FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Segundo Teste Modelo

1. Prove que 9 divide $4^n + 15n - 1$, para todo o $n \geq 1$.

2. Seja $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$. Mostre que F_{4n} é divisível por 3.

3. Seja T uma árvore binária com n vértices e altitude h. Prove que $n \leq 2^{h+1} - 1$.

4. Seja S o conjunto de pares de inteiros definido indutivamente pelas seguintes regras:

$$\frac{}{(1,3) \in S} \qquad \frac{(x,y) \in S}{(x-2,y) \in S} \qquad \frac{(x,y) \in S}{(x,-y) \in S} \qquad \frac{(x,y) \in S}{(y,x) \in S}$$

   (a) Mostre que se $(x,y) \in S$, então x e y são ímpares.
   (b) Mostre que todo o par de inteiros ímpares pertence a S.

5. Imagine que tem um tabuleiro de xadrez com 3×3 casas; suponha que há quatro cavalos nos quatro cantos do tabuleiro; os cavalos brancos estão na fila do topo, e os cavalos pretos estão na fila de baixo. Será possível, usando movimentos válidos para o cavalo, coloca-los nos cantos mas de forma a que em nenhuma linha e em nenhuma coluna haja cavalos de cores iguais?

6. Imagine que numa festa cada pessoa aperta a mão a algumas outras pessoas. Prove que há pelo menos duas pessoas a apertar a mão ao mesmo número de pessoas.

7. Existem árvores binárias eulerianas? E semi-eulerianas?

8. Diga se é possível completar esta sequência de forma a que não seja gráfica: $(4, k, 2, 1, 1, 1, 1)$.

9. Demonstre algum dos seguintes teoremas:

   (a) Num grafo simples o número de vértices de grau ímpar é par
   (b) Prove que toda a árvore com pelo menos dois vértices tem pelo menos dois vértices de grau ímpar.