Matemática Discreta

2019/20
Indução

Professores *João Araújo, Júlia Vaz Carvalho, Manuel Silva*
Departamento de Matemática
FCT/UNL

Baseados em slides elaborados pelos Professores Drª. Isabel Oitavem e Drª. Cecília Perdigão

Programa

1. Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções
   1. Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
   2. Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
   3. Funções: bijecções; inversão e composição.
2. Parte 2 - Indução
   1. Definições indutivas
   2. Indução nos naturais e estrutural
      - Primeiro e segundo princípios de indução
      - Funções recursivas e provas por indução
3. Parte 3 - Grafos e Aplicações
   1. Generalidades
   2. Conexidade
   3. Árvores
   4. Grafos Eulerianos
   5. Matrizes e grafos

2.1 - Definições indutivas de conjuntos

Com um **número finito de regras** *é possível definir conjuntos com um número infinito de elementos. A este tipo de definição dá-se usualmente o nome de definição indutiva ou recursiva.*

Numa definição indutiva temos:

1. *Regras (axiomas) que determinam os elementos básicos (constantes) do conjunto.*
2. *Regras para obter novos elementos a partir dos que já estão no conjunto.*

Dizemos que um conjunto com um número infinito de elementos é um conjunto indutivo se pode ser gerado pelas regras anteriores.

Exemplo

O conjunto $\mathbb{N}_0$ é um conjunto indutivo pois,

1. $0 \in \mathbb{N}_0$
2. Se $n \in \mathbb{N}_0$ então $suc(n) \in \mathbb{N}_0$, onde $suc(n)$ denota sucessor de n em $\mathbb{N}_0$, ou seja, o elemento que cobre n na cadeia $(\mathbb{N}_0, \leq)$.

Exemplo

O conjunto dos números pares não negativos $\mathbb{P}$ é definido em compreensão por

$$\mathbb{P} = \{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$$

Também é possível definir este conjunto indutivamente da seguinte forma:

1. $0 \in \mathbb{P}$.
2. $x \in \mathbb{P} \Rightarrow$suc(suc(x))$\in \mathbb{P}$.

Exemplo

Seja SEQ o conjunto de todas as sequências finitas de elementos naturais. Por exemplo, são elementos de SEQ as sequências $(1, 2)$, $(3, 4, 10)$ ou $(3, 2, 1, 4, 3)$.
Como definir este conjunto indutivamente?

1. A sequência vazia $() \in SEQ$
2. Se $x \in \mathbb{N}_0$ e $s \in SEQ \Rightarrow (x, s) \in SEQ$.

Exemplo

Como justificar, usando a definição indutiva de $\mathbb{N}_0$ que $4 \in \mathbb{N}_0$?
Sabemos que:
$0 \in \mathbb{N}_0$ pois 0 pela regra **1** é um elemento básico de $\mathbb{N}_0$.
$1 \in \mathbb{N}_0$ aplicando a regra **2** que diz que como $0 \in \mathbb{N}_0$ então $suc(0) \in \mathbb{N}_0$.
$2 \in \mathbb{N}_0$ aplicando a regra **2** que diz que como $1 \in \mathbb{N}_0$ então $suc(1) \in \mathbb{N}_0$.
$3 \in \mathbb{N}_0$ aplicando a regra **2** que diz que como $2 \in \mathbb{N}_0$ então $suc(2) \in \mathbb{N}_0$.
$4 \in \mathbb{N}_0$ aplicando a regra **2** que diz que como $3 \in \mathbb{N}_0$ então $suc(3) \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo

Mostre que a sequência $(3, 4, 2, 4) \in SEQ$. Temos:
$() \in SEQ$ axioma
$4 \in \mathbb{N}_0$ e $() \in SEQ \Rightarrow (4, ()) = (4) \in SEQ$
$2 \in \mathbb{N}_0$ e $(4) \in SEQ \Rightarrow (2, (4)) = (2, 4) \in SEQ$
$4 \in \mathbb{N}_0$ e $(2, 4) \in SEQ \Rightarrow (4, (2, 4)) = (4, 2, 4) \in SEQ$
$3 \in \mathbb{N}_0$ e $(4, 2, 4) \in SEQ \Rightarrow (3, (4, 2, 4)) = (3, 4, 2, 4) \in SEQ$

Regras de inferência

Um sistema dedutivo é constituído por um conjunto de axiomas e regras (regras de inferência).
As regras de inferência são normalmente escritas na forma

$$\frac{J_1 \ldots J_n}{J}$$ implica - traço de fração

onde $J_1 \ldots J_n, J$ são asserções ou proposições, tendo-se $n = 0$ quando a regra J é um axioma.

Exemplo

Usando a definição indutiva de $\mathbb{N}_0$ podemos escrever assim as suas regras de inferência:

$$\frac{}{0 \in \mathbb{N}_0} \quad \text{e} \quad \frac{n \in \mathbb{N}_0}{suc(n) \in \mathbb{N}_0}$$

Exemplo

O conjunto dos números pares não negativos $\mathbb{P}$ foi definido indutivamente da seguinte forma:

1. $0 \in \mathbb{P}$.
2. $x \in \mathbb{P} \Rightarrow$suc(suc(x))$\in \mathbb{P}$.

as sua regras de inferência são:

$$\frac{}{0 \in \mathbb{P}} \quad \text{e} \quad \frac{x \in \mathbb{P}}{suc(suc(x)) \in \mathbb{P}}$$

Exemplo

Seja SEQ o conjunto de todas as sequências finitas de elementos naturais definido indutivamente por

1. A sequência vazia $() \in SEQ$
2. Se $x \in \mathbb{N}_0$ e $s \in SEQ \Rightarrow (x, s) \in SEQ$.

as suas regras de inferência são:

$$\frac{}{() \in SEQ} \quad \text{e} \quad \frac{x \in \mathbb{N}_0 \qquad s \in SEQ}{(x, s) \in SEQ}$$

Uma proposição J diz-se derivável se, e só se, uma das seguintes situações ocorre:

- $\frac{}{J}$ *é um axioma.*
- $\frac{J_1 \dots J_n}{J}$ *é uma regra de inferência e $J_1 \dots J_n$ são asserções deriváveis.*

Podemos determinar se um elemento pertence a um dado conjunto indutivo aplicando as regras de inferência pela ordem contrária (trabalhando de baixo para cima).

Exemplo

$suc(suc(0)) \in \mathbb{N}_0$ é derivável de acordo com a definição de $\mathbb{N}_0$ anteriormente descrita:

$$\frac{\dfrac{\overline{0 \in \mathbb{N}_0}}{suc(0) \in \mathbb{N}_0}}{suc(suc(0)) \in \mathbb{N}_0}$$

Exemplo

Como justificar, usando as regras de inferência de $\mathbb{N}_0$, que $4 \in \mathbb{N}_0$?
Temos:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{0 \in \mathbb{N}_0}}{suc(0) \in \mathbb{N}_0}}{suc(suc(0)) \in \mathbb{N}_0}}{suc(suc(suc(0))) \in \mathbb{N}_0}}{suc(suc(suc(suc(0)))) \in \mathbb{N}_0}$$

Exemplo

Mostre, usando as regras de inferência, que a sequência $(3,4,2,4) \in SEQ$.
Temos:

$$\cfrac{3 \in \mathbb{N}_0 \qquad \cfrac{4 \in \mathbb{N}_0 \qquad \cfrac{2 \in \mathbb{N}_0 \qquad \cfrac{4 \in \mathbb{N}_0 \qquad \overline{() \in SEQ}}{(4) \in SEQ}}{(2,4) \in SEQ}}{(4,2,4) \in SEQ}}{(3,4,2,4) \in SEQ}$$

Palavras

Uma **palavra** *é uma sequência finita de zero ou mais elementos colocados uns a seguir aos outros por justaposição.*
Os elementos individuais com os quais podemos construir palavras constituem o **alfabeto** *habitualmente representado por* Σ.
Uma palavra sem elementos designa-se por **palavra vazia** *e denota-se por* ϵ.
O **comprimento** *de uma palavra é a quantidade de caracteres dessa palavra, e pode ser qualquer valor inteiro não negativo.*
A palavra vazia é a única palavra de comprimento 0.
O conjunto de todas as palavras, sobre Σ*, de comprimento* n *é denotado por* Σ^n.
Notemos que $\Sigma^0 = \{\epsilon\}$ *para qualquer alfabeto* Σ.

Exemplo

O conjunto das palavras binárias $\mathbb{W}$ é um conjunto de palavras definido sobre o alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$ (sequências finitas de 0's e 1's). O conjunto $\mathbb{W}$ é um conjunto indutivo definido pelas regras:

1. $\epsilon \in \mathbb{W}$;
2. Se $w \in \mathbb{W}$, então $conc_0(w) \in \mathbb{W}$ (onde $conc_0(w)$ corresponde a "aumentar" a palavra w justapondo à direita de w o elemento 0);
3. Se $w \in \mathbb{W}$, então $conc_1(w) \in \mathbb{W}$ (onde $conc_1(w)$ corresponde a "aumentar" a palavra w justapondo à direita de w o elemento 1).

Ao conjunto $\mathbb{W}$ correspondem as seguintes regras de inferência:

$$\frac{}{\epsilon \in \mathbb{W}} \qquad \frac{w \in \mathbb{W}}{conc_0(w) \in \mathbb{W}} \qquad \frac{w \in \mathbb{W}}{conc_1(w) \in \mathbb{W}}$$

Exemplo

Por exemplo, para as palavras binárias $\mathbb{W}$ temos $\{0,1\}^2 = \{00, 01, 10, 11\}$.

Árvores binárias

Seja K um conjunto finito ou infinito e indutivo. O conjunto $\mathbb{A}$ das árvores binárias sobre K é um conjunto de vértices e arcos (linhas que ligam dois vértices) definido indutivamente pelas regras:

- *A árvore vazia $()$ é uma árvore binária.*
- *Se A e B são duas árvores binárias e $k \in K$ então $nodo_k(A, B)$ é uma árvore binária.*

Onde $nodo_k(A, B)$ é a árvore que se obtém ligando um novo vértice com etiqueta k, por um único arco, a cada uma das árvores A e B.
Chama-se **árvore esquerda** *a A e* **árvore direita** *a B.*

Definição

- Cada elemento de uma árvore binária designa-se por **vértice**.
- Chama-se *grau* de um vértice de A ao número de arcos que tocam nesse vértice.

Definição

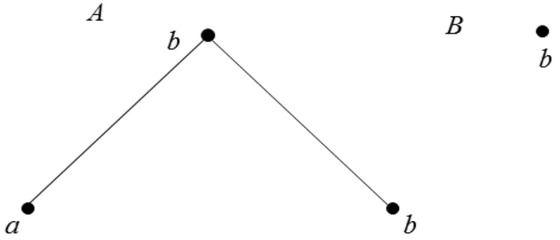
- Se uma árvore $C = nodo_k(A, B)$ dizemos que o novo vértice criado é **ascendente** dos únicos vértices de A e de B aos quais está ligado.
- Chamamos **raiz** ao único vértice de uma árvore sem ascendente.
- Aos vértices que não são ascendentes de nenhum vértice de uma árvore chamamos **folhas**.
- O **nível** de um vértice é o número de vértices, com excepção da raiz, que estão no segmento que une o vértice à raiz (a raiz tem nível zero).
- A **altura** de uma árvore é o máximo dos níveis dos seus vértices.

A representação gráfica de árvores adopta as seguintes convenções:

- *A raiz está no topo;*
- *Os vértices são representados por círculos;*
- *Os arcos são representados por linhas.*

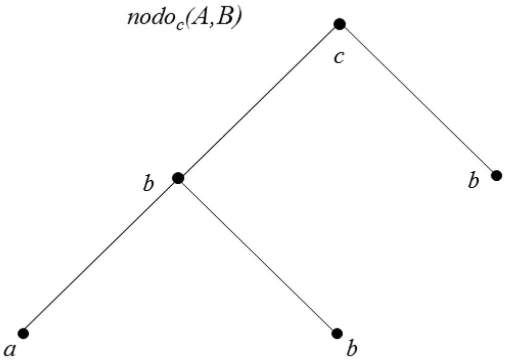
Exemplo

Seja $K = \{a, b, c\}$ Sejam A e B as seguintes árvores sobre K



O vértice b é a raiz da árvore A.
O vértice b é a raiz da árvore B mas também é folha.

A árvore que se obtém a partir das árvores anteriores fazendo $nodo_c(A, B)$ *é*



O vértice c *é a raiz da árvore* $C = nodo_c(A, B)$.
Os vértices a *e* b *são folhas de* C.
A altura da árvore C *é 2.*

O conjunto das árvores binárias de 0's e 1's $\mathbb{T}$ *é um conjunto de vértices e arcos (linhas que ligam dois vértices) definido indutivamente pelas regras:*

$0 \in \mathbb{T}$, *isto é,* 0 *é uma árvore constituída pelo único vértice* 0.

$1 \in \mathbb{T}$; *isto é,* 1 *é uma árvore constituída pelo único vértice* 1.

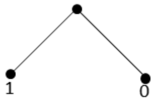
Se $t_1 \in \mathbb{T}$ *e* $t_2 \in \mathbb{T}$, *então* $nodo(t_1, t_2) \in \mathbb{T}$.
onde $nodo(t_1, t_2)$ *é a árvore que se obtém ligando um novo vértice, por um único arco, a cada uma das árvores* t_1 *e* t_2.

A este conjunto correspondem as regras de inferência:

$$\frac{}{0 \in \mathbb{T}} \qquad \frac{}{1 \in \mathbb{T}} \qquad \frac{t_1 \in \mathbb{T} \qquad t_2 \in \mathbb{T}}{nodo(t_1, t_2) \in \mathbb{T}}$$

Exemplo

A seguinte árvore é uma árvore binária de 0's e 1's

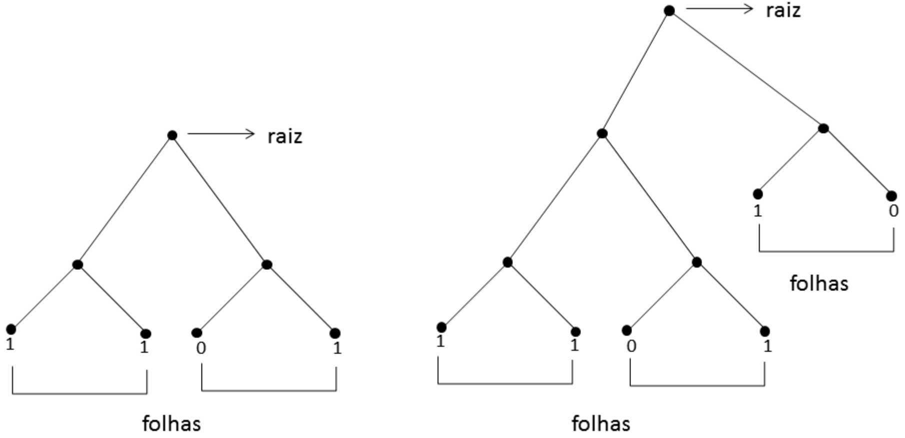


que corresponde a $nodo(1, 0)$ em $\mathbb{T}$.

A altura desta árvore é 1.
O nível das suas folhas é também 1.

Exemplo

São árvores binárias de 0's e 1's



que correspondem às árvores obtidas por $nodo(nodo(1,1), nodo(0,1))$,e por $nodo(nodo(nodo(1,1), nodo(0,1)), nodo(1,0))$, respectivamente.

Exercícios

1. Defina indutivamente o conjunto L de todas as palavras sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ da forma $\{\epsilon, 01, 0011, 000111, \ldots\}$, isto é, as palavras constituídas por um certo número de 0's consecutivos seguidos pelo mesmo número de 1's consecutivos.
2. Prove que $\mathit{nodo}(0, \mathit{nodo}(1, 0)) \in \mathbb{T}$ e represente a respectiva árvore binária.

Uma vez que uma função é um subconjunto de um produto cartesiano então, em certos casos, também uma função pode ser definida indutivamente.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ a função tal que $f(n) = 3n$, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$. Uma vez que

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 3 = f(0) + 3, \quad f(2) = 6 = f(1) + 3, \ldots,$$

podemos definir recursivamente esta função por

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n+1) = f(n) + 3 \end{cases}$$

Exemplo

Definamos indutivamente a função $h : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que determinará o número de 1's de uma palavra de $\mathbb{W}$.
Atendamos a que:

- A palavra vazia não tem um's, podemos afirmar que $h(\epsilon) = 0$;
- Dada uma palavra $w \in \mathbb{W}, conc_0(w)$ tem exactamente o mesmo número de um's que w
- Dada uma palavra $w \in \mathbb{W}, conc_1(w)$ tem mais um 1 que w.

Assim, a função h poderá ser definida recursivamente por:

n.º de 1's

$$\begin{cases} h(\epsilon) = 0 \\ h(conc_0(w)) = h(w) \\ h(conc_1(w)) = h(w) + 1 \end{cases} \qquad \forall w \in \mathbb{W}.$$

2.2 - Indução nos Naturais e Estrutural

Para provar que **uma propriedade** P **é válida num conjunto indutivo** *A, é suficiente provar que qualquer que seja a regra de inferência (associada à definição indutiva de A)*

$$\frac{J_1 \cdots J_n}{J}$$

se $J_1, \cdots, J_n$ satisfazem a propriedade P então J também satisfaz P.

Indução sobre $\mathbb{N}_0$

As regras de inferência para $\mathbb{N}_0$ *são*

$$\frac{}{0 \in \mathbb{N}_0} \qquad \frac{n \in \mathbb{N}_0}{suc(n) \in \mathbb{N}_0}$$

Assim, uma propriedade P é válida em $\mathbb{N}_0$ se:

- $P(0)$, *i.e.* P *é válida para* 0, *e*
- $\forall n\ (P(n) \Rightarrow P(suc(n)))$, *i.e., qualquer que seja* n, *se* P *é válida para* n *então é válida para* $suc(n)$.

Primeiro Princípio de Indução

A indução sobre $\mathbb{N}_0$ *é usualmente designada por indução matemática e pode ser formulada como se segue:*

$$[\ P(\mathbf{0})\ \wedge\ \forall n(P(\mathbf{n}) \Rightarrow P(\mathbf{suc}(\mathbf{n})))\ ] \Rightarrow \forall n\ P(n)$$

Sejam $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_m = \{l \in \mathbb{N}_0 : l \geq m\}$ *e* S *um subconjunto de* $\mathbb{N}_m$ *tal que:*

1. $m \in S$;
2. $k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$, *para qualquer* $k \in \mathbb{N}_m$.

Então $S = \mathbb{N}_m$.

Exemplo

Mostremos, usando o princípio de indução que $2n + 1 \leq 2^n$, para qualquer natural $n \geq 3$.
Observemos que:

$$\mathbb{N}_m = \mathbb{N}_3$$

$$S = \{n \in \mathbb{N}_3 : 2n + 1 \leq 2^n\}$$

Assim, teremos de provar que $S = \mathbb{N}_3$.

Como $2 \times 3 + 1 = 7 \leq 2^3 = 8$ temos que $3 \in S$.

HI:Suponhamos que dado $k \in \mathbb{N}_3$, $k \in S$.

Verifiquemos agora que também $k + 1 \in S$.

Ora,

$$2(k+1) + 1 = 2k + 2 + 1 = 2k + 1 + 2 \leq \qquad \text{(Por HI)}$$
$$2^k + 2 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$$

Então $k + 1 \in S$.
Usando o Princípio de Indução Matemática podemos concluir que $S = \mathbb{N}_3$, ou seja, $2n + 1 \leq 2^n$, para qualquer natural $n \geq 3$.

Segundo Princípio de Indução

Indução Completa ou Segundo Princípio de Indução:
A indução matemática pode ser generalizada da seguinte forma:

$$[\ P(\mathbf{0})\ \wedge\ \forall n(\ (\forall \mathbf{m} \leq \mathbf{n}\ P(\mathbf{m})) \Rightarrow P(\mathbf{suc}(\mathbf{n}))\ )\ ] \Rightarrow \forall n\ P(n)$$

Sejam $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_m = \{l \in \mathbb{N}_0 : l \geq m\}$ e S um subconjunto de $\mathbb{N}_m$ tal que:

1. $m \in S$;
2. $(\forall t \in \{m, \ldots, k\}, t \in S) \Rightarrow k+1 \in S$, *para qualquer* $k \in \mathbb{N}_m$.

Então $S = \mathbb{N}_m$.

Exemplo

Consideremos a sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 2 \\ a_n &= 4a_{n-1} - 4a_{n-2},\ n \geq 2. \end{cases}$$

Mostremos, usando o princípio de indução completa, que $a_n = 2^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.
Temos que:

1. $a_0 = 2^0$, pelo que, $0 \in S$;Para $k = 1$ temos $a_1 = 2 = 2^1$, ou seja, $1 \in S$.
2. Seja $k \in S$ e admitamos que para todo o t tal que $0 \leq t \leq k$ se tem $t \in S$, isto é, $a_t = 2^t$.
   Queremos provar que, para $k \geq 1$, $k + 1 \in S$.

Como $k \geq 1$ *temos* $a_k = 2^k$ *e* $a_{k-1} = 2^{k-1}$. *Donde*

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4a_k - 4a_{k-1} \\ &= 4.2^k - 4.2^{k-1} \\ &= 2^{k+2} - 2^{k+1} \\ &= 2^{k+1}(2-1) \\ &= 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Logo, $k+1 \in S$ *e pelo princípio de indução completa podemos concluir que* $S = \mathbb{N}_0$, *ou seja, que que* $a_n = 2^n$, *para qualquer* $n \in \mathbb{N}_0$.

Definição

Sejam S um conjunto indutivo e R um subconjunto de S.
Seja

$$\frac{J_1 \qquad J_2 \qquad \ldots \qquad J_n}{J}$$

uma regra de inferência que define S indutivamente e que não é um axioma.
Seja Q_i a proposição que se obtém da proposição J_i substituindo o conjunto S pelo conjunto R, para $i = 1, \ldots, n$ e seja Q a proposição que se obtém da proposição J substituindo o conjunto S pelo conjunto R.
Se a proposição

$$\frac{Q_1 \qquad Q_2 \qquad \ldots \qquad Q_n}{Q}$$

for verdadeira em R,dizemos que

$$\frac{J_1 \qquad J_2 \qquad \ldots \qquad J_n}{J}$$

é uma R-**regra.**

Princípio de Indução Estrutural

Sejam S um conjunto indutivo e R um subconjunto de S tal que:

1. *Os elementos básicos de S pertencem a R.*
2. *As regras de inferência que definem indutivamente S e que não são axiomas, são R-regras.*

Então $R = S$.

Indução sobre $\mathbb{T}$

Recordemos que as regras de inferência para $\mathbb{T}$ são

$$\frac{}{0 \in \mathbb{T}} \qquad \frac{}{1 \in \mathbb{T}} \qquad \frac{t_1 \in \mathbb{T} \qquad t_2 \in \mathbb{T}}{nodo(t_1, t_2) \in \mathbb{T}}$$

Assim, uma propriedade P é válida em $\mathbb{T}$ *se:*

- $P(0)$ *e*
- $P(1)$ *e*
- $\forall t_1, t_2 \; (\; (P(t_1) \wedge P(t_2)) \Rightarrow P(nodo(t_1, t_2)))$

Considere as seguintes equações:
$alt(0) = 0$
$alt(1) = 0$
$alt(\; nodo(t_1, t_2) \;) = 1 + \max\{alt(t_1), alt(t_2)\}$

As equações acima definem uma função, *i.e. para cada árvore t existe um, e um só, número natural n tal que* $alt(t) = n$.

Consideremos $R = \{t \in \mathbb{T} : \exists^1 n \in \mathbb{N}_0 : alt(t) = n\}$

Vamos demonstrar por indução estrutural que $(R = \mathbb{T})$.

- $0 \in R$ e $1 \in R$
  pois $alt(0) = 0$ *e* $alt(1) = 0$, *logo existe um único* $n \in \mathbb{N}_0$ *(o zero) tal que* $alt(0) = n$ *e* $alt(1) = n$.
  Logo $0 \in R$ *e* $1 \in R$.
- *Para* $\mathbb{T}$ *temos a seguinte regra de inferência:* $\frac{t_1 \in \mathbb{T} \qquad t_2 \in \mathbb{T}}{nodo(t_1, t_2) \in \mathbb{T}}$

  Dados $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$,
  se $\exists^1 n_1 \; alt(t_1) = n_1$ *e* $\exists^1 n_2 \; alt(t_2) = n_2$

  então $\exists^1 n \; alt(nodo(t_1, t_2)) = n$
  $[n = 1 + \max\{n_1, n_2\}]$

Então $nodo(t_1, t_2) \in R$ *e, pelo Princípio de Indução Estrutural,* $R = \mathbb{T}$.
Logo, podemos afirmar que a função alt está definida recursivamente pelas equações dadas.

Exemplo

Atenda-se à definição indutiva de $h : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que determina o número de 1's de uma palavra de $\mathbb{W}$.

$$\begin{cases} h(\epsilon) = 0 \\ h(conc_0(w)) = h(w) & \forall w \in \mathbb{W}. \\ h(conc_1(w)) = h(w) + 1 \end{cases}$$

Prove-se, por indução, que h é uma função.
Neste caso definimos $R = \{w \in \mathbb{W} : \exists^1 n \in \mathbb{N}_0, h(w) = n\}$.
Vejamos que $R = \mathbb{W}$ por indução estrutural.

Elementos básicos A palavra ϵ é o único elemento básico de $\mathbb{W}$. Uma vez que $h(\epsilon) = 0$, existe um único elemento de $\mathbb{N}_0$ (o zero) que é imagem de ϵ. Logo $\epsilon \in \mathbb{W}$.

Exemplo

Regras Em $\mathbb{W}$ temos duas regras

Vejamos que $\frac{w \in \mathbb{W}}{conc_1(w) \in \mathbb{W}}$ é uma R-regra.

HI Se $w \in R$ então existe um único elemento $p \in N_0$, tal que $h(w) = p$. Porque $h(conc_1(w)) = h(w) + 1$, então existe um único número natural r tal que
$h(conc_1(w)) = r \qquad (r = p + 1)$.

Tese Podemos então concluir que $conc_1(w) \in R$.

Vejamos que $\frac{w \in \mathbb{W}}{conc_0(w) \in \mathbb{W}}$ é uma R-regra.

HI Se $w \in R$ então existe um único elemento $p \in N_0$, tal que $h(w) = p$. Porque $h(conc_0(w)) = h(w)$, então existe um único número natural r tal que
$h(conc_0(w)) = r \qquad (r = p)$.

Tese Podemos então concluir que $conc_0(w) \in R$.

Assim, pelo Princípio de Indução estrutural, $R = \mathbb{W}$. Portanto h é uma função.

Exercício

(a) Escreva equações que, para cada $t \in \mathbb{T}$, definam recursivamente $nmv(t)$ como o número máximo de vértices de t.

(b) Mostre, por indução em $\mathbb{T}$, que nmv assim definida é uma função.