Matemática Discreta

2020/2021
Relações binárias

Professores: *João Araújo* *Júlia Vaz Carvalho* *Manuel Silva*
Departamento de Matemática
FCT/UNL

Programa

1. Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções
   1. Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
   2. Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
   3. Funções: bijecções; inversão e composição.
2. Parte 2 - Indução
   1. Definições indutivas
   2. Indução nos naturais e estrutural
   3. Primeiro e segundo princípios de indução
   4. Funções recursivas e provas por indução
3. Parte 3 - Grafos e Aplicações
   1. Generalidades
   2. Conexidade
   3. Árvores
   4. Grafos Eulerianos
   5. Matrizes e grafos

1.2 Relações Binárias

Definição

Seja X um conjunto. Chamamos relação binária sobre X a todo o subconjunto de $X \times X$.
Mais geralmente, uma relação n-ária ($n \in \mathbb{N}$) sobre X é um subconjunto de X^n. $R \subseteq X^2$

Exemplos $R \subseteq X^1 \to$ unary

1. Seja $X = \{1, 2, 3\}$. O conjunto $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ é uma relação binária sobre X.
2. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4\}$. O conjunto $R = \{(x, y) \in X^2 \mid x + y \leq 5\}$ é uma relação binária sobre X.

Notação

Sejam X um conjunto e R uma relação binária sobre X. Dado um par $(x, y) \in X \times X$, escrevemos também xRy para designar que $(x, y) \in R$.

Definição

Sejam X e Y dois conjuntos. Uma relação de X em Y é um subconjunto de $X \times Y$. (No caso particular em que $X = Y$ temos uma relação binária sobre X.)

Seja R uma relação de X em Y. Chamamos domínio de R ao conjunto

$\{x | (x,y) \in R\}$

$$\mathrm{dom} R = \{x \in X \mid (\exists y \in Y)\ (x, y) \in R\},$$

e imagem de R ao conjunto

$\{y | (x,y) \in R\}$

$$\mathrm{im} R = \{y \in Y \mid (\exists x \in X)\ (x, y) \in R\}.$$

A relação inversa de R é a relação R^{-1} de Y em X definida por

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

A relação composta da relação R de X em Y com a relação S de Y em Z é a relação $R \circ S$ de X em Z definida por

$$R \circ S = \{(x, y) \mid (\exists a \in Y)\ \ (x, a) \in R \text{ e } (a, y) \in S\}.$$

Exemplo

Sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, *considere as relações*
$R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5)\}$
e $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 5), (1, 6)\}$.
A imagem de R *é o conjunto* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
O domínio de S *é o conjunto* $\{1, 2\}$.
A relação inversa de S, S^{-1}, *será dada pela troca dos elementos nos pares ordenados que definem* S.
Assim temos $S^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (5, 2), (6, 1)\}$.
Para encontrar a composta $R \circ S$ *pode-se pensar assim:*

1. 1 é aplicado por R em 1, e 1 é aplicado por S em 1, 2 e 6; logo na composta temos $(1, 1)$ e $(1, 2)$. De forma sintética $1R1S1$ e $1R1S2$ pelo que na composta temos $(1, 1), (1, 2), (1, 6)$.
2. $2R2S5$ e $2R3S$; logo na composta temos apenas $(2, 5)$.
3. $3RS$ e $4RS$ pelo que na composta não aparece nenhum par ordenado cuja primeira coordenada seja 3 ou 4.
4. $5R4S$, $5R5S$,$6R4S$ e $6R5S$ pelo que não há mais pares na composta.

Representação de uma relação binária

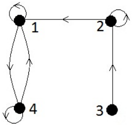
Seja R uma relação binária sobre um conjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

1. Através de uma matriz de adjacências:
   a matriz de adjacências de R é a matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\{0,1\})$ definida por:
   $$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (x_i, x_j) \in R \\ 0 & \text{se} \quad (x_i, x_j) \notin R \end{cases}$$

2. Através de um diagrama:
   os elementos de X são representados por pontos e dois pontos do diagrama que representam x_i e x_j estão unidos por uma seta, com orientação de x_i para x_j, se $(x_i, x_j) \in R$.

Exemplo

Sejam $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 1), (4, 4)\}$. A matriz das adjacências de R (considerando $x_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4$) é a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ e 

é um diagrama que representa R.

Se R é relação binária em $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dada pela matriz das adjacências de R (considerando $x_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então a relação R é $\{(1, 1), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$.

Definição

Dizemos que uma relação binária R sobre X é:

- reflexiva se $(\forall x \in X)\ xRx$;
- irreflexiva se $(\forall x \in X)\ (x, x) \notin R$;
- simétrica se $(\forall x, y \in X)\ xRy \Rightarrow yRx$;
- anti-simétrica se $(\forall x, y \in X)\ xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$;
- transitiva se $(\forall x, y, z \in X)\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Definição

Uma relação binária reflexiva, simétrica e transitiva diz-se uma relação de equivalência.

Exemplos

- Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$. A relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (4, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$ não é uma relação de equivalência pois não é transitiva: $4R1R2$, mas não temos $4R2$.

- A relação R definida em $\mathbb{R}$ por, para quaisquer $x, y \in R$,

$$xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2,$$

é uma relação de equivalência.

- Em $\mathbb{Z}$ a relação $\sim$ definida por, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$,

?

$$m \sim n \Leftrightarrow |m| = |n|,$$

é uma relação de equivalência.

- Sejam X um conjunto e $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Então Δ é uma relação de equivalência sobre X (denominada relação identidade sobre X).
- Sejam X um conjunto e $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in X\}$. Então Ω é uma relação de equivalência sobre X (denominada relação universal sobre X).
- Para cada $x \in \mathbb{R}$, denotemos por $\lfloor x \rfloor$ o maior número inteiro y tal que $y \leq x$ (parte inteira de x). A relação $\sim$ definida em $\mathbb{R}$ por, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \sim y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor,$$

arredondas para baixo

é uma relação de equivalência.

A proposição seguinte permite classificar as relações binárias, em particular, permite verificar se uma dada relação binária é ou não uma relação de equivalência.

Proposição

Sejam X um conjunto, R uma relação binária sobre X e $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. Então:

1. *R é reflexiva se, e só se, $\Delta \subseteq R$.*
2. *R é irreflexiva se, e só se, $\Delta \cap R = \emptyset$.*
3. *R é simétrica se, e só se, $R = R^{-1}$.*
4. *R é anti-simétrica se, e só se, $(R \cap R^{-1}) \backslash \Delta = \emptyset$.*
5. *R é transitiva se, e só se, $(R \backslash \Delta) \circ (R \backslash \Delta) \subseteq R$.*

Definição

Dados uma relação de equivalência R num conjunto X e um elemento $a \in X$, chamamos classe de equivalência de a (módulo R), que representamos usualmente por $[a]_R$ (ou, se não houver ambiguidade, simplesmente por $[a]$ ou, em certos casos, por $\overline{a}$), ao conjunto dos elementos x de X tais que $(x, a) \in R$, isto é a

$$[a]_R = \{x \in X \mid xRa\}.$$

Ao conjunto cujos elementos são as classes de equivalência $[a]_R$, com $a \in X$, chamamos conjunto cociente de X por R e representamo-lo por X/R.

Exemplo

Seja $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A relação $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1), (1,5), (5,1), (2,5), (5,2)\}$ é uma equivalência sobre X e temos $[1] = \{1, 2, 5\} = [2] = [5], [3] = \{3\}, [4] = \{4\}$, donde $X/R = \{\{1, 2, 5\}, \{3\}, \{4\}\}$.

Exemplo

Fixado $n \in \mathbb{N}$, em $\mathbb{Z}$ definimos uma relação de equivalência $\equiv_n$ da seguinte forma: para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$x \equiv_n y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\; x - y = kn.$$

Designamos esta relação em $\mathbb{Z}$ por relação de congruência módulo n.

Para indicar que $x \equiv_n y$, usualmente escrevemos $x \equiv y (\mathrm{mod}\ n)$.

Sabemos também que:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{0} & = & \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\} = n\mathbb{Z}, \\
\overline{1} & = & \{\dots, 1-2n, 1-n, 1, 1+n, 1+2n, \dots\} = 1 + n\mathbb{Z}, \\
 & \vdots & \\
\overline{k} & = & \{\dots, k-2n, k-n, k, k+n, k+2n, \dots\} = k + n\mathbb{Z}, \\
 & \vdots & \\
\overline{n-1} & = & \{\dots, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, \dots\} = (n-1) + n\mathbb{Z},
\end{array}$$

donde $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/R = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$.

Proposição

reflexiva, simétrica e transitiva

Sejam X um conjunto e R uma relação de equivalência sobre X. Para quaisquer $a,\ b \in X$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. bRa;
2. $b \in [a]_R$;
3. $[b]_R = [a]_R$.

Teorema

Sejam X um conjunto e R uma relação de equivalência sobre X. Temos:

1. *Para qualquer $x \in X$, $[x]_R \neq \emptyset$ (pela reflexividade)*
2. *Para quaisquer $x,\ y \in X$, $[x]_R = [y]_R$ ou $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ (pela transitivdiade)*
3. $X = \bigcup\limits_{x \in X} [x]_R$ *(pela reflexividade);*
4. *A relação R fica determinada pelas suas classes de equivalência.*

Definição

Seja X um conjunto. Dizemos que um conjunto não vazio $\{X_i \mid \ i \in I\}$ de subconjuntos não vazios de X é uma partição de X se:

1. $X = \bigcup_{i\in I} X_i$
2. $i \neq j \Longrightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$, para quaisquer $i,\ j \in I$.

Exemplos

- Seja X um conjunto. Se $A \in \mathcal{P}(X)$ é tal que $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$, então $\{A,\ \overline{A}\}$ é uma partição de X.
- Seja $X = \{1,2,3,4\}$. Então, por exemplo,

$$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}, \quad \{\{1,2\},\{3,4\}\}, \quad \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\} \quad \text{e} \quad \{\{1,2,3,4\}\}$$

são partições de X.Pelo contrário, por exemplo,

$\{\{1,2\},\{3\}\}$ (por faltar o 4) e $\{\{1,2\},\{1,3,4\}\}$ (intersecção não vazia)

não são partições de X.

Teorema

Seja X não vazio.

1. *Se R é uma relação de equivalência sobre X, então o conjunto cociente X/R é uma partição de X.*
2. *Se $\mathcal{P} = \{X_i \mid i \in I\}$ é uma partição de X e R é a relação binária sobre X definida por*

$$xRy \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists i \in I)\; x, y \in X_i,$$

   para quaisquer $x, y \in X$, então:
   - *R é relação de equivalência sobre X;*
   - *$\mathcal{P} = X/R$.*

Exemplo

Seja $X = \{1,2,3,4,5\}$ e consideremos a partição $\mathcal{P} = \{\{1,2\},\{3,5\},\{4\}\}$ de X. Então, $\mathcal{P}$ determina a seguinte relação de equivalência sobre X:

$$R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3),(5,5),(3,5),(5,3),(4,4)\}.$$

Definição

Uma relação binária reflexiva, anti-simétrica e transitiva diz-se uma relação de ordem parcial (abreviadamente: r.o.p.).

As r.o.p. são usualmente denotadas pelos símbolos por $\leq$ ou por $\subseteq$.

Definições

Seja $\leq$ uma relação de ordem parcial sobre um conjunto X. Dizemos que:

- Os elementos x e y de X são comparáveis se $x \leq y$ ou $y \leq x$;
- $\leq$ é uma relação de ordem total se quaisquer dois elementos de X são comparáveis.

Sejam $\leq$ uma r.o.p. sobre X e $x, y \in X$. Escrevemos $x < y$ para significar que $x \leq y$ e $x \neq y$.

Definição

Sejam X um conjunto e $\leq$ uma r.o.p. sobre X. Dizemos que o par $(X, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado (abreviadamente: c.p.o.). Se $\leq$ for uma ordem total, dizemos que $(X, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado ou uma cadeia (abreviadamente: c.t.o.). ?

Exemplos

- Seja $\leq$ a relação de ordem usual em $\mathbb{R}$. Então $(\mathbb{R}, \leq)$ é uma cadeia. Também $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ e $(\mathbb{Q}, \leq)$ são cadeias (para a ordem usual).
- Seja X um conjunto. A relação de inclusão $\subseteq$ definida sobre $\mathcal{P}(X)$ é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{P}(X)$, pelo que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é um c.p.o..
- Em $\mathbb{N}$ definimos a seguinte relação binária (relação de divisibilidade) $|$:

  ?

  $$a|b \ (a \text{ divide } b) \iff (\exists c \in \mathbb{N})\ ac = b,$$

  para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Então, $(\mathbb{N}, |)$ é um c.p.o..

Definição

Seja $(X, \leq)$ um c.p.o.. Dados $x, y \in X$, dizemos que y **cobre** x (relativamente a $\leq$) se $x < y$ e não existe $z \in X$ tal que $x < z < y$, i.e., equivalentemente, se $x \leq y$ e, para qualquer $z \in X$,

$$x \leq z \leq y \ \Rightarrow\ z = x \vee z = y.$$

Escrevemos $x << y$ para denotar que y cobre x.

Proposição

Seja $(X, \leq)$ *um c.p.o. e* $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. *Sejam* $x, y \in X$ *tais que* $x < y$. *Então,* y *cobre* x *se, e só se,* $(x,y) \notin (\leq \backslash \Delta) \circ (\leq \backslash \Delta)$.

Exemplo

O c.p.o. $(\{1,2,3,4\}, \mid)$, em que $\mid$ é a relação de divisibilidade ($x|y$ se, e só se, x divide y), é o conjunto seguinte:

$$\mid = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}.$$

Temos

$$|\backslash\Delta = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,4)\}$$

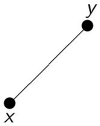
e

$$(\mid \backslash \Delta) \circ (\mid \backslash \Delta) = \{(1,4)\}.$$

Logo, pela proposição, 4 não cobre 1 mas 2 cobre 1, 3 cobre 1 e 4 cobre 2.

Diagrama de Hasse

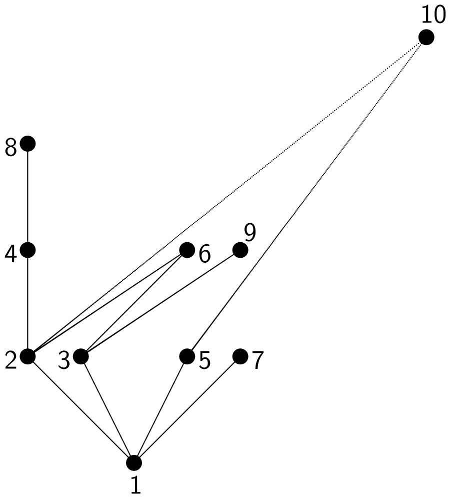
Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\leq$ uma r.o.p. em X. A relação $\leq$ pode ser representada através de um diagrama (denominado diagrama de Hasse) construído do seguinte modo: os elementos de X são os pontos do diagrama e, para quaisquer $x, y \in X$, $x \neq y$, se y **cobre** x, colocamos o ponto que representa y "acima" do ponto que representa x e unimo-los com um segmento de recta:



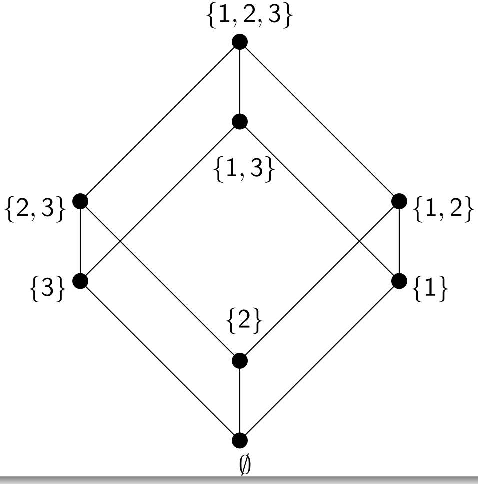
Exemplos

- Consideremos o c.p.o. $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$, em que $\leq$ é a ordem usual.
  Esta cadeia tem o seguinte diagrama de Hasse:

- O c.p.o. $(\{1, 2, \ldots, 10\}, \mid)$, em que $\mid$ é relação de divisibilidade, tem o seguinte diagrama de Hasse:



- O c.p.o. $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$ possui o seguinte diagrama de Hasse:



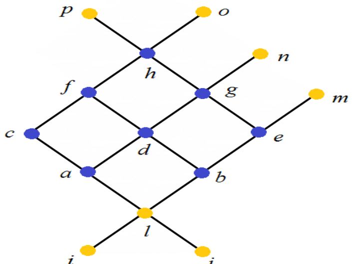
Definição

Sejam $(X, \leq)$ um c.p.o. e $Y \subseteq X$.

- Dizemos que $a \in X$ é um minorante [resp. majorante] de Y se
$$a \leq y \text{ [resp. } y \leq a], \text{ para qualquer } y \in Y.$$
- Chamamos primeiro elemento de Y (ou mínimo de Y) a um elemento $a \in Y$ tal que
$$a \leq y, \text{ para qualquer } y \in Y.$$
- Chamamos último elemento de Y (ou máximo de Y) a um elemento $b \in Y$ tal que
$$y \leq b, \text{ para qualquer } y \in Y.$$
- Dizemos que $a \in Y$ é um elemento minimal [resp. maximal] de Y se não existe $b \in Y$ tal que $b < a$ (resp. $a < b$).
- Dizemos que $a \in X$ é o ínfimo [resp. supremo] de Y se a é o maior (i.e. o máximo) dos minorantes [resp. o menor (i.e. o mínimo) dos majorantes].

Exemplo

Considere o conjunto $X = \{a, b, \ldots, o, p\}$ e a relação de ordem parcial $\leq$ sobre X definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique, se existirem, os elementos mínimo, máximo, minimais, maximais, minorantes, majorantes, ínfimo e supremo do subconjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ (pontos azuis) do conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$.