b) Existe apenas um conjunto Y que torna a equação possível.

(c) Existem $2^{|X|} - 1$ conjuntos Y que tornam a equação possível.

(d) As afirmações anteriores são falsas.

5. Seja $\mathbb{F}$ o conjunto das funções contínuas e deriváveis em $\mathbb{R}$. Em $\mathbb{F}$ definimos a relação R: dadas $f, g \in \mathbb{F}$, temos
$$fRg \Leftrightarrow f = g'.$$
Diga qual das seguintes opções é verdadeira:

(a) R é reflexiva.

(b) R é transitiva.

(c) R é anti-simétrica.

(d) Todas as anteriores estão erradas.

6. Seja X um conjunto com n elementos (sendo n um número natural). Diga quantas relações simétricas e irreflexivas é possível definir em X:

(a) $\dfrac{n!}{(n-2)!2!}$ (b) 2^n (c) $2^{\frac{n!}{(n-2)!2!}}$ (d) 2^{n^2}.

7. Considere a seguinte relação nos números naturais:
$$nRk \Leftrightarrow n + k \text{ é par}.$$
Indique qual das seguintes opções está correta:

(a) R é uma relação de ordem parcial;

(b) R é uma relação de equivalência e $|\mathbb{N}/R| = \aleph_0$;

(c) Existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $(n, k) \in R$, mas $(n, k) \notin R \circ R$;

(d) Nenhuma das anteriores é verdadeira.

8. Seja R uma relação binária no conjunto finito X. Diga qual das seguintes afirmações é verdadeira:

(a) Para todo o $x \in Dom(R)$ há pelo menos um $y \in Im(R)$ pelo que a imagem de R terá de ter pelo menos tantos elementos como o domínio de R.

(b) Todo o elemento de X tem uma imagem por R.

(c) Se R for reflexiva então $R \circ R^{-1} = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

(a) Todas as anteriores estão erradas.

9. Considere a seguinte afirmação: *A cardinalidade de* $\mathbb{R}$ *e é igual à de* $\mathbb{Q}$.

Diga qual das seguintes opções está certa:

(a) A afirmação é falsa porque não existe nenhuma aplicação sobrejetiva de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$.

(b) A afirmação é verdadeira porque ambos os conjuntos têm um número infinito de elementos.

(c) A afirmação nem é falsa nem verdadeira porque a cardinalidade de um conjunto tem de ser um número natural.

(d) As três opções anteriores são falsas.

10. Prove que a seguinte função é injetiva: $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, com $f(x, y) = 2^x(2y - 1)$.

Será f sobrejetiva?

11. Seja $X := \{1, \ldots, n\}$ um conjunto com $n > 6$ elementos. Diga quantas relações de equivalência com duas classes de equivalência é possível definir em X sabendo que 1 e 2 estão em classes diferentes.

12. Prove que $|\mathcal{P}(A)| > |A|$.