Matemática Discreta

2017/18
Grafos Eulerianos

Professores João Araújo, Júlia Vaz Carvalho, Manuel Silva
Departamento de Matemática
FCT/UNL

Baseados em textos e slides elaborados por professores do Departamento de Matemática

Programa

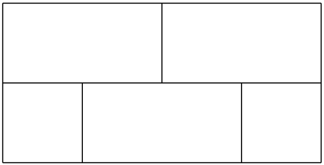
1. Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções
    1. Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
    2. Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
    3. Funções: bijecções; inversão e composição.
2. Parte 2 - Indução
    1. Definições indutivas
    2. Indução nos naturais e estrutural
    3. Primeiro e segundo princípios de indução
    4. Funções recursivas e provas por indução
3. Parte 3 - Grafos e Aplicações
    1. Generalidades
    2. Conexidade
    3. Árvores
    4. Grafos Eulerianos
    5. Matrizes e grafos

3.4. Grafos Eulerianos

3.4.1. Grafos Eulerianos. Algoritmo de Fleury

Como já o referimos, é neste capítulo que iremos tratar de resolver o problema das pontes de Königsberg.

Uma charada muito conhecida, deste tipo de problemas, é a seguinte: A figura



pode ser desenhada através de traços contínuos sem nunca passar por cima de um traço já feito?

Definição

Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo. Chamamos cadeia euleriana a uma cadeia simples contendo todos os arcos de G e ciclo euleriano a um ciclo contendo todos os arcos de G.

Se G é um multigrafo orientado, substituindo na definição "cadeia" por "caminho" obtêm-se as correspondentes definições de caminho euleriano e de circuito euleriano.

Definição

Um multigrafo diz-se euleriano se admite um ciclo euleriano e semi-euleriano se admite uma cadeia euleriana aberta.

Teorema

(i) *Um multigrafo conexo G, com $n \geq 2$ vértices, tem um ciclo euleriano se, e só se, todo o vértice de G tem grau par.*

(ii) *Um multigrafo conexo G, com $n \geq 2$ vértices, tem uma cadeia $x - y$ euleriana, com $x \neq y$ se, e só se, x e y são os únicos vértices de G com grau ímpar.*

Dem

Suponhamos que $G = (X, \mathcal{U})$ é um multigrafo conexo, com $n \geq 2$ vértices, que tem um ciclo euleriano. Seja

$$C : \qquad x_1,\ u_1,\ x_2,\ u_2, \ldots,\ x_k,\ u_m,\ x_1$$

um ciclo euleriano de G, sendo m o número de elementos da família $\mathcal{U}$. Como G é conexo e C inclui todos os arcos de G, podemos afirmar que todo o vértice de G está em C. Seja x um vértice de G e seja r o número de vezes que x ocorre na sequência $x_1,\ u_1,\ x_2,\ u_2, \ldots,\ x_k,\ u_m$.

Como todos os arcos de C são distintos, podemos afirmar que

$$d(x) \geq 2r,$$

mas, C inclui todos os arcos de G, logo, $d(x) = 2r$. Concluímos então que todo o vértice de G tem grau par.

Reciprocamente, suponhamos que $G = (X, \mathcal{U})$ é um multigrafo conexo, com $n \geq 2$ vértices, em que todo o vértice tem grau par e demonstremos por indução sobre o número m de arcos, que G tem um ciclo euleriano.
Sem perda de generalidade, consideraremos que G não tem laços. Se todo o vértice tem grau par, G é conexo e $n \geq 2$ então $m \geq 2$.
Se $m = 2$ então G é isomorfo a

3.4. Grafos Eulerianos

Suponhamos que o resultado é verdadeiro para todo o multigrafo conexo, sem laços, com $n \geq 2$ vértices, com número de arcos inferior a k, em que todo o vértice tem grau par e demonstremos que é, ainda, verdadeiro para todo o multigrafo conexo, sem laços, com $n \geq 2$ vértices, com exactamente k arcos e tendo todo o vértice grau par. Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um multigrafo verificando estas condições.

Como G é conexo, com $n \geq 2$ vértices, G não tem vértices de grau zero. Se G não tivesse um ciclo, G era uma árvore, o que implicava que existiriam dois vértices de grau 1, contrariando a hipótese de todo o vértice ter grau par.

3.4. Grafos Eulerianos

Seja C um ciclo de G com comprimento máximo. (Ciclo significa *cadeia simples [sem arcos repetidos] que começa e termina no mesmo vértice*). Das duas uma: ou C já contém todas os arcos do grafo G e está provado que G admite um ciclo euleriano; ou C não contém todos os arcos de G (e vamos provar que isto leva a uma contradição).
Suponhamos que C (que tem comprimento máximo) não inclui todos os arcos de G e seja $G' = (X,\ \mathcal{U}')$ o grafo parcial de G que se obtém eliminando em G os arcos de C. Todos os vértices de C têm grau par (como é um ciclo não tem arcos repetidos pelo que todos os vértices têm um arco para ser visitado e um arco diferente para ser abandonado; é o argumento que usámos várias vezes). Isto significa que em G', $d_{G'}(x)$ é par, para todo o $x \in X$, porque se x é vértice de C ao tirar os arcos de C retirei um número par de arestas a incidir com x; como o grau de x era par, ficou um par menos outro par que é par. Ou seja,

$$d_{G'}(x) = d_G(x) - 2k_x, \qquad \text{com } k_x \in \mathbb{N}$$

e onde $2k_x$ representa o número de arcos de C que incide com x.
Se x não é vértice de C, então $d_{G'}(x) = d_G(x)$, sendo este último par. Nos dois casos (vértice a incidir com C e vértice a não incidir com C) verificamos que $d_{G'}(x)$ é par.
Como G é conexo e G' tem pelo menos um arco (pois havia um arco em G que não estava em C e G' tem todos os arcos de G que não estão em C), existe um arco $u = \{x,\ y\}$ de G', com x vértice de C. Então C tem a forma

$$C: \qquad x,\ u_1,\ z_1, \ldots,\ z_{h-1},\ u_h,\ x$$

Seja H a componente conexa de G' de que u faz parte. H é um multigrafo conexo, sem laços, com número de vértices superior ou igual a 2 em que todo o vértice tem grau par e com número de arcos inferior a k (pois k é o número de arcos de G e H tem no máximo k arcos menos os arcos de C).
Atendendo à hipótese de indução, H tem um ciclo euleriano que contem o vértice x

$$C': \qquad x,\ u'_1,\ y_1, \ldots,\ y_{r-1},\ u'_r,\ x,$$

com todos os arcos de C' contidos em G'. Portanto, todos os arcos de C são diferentes, todos os arcos de C' são diferentes, e todos os arcos de C são diferentes de qualquer arco de C'. Então

$$x,\ u_1,\ z_1, \ldots,\ z_{h-1},\ u_h,\ x,\ u'_1,\ y_1, \ldots,\ y_{r-1},\ u'_r,\ x$$

é um ciclo em G, mas de comprimento superior a C, o que contradiz o facto de C ser máximo.

Demonstração alternativa Seja G um grafo conexo em que todos os vértices têm grau par. Como G é conexo e tem pelo menos dois vértices o conjunto das cadeias simples [ie, uma cadeia que não tem arestas repetidas] é não vazio. Seja T uma cadeia simples de comprimento máximo.
A primeira observação é que qualquer cadeia simples (num grafo em que todos os vértices têm grau par) de comprimento máximo tem de ser fechada. De facto, se T é da forma

$$T : \qquad z_0,\ u_1,\ z_1, \ldots,\ z_{h-1},\ u_h,\ x_1,$$

com $x_1 \neq z_0$, então isto significa que T tem um número ímpar de arestas a incidir com x_1 (pelo argumento usado várias vezes). Como o grau de x_1 é par, então há um arco $\{x_1, a\}$ a incidir com x_1 que não ocorre em T (Porquê? Se qualquer arco que incide com x_1 ocorre em T, então o grau de x_1 no grafo é igual ao grau de x_1 em T, e este já vimos ser ímpar, o que contradiz o facto de todos os vértices terem grau par). Juntando a T esse arco $\{x_1, a\}$ que não ocorre em T ficamos com uma cadeia simples maior que T o que é absurdo. Está provado que T é da forma

$$T : \qquad z_0,\ u_1,\ z_1, \ldots,\ z_{h-1},\ u_h,\ z_0$$

Queremos provar que se T é uma cadeia simples de comprimento maximal, então tem todas os arcos de G. Vamos supor por absurdo que T não tem todas as arcos de G. Como G é conexo existe um arco v que tem um extremo em T, digamos em z_i, e o outro fora de T, digamos em z. Aliás podemos supor que $z_i = z_0$ pois a cadeia simples fechada T pode começar em qualquer um dos seus vértices. Logo

$$z, v, z_0,\ u_1,\ z_1, \ldots,\ z_{h-1},\ u_h,\ z_0$$

é uma cadeia simples mais comprida que T, o que é absurdo.

Dem(ii)
Seja $G = (X,\ \mathcal{U})$ um multigrafo conexo, com $n \geq 2$ vértices. Seja $z \notin X$. Atenda-se a que G tem uma cadeia $x - y$ euleriana, com $x \neq y$, se, e só se, o grafo $\hat{G} = (X \cup \{z\},\ \mathcal{U} \cup \{x,\ z\} \cup \{y,\ z\})$, com $z \notin X$ tem um ciclo euleriano. Por (i) tal sucede se, e só se, $d_{\hat{G}}(x_i)$ é par, para todo o $x_i \in X \cup \{z\}$. Como

$$d_{\hat{G}}(x) = d_G(x) + 1,$$

$$d_{\hat{G}}(y) = d_G(y) + 1,$$

$$d_{\hat{G}}(x_i) = d_G(x_i),$$

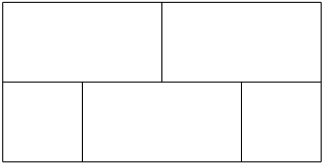
para todo o $x_i \in X \setminus \{x,\ y\}$, concluímos que G tem uma cadeia $x - y$ euleriana, com $x \neq y$, se, e só se, x e y são os únicos vértices de G com grau ímpar.

Observação:

1. Não existem multigrafos simultaneamente eulerianos e semi-eulerianos.

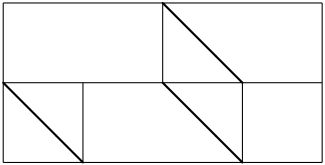
2. Se um multigrafo não conexo admite uma cadeia euleriana aberta ou um ciclo euleriano então, no máximo, uma componente conexa do multigrafo é um multigrafo não nulo e todas as outras componentes conexas são grafos nulos.

Regressando à pergunta que foi feita no início deste capítulo: Será possível desenhar a seguinte figura sem passar por cima de segmentos já traçados?



3.4. Grafos Eulerianos

Construamos o seguinte grafo: os vértices correspondem ao ponto de encontro de dois segmentos de recta da figura e dois vértices são adjacentes, se os dois pontos a que correspondem estes dois vértices, na figura, estão unidos por um segmento de recta. Este grafo tem doze vértices, sendo oito deles de grau ímpar. Colocando mais três segmentos de recta na figura inicial, obtemos uma figura que representa um grafo com apenas dois vértices com grau ímpar. Logo tem uma cadeia semi-euleriana.



Teorema

(i) *Um multigrafo orientado conexo* $G = (X,\ \mathcal{U})$, *com* $n \geq 2$ *vértices, tem um circuito euleriano se, e só se,*

$$d^+(x) = d^-(x),$$

para todo o $x \in X$.

(ii) *Um multigrafo orientado conexo* $G = (X,\ \mathcal{U})$, *com* $n \geq 2$ *vértices, tem um caminho* $x - y$ *euleriano, com* $x \neq y$ *se, e só se,*

$$d^+(x) = d^-(x) + 1,$$

$$d^+(y) = d^-(y) - 1,$$

$$d^+(x_i) = d^-(x_i),$$

para todo o $x_i \in X \setminus \{x,\ y\}$.

O seguinte algoritmo permite encontrar um ciclo Euleriano num grafo Euleriano.

Algoritmo de Fleury

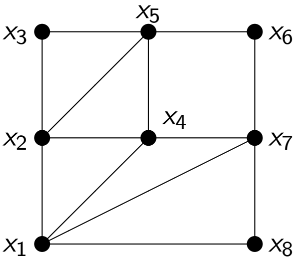
Seja $G = (X,\ \mathcal{U})$ um multigrafo euleriano.

1º Escolha um vértice x_1 de G.

2º Sendo $L: \quad x_1,\ u_1,\ x_2, \ldots,\ u_p,\ x_k$ a cadeia simples, obtida pelo processo, seja $u_{k+1} = \{x_k, x_{k+1}\} \in \mathcal{U} \setminus \{u_1, \ldots, u_k\}$ um arco incidente em x_k que não pertence a L e que, caso seja possível, não seja ponte de $G' = (X,\ \mathcal{U} \setminus \{u_1, \ldots,\ u_k\})$.

3º Se $d_{G'}(x_{k+1}) = 1$, o algoritmo termina, caso contrário repita-se 2º.

Exemplo: Consideremos o grafo



que é euleriano pois é conexo e todos os seus vértices têm grau par. Utilizemos o algoritmo de Fleury para determinar um ciclo euleriano.