Física

Licenciatura em Engenharia Informática

Susana Sério

Aula 03

Movimento a duas e três dimensões

A utilização dos sinais + ou – não é suficiente para descrever completamente o movimento em mais do que uma dimensão;

Podem ser utilizados vectores para descrever o movimento de forma mais completa;

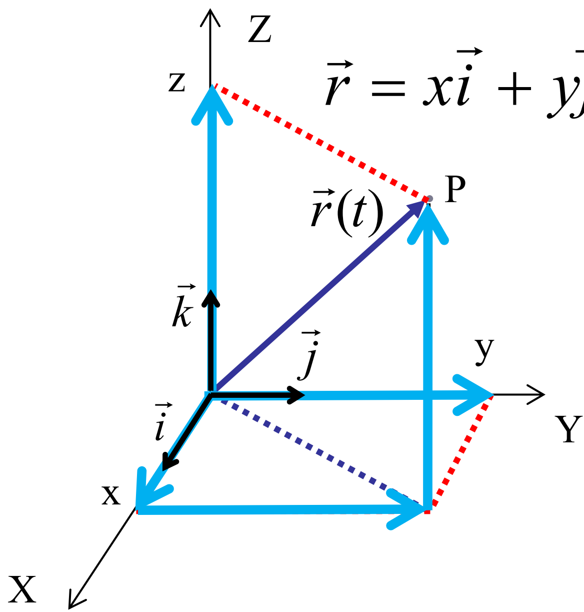
Estamos ainda interessados no ***deslocamento***, na ***velocidade*** e na ***aceleração***.

Ideias Gerais sobre o Movimento

Na cinemática do movimento a duas ou três dimensões, tudo é análogo ao movimento unidimensional, excepto no facto de termos de utilizar notação vectorial.

Posição e Deslocamento

A posição de um objecto é descrita pelo seu vector de posição, $\vec{r}$



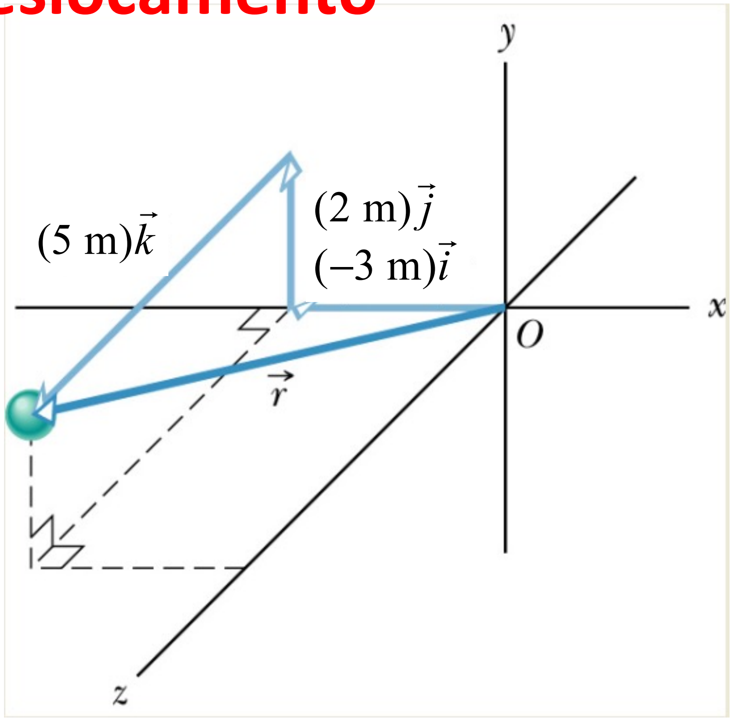
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) \Rightarrow \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

Coordenadas cartesianas

Posição e Deslocamento

A posição de um objecto é descrita pelo seu vector de posição, $\vec{r}$

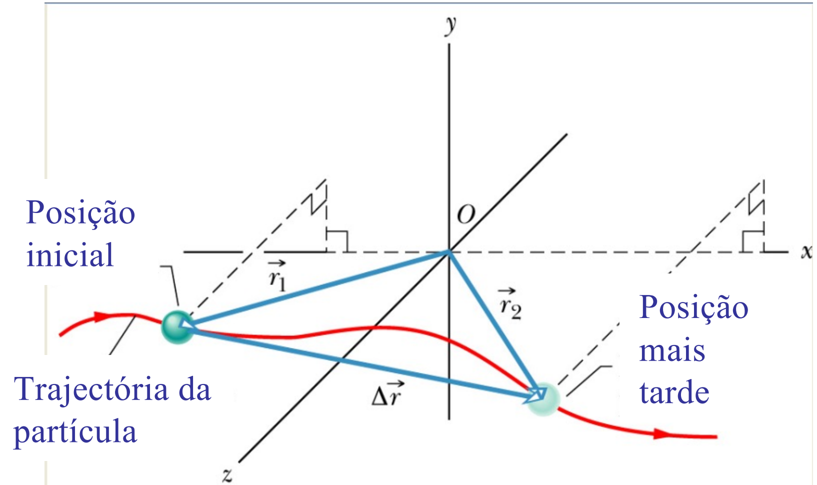


$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r} = (-3\ \mathrm{m})\vec{i} + (2\ \mathrm{m})\vec{j} + (5\ \mathrm{m})\vec{k}$$

Posição e Deslocamento

O **deslocamento** do objecto (partícula) é definido como a ***variação da sua posição***



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta\vec{r} = \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)$$

$$\Delta\vec{r} = \left(x_2 - x_1\right)\vec{i} + \left(y_2 - y_1\right)\vec{j} + \left(z_2 - z_1\right)\vec{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

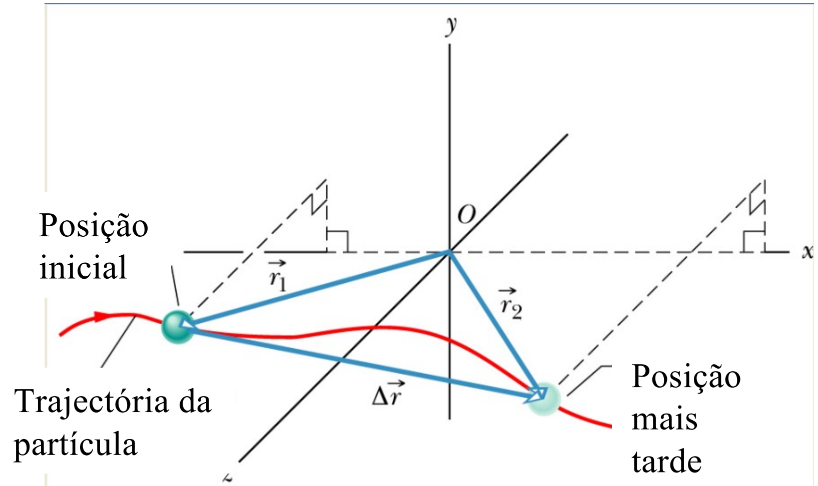
Posição e Deslocamento

O vector posição de uma partícula é, inicialmente,

$$\vec{r}_1 = (-3.0\ \mathrm{m})\vec{i} + (2.0\ \mathrm{m})\vec{j} + (5.0\ \mathrm{m})\vec{k}$$

e, 2 s mais tarde

$$\vec{r}_2 = (9.0\ \mathrm{m})\vec{i} + (2.0\ \mathrm{m})\vec{j} + (8.0\ \mathrm{m})\vec{k}$$



Qual é o deslocamento da partícula neste intervalo de tempo?

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left[(9.0\ \mathrm{m}) - (-3.0\ \mathrm{m})\right]\vec{i} + \left[(2.0\ \mathrm{m}) - (2.0\ \mathrm{m})\right]\vec{j} + \left[(8.0\ \mathrm{m}) - (5.0\ \mathrm{m})\right]\vec{k}$$

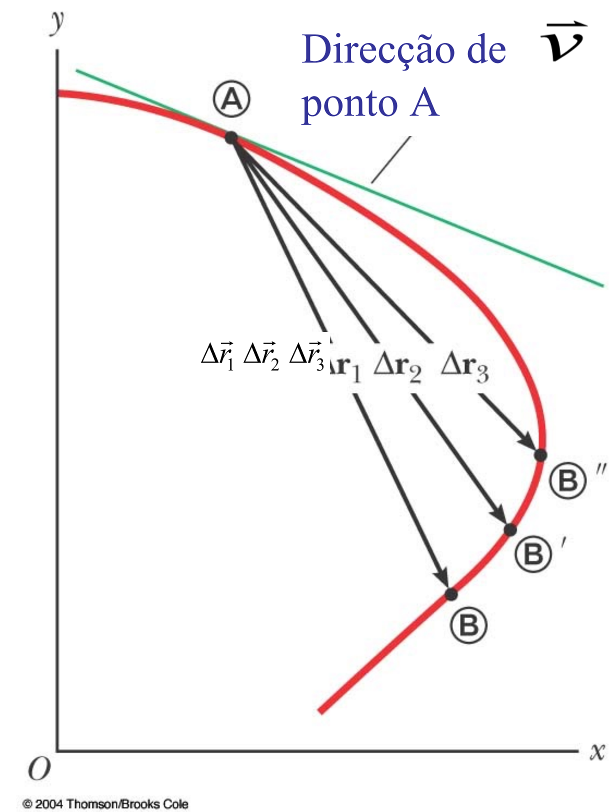
$$= (12.0\ \mathrm{m})\vec{i} + (0.0\ \mathrm{m})\vec{j} + (3.0\ \mathrm{m})\vec{k}$$

Velocidade média

A velocidade média num determinado intervalo de tempo é a razão do deslocamento pelo intervalo de tempo

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

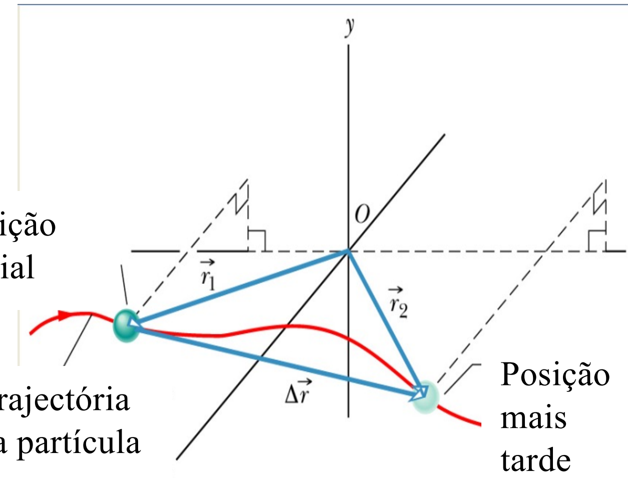
A direcção e o sentido da velocidade média são os do vector deslocamento, $\Delta \vec{r}$



Velocidade média

Em termos de vectores unitários, a velocidade média é

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

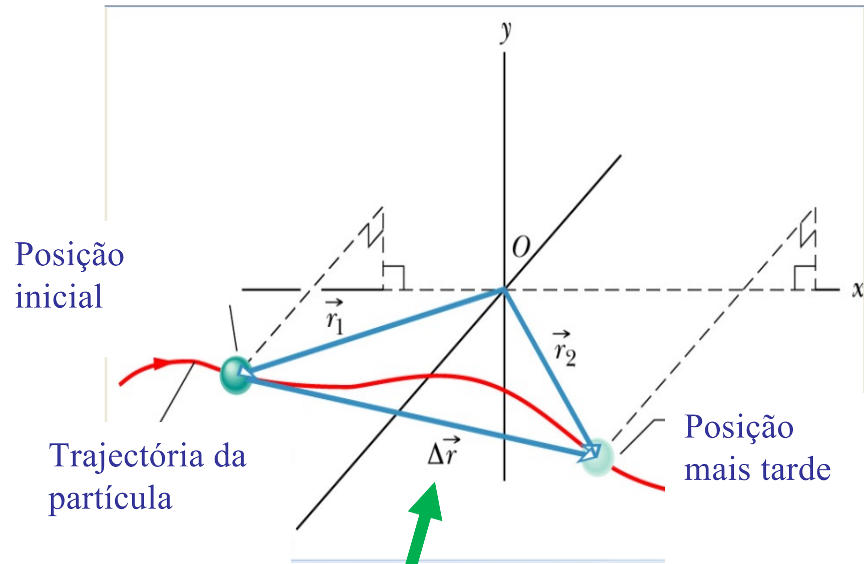


No problema anterior, a velocidade média entre os dois pontos é

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{(12\text{ m})\vec{i} + (3.0\text{ m})\vec{k}}{2.0\text{ s}} = (6.0\text{ m/s})\vec{i} + (1.5\text{ m/s})\vec{k}$$

Velocidade média

A velocidade média entre dois pontos é *independente da trajectória* seguida



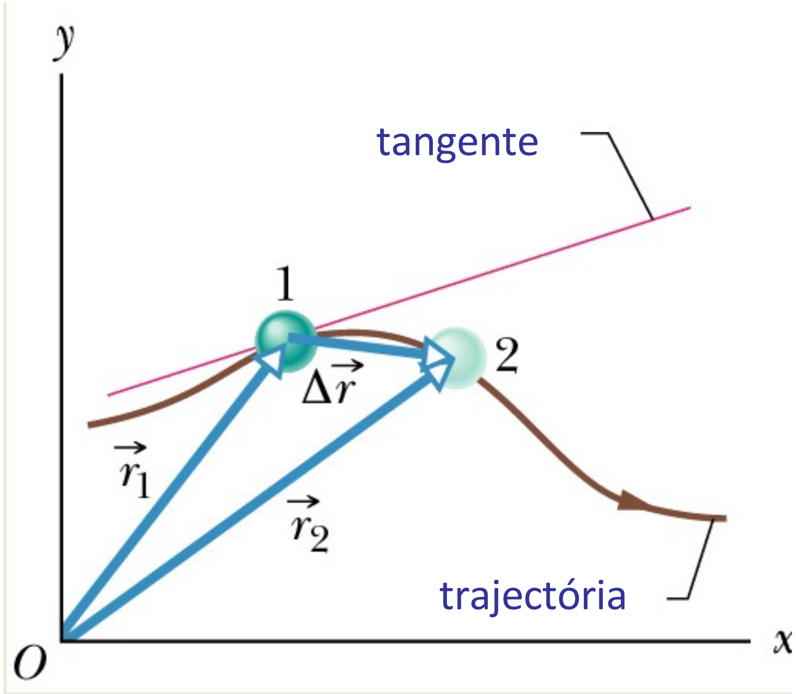
Resulta do facto de depender apenas do deslocamento, que é independente da trajectória

A Velocidade Instantânea

A velocidade instantânea é o limite da velocidade média quando Δt tende para zero

A direcção da velocidade instantânea é a da tangente à trajectória da partícula e o sentido é o do movimento

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



A Velocidade Instantânea

A velocidade instantânea pode ser escrita na forma

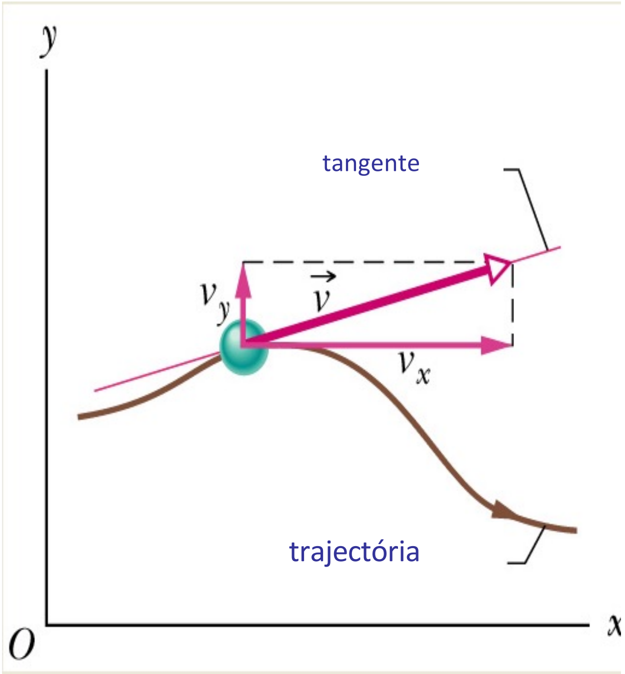
$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

ou

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

De onde

$$v_x = \frac{dx}{dt};\ v_y = \frac{dy}{dt};\ v_z = \frac{dz}{dt}$$



A Aceleração Média

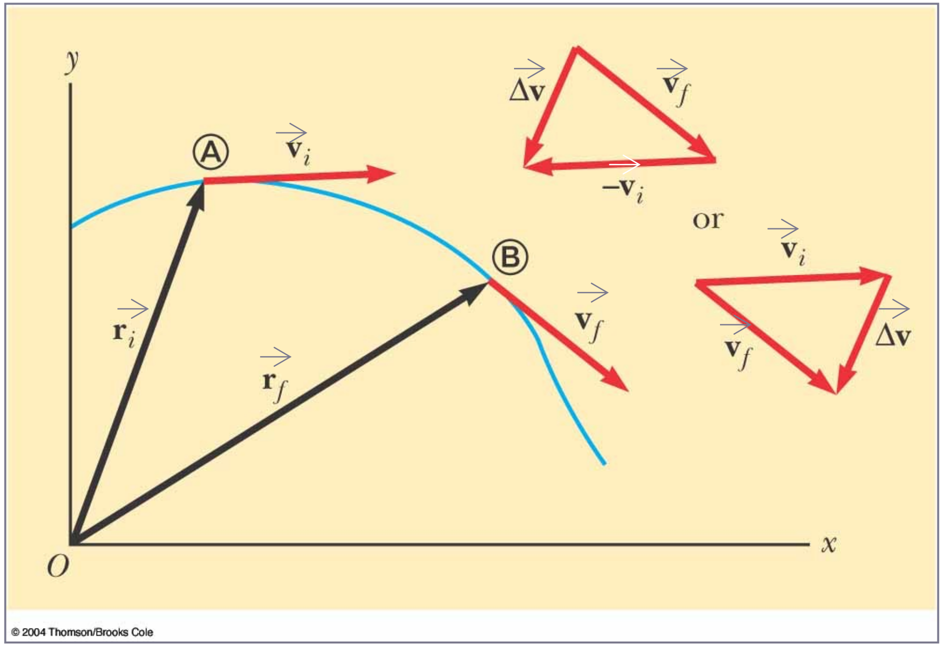
A aceleração média de uma partícula em movimento é definida como a variação da velocidade dividida pelo intervalo de tempo em que essa variação teve lugar.

$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

A Aceleração Média

Ao longo do movimento da partícula, $\Delta\vec{v}$ pode ser obtido por vários processos

A aceleração média é uma grandeza vectorial com a direcção e sentido de $\Delta\vec{v}$



A Aceleração Instantânea

A Aceleração Instantânea é o limite da aceleração média, $\Delta\vec{v}/\Delta t$, quando Δt tende para zero

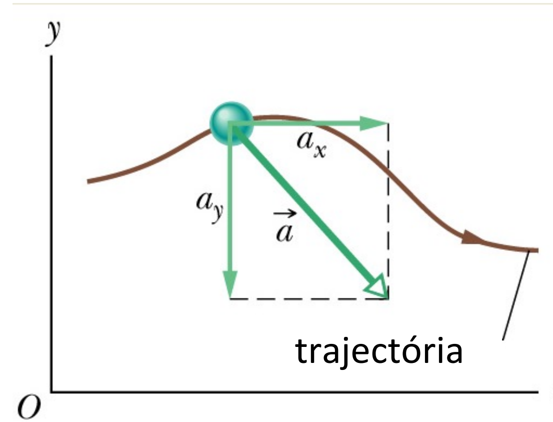
$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Relativamente aos vectores unitários, a aceleração escreve-se

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right) = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

ou

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$



de onde

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; a_y = \frac{dv_y}{dt}; a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

Equações da Cinemática, da Aceleração para a Velocidade

$\vec{a}(t)$ $\vec{v}(t)=?$

$t_0 \to t_1$ Δt_1 $\vec{a}_1 \Rightarrow \Delta\vec{v}_1=\vec{a}_1\Delta t_1$

$t_1 \to t_2$ Δt_2 $\vec{a}_2 \Rightarrow \Delta\vec{v}_2=\vec{a}_2\Delta t_2$

$t_2 \to t_3$ Δt_3 $\vec{a}_3 \Rightarrow \Delta\vec{v}_3=\vec{a}_3\Delta t_3$

$\vdots$

$t_{n-1} \to t$ Δt_n $\vec{a}_n \Rightarrow \Delta\vec{v}_n=\vec{a}_n\Delta t_n$

$$\Delta\vec{v}=\sum_{k=1}^{n}\vec{a}_k\Delta t_k$$

$$\Delta\vec{v}=\lim_{\Delta t_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}\vec{a}_k\Delta t_k=\int_{t_0}^{t}\vec{a}\,dt$$

$$t=t_0 \Rightarrow \vec{v}=\vec{v}_0$$

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{a}\,dt \Leftrightarrow \begin{cases} v_x=v_{0x}+\int_{t_0}^{t}a_x\,dt \\ v_y=v_{0y}+\int_{t_0}^{t}a_y\,dt \\ v_z=v_{0z}+\int_{t_0}^{t}a_z\,dt \end{cases}$$

Equações da Cinemática, da Velocidade para a Posição

$\boxed{\vec{v}(t)}$ $\vec{r}(t)=?$

$t_0 \rightarrow t$ $\Leftrightarrow$ n *intervalos* Δt_k $\vec{v}_k$ $\Rightarrow$ $\Delta\vec{r} = \sum_{k=1}^{n} \vec{v}_k \Delta t_k$

$$\Delta\vec{r} = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{v}_k \Delta t_k = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\, dt$$

$t = t_0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}\, dt \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x\, dt \\ y = y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y\, dt \\ z = z_0 + \int_{t_0}^{t} v_z\, dt \end{cases}$$

Equações gerais da Cinemática:

Aceleração variável no tempo

Vector velocidade $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Vector aceleração $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

Vector velocidade $\vec{v} = \int \vec{a}\, dt$

Vector posição $\vec{r} = \int \vec{v}\, dt$

Aceleração constante

$$\boxed{\vec{a} = cte.}$$

$$\vec{v}_\mathrm{f} = \vec{v}_\mathrm{i} + \vec{a}t$$

$$\vec{r}_\mathrm{f} = \vec{r}_\mathrm{i} + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

CASOS PARTICULARES

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{a}\,dt \qquad \vec{r}=\vec{r}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{v}\,dt$$

$$\vec{a}=a\vec{i}$$
$$\vec{v}_0=v_0\vec{i}$$
$$t_0=0\Rightarrow x=x_0$$

$$\vec{v}=v_0\vec{i}+\vec{i}\int_0^t a\,dt=(v_0+at)\vec{i}$$
$$\vec{r}=x_0\vec{i}+\vec{i}\int_0^t v_0\,dt+\vec{i}\int_0^t at\,dt=x_0\vec{i}+\vec{i}\left(v_0t+\frac{1}{2}at^2\right)$$

Movimento unidimensional uniformemente acelerado

Movimento bidimensional (exemplo movimento do projéctil)

$$\vec{a}=a\vec{j}$$
$$\vec{v}_0=v_{0x}\vec{i}+v_{0y}\vec{j}$$
$$t_0=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=x_0;y=y_0$$

$$\vec{a}\begin{cases}a_x=0\\a_y=a\end{cases}\Rightarrow\vec{v}\begin{cases}v_x=v_{0x}\\v_y=v_{0y}+at\end{cases}\Rightarrow\vec{r}\begin{cases}x=x_0+v_{0x}t\\y=y_0+v_{0y}t+\frac{1}{2}at^2\end{cases}$$

Exercício

A aceleração dum corpo é dada por $\vec{a} = (2t\,\vec{i})\,\mathrm{m/s^2}$. O corpo parte da origem das coordenadas com velocidade inicial, $\vec{v}_0 = (-2\,\vec{j})\,\mathrm{m/s}$. Determine o vector posicional como função do tempo e o deslocamento do corpo em 3,0 s.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt \Leftrightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} + \int_{t_0}^{t} a_x\,dt \\ v_y = v_{0y} + \int_{t_0}^{t} a_y\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = t^2 \\ v_y = -2 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = t^2\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x\,dt \\ y = y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t^3/3 \\ y = -2t \end{cases} \Rightarrow \vec{r} = \frac{t^3}{3}\vec{i} - 2t\,\vec{j}$$

A aceleração dum corpo é dada por $\vec{a} = (2t\,\vec{i}\,)\mathrm{m/s^2}$. O corpo parte da origem das coordenadas com velocidade inicial, $\vec{v}_0 = (-2\,\vec{j}\,)\mathrm{m/s}$. Determine o vector posicional como função do tempo e o deslocamento do corpo em 3,0 s.

$$\vec{r} = \frac{t^3}{3}\vec{i} - 2t\,\vec{j} \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}(t=3) = 9\vec{i} - 6\,\vec{j} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\vec{r}(t=3) = 9\vec{i} - 6\,\vec{j}$$

$$\vec{r}(t=0) = 0\vec{i} - 0\,\vec{j}$$

Como os versores cartesianos são constantes no tempo pode integrar-se a versão vectorial

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt = -2\vec{j} + t^2\vec{i} \quad \Longrightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt = -2t\,\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{i}$$