FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Lista de Exercícios

Parte 1. Conjuntos e Relações e Funções

1.1 Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
1.2 Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
1.3 Funções: bijecções; inversão e composição.

Adaptação de versões anteriores de docentes do DM

Versão de 5 de Março de 2018

1.1 Conjuntos, relações binárias e aplicações

1. Apenas uma das operações "$\cap$", "$\cup$", "$\setminus$", não é comutativa. Diga qual e ilustre a não comutatividade com um exemplo.

2. Dado um conjunto S, sejam A, B e C subconjuntos de S. Mostre que:

   (a) $A \cup A = A$;

   (b) $A \cap A = A$;

   (c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

   (d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3. Mostre que dados A e B subconjuntos de um conjunto S se tem

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{e} \quad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

4. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ e $C = \{2, 3, 4\}$. Indique os elementos de:

   (a) $A \times B$;

   (b) $B \times A$;

   (c) $(A \cap B) \times C$;

5. Sejam $X = \{\{\emptyset\}\}$ e $Y = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Determine os elementos de $X \times Y$.

6. Seja $X = \{\emptyset\}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) $X = \emptyset$;

   (b) $\emptyset$ é simultaneamente elemento e subconjunto de X;

   (c) $\mathcal{P}(\emptyset) = X$.

7. Indique todos os subconjuntos de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

8. Seja $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é um quadrado perfeito menor que } 10\}$.

   (a) Justifique que se $X = \{4, 9\}$ e $Y = \{-1, 1\}$ então $X \in \mathcal{P}(A)$ e $Y \notin \mathcal{P}(A)$;

   (b) Defina $\mathcal{P}(A)$ em extensão;

   (c) Justifique que se $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$ então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

9. Sejam A e B dois conjuntos. Mostre que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

10. Sejam A e B dois conjuntos. Prove que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Mostre, com um exemplo, que a igualdade $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ não é verdadeira (em geral).

11. Encontre conjuntos tais que $A \setminus B = A \oplus B$.

    Hint: A qualquer; $B = \emptyset$.

12. Prove que $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ tem 2^n elementos.

    Hint: Um subconjunto $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ pode ser representado por uma palavra de zeros e uns: $b_1 b_2 \dots b_n$, onde $b_i = 1$ se e só se $i \in B$. Portanto, o vazio é representado por $0000 \dots 0$ e B é representado por $1111 \dots 1$. Assim o problema original é equivalente a perguntar quantas palavras de zeros e uns de comprimento n existem.

13. Para atravessar um rio há dois barcos. Diga de quantas formas diferentes n pessoas se podem distribuir por esses dois barcos (a posição dentro de cada barco não conta).

    Hint: Igual ao anterior. Se um barco tem o número 1 e o outro tem o número 2, a pergunta é equivalente a: quantas palavras de uns e dois e com comprimento n se podem escrever; a Hint é 2^n.

14. Para atravessar um rio há k barcos. Diga de quantas formas diferentes n pessoas se podem distribuir pelos barcos.

    Hint: Igual ao anterior. Se um barco tem o número 1 e o outro tem o número 2, ..., k barcos a pergunta é equivalente a: quantas palavras de 1,2,..., k e com comprimento n se podem escrever; a Hint é k^n.

15. Diga quantos conjuntos de tamanho par existem em $\mathcal{P}(\{1,\dots,n\})$.

    Hint: Seja $P = \{A \subseteq \{1,\dots,n\} \mid |A| = 2k\}$. Provar que $f : P \to \mathcal{P}(\{1,\dots,n-1\})$, com $f(A) = A \cap \{1,\dots,n-1\}$, é uma bijeção. Concluir que há 2^{n-1}.

16. Prove que em $\mathcal{P}(\{1,\dots,n\})$ há tantos elementos com cardinalidade par como ímpar.

    Hint: Já vimos que os de cardinalidade par são 2^{n-1} e no total há 2^n. Logo de ordem ímpar há x sendo que $2^{n-1}+x = 2^n$; daqui sai que $x = 2^{n-1}$. Os alunos devem fazer a anterior; a solução mais elegante parece-me esta: provar que $f(A) = A \oplus \{1\}$ é uma bijeção dos subconjuntos de ordem ímpar para os de ordem par.

17. Diga quanto subconjuntos de k elementos tem um conjunto de $n > k$ elementos.

    Hint: $C(n,k)$.

    A forma mais fácil de resolver os 3 exercícios anteriores é por ordem inversa.

Permutações Vamos supor que temos n elementos diferentes $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; quantos n-uplos ordenados diferentes conseguimos fazer com eles? Temos $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(a_2, a_1, a_3, \dots, a_n)$, $(a_n, a_1, a_3, \dots, a_n)$, etc. Como se determina o número exatamente? Vemos quanta liberdade temos para preencher cada uma das posições:

(a) Para preencher a primeira posição temos n possibilidades (qualquer valor pode aparecer na primeira): $(n, \dots)$.

(b) Para preencher a segunda posição temos $n-1$ possibilidades (qualquer valor pode aparecer na segunda, menos o valor que já está a ocupar a primeira): $(n, n-1, \dots)$.

(c) Para preencher a terceira posição temos $n-2$ possibilidades (qualquer valor pode aparecer na terceira, excepto os dois que já estão a ocupar a primeira e segunda): $(n, n-1, n-2, \dots)$.

(d) Assim sucessivamente até à última posição em que já só sobra um elemento.

Em suma: as possibilidades de preenchimento em cada posição são $(n, n-1, n-2, n-3, \dots, 2, 1)$. Consequentemente, o número total de n-uplos diferentes com os elementos a_1, a_2, ..., a_n será $n(n-1)(n-2)\dots 1$ que por definição é $n!$. Está respondida a pergunta.

Por exemplo, queremos saber de quantas formas diferentes podemos sentar a Ana, a Beatriz e o Carlos num banco de jardim com três lugares. Pode ser (Ana, Beatriz, Carlos) ou (Beatriz, Ana, Carlos), ou etc. Pela fórmula sabemos que é $3!$, ou seja, $3 \times 2 = 6$.

Arranjos Vamos supor que temos n elementos diferentes $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e seja $k \leq n$; quantos k-uplos ordenados diferentes conseguimos fazer com eles? Temos $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_k)$, $(a_n, a_2, \ldots, a_5)$, etc. Como se determina o número exatamente? Vemos quanta liberdade temos para preencher cada uma das posições:

(a) Para preencher a primeira posição temos n possibilidades (qualquer valor pode aparecer na primeira): $(n, \ldots)$.

(b) Para preencher a segunda posição temos $n-1$ possibilidades (qualquer valor pode aparecer na segunda, menos o valor que já está a ocupar a primeira): $(n, n-1, \ldots)$.

(c) Para preencher a terceira posição temos $n-2$ possibilidades (qualquer valor pode aparecer na terceira, excepto os dois que já estão a ocupar a primeira e segunda): $(n, n-1, n-2, \ldots)$.

(d) Assim sucessivamente até à posição $n-k+1$.

Em suma: as possibilidades de preenchimento em cada posição são $(n, n-1, n-2, \ldots, n-k+1)$. Consequentemente, o número total de k-uplos diferentes com os elementos a_1, a_2, ..., a_n será

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\left(=\frac{n!}{(n-k)!}\right).$$

Por exemplo, de quantas formas diferentes podemos sentar a Ana, a Beatriz e o Carlos num banco que só leva duas pessoas? Podemos ter (A, B), (B, A), (A, C), (C, A), (B, C), (C, B). Pela fórmula temos $n(n-k+1) = 3(3-2+1) = 6$. Pela fórmula alternativa entre parêntesis temos

$$\frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6.$$

Combinações Vamos supor que temos n elementos diferentes $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e seja $k \leq n$; quantos conjuntos com k elementos conseguimos fazer com os elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$? Dito de outra forma, quantos subconjuntos com k elementos tem o conjunto A?

Ao calcular os k-uplos de um conjunto com n elementos, o que fazemos é escolher os subconjuntos de k-elementos e depois fazer todas as permutações desse conjunto de k elementos. Por exemplo, no caso da Ana, Beatriz e Carlos, escolhemos os dois que se iam sentar $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{A, C\}$, e cada um destes conjuntos desdobrou-se em tantos pares quantas permutações eram possíveis: $\{A, B\}$ deu origem a (A, B) e (B, A); $\{A, C\}$ deu origem a (A, C) e (C, A); etc.

Isto significa que nos arranjos, cada subconjunto com k elementos é contado $k!$ vezes. Portanto, o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos é

$$\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

As combinações, ie, *o número de subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos*, são habitualmente representadas por $\binom{n}{k}$ pelo que temos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Isto resolve o exercício 17.

O exercício 12 pergunta quantos subconjuntos tem um conjunto com n elementos. Tendo em conta a resposta ao exercício 17, a pergunta é

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} =?$$

O Binómio de Newton diz que

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} a^k \binom{n}{k}$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 1^{n-k} 1^k \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Uma resolução alternativa para o exercício 12.

O mesmo Binómio de Newton diz que (para $n > 0$) temos

$$0 = 0^n = (1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n} 1^{n-k}(-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Ou seja, como $(-1)^{2p} = 1$ e $(-1)^{2p+1} = -1$,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots - \binom{n}{1} - \binom{n}{3} - \binom{n}{5} - \ldots = 0.$$

Por palavras: *o número de subconjuntos de cardinal par é igual ao número de subconjuntos de cardinal ímpar*. Em bom português, *num conjunto com $n > 0$ elementos, há tantos subconjuntos de cardinal par como há de cardinal ímpar*. Isto resolve o exercício 16.

Quantos subconjuntos há de cardinal par num conjunto com n elementos? Como o total de subconjuntos é 2^n, e metade deles têm cardinal par, então há $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ subconjuntos de cardinal par. Isto resolve o exercício 15.

18. Diga quantas palavras de 8 letras de zeros e uns existem com exatamente 3 zeros.

    Hint: Temos de escolher a posição dos zeros.

    Resolução Vamos começar por escolher as posições dos zeros. A palavra tem 8 letras pelo que há 8 posições e dessas podemos escolher 3; ou seja, temos de saber quantos subconjuntos com 3 elementos há num conjunto com 8 elementos; a resposta é $\binom{8}{3} = 56$. E está resolvido o problema pois depois de fixar a posição dos zeros, a palavra fica totalmente determinada.

19. Diga quantas palavras de 10 letras de zeros, uns e dois existem com exatamente 3 zeros.

    Hint: Temos de escolher a posição dos zeros: Combinações de 10, 3 a 3. Depois temos de preencher as restantes posições com 1 e 2, ou seja, 2^7. No total temos $\binom{10}{3} \times 2^7$.

    Resolução Temos de escolher a posição dos zeros: $\binom{10}{3}$. Agora, para preencher as restantes 7 posições há duas possibilidades para cada, ou seja, 2^7. O resultado final é $\binom{10}{3}2^7 = 15360$.

1.2 Relações Binárias

20. Indique os domínios e as imagens das seguintes relações sobre os conjuntos indicados:
    (a) $R_1 = \{(1,1),(2,2),(1,5),(1,3),(2,3)\}$ de $X = \{1,2,3,4\}$ em $Y = \{1,2,3,4,5\}$;
    (b) $R_3 = \{(1,1),(2,2),(1,5),(1,3),(2,3)\}$ de $X = \{1,2\}$ em $Y = \{1,2,3,5\}$;
    (c) $R_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,1),(1,3),(3,1)\}$ de $X = \{1,2,3,4,5\}$ em X;
    (d) $R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,5),(5,1),(5,1),(1,3),(3,1)\}$ de $X = \{1,2,3,4,5\}$ em X;

21. Considere as relações R_4 e R_5 do exercício anterior.
    (a) Represente cada uma das relações por meio de um diagrama.
    (b) Represente cada uma das relações por meio de uma matriz de adjacências.

22. Determine os domínios e imagens das seguintes relações binárias sobre $\mathbb{R}$:
    (a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$;
    (b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 1 - \frac{2}{x^2+1}\}$.

23. Dê um exemplo de uma relação binária definida sobre o conjunto $\{1,2,3,4\}$ que seja (**fazer com demonstração automática de teoremas**):
    (a) Reflexiva, não simétrica e não transitiva;
    (b) Reflexiva, simétrica e não transitiva;
    (c) Reflexiva, anti-simétrica e não transitiva;
    (d) Reflexiva, não simétrica e transitiva;
    (e) Irreflexiva, não simétrica, não anti-simétrica e transitiva;
    (f) Irreflexiva, simétrica e transitiva;
    (g) Irreflexiva, não simétrica e não transitiva;
    (h) Irreflexiva, simétrica e não transitiva;
    (i) Irreflexiva, anti-simétrica e não transitiva;
    (j) Irreflexiva, não simétrica e transitiva;
    (k) Reflexiva, não simétrica, não anti-simétrica e transitiva;
    (l) Reflexiva, simétrica e transitiva;
    (m) Não irreflexiva, não reflexiva, não simétrica, não anti-simétrica e transitiva;
    (n) Não irreflexiva, não reflexiva, simétrica e transitiva.

24. Classifique quanto à reflexividade, irreflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade as seguintes relações R definidas no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros:
    (a) $(x,y) \in R$ se e só se $x = y^2$;
    (b) $(x,y) \in R$ se e só se $x \geq y$;
    (c) $(x,y) \in R$ se e só se x divide y;
    (d) $(x,y) \in R$ se e só se 3 divide $x - y$.

25. Sejam R e S duas relações binárias definidas sobre um conjunto X. Mostre que:

    (a) Se R e S são reflexivas então $R \cap S$ e $R \cup S$ são reflexivas;
    (b) Se R e S são irreflexivas então $R \cap S$ e $R \cup S$ são irreflexivas;
    (c) Se R e S são simétricas então $R \cap S$ e $R \cup S$ são simétricas;
    (d) Se R e S são transitivas então $R \cap S$ é transitiva; (O que pode afirmar acerca da relação $R \cup S$?)
    (e) Se R e S são anti-simétricas então $R \cap S$ é anti-simétrica. (O que pode afirmar acerca da relação $R \cup S$?)

26. Seja R uma relação binária definida sobre um conjunto X. Mostre que:

    (a) Se R é reflexiva então R^{-1} é reflexiva;
    (b) Se R é irreflexiva então R^{-1} é irreflexiva;
    (c) Se R é simétrica então R^{-1} é simétrica;
    (d) Se R é transitiva então R^{-1} é transitiva;
    (e) Se R é anti-simétrica então R^{-1} é anti-simétrica.

27. Sejam R e S duas relações binárias definidas sobre um conjunto X.

    (a) Mostre que se R e S são relações reflexivas então $R \circ S$ é reflexiva.
    (b) Indique relações binárias R e S tais que:
        i. R e S são simétricas e $R \circ S$ não é simétrica;
        ii. R e S são anti-simétricas e $R \circ S$ não é anti-simétrica;
        iii. R e S são transitivas e $R \circ S$ não é transitiva.

28. Sejam R uma relação de A em B e S uma relação de B em C.

    (a) Mostre que $\mathrm{Dom}(R \circ S) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$;
    (b) Prove que, se $\mathrm{Im}(R) \subseteq \mathrm{Dom}(S)$ então $\mathrm{Dom}(R \circ S) = \mathrm{Dom}(R)$;

29. Sejam R e S duas relações binárias simétricas sobre um conjunto A. Mostre que $R \circ S$ é simétrica se e só se $R \circ S = S \circ R$.

30. Sejam R e S duas relações binárias transitivas sobre um conjunto A. Prove que, se $R \circ S \subseteq S \circ R$ então $S \circ R$ é transitiva.

31. Indique se cada uma das relações binárias sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a seguir apresentadas é uma relação de equivalência e, em caso afirmativo, determine as respectivas classes de equivalência:

    (a) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\}$;
    (b) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3)\}$;
    (c) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;

32. Determine a relação de equivalência R definida sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ tal que:

    (a) $X/R = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$;
    Resposta $R = (\{1, 2\} \times \{1, 2\}) \bigcup (\{3, 4\} \times \{3, 4\})$.
    (b) $X/R = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$;

33. Prove que toda a relação de equivalência em X (não vazio) induz uma partição de X.

Resolução Seja $x \in X$; defina-se $R[x] := \{y \in X \mid xRy\}$. Seja $P := \{R[x] \mid x \in X\}$. Vamos provar que P é uma partição de X. Seja $x \in X$; como R é relação de equivalência temos que xRx e bem assim, $x \in R[x]$. Logo $X \subseteq \bigcup_{x \in X} R[x] \subseteq X$ pelo que $X = \bigcup_{x \in X} R[x]$. Está provado que a união dos elementos de P é o conjunto X todo.

Resta provar que dados $x, y \in X$, temos $R[x] \cap R[y] = \emptyset$ ou $R[x] = R[y]$. Vamos supor que $u \in R[x] \cap R[y]$ e $v \in R[y]$. Então, xRu, yRu e yRv, o que por simetria dá xRu, uRy e yRv, ie $xRuRyRv$ o que por transitividade dá xRv, ou seja, $v \in R[x]$. Como v era genérico em $R[y]$, fica provado que $R[y] \subseteq R[x]$. Por simetria conclui-se que $R[x] \subseteq R[y]$. Está provado que $R[x] = R[y]$, como se queria.

34. Prove que toda a partição de X (não vazio) induz uma relação de equivalência em X.

Resolução Seja $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ uma partição de X. Consideremos a relação

$$R := \bigcup_{i=1}^{n} (P_i \times P_i).$$

Vamos provar que R é uma relação de equivalência. Seja $x \in X$. Como P é partição de X, então $X = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$; logo existe $P_i \in P$ tal que $x \in P_i$. Portanto $(x, x) \in P_i \times P_i \subseteq R$. Está provado que para todo o $x \in X$ temos xRx e assim a relação é reflexiva.

Vamos provar que a relação é simétrica. Se $(x, y) \in R = \bigcup_{i=1}^{n} P_i \times P_i$, então existe $P_i \times P_i$ tal que $(x, y) \in P_i \times P_i$, ou seja, $x, y \in P_i$ e portanto $(y, x) \in P_i \times P_i$. A relação é simétrica.

Finalmente, vamos provar que é transitiva. Se $(x, y), (y, z) \in R$, então existem P_i e P_j tais que $x, y \in P_i$ e $y, z \in P_j$. Daqui resulta que $y \in P_i \cap P_j$; como duas partes de uma partição ou são disjuntas ou iguais, temos que $P_i = P_j$ e bem assim $x, y, z \in P_i$. Consequentemente, $(x, z) \in P_i \times P_i \subseteq R$. Está provado que R é uma relação de equivalência.

35. Considere a relação binária R definida sobre o conjunto dos pares ordenados de números inteiros, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, do seguinte modo: para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

$$(a, b)\, R\, (c, d) \quad \text{se e só se} \quad a + d = b + c.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência.

36. Seja R uma relação binária reflexiva e transitiva definida sobre um conjunto X. Prove que $R \cap R^{-1}$ é uma relação de equivalência sobre X.

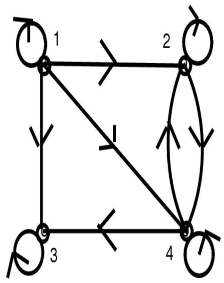
37. Sejam R e S duas relações de equivalência definidas sobre um conjunto X. Justifique que $R \cap S$ é uma relação de equivalência sobre X (cf. Exercício 25) e relacione as classes de equivalência de $R \cap S$ com as de R e de S.

38. Averigúe se a relação binária R definida sobre $\mathbb{Z}$ por

$$m\, R\, n \quad \text{se e só se} \quad m - n \text{ é par},$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$, é uma relação de equivalência.

39. Considere a relação R definida sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ representada pelo diagrama seguinte:



(a) Determine a matriz das adjacências da relação R.

(b) Indique, justificando, se R é reflexiva, simétrica ou transitiva.

40. Seja R a relação definida sobre o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ cuja matriz das adjacências é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Represente a relação R por meio de um diagrama.

(b) Indique, justificando, se R é reflexiva, simétrica ou transitiva.

41. Considere a relação R definida sobre o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros do modo seguinte: dados $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a\, R\, b \text{ se e só se existe } c \in \mathbb{Z} \text{ tal que } ac = b.$$

Verifique se:

(a) R é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$;

(b) R é uma relação de ordem parcial sobre $\mathbb{Z}$.

42. Considere em $\mathbb{N}$ a seguinte relação binária:

$$a \mid b \ \ (\text{lê-se } a \textit{ divide } b) \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists c \in \mathbb{N})\, ac = b,$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$. Mostre que $(\mathbb{N}, |)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

43. Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Construa o diagrama de Hasse do c.p.o. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

44. No conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$, considere a seguinte relação binária

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,4)\}.$$

(a) Mostre que R é uma r.o.p..

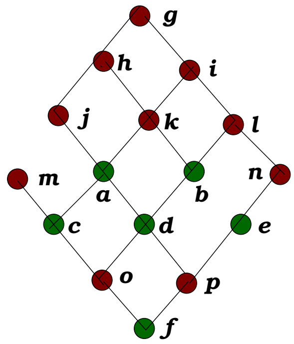
(b) Verifique se R é uma r.o.t..

(c) Represente R por meio de um diagrama.

(d) Represente R por meio de um diagrama de Hasse.

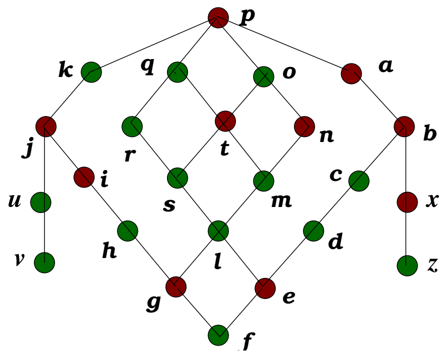
Sendo $B = \{2, 3, 4\}$, determine, se existirem, o mínimo, o máximo, os elementos minimais, os elementos maximais, o ínfimo e o supremo de B.

45. Considere o conjunto $X = \{a, b, \ldots, o, p\}$ e a relação de ordem parcial $\leq$ sobre X definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique, se existirem, os elementos mínimo, máximo, minimais, maximais, minorantes, majorantes, ínfimo e supremo do subconjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ (pontos a verde) do conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$.

46. Considere o conjunto $X = \{a, b, \ldots, x, z\}$ e a relação de odem parcial $\leq$ sobre X definida pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique, se existirem, os elementos minorantes, majorantes, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, minimais e maximais do subconjunto $A = \{c, d, f, h, k, l, m, o, q, r, s, u, v, z\}$ do conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$.

47. Mostre que uma relação R sobre um conjunto X é simultaneamente simétrica e anti-simétrica se e só se $R \subseteq \mathrm{id}_X$.

1.3 Funções

Nota: Nesta secção assumimos que todos os conjuntos são não vazios.

48. Indique todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$.

49. Determine todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ no conjunto $Y = \{a, b\}$. Indique as que são injectivas e as que são sobrejectivas.

50. Determine todas as aplicações do conjunto $X = \{1, 2\}$ no conjunto $Y = \{a, b, c\}$. Indique as que são injectivas e as que são sobrejectivas.

51. Determine todas as aplicações bijectivas do conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ no conjunto $Y = \{a, b, c\}$.

52. Determine três aplicações invertíveis do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ e indique as respectivas aplicações inversas. Diga quantas bijeções existem neste conjunto.

53. Considere as seguintes aplicações:

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;
(b) $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sin(x)$, para todo o $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
(c) $h : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ definida por $h(x) = \sin(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;
(d) $k : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ definida por $k(x) = \sin(x)$, para todo o $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Estude f, g, h e k quanto à sobrejectividade e injectividade.

54. Considere as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$
Determine $g \circ f$ e $f \circ g$.
   (a) Calcule as imagens de f e de $f \circ g$.
   (b) A aplicação g é injectiva? E a aplicação $f \circ g$?

55. Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ duas aplicações. Mostre que:
   (a) Se f e g são sobrejectivas então $f \circ g$ é sobrejectiva;
   (b) Se f e g são injectivas então $f \circ g$ é injectiva;
   (c) Se f e g são bijectivas então $f \circ g$ é bijectiva e $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

56. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação. Mostre que:
   (a) f é injectiva se e só se existe uma aplicação $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_X$;
   (b) f é sobrejectiva se e só se existe uma aplicação $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_Y$;
   (c) f é bijectiva se e só se existe uma aplicação $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_X$ e $g \circ f = \mathrm{id}_Y$.

57. Dê um exemplo de aplicações f e g tais que:
   (a) $f \circ g$ é injectiva e g não é injectiva;
   (b) $f \circ g$ não é injectiva e g é injectiva.

58. Dê um exemplo de aplicações $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ e $h : Y \longrightarrow X$ tais que:
   (a) $f \circ g = f \circ h$ e $g \neq h$;
   (b) $g \circ f = h \circ f$ e $g \neq h$.

59. Uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ diz-se *idempotente* se $f = f \circ f$. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação, $\mathrm{Im} f$ a imagem de f e $\mathrm{Fix} f$ o conjunto dos pontos fixos de f (i.e. $\mathrm{Fix} f = \{x \in X \mid \; xf = x\}$). Mostre que:
   (a) f é idempotente se e só se $\mathrm{Im} f = \mathrm{Fix} f$;
   (b) Se f é idempotente e sobrejectiva então f é a aplicação identidade.

60. Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação e R_f o *núcleo* de f, i.e. a relação binária sobre X definida do seguinte modo:
$$R_f = \{(x, y) | \; x, y \in X \text{ e } xf = yf\}.$$
Prove que:
   (a) R_f é uma relação de equivalência sobre X;
   (b) Para qualquer $x \in X$, $[x]_{R_f} = \{xf\}f^{-1}$;
   (c) f é injectiva se e só se R_f é a relação de identidade sobre X.

1.4 Cardinais Transfinitos

61. (a) Mostre que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, 1000\}|$.

62. Mostre que $|\mathbb{N}| = |3\mathbb{N}|$.

63. (a) Seja k um número natural; mostre que $|\mathbb{N}| = |k\mathbb{N}|$.

64. Mostre que $|3\mathbb{N}| = |3\mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, 1000\}|$.

65. Mostre que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$.

66. Mostre que $|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}|$. Conclua que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

    Hint 1 mostre que a seguinte aplicação é injetiva: para $n \in \mathbb{Z}$,

    $$nf = \begin{cases} 2(n+1) & n \geq 0 \\ -2n-1 & n < 0 \end{cases}$$

    Hint 2 mostre que a seguinte aplicação é injetiva: para $n \in \mathbb{Z}$,

    $$nf = \begin{cases} 2^n & n \geq 0 \\ 3^{-n} & n < 0 \end{cases}$$

67. (a) Sejam A e B dois conjuntos disjuntos tais que $|A| = |B| = |\mathbb{N}|$. Mostre que $|A \cup B| \leq |\mathbb{N}|$. Conclua que $|A \cup B| = |\mathbb{N}|$.

    Hint Sejam $f : A \to \mathbb{N}$ e $g : B \to \mathbb{N}$ bijeções. Então existem bijeções $f_1 : A \to \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $f_2 : A \to \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

68. (a) Seja $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma família infinita de conjuntos disjuntos tais que $|A_i| = |\mathbb{N}|$, para todo o $i \in \mathbb{N}$. Mostre que $|\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i| \leq |\mathbb{N}|$. Conclua que $|\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i| = |\mathbb{N}|$.

    Hint Pense no exercício anterior e em $f_i : A_i \to \{p_i^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, onde p_i é o i-ésimo primo.

69. (a) Mostre que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$.

    Hint Mostre que a aplicação $(x, y)f = 2^{x-1}(2y - 1)$ é injetiva.

    Alternativa: mostre que $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $(n, m)f = 2^n 3^m$ é injetiva.

    Conclua que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

70. Mostre que $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}|$.

    Hint Já vimos que há uma aplicação injetiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$. Logo existe uma aplicação injetiva $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $(x, y)F = (xf, yf)$. Vimos também que há uma aplicação injetiva $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

71. Mostre que $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}|$.

72. Mostre que $|\mathbb{Z}^n| \leq |\mathbb{N}|$.

73. Sejam A e B conjuntos não vazios. Mostre que se existe uma aplicação injetiva $f : A \to B$, então existe uma sobrejetiva $g : B \to A$.

74. Sejam A e B conjuntos não vazios. Mostre que se existe uma aplicação sobrejtiva $f : A \to B$, então existe uma injetiva $g : B \to A$.

    Hint Para cada $b \in B$, tome um único $bg \in bf^{-1}$. (Ilustrar isto com dois diagramas de Venn).

    Conclua que se $|A| \neq \emptyset$, então $|A| \leq |B|$ se e só se existe $f : B \to A$ sobrejetiva.

75. Mostre que existe uma aplicação sobrejetiva $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$.

    Hint Considere $(x, y)f = x/y$ e recorde que $\mathbb{Q}$ é conjunto de quocientes de números inteiros.

76. Mostre que $|\mathbb{Z} \setminus \{0\}| = |\mathbb{Z}|$.

77. Mostre que $|\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}|$.

78. Mostre que $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$.

79. Mostre que $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

80. Mostre que $|\mathbb{Q}^n| \leq |\mathbb{N}|$.

81. Mostre que $|\mathbb{Q}^n| = |\mathbb{N}|$.

82. Mostre que se $|X| = |Y|$, então $|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(Y)|$.

83. Mostre que $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$.

    Hint Para todo o $r \in \mathbb{R}$ define $rf = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}$.

84. Seja $Seq(0, 1)$ o conjunto das sequências infinitas de 0 e 1. Mostre que $|Seq(0, 1)| \leq |[0, 1]|$.

    Hint Considere a função $(a_1, a_2, \ldots)f = 0, a_1a_2 \ldots$ (onde $a_i \in \{0, 1\}$).

85. Mostre que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |Seq(0, 1)|$.

86. Mostre que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$.

    Conclua que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

87. Mostre que $|\mathbb{R}| = |]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[|$.

    Hint Pense na tangente.

88. Mostre que $|]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[| = |]0, 1[|$.

89. Mostre que $|]0, 1[| \geq |[0, 1[|$.

    Hint A identidade é injetiva.

90. Mostre que $|[0, 1[| \leq |]0, 1[|$.

    Hint Defina $f : [0, 1[\to]0, 1[$ tal que $0f = 1/2$ e $f :]0, 1[\to]\frac{1}{2}, 1[$ é bijetiva (usando a mesma técnica do Exercício 88).

    Conclua que $|[0, 1[| = |]0, 1[|$.

Indução

91. Defina indutivamente os seguintes conjuntos e escreva as respectivas regras de inferência.

    (a) $\mathbb{N}_{\geq 2} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$;
    Hint

$$\frac{}{2 \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \qquad \frac{x \in \mathbb{N}_{\geq 2}}{suc(x) \in \mathbb{N}_{\geq 2}}$$

(b) $\mathrm{MULT3}$- conjunto dos números naturais múltiplos de 3; **Hint**

$$\frac{}{3 \in \mathrm{MULT3}} \qquad \frac{x \in \mathrm{MULT3}}{suc(suc(suc(x))) \in \mathrm{MULT3}}$$

(c) $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$;

(d) $\mathbb{W}_1$ conjunto das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{1\}$;

(e) O conjunto das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ cujo comprimento é ímpar.

92. Considere o conjunto $A = \{(2n, \pi) : n \in \mathbb{N}_0\}$. Defina indutivamente o conjunto A. **Hint**

$$\frac{}{(0, \pi) \in A} \qquad \frac{(n, \pi) \in A}{(suc(suc(n)), \pi) \in A}$$

93. Mostre que:

(a) $4 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, onde 4 abrevia $suc(suc(2))$;

(b) $6 \in \mathrm{MULT3}$, onde 6 abrevia $suc(suc(suc(3)))$;

(c) $(1, 2) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, onde $(1, 2)$ abrevia $(suc(0), suc(suc(0)))$;

(d) $11 \in \mathbb{W}_1$, onde 11 abrevia $conc_1(conc_1(\epsilon))$.

94. Considere o conjunto A definido indutivamente pelas regras:

$$(1, 0) \in A$$
$$(m, n) \in A \Rightarrow (suc(suc(m)), n) \in A) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0$$

(Onde $suc(m)$ representa o sucessor de m na cadeia $\mathbb{N}_0$)

(a) Represente, em compreensão, o conjunto A.

(b) Prove, usando as regras dadas, que $(3, 0) \in A$.

95. Seja $\mathbb{N}_{\geq 3}$ o conjunto dos números naturais maiores ou iguais a 3.

(a) Defina $\mathbb{N}_{\geq 3}$ indutivamente e escreva as respectivas regras de inferência.

(b) Prove que $5^n - 1$ é divisível por 4, para qualquer $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.
Hint $5^3 - 1$ é divisível por 4. $4|5^n - 1$ implica $5^n - 1 = 4k$ implica $5^n = 4k + 1$. Logo $5^{n+1} - 1 = 5 \times 5^n - 1 = 5(4k + 1) - 1 = 5 \times 4k + 5 - 1 = 4(5k + 1)$

96. Demonstre por indução que:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad 4|(n^4 - n^2)$;

(b) $\Sigma_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo o número natural n;

(c) $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \quad n^2 > n$.

97. Considere o polinómio $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$. Mostre que $\forall n \in \mathbb{N} \quad p(n) \in \mathbb{N}_0$.

98. Seja $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{Q}$ a função definida por:

$$f(0) = 2$$
$$f(n+1) = \frac{2}{f(n)}$$

(a) Determine $f(0), f(1)$ e $f(2)$;

Hint $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.

(b) Determine a imagem de f. Prove a afirmação por indução.

$f(n) = 2$ então $f(n+1) = 1$?

99. Seja $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ a função definida recursivamente por:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(n+1) &= 2f(n). \end{aligned}$$

(a) Determine $f(0), f(1)$ e $f(2)$;

(b) Mostre que $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad f(n) = 2^n$.

Hint $S := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid f(n) = 2^n\}$. Vamos provar que $S = \mathbb{N}_0$.

$$\frac{}{0 \in S}?$$

$$\frac{n \in S}{suc(n) \in S}?$$

Como a resposta às duas perguntas é sim, concluímos que...

100. Mostre que as seguintes equações definem uma função, $+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ (adição):

$$\begin{aligned} +(m, 0) &= m \\ +(m, suc(n)) &= suc(+(m, n)). \end{aligned}$$

Hint Seja m natural e $S_m := \{n \in \mathbb{N} \mid m + n \text{ is defined }\}$. Queremos provar que $S_m = \mathbb{N}$.

Como $m + 0 = m$ temos que $0 \in S_m$. Por hipótese de indução vamos imaginar que $m + n$ está definido. Então $m + s(n) = s(m + n)$ pelo que $m + s(n)$ tb está definido, logo $s(n) \in S_m$. Por indução concluímos que $S_m = \mathbb{N}$. $m + n$ está definido em todos os naturais.

101. Seja $+$ a função definida no exercício anterior. considerando a notação $infix$,(isto é, $m + n$ em vez de $+(m, n)$) e 1 como abreviatura de $suc(0)$, mostre por indução que

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad 1 + n = n + 1.$$

Hint $n + 1 = n + s(0) = s(n + 0) = s(n)$.

$n = 0 \Rightarrow 1 + n = 1 + 0 = 1 = s(0) = s(n)$. Vamos supor que $1 + n = s(n)$. Então $1 + s(n) = s(1 + n) = s(s(n))$.

102. Em cada um dos seguintes casos, dê uma definição recursiva da sucessão (u_n) e mostre, por indução, que a definição dada está correcta.

(a) $u_n = 6n$;

Hint $u_0 = 0$; $u_n = 6 + u_{n-1}$.

(b) $u_n = 1 + (-1)^n$;

Hint $u_0 = 2$; $u_1 = 0$; $u_n = u_{n-2}$ $(n \geq 2)$;

(c) $u_n = n(n+1)$.

Hint $u_0 = 0$; $u_{n+1} = u_n + 2(n+1)$.

103. Mostre que as seguintes equações definem uma função, $lh : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} &lh(\epsilon) = 0 \\ &lh(conc_0(x)) = 1 + lh(x) \\ &lh(conc_1(x)) = 1 + lh(x). \end{aligned}$$

(Nota: $lh(x)$ é o comprimento de x, isto é, o número de *bits*)

Hint $\frac{}{\epsilon \in W}$; $\frac{w \in W}{conc_0(w) \in W}$; $\frac{w \in W}{conc_1(w) \in W}$;

$S := \{w \in W \mid lh(w)$ is defined $\}$.

$\epsilon \in S$. If $w \in S$, então $lh(conc_0(w)) = 1 + lh(w)$ pelo que $conc_0(w) \in s$. O mesmo para $conc_1$. Por indução estrutural $S = W$.

104. Mostre que as seguintes equações definem uma função, $\oplus : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$ (concatenação de palavras):

$$\begin{aligned} &\oplus (x, \epsilon) = x \\ &\oplus (x, conc_0(y)) = conc_0(\oplus(x, y)) \\ &\oplus (x, conc_1(y)) = conc_1(\oplus(x, y)) \end{aligned}$$

105. Sendo lh e $\oplus$ as funções definidas nos exercícios anteriores, prove por indução que

$$\forall x, y \in \mathbb{W} \quad lh(\oplus(x, y)) = lh(x) + lh(y).$$

106. Mostre que as seguintes equações definem uma função, $\#_1 : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} &\#_1(0) = 0 \\ &\#_1(1) = 1 \\ &\#_1(nodo(t_1, t_2)) = \#_1(t_1) + \#_1(t_2). \end{aligned}$$

(Nota: $\#_1(t)$ é o número de ocorrências de "1" em t)

107. Escreva equações que definam recursivamente a função $\#_0 : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que conta o número de 0 (zeros) dos elementos de $\mathbb{T}$.

108. Seja S o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ de comprimento maior ou igual a 1 definido indutivamente da seguinte forma:

$$\frac{}{a \in S} \qquad \frac{}{b \in S} \qquad \frac{w \in S \wedge x \in \Sigma}{conc_x(w) \in S}.$$

(Onde $conc_x(w)$ corresponde a justapor x à direita de w.)

(a) Escreva as equações que definem recursivamente $f : S \longrightarrow \mathbb{N}_0$ onde $f(w)$ é, para cada $w \in S$, o número de símbolos a existentes na palavra w.
Hint $f(a) = 1$; $f(b) = 1$; $f(conc_x(w)) = 1 + f(w)$.

(b) Prove que as equações obtidas na alínea anterior definem uma função.
Hint Seja $T := \{w \in S \mid f(w)$ está definida$\}$.

$$\frac{}{a \in T} \qquad \frac{}{b \in T}?$$
$$\frac{w \in T \wedge x \in \Sigma}{conc_x(w) \in T}?$$

Generalidades de Grafos

109. Seja $G = (X, U)$ um grafo com n vértices e m arcos. Sejam ainda $\delta(G) = \min\limits_{x \in X} d_G(x)$ e $\Delta(G) = \max\limits_{x \in X} d_G(x)$. Justifique que $\delta(G) \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta(G)$.

    Hint Seja x um vértice. Então $\Gamma^+(x) = \{(x, x_i) | i \in I_{x,1}\} \cup \{(x, x_i) | i \in I_{x,2}\}$, com $I_{x,1} \cap I_{x,2} = \emptyset$ e $|I_{x,1}| = \delta(G)$. Logo $2m = \sum_{x \in X} |\Gamma^+(x)| \geq \sum_{x \in X} |\{(x, x_i) | i \in I_{x,1}\}| = \sum_{x \in X} \delta(G) = n\delta(G)$.

110. Seja G um grafo com n vértices, t dos quais têm grau k e os restantes têm grau $k + 1$. Justifique que, sendo m o número de arcos de G, se tem $t = (k + 1)n - 2m$.

    Hint Basta escrever o que está lá dito: $tk + (n - t)(k + 1) = 2m$. Agora basta simplificar para ter o resultado.

111. Seja G um grafo com n vértices e m arcos $(n, m \geq 1)$. Seja k o menor inteiro positivo tal que $k \geq \frac{2m}{n}$. Justifique que G tem pelo menos um vértice com grau superior ou igual a k.

    Hint Se todos os vértices tivessem grau t_i menor que k, seja t o maior dos t_i. Então $nt/2 \geq m$, ou seja, $nt \geq 2m$, o que contradiz a hipótese de k ser o menor que satisfaz a propriedade.

112. Seja G um multigrafo com n vértices e $n - 1$ arcos. Conclua que G tem pelo menos um vértice com grau 1 ou um vértice isolado.

    Hint Se todos os vértices têm grau pelo menos 2, então o número de arestas é maior que $2n/2 = n$. Logo há um vértice com grau menor que 2 (que pode ser 1 ou 0).

113. Quantos vértices tem um grafo simples G com:

    (a) 12 arcos e com todos os vértices de grau 2?
    Hint $2n/2 = 12$; logo $n = 12$.

    (b) 15 arcos, 3 vértices de grau 4 e todos os outros com grau 3?
    Hint Basta escrever o que está lá escrito:

    $$\frac{3 \times 4}{2} + \frac{(n-3)3}{2} = 15 \Rightarrow n = 9.$$

114. Seja A um conjunto finito de números ímpares. Mostre que se a soma de todos os números de A é um número par, então $|A|$ é par.

    Hint Some números da forma $2x_i + 1$.

115. **Teorema dos apertos de mão** Mostre que num grafo é sempre par o número de vértices de grau ímpar.

    Hint Pelo lema dos apertos de mão, a soma dos graus de um grafo é um número par. A soma dos graus dos vértices de grau par (por ser a soma de números pares) é um número par. Logo, a soma dos graus dos vértices de grau ímpar tem de ser um número par.

116. Prove o Teorema dos apertos de mão usando indução.

117. É possível ter um grupo de 7 pessoas em que cada uma delas conhece exactamente 3 pessoas do grupo?

    Hint Não. Teorema dos apertos de mão.

118. Sete estudantes vão de férias e cada um deles decide enviar um postal a três dos outros. É possível cada estudante receber postais exactamente das três pessoas para quem enviou?

119. Indicando primeiro uma formulação em termos de grafos, responda às seguintes questões:

    (a) O número de pessoas que, numa festa, não conhecem um número ímpar das outras pessoas da festa é sempre um número par?

        Hint Seja G o grafo em que os vértices são as pessoas e temos $A - B$ sse A e B não se conhecem. O número de vértices com grau impar tem de ser par.

    (b) O número de pessoas nascidas até hoje que tiveram ou têm um número ímpar de irmãos é um número par?

        Hint Estamos a assumir que uma pessoa não é irmã de si própria. Portanto, se uma pessoa tem um número ímpar de irmãos, é porque há um número par de filhos na família. A soma desses números pares todos dá um número par.

120. Justifique que não existe nenhum grafo simples com 12 vértices, 28 arcos e em que o grau de cada vértice é 3 ou 4.

    Hint Vértices de grau 3 têm de ser um número par, seja $2k$. Logo temos $\frac{2k\times 3+(12-2k)\times 4}{2} = 28.$ Equação impossível.

121. Qual é o maior número possível de vértices num grafo com 19 arcos em que todos os vértices tem grau superior ou igual a 3?

    Hint Qual é o maior n tal que $3n/2 \leq 19$; logo $n = 12$. Será que há algum grafo com 12 vértices e 19 arcos? Sim. Basta fazer um circulo de 12 pontos e depois fazer arestas entre pontos opostos do grafo, e acrescentar mais um arco.

122. Um digrafo $G = (X, U)$ diz-se um *isografo* se, para todo o $x \in X$ $d^+(x) = d^-(x)$. Indique um isografo em que nem todos os vértices têm o mesmo grau.

    Hint Considere um digrafo desconexo em que uma parte tem apenas um vértice e a outra parte tem dois vértices unidos por duas setas.

123. (a) Justifique que em qualquer grafo simples existem pelo menos dois vértices com o mesmo grau.

        Hint G ou é conexo ou não. Se é conexo nenhum vértice tem grau zero. Logo n vértices terão de escolher um de $n-1$ graus diferentes. Se for desconexo, então nenhum vértice pode ter grau $n-1$. Logo n vértices terão de escolher um valor do conjunto $\{0, \ldots, n-2\}$.

    (b) Indique um grafo que ilustre que é falsa a afirmação que se obtém de (a) retirando a hipótese do grafo ser simples.

        Hint Três vértices: A, B, C. A e B estão unidos por duas arestas; B e C por uma. A tem grau 2, B 3 e C 1.

124. Justifique que a sequência com n elementos $(n-1, n-1, 1, \ldots, 1)$ $(n > 3)$ não é uma sequência gráfica.

    Hint A primeira iteração dá $(n-2, 0, \ldots, 0)$ o que responde à questão.

125. Indique, se existir, um multigrafo com a sequência de graus $(5, 5, 5, 5, 3, 3)$. (que abreviamos como $(5^4, 3^2)$). Existe algum grafo simples com a sequência de graus indicada?

126. Determine se cada uma das sequências seguintes é gráfica e, em caso afirmativo, indique um grafo simples que a admita como sequência de graus:

    (a) $(7, 6, 5, 4, 3, 2, 1^3)$;

    (b) $(9, 7, 5, 3^5, 2^2, 1^3)$;

    (c) 4^6;

(d) 4^7;
(e) 5^6;
(f) 5^8;
(g) $(3^2, 2^9)$;
(h) $(4^2, 2^4)$.

127. Considere as sequências, não crescentes

(a) $(5, 4, 4, 3, k, 1, 1)$ e
(b) $(8, k, 7, 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1, 1, 1)$.

Determine se existem valores de k para os quais as sequências são gráficas.

Hint No primeiro caso $k \in \{3, 2, 1\}$. Só o 2 é possível. No segundo caso $k \in \{8, 7\}$. Depois aplica-se o algoritmo.

128. Justifique que existe um grafo simples com 7 vértices, 12 arcos, contendo vértices de grau 2, 3 e 4 e não contendo vértices com outros graus.

Sugestão: Mostre que $(4, 4, 4, 4, 3, 3, 2)$ é sequência gráfica e depois construa um grafo com estes graus.

Hint Desenha-se um pentágono A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Em cima desenha-se um vértice A_6 ligado a A_2, A_3, A_4. Por fim desenha-se um novo vértice A_7 ligado a A_6, A_2, A_3 e A_1.

129. Justifique que $(k, 3^k)$ é uma sequência gráfica, para todo o inteiro k, com $k \geq 3$.

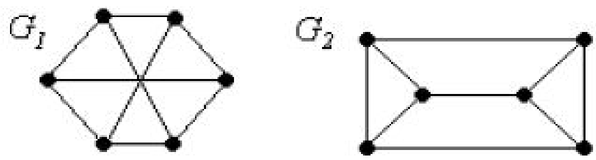
Hint Basta desenhar o k-ogono e acrescentar um vértice ligado a todos.

130. Por indução, mostre que, para todo o número inteiro positivo n, a sequência com $2n$ elementos $(n, n, n-1, n-1, \ldots, 2, 2, 1, 1)$ é uma sequência gráfica.

131. Indique, caso existam, três grafos simples não isomorfos, com a sequência de graus $(3^2, 2^2, 1^2)$.

Hint Usar o www.proverx.com

132. Justifique que os seguintes grafos têm a mesma sequência de graus, mas não são isomorfos:

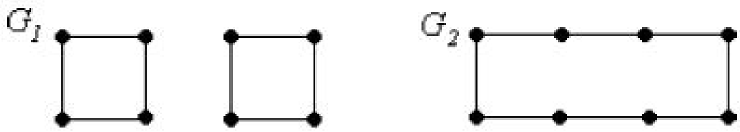


Hint Um deles tem ciclos de tamanho 3 e o outro não.

133. Sejam G_1, G_2 e G_3 três grafos simples com 4 vértices e dois arcos. Justifique que pelo menos dois desses grafos são isomorfos.

Hint Só existem duas possibilidades: ou arestas paralelas ou a intersetarem-se em um ponto.

134. Considere os grafos não isomorfos (mas com a mesma sequência de graus):



Existe algum grafo com a mesma sequência de graus dos anteriores e que não seja isomorfo a nenhum deles?

Hint Sim: um triângulo e um pentágono!

135. Indique dois digrafos, não isomorfos, com 4 vértices e 6 arcos.

Hint Um quadrado com setas sempre na mesma direção e diagonais; um quadrado com setas nas duas direções e duas setas só numa direção. O segundo tem poços, enquanto o primeiro não pelo que não podem ser isomorfos.

136. Qual o número mínimo de vértices necessário para construir um grafo completo com pelo menos, 1000 arcos?

Hint $\frac{n!}{2!(n-2)!} \geq 1000$.

137. Seja G um grafo simples r-regular, com r ímpar. Justifique que r divide o número de arcos de G.

Hint $2m = \sum_{x \in X} d(x) = |X|r$. Pelo lema dos apertos de mão, $|X| = 2k$. Logo $2kr = 2m$ e assim $kr = m$.

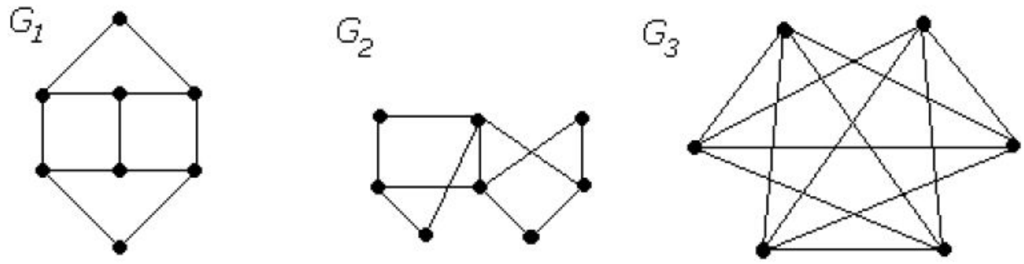
138. (a) Justifique que um grafo bipartido de ordem 10 tem, no máximo, 25 arcos.

Hint 5 de um lado e 5 de outro.

(b) Determine o número máximo de arcos de um grafo bipartido de ordem n, com $n \geq 2$.

Hint $x(n-x)$ é máximo. Ou seja, $(x(n-x))' = 0$, logo $x = n/2$ (se n par). Ver o caso n ímpar.

139. Determine quais dos seguintes grafos são bipartidos e, para esses, apresente uma representação geométrica que torne evidente a correspondente partição do conjunto dos vértices.



Hint G_1 e G_2 não têm ciclos de comprimento ímpar. E para mostrar que são bipartidos basta colorir alternadamente com branco e preto que funciona.

140. Seja G um grafo simples com pelo menos dois vértices e $\overline{G}$ o seu grafo complementar. Se G e $\overline{G}$ são ambos bipartidos o que pode concluir sobre G ?

Hint Se tiver 3 vértices com a mesma cor, então o complementar tem um triângulo. Ou seja, o grafo só pode ter 4 vértices no máximo. É preciso testar todas as possibilidades de subgrafos do completo $K_{2,2}$, $K_{2,1}$, $K_{1,1}$.

3.2 Conexidade

141. Seja $G = (X, \mathcal{U})$ um grafo e R a relação binária, definida em X, por

$$x_i R x_j \qquad \text{se, e só se,} \qquad \text{existe em } G \text{ uma cadeia } x_i - x_j.$$

Mostre que R é relação de equivalência.

Hint R é reflexiva pelas cadeias de comprimento zero. R é simétrica. R é transitiva.

142. Sejam $G = (X, U)$ um grafo simples e x_i e x_j vértices de G. Justifique que:

   (a) G possui uma cadeia $x_i - x_j$ se, e só se, possui uma cadeia $x_i - x_j$ elementar.
   Hint Indução.

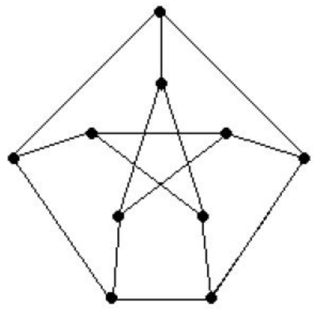
   (b) Se G possui duas cadeias $x_0 - x_k$ elementares distintas, com $x_0 \neq x_k$, então G possui um ciclo.
   Hint Como são diferentes, começando em x_0 haverá um primeiro vértice onde as cadeias seguem por arestas diferentes, digamos x_i; e depois de x_i haverá um primeiro vértice onde elas voltam a seguir por arestas iguais, digamos x_j. As duas subcadeias $x_i - x_j$ formam um ciclo.

143. Seja G um grafo com ciclos. Designa-se por contorno de G o comprimento mínimo dos ciclos de G. Determine o contorno dos seguintes grafos:

   (a) K_9
   Hint 3.

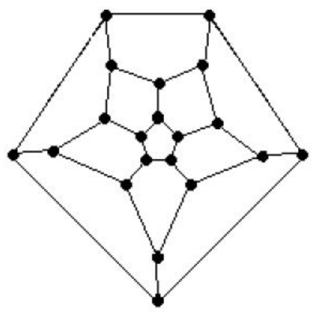
   (b) C_8
   Hint 8.

   (c) Grafo de Petersen. Este grafo é dado por $S = \{1 \ldots 5\}$; os vértices de G são os subconjuntos de ordem 2; dois vértices estão unidos se e só se são disjuntos.



   Hint 5. Pode haver um ciclo de comprimento 3? Não porque $\{a, b\} - \{c, d\} - \{e, f\} - \{a, b\}$ implica que todos os elementos de $\{a, b, c, d, e, f\}$ são disjuntos, o que é impossível em S. Pode haver um ciclo de ordem 4? Se $\{a, b\} - \{c, d\} - \{e, f\} - \{g, h\} - \{a, b\}$ é um ciclo de comprimento mínimo, então $\{c, d\}$ e $\{g, h\}$ têm um elemento comum. Isto significa que dos 5 elementos de S só restam dois elementos livres para fazer um vértice a incidir com $\{c, d\}$ e $\{g, h\}$. Ou seja, dois vértices não adjacentes têm apenas um vértice comum; se houvesse um ciclo de tamanho 4, os vértices $\{c, d\}$ e $\{g, h\}$ seriam não adjacentes e teriam dois vértices em comum $\{a, b\}$ e $\{e, f\}$. Basta agora encontrar no Peterson graph um ciclo de comprimento 5. A estrela no meio tem comprimento 5.

   (d) Grafo do dodecaedro



144. Seja $G = (X, U)$ um grafo simples. Define-se a *distância* $d(x_i, x_j)$ do vértice x_i ao vértice x_j da seguinte forma:

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} +\infty & \text{se } G \text{ não possui cadeias } x_i - x_j \\ \text{menor comprimento das cadeias } x_i - x_j \text{ de } G & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja G um grafo simples conexo com n vértices. Justifique as afirmações:

(a) Para quaisquer $x_i, x_j \in X$, $d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i) \leq n - 1$ (se existir cadeia).
Hint Uma linha que vá de x_i a x_j.

(b) Para quaisquer vértices $x_i, x_j, x_k \in X$ tem-se $d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_k) + d(x_k, x_j)$.
Hint É igual se x_k pertencer a uma cadeia minimal entre x_i e x_j.

(c) Se $d(x_i, x_j) > 1$ for finito, então existe um vértice x_k, com $x_k \neq x_i$ e $x_k \neq x_j$, tal que $d(x_i, x_j) = d(x_i, x_k) + d(x_k, x_j)$.
Hint Tomar um x_k da cadeia minimal.

145. Seja G um grafo com 15 vértices e 4 componentes conexas.

(a) Justifique que G tem pelo menos uma componente conexa com 4 ou mais vértices.
Hint Se todos tivessem menos de 4, digamos 3, então haveria 12 vértices.

(b) Qual o número máximo de vértices que uma componente conexa de G pode ter?
Hint 12 sobrando 3 vértices para outras 3 componentes conexas.

146. Seja G um grafo em que existem exactamente dois vértices x_i e x_j com grau ímpar. Mostre que x_i e x_j pertencem à mesma componente conexa e, portanto, em G, existe uma cadeia $x_i - x_j$.

Hint Se x_i está numa componente diferente de x_j, então a componente conexa de x_i tem exatamente um vértice de grau impar. Impossível.

147. Seja $G = (X, U)$ um grafo simples com $n \geq 2$ vértices tal que $d_G(x) \geq \frac{n-1}{2}$, para qualquer $x \in X$. Mostre que G é conexo.
Sugestão: Suponha que G é desconexo. O que pode afirmar sobre o número de vértices em cada componente conexa?

Hint Se fosse desconexo, uma das componentes teria no máximo metade dos vértices e portanto cada vértice teria grau no máximo metade menos um.

148. Indique um grafo simples, com $n \geq 3$ vértices, tal que:

(a) Todo o arco é uma ponte.
Hint A estrela.

(b) Nenhum arco é uma ponte.
Hint K_n.

149. Indique um digrafo fortemente conexo com dois vértices não adjacentes.

Hint Quadrado com setas sempre na mesma direção. Os vértices da diagonal não são adjacentes.

3.3 Árvores

150. Existe alguma árvore cuja sequência de graus seja $(3,3,3,2,2,1,1,1)$?

    Hint A soma dos graus é $2(n-1)$. Como temos 8 vértices, a soma dos graus tem de ser 14, quando é 16.

151. Seja T uma árvore que tem apenas vértices de grau 3 e vértices de grau 1. Se T tem 10 vértices de grau 3, quantos vértices tem de grau 1?

    Hint Vamos imaginar que tem k vértices de grau 1. Então a soma dos graus é $k+3(n-k)$. Mas a soma dos graus é $2(n-1)$. Logo temos

    $$n+2=2k.$$

    Agora é fazer as contas...

152. Uma árvore T tem 14 vértices de grau 1 e os restantes vértices têm graus 4 ou 5 (sendo que há pelo menos um de grau 4 e outro de grau 5).

    (a) Quantos vértices de grau 4 tem T?
    Hint O número de vértices de grau 4 é q e de grau 5 é c. Logo $4q+5c+14=2(c+q+14-1)$. Fazendo as contas temos $2q+3c=12$.
    Por hipótese nem q nem c são zero. Neste caso, $c\in\{2\}$ porque o número de vértices de grau impar tem de ser par.

    (b) Quantos arcos tem T?
    Hint A sequência gráfica $(5^2,4^3,1^{14})$ tem 19 vértices logo tem 18 arestas.

153. A média dos graus dos vértices de uma árvore T é $1,99$. Determine o tamanho de T.

    Hint $\frac{2(n-1)}{n}=1.99$ logo $n=200$.

154. A média dos graus dos vértices de uma árvore T é $\frac{21}{11}$. Supondo que T tem apenas vértices de grau 1 e vértices de grau 3, determine a sequência de graus de T.

155. A média dos graus dos vértices de um grafo conexo G é inferior a 2. Conclua que G é uma árvore.

    Hint $\frac{2m}{n}<2$ implica $m<n$. Como $n-1\leq m$, resulta que $m=n-1$ pelo que G é árvore.

156. Uma árvore T, com n vértices, tem exactamente um vértice com grau 2 e cada um dos restantes vértices tem grau 1 ou grau 3. Mostre que n é ímpar e determine, em função de n, o número de vértices de grau 1 de T.

    Hint Seja u o número de vértices de grau 1 e t o número de vértices de grau 3. Como $u+t$ é o número de vértices de grau ímpar, é par. Pelo que o número de vértices é $u+t+1$ que é ímpar.

    Note-se que $t=n-u-1$. Logo $2(n-1)=2+3t+u=2+3(n-u-1)+u$ e agora é fazer as contas...

157. Comente a seguinte frase: *Se T é uma árvore cujos vértices têm graus 1 e 3, então T tem um número ímpar de arestas.*

158. Seja G uma árvore em que todos os vértices têm grau ímpar.

    (a) Mostre que o número de arcos de G é também um número ímpar.
    Hint Todos os vértices de grau ímpar implica que o número de vértices é par pelo que $n-1$ é ímpar.

(b) Justifique que a afirmação anterior é falsa se G não é uma árvore.
Hint K_4.

159. Seja G um grafo simples com n vértices e $n+1$ arcos. Mostre que G tem pelo menos dois ciclos.

Hint Se só tivesse um ciclo, ao retirar um arco ficávamos com uma árvore de n arcos.

160. Justifique que toda a árvore, com $n \geq 2$, vértices, é um grafo bipartido.

Hint Escolha-se um vértice v à sorte; esse fica com a cor azul.Todos os seus vizinhos ficam amarelos. Todos os vizinhos dos amarelos ficam azuis, etc. Ou seja, vértices a distância ímpar de v são amarelos; se a distância for par são azuis. Ao longo de cada cadeia os vértices têm cores alternadas. Como dados 2 vértices existe apenas uma cadeia elementar entre eles, e em cada cadeia as cores são alternadas, está provado que não pode haver dois vértices adjacentes com a mesma cor.

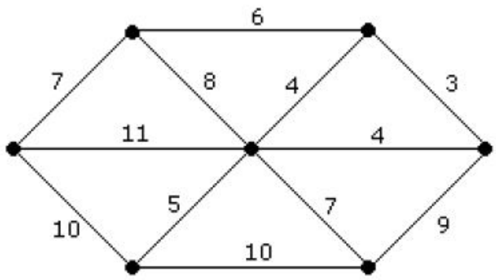
161. Existem grafos bipartidos completos que são árvores?

Hint As estrelas. Seja G um tal grafo bipartido completo. Sejam X e Y as duas partes da partição do conjunto de vértices. Se $X = \{a, b, \ldots\}$ e $Y = \{c, d, \ldots\}$, então existe o ciclo $a - c - b - d - a$, oque é impossível numa árvore. Está provado que ou X ou Y só têm um elemento.

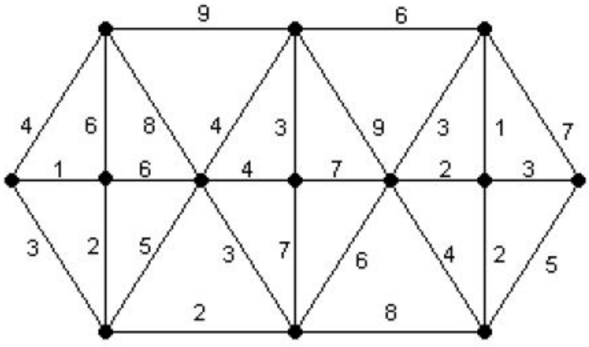
Reciprocamente, se X ou Y só têm um elemento, então o grafo será uma estrela que é bipartido completo e árvore.

162. Determine uma árvore maximal de valor mínimo e uma árvore maximal de valor a máximo para cada um dos seguintes grafos ponderados, utilizando o algoritmo de Kruskal e o algoritmo de Prim:

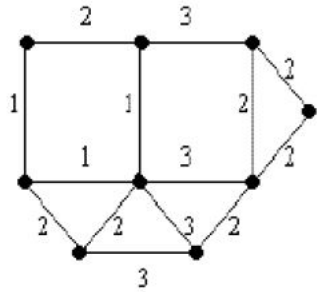
(a)



(b)

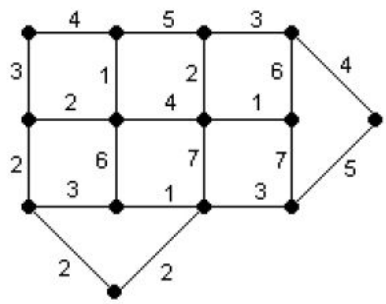


163. Considere o seguinte grafo ponderado G:



Determine uma árvore maximal de valor mínimo usando o algoritmo de Prim.

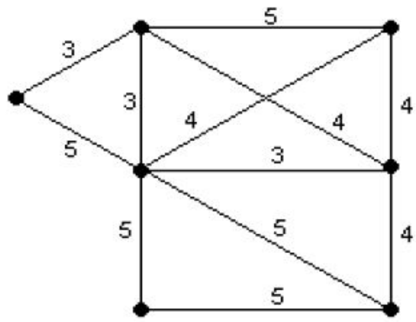
164. Considere o seguinte grafo ponderado G:



(a) Determine uma árvore maximal de valor máximo utilizando o algoritmo de Prim.

(b) Indique o valor da árvore obtida na alínea anterior.

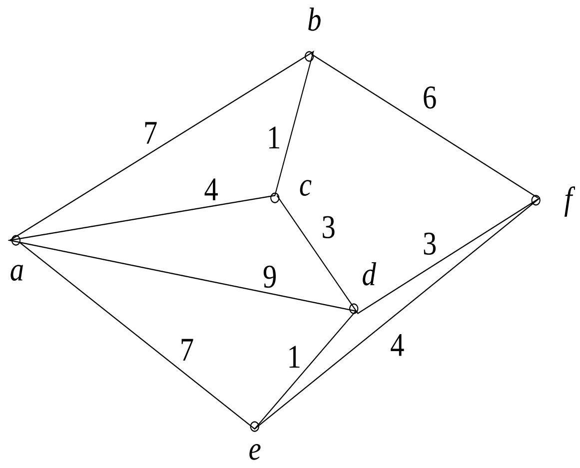
165. Considere o seguinte grafo ponderado G:



(a) Determine uma árvore maximal de G, de valor mínimo, usando o algoritmo de Kruskal.

(b) Indique o valor da árvore obtida na alínea anterior.

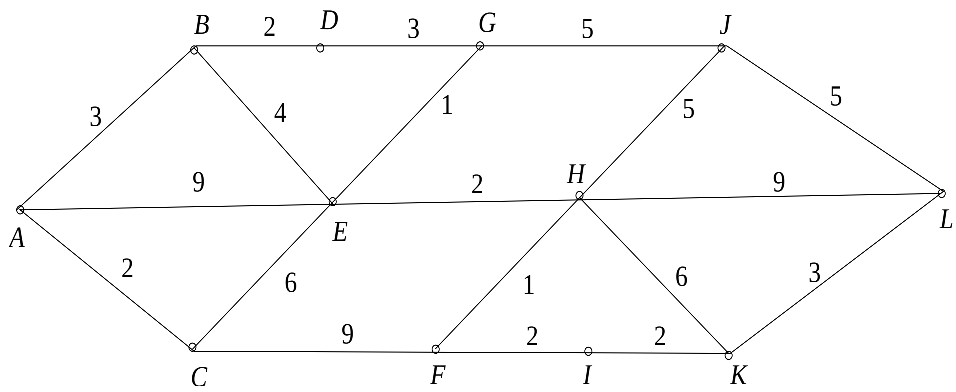
166. Considere o seguinte grafo ponderado:



(a) Aplique o Algoritmo da Cadeia mais Curta para mostrar que o valor de uma cadeia $a - f$ mínima é igual a 10.

(b) Determine uma cadeia $b - e$ mínima e indique o seu valor.

167. Considere o seguinte grafo ponderado:

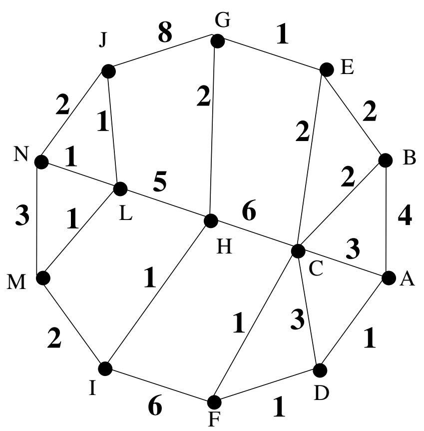


(a) Aplique o Algoritmo da Cadeia mais Curta para mostrar que o valor de uma cadeia $A - L$ mínima é igual a 17. Indique uma tal cadeia.

(b) Determine uma cadeia $J - A$ mínima e indique o seu valor.

(c) Determine uma cadeia $K - B$ mínima e indique o seu valor.

168. Considere o seguinte grafo ponderado:

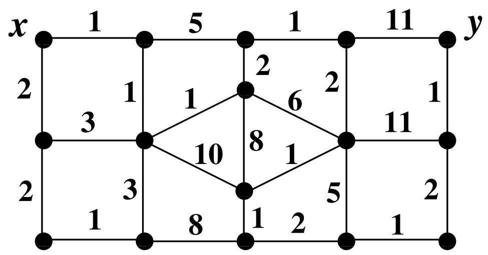


(a) Utilize o **algoritmo de Kruskal** para calcular uma árvore maximal de valor mínimo.

(b) Utilize o **algoritmo de Prim**, a partir do vértice C, para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor.

(c) Utilize o **algoritmo da Cadeia mais Curta** para determinar uma cadeia J - A mínima entre os vértices J e A. Indique o seu valor.

169. Considere o seguinte grafo ponderado:



(a) Utilize o **algoritmo de Kruskal** para calcular uma árvore maximal de valor mínimo. Indique o seu valor.

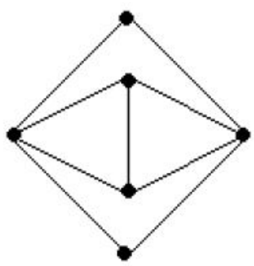
(b) Utilize o **algoritmo de Prim**, a partir do vértice x, para calcular uma árvore maximal de valor mínimo.

(c) Utilize o **algoritmo da Cadeia mais Curta** para determinar uma cadeia $x - y$ mínima L. Indique L e o seu valor.

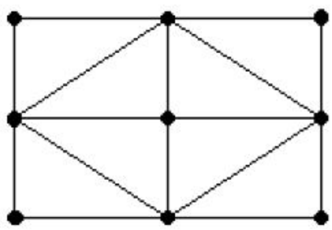
3.4 Grafos Eulerianos

170. Classifique os seguintes grafos quanto a serem eulerianos ou semi-eulerianos.

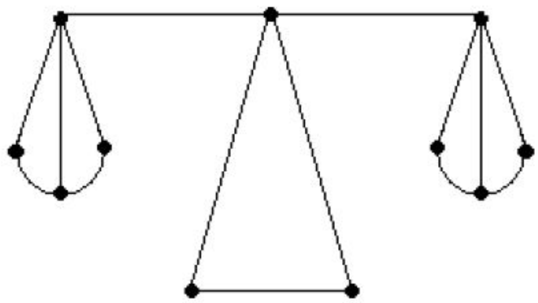
(a)



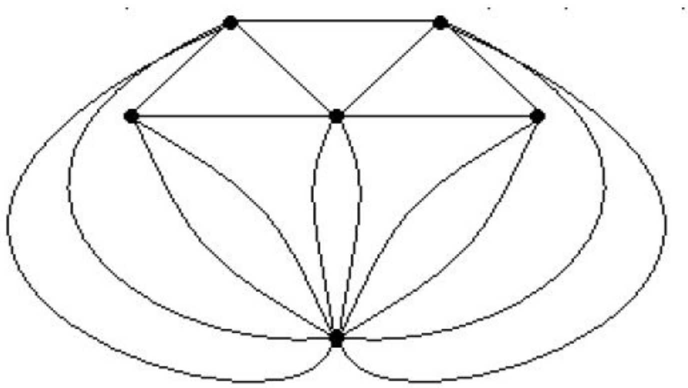
(b)



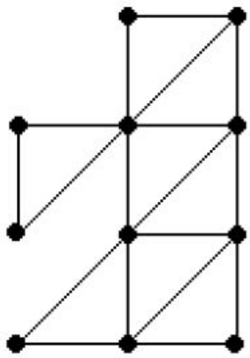
(c)



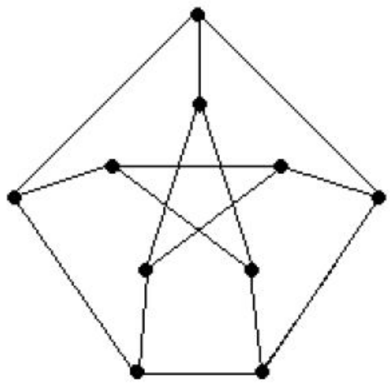
(d)



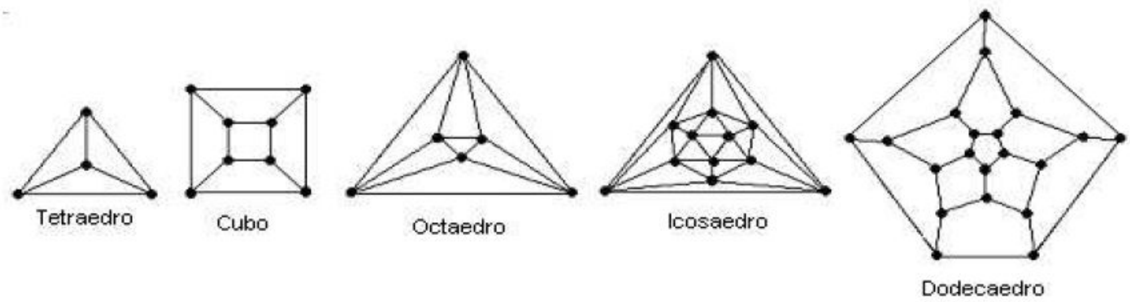
(e)



(f)



171. Os grafos conexos a seguir apresentados designam-se por grafos platónicos. Indique quais são eulerianos ou semi-eulerianos. Relativamente aos dois primeiros determine o número mínimo de vezes que teria de levantar o lápis para os conseguir desenhar.



172. Sejam G_1 e G_2 dois grafos eulerianos conexos sem vértices em comum. Sejam x um vértice de G_1 e y um vértice de G_2. Seja G o grafo que se obtém de $G_1 \cup G_2$ acrescentando o arco $\{x, y\}$. O que pode afirmar sobre a existência de cadeias eulerianas em G?

173. Determine os valores de n para os quais:

    (a) K_n é euleriano;

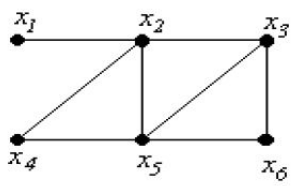
    (b) K_n é semi-euleriano.

174. Indique os grafos bipartidos completos que são:

    (a) Eulerianos;

    (b) Semi-eulerianos

175. Considere o grafo simples G:

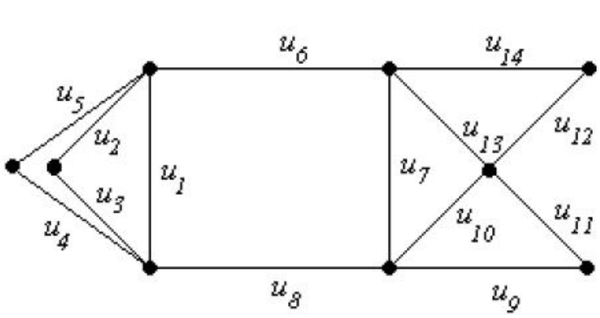


    (a) Justifique que G é semi-euleriano.

    (b) Considerando $G' = G + \{x_1, x_3\}$, verifique que G' é euleriano e utilize o algoritmo e de Fleury para determinar um ciclo euleriano de G'.

    (c) Utilizando o ciclo euleriano de G determinado na alínea anterior indique uma cadeia euleriana aberta de G.

176. Considere o grafo simples G:



    (a) Justifique que G é euleriano.

(b) Seja $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$ uma sequência de arcos obtida pela aplicação do algoritmo de Fleury ao grafo G. Justifique que u_8 não pode ser escolhido no passo seguinte da aplicação deste mesmo algoritmo.
Indique a restante sequência de arcos obtida por aplicação do algoritmo.

177. Suponha que tem um tabuleiro 3×3. Nos cantos do topo estão dois cavalos brancos e nos cantos de baixo estão dois cavalos pretos. Diga justificando se é possível colocar os cavalos brancos nos cantos de baixo e os cavalos pretos nos cantos de cima.

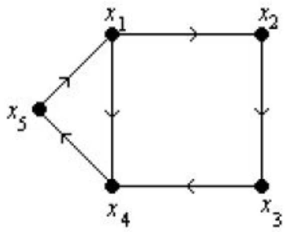
Hint Numere as casas do tabuleiro que serão os vértices do grafo; a aresta $\{n, k\}$ existe se passar da casa n para k é um movimento válido para o cavalo.

178. Invente um grafo euleriano para que algum dos seus colegas aplique o algoritmo de Fleury. (Neste exercício podem ser propostos no máximo 6 grafos diferentes por 6 pessoas diferentes).

179. Invente um grafo semi-euleriano para que algum dos seus colegas encontre um caminho que passe por todas as arestas, mas não passe duas vezes pela mesma. (Neste exercício podem ser propostos no máximo 6 grafos diferentes por 6 pessoas diferentes).

3.5 Matrizes e grafos

180. Considere o digrafo G:



Indique a matriz de adjacências de G em relação à marcação $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ e em relação à marcação $(x_5, x_3, x_2, x_1, x_4)$ dos seus vértices.

181. Como determinar o valor do grau de um vértice de um grafo G, a partir da matriz de adjacências, se:

(a) G é um grafo simples?

(b) G é um digrafo?

182. Indique dois grafos simples, com n vértices não isomorfos que tenham a propriedade da matriz de adjacências não depender da marcação de vértices considerada. Indique, para cada um, a correspondente matriz de adjacências.

183. Um digrafo $G = (X, U)$ diz-se simétrico se, para quaisquer $x, y \in X$, $(x, y) \in U$ se e só se $(y, x) \in U$. O que pode afirmar sobre a matriz de adjacências de um digrafo simétrico?

184. Seja G um grafo simples, com matriz de adjacências $A(G)$. Como obter, a partir de $A(G)$, a matriz de adjacências do seu grafo complementar $\overline{G}$?

Hint Substituir 1 por 0 e 0 por 1.

185. O converso de um digrafo $G = (X, U)$ é o digrafo $\widetilde{G} = (X, \widetilde{U})$ em que, para quaisquer $x, y \in X$, $(x, y) \in \widetilde{U}$ se e só se $(y, x) \in U$.

(a) Dê exemplo de um digrafo isomorfo ao seu converso.

(b) Qual a relação entre as matrizes de adjacências de G e de $\widetilde{G}$?

186. Como obter, a partir da matriz de adjacências de um digrafo $G = (X, U)$, o número de predecessores simultâneos de dois vértices x e y?

187. Seja $G = (X, U)$ um digrafo tal que $\Gamma^+(x) = \Gamma^-(x)$, para qualquer $x \in X$. O que pode afirmar sobre a matriz de adjacências de G?

188. Seja A a matriz de adjacências de um grafo simples G, em relação a uma marcação $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dos seus vértices.

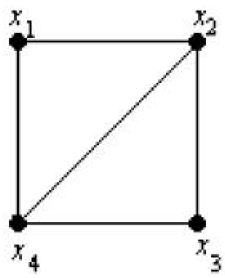
   (a) Justifique que, sendo $[b_{ij}] = A^2$, se tem $b_{ii} = d_G(x_i)$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$.

   (b) Com um exemplo, mostre que a propriedade (a) é falsa se A é a matriz das adjacências de um digrafo.

189. Seja G um grafo simples em que todo o arco tem uma extremidade num vértice de grau ímpar e a outra extremidade num vértice de grau par. Justifique que existe uma marcação dos vértices de G em relação a qual a matriz de adjacências de G tem a forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M^T & 0 \end{bmatrix}.$$

190. Considere o grafo



   (a) Determine a matriz A de adjacências de G em relação à marcação (x_1, x_2, x_3, x_4).

   (b) Indique A^2 e A^3, sem efectuar multiplicação de matrizes.

191. Considere o grafo $K_{r,s}$ com as classes de vértices $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_s\}$.

   (a) Determine a matriz A das adjacências de $K_{r,s}$ em relação à marcação $(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$.

   (b) Indique A^2 e A^3, sem efectuar multiplicação de matrizes.

192. Seja G um digrafo cuja matriz das adjacências em relação à marcação (x_1, x_2, x_3, x_4) dos seus vértices é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Justificando apenas com propriedades de matrizes, indique:

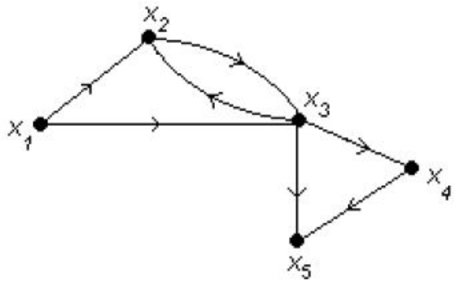
   (a) A sequência de graus exteriores de G;

   (b) Se G tem vértices isolados;

   (c) Se existem caminhos $x_1 - x_4$;

   (d) Se existem sucessores simultâneos de x_1 e x_2.

193. Considere o digrafo



Indique, em relação à marcação $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ dos seus vértices:

(a) A matriz de adjacências de G.

(b) A matriz de distâncias de G.

194. Seja A a matriz de adjacências de um digrafo G, em relação a uma marcação $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dos seus vértices. Indique como determinar a partir da matriz A, ou das suas potências, se:

(a) G tem fontes/poços;

(b) G é fortemente conexo;

(c) G tem circuitos eulerianos;

(d) G tem caminhos eulerianos abertos.

195. Sem efectuar multiplicação de matrizes justifique que, para todo o inteiro $n \geq 2$, existe um digrafo G, com n vértices, cuja matriz de adjacências A satisfaz a propriedade: $A^k \neq 0$, para todo o inteiro positivo k.