Matemática Discreta

2020 —2021
Conjuntos

Professores: *João Araújo, Júlia Vaz Carvalho, Manuel Silva*
Departamento de Matemática
FCT/UNL

Baseados em slides elaborados pelos Professores Dr. Vítor Hugo Fernandes , Drª. Isabel Oitavem e Drª. Cecília Perdigão

Programa

1. Parte 1 - Conjuntos e Relações e Funções
   1. Conjuntos, representações e operações básicas; conjunto das partes; cardinalidade.
   2. Relações binárias: equivalências e ordens parciais.
   3. Funções: bijecções; inversão e composição.
2. Parte 2 - Indução
   1. Definições indutivas
   2. Indução nos naturais e estrutural
   3. Primeiro e segundo princípios de indução
   4. Funções recursivas e provas por indução
3. Parte 3 - Grafos e Aplicações
   1. Generalidades
   2. Conexidade
   3. Árvores
   4. Grafos Eulerianos
   5. Matrizes e grafos

Conjuntos - Definições e exemplos

Um conjunto é uma "colecção" de objectos

- *Os objectos que formam um conjunto designam-se por elementos, membros ou, por vezes, pontos.*
- *Usualmente utilizamos letras maiúsculas para representar conjuntos e minúsculas para representar os seus elementos.*
- *Para representar que a é um elemento do conjunto A escrevemos $a \in A$ e lemos "a pertence a A" ou "a é elemento de A".*

- *Sejam A e B dois conjuntos. Recordemos que:*
  - *A está contido em B, e denotamos por $A \subseteq B$, se todo o elemento de A é também um elemento de B, i.e. $\forall x \in A \;\; x \in B$;*
  - *A e B são iguais se têm os mesmos elementos, i.e. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.*
  - *Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$.*

Notação:

- *$\varnothing$ ou $\{\}$ representa o conjunto vazio, isto é, um conjunto sem elementos.*
- *$a \notin A$, abrevia $\sim (a \in A)$;*
- *$A \nsubseteq B$ abrevia $\sim (A \subseteq B)$ e $\sim (A = B)$;*
- *$A \subset B$ abrevia $A \subseteq B \wedge A \neq B$.*

Exemplo

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}$ é o conjunto dos números naturais.
2. $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros.
3. $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais.
4. $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

Exemplos

- $\{1,3,5,6,8\} = \{6,8,3,5,1\}$;
- Se $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ então $A \subset B$;
- Para $C = \{1,3,5,7,9\}$, podemos afirmar que $3 \in C$ mas $4 \notin C$;
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
- $0 \notin \mathbb{N}$ mas $0 \in \mathbb{Z}$;
- $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ mas $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$;
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ mas $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

1.1 Conjuntos - Representação de conjuntos

Se S é um conjunto, os elementos de S que verificam uma determinada propriedade ψ, isto é,

$$\{n \in S : \psi(n)\} \text{ é um conjunto.}$$

Dizemos que o conjunto assim definido está representado em compreensão.

Exemplo

Consideremos $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}$. O conjunto A está representado em compreeensão.

Quando um conjunto tem um número finito de elementos podemos representá-lo explicitando os seus elementos. Neste caso dizemos que o conjunto está representado em extensão.

Exemplo

Neste caso, o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}$ ao ser representado por $A = \{1, 2, 3, 4\}$ fica representado em extensão.

Designam-se por diagramas de Venn os diagramas usados para simbolizar graficamente propriedades e problemas relativos aos conjuntos e sua teoria.*

**(diagramas que consistem em curvas fechadas simples desenhadas sobre um plano, de forma a simbolizar os conjuntos e permitir a representação das relações de pertença entre conjuntos e seus elementos)*

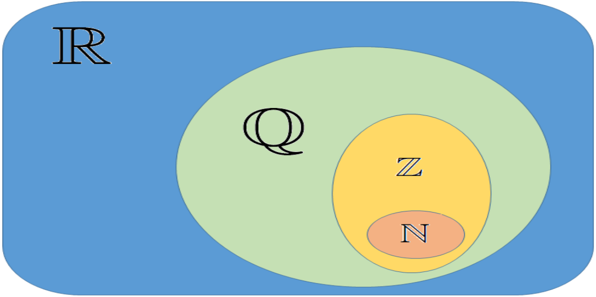
1.1 Conjuntos - Representação de conjuntos

Exemplo

A propriedade anteriormente referida,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

pode ilustrar-se, utilizando diagramas de Venn, da seguinte forma:

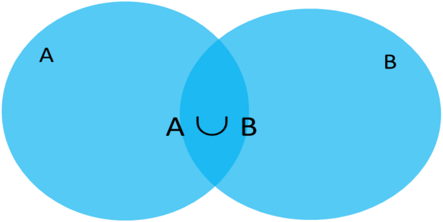


Conjuntos: Operações básicas

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto S.

- *A **união** de A com B é o conjunto*

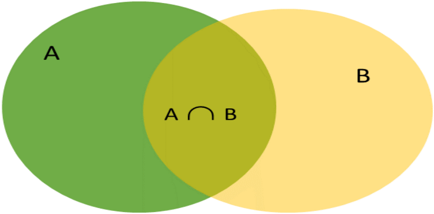
$$A \cup B = \{x \in S : x \in A \ \ ou \ \ x \in B\};$$



Conjuntos: Operações básicas

- *A intersecção de A com B é o conjunto*

$$A \cap B = \{x \in S : x \in A \;\; e \;\; x \in B\};$$

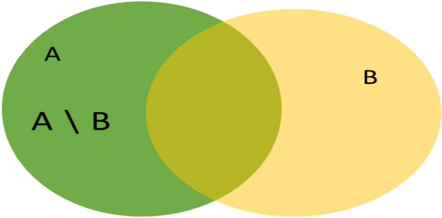


Conjuntos: Operações básicas

- *A diferença de A e B (ou o complementar de B em A) é o conjunto* $A - B$ *(ou* $A \setminus B$*), é o conjunto*

$$\{x \in S : x \in A \ \text{ e } \ x \notin B\}.$$

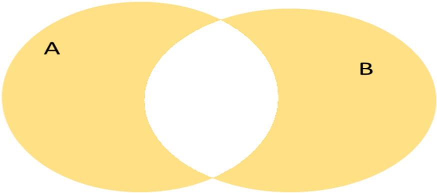
A' *ou* A^c *denota* $S \setminus A$.



Conjuntos: Operações básicas

- *A diferença simétrica entre os conjuntos* A *e* B *é o conjunto* $A \oplus B$ *, é o conjunto*

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



$\mathbf{A \oplus B}$

Conjuntos: Propriedades das operações

PROPRIEDADES	UNIÃO
Comutatividade	$A \cup B = B \cup A$
Associatividade	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Idempotência	$A \cup A = A$
Existência de elemento neutro	$A \cup \varnothing = A = \varnothing \cup A$
Existência de elemento absorvente	$A \cup S = S = S \cup A$

Conjuntos: Propriedades das operações

PROPRIEDADES	INTERSECÇÃO
Comutatividade	$A \cap B = B \cap A$
Associatividade	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotência	$A \cap A = A$
Existência de elemento neutro	$A \cap S = A = S \cap A$
Existência de elemento absorvente	$A \cap \varnothing = \varnothing = \varnothing \cap A$

Conjuntos: Propriedades das operações

Distributividade da intersecção em relação à união, *respectivamente à direita e à esquerda*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A).$$

Distributividade da união em relação à intersecção, *respectivamente à direita e à esquerda*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A).$$

1.1 Conjuntos: Propriedades das operações

Dupla complementação

$$(A^c)^c = A.$$

Primeiras leis de De Morgan para conjuntos

Lei do complementar da intersecção: O complementar da intersecção de conjuntos é igual à união dos complementares, isto é,

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Lei do complementar da união: O complementar da união de conjuntos é igual à intersecção dos complementares, isto é,

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Conjuntos: Propriedades das operações

Observação

- Note-se que as propriedades atrás enunciadas bem como outras propriedades sobre conjuntos **não podem** ser demonstradas com base em diagramas de Venn.
- Os diagramas de Venn são úteis para ajudar a perceber a propriedade de conjuntos a demonstrar mas apenas se conseguem utilizar de modo eficaz quando o número de conjuntos envolvidos não é muito grande (3 ou 4 no máximo).

Conjuntos: Conjunto das partes

Podemos deparar-nos com conjuntos cujos elementos também são conjuntos.

Exemplo

$$\{\underbrace{\{encarnado, verde, amarelo\}}_{\text{cores da bandeira de Portugal}}, \quad \underbrace{\{encarnado, amarelo\}}_{\text{cores da bandeira de Espanha}}\}$$

- *Dado um conjunto S ao conjunto $\mathcal{P}(S) = \{A : \ A \subseteq S\}$ chamamos o conjunto das partes de S.*

Exemplos

1. Dado $S = \{1, 2\}$ $\quad \mathcal{P}(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
2. Dado $S = \{encarnado(E), verde(V), amarelo(A)\}$,
   $\mathcal{P}(S) = \{\varnothing, \{E\}, \{V\}, \{A\}, \{E, V\}, \{E, A\}, \{V, A\}, \{E, V, A\}\}$.

1.1 Conjuntos: Conjunto das partes

Dado um conjunto S, seja A um subconjunto de $\mathcal{P}(S)$. Os elementos de A são subconjuntos de S.
Assim, definimos:

- $\bigcup A = \{a \in S : \exists X \in A \quad a \in X\}$ união de todos os elementos do conjunto
- $\bigcap A = \{a \in S : \forall X \in A \quad a \in X\}$ interseção de todos os elementos do conjunto

Exemplo

Se $S = \{0, 1, 2\}$, temos
$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.
Sendo $A = \{\{2\}, \{0, 2\}\} \subseteq \mathcal{P}(S)$ temos

$$\bigcup A = \{2\} \cup \{0, 2\} = \{0, 2\}$$

$$\bigcap A = \{2\} \cap \{0, 2\} = \{2\}$$

exemplo

1.1 Conjuntos: Conjunto das partes

Seja S um conjunto. Um conjunto $A \subseteq \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$ é uma partição de S se cada elemento de S pertence a um, e um só, elemento de A.
Numa partição A de S os elementos de A são conjuntos disjuntos e $\bigcup A = S$.

Exemplo

Se $S = \{0, 1, 2\}$, temos
$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.Considerando os conjuntos

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{\{1\}, \{0, 2\}\} \\
A_2 &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\} \\
A_3 &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 2\}\} \\
A_4 &= \{\{1\}, \{2\}\}
\end{aligned}
$$

Os conjuntos A_1 e A_2 são partições de S mas os conjuntos A_3 e A_4 não são partições de S.

Conjuntos: Produto cartesiano

Definição

Dado um conjunto S e $a, b \in S$, o par ordenado formado por a e b é o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ que denotamos por (a, b).

Exemplo

$(1, 2) = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ e $(2, 1) = \{\{2\}, \{1, 2\}\}$, logo $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Proposição

Dado um conjunto S e $a, b, c, d \in S$, temos que $(a, b) = (c, d)$ se, e só se, $a = c$ e $b = d$.

Definição

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{(a, b) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) : \ a \in A \wedge b \in B\}.$$

Conjuntos: Produto cartesiano

Observação

As definições anteriores podem ser generalizadas para qualquer número natural $n > 2$, da seguinte forma:

- $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1, (a_2, (\ldots, (a_{n-1}, a_n) \cdots)))$;
- $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n =$
  $= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \subseteq \mathcal{P}(\cup_{1 \leq i \leq n} A_i) : \ \ a_i \in A_i \wedge i \in \{1, \ldots, n\}\}$.
- A^n abrevia $A \times A \times \cdots \times A =$ (n vezes).

Conjuntos: Cardinalidade

- *O número de elementos de um conjunto S é designado por cardinalidade de S e representa-se por $|S|$ ou por $\#S$.*
- *Um conjunto diz-se finito se tiver cardinalidade finita.*

Exemplo

1. $|\varnothing| = 0$
2. Seja $\mathbb{Z}_n = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq n\}, \quad |\mathbb{Z}_n| = n$

Proposição

Qualquer subconjunto A de um conjunto finito S é finito e tem-se $|A| \leq |S|$.

Questões:
Se $|S| = n$, qual é a cardinalidade de $\mathcal{P}(S)$?
Se $|A| = m$ e $|B| = n$, qual é a cardinalidade de $A \times B$?