Física

Licenciatura em Engenharia Informática

Susana Sério

Aula 09

Sumário

Oscilações

- ✓ A Energia no Movimento Harmónico Simples
- ✓ Um Oscilador Harmónico Simples Angular
- ✓ O Pêndulo simples
- ✓ O Movimento Harmónico Simples Amortecido
- ✓ Oscilações Forçadas e Ressonância

Energia do Oscilador MHS

Supomos que um sistema de uma massa e uma mola se move sobre uma superfície sem atrito;

Concluímos que a energia total é constante;

A **energia cinética** é:

$E_C = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mw^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

A **energia potencial elástica** é:

$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$

A **energia total** é: $E_C + U = \frac{1}{2} kA^2 = C^{te}$.

Energia do Oscilador MHS

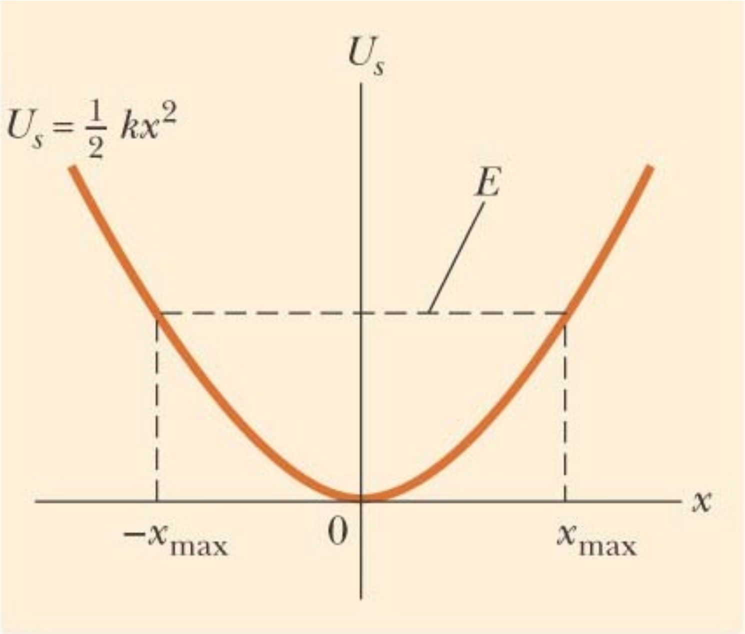
A energia potencial é:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

A energia mecânica total é constante:

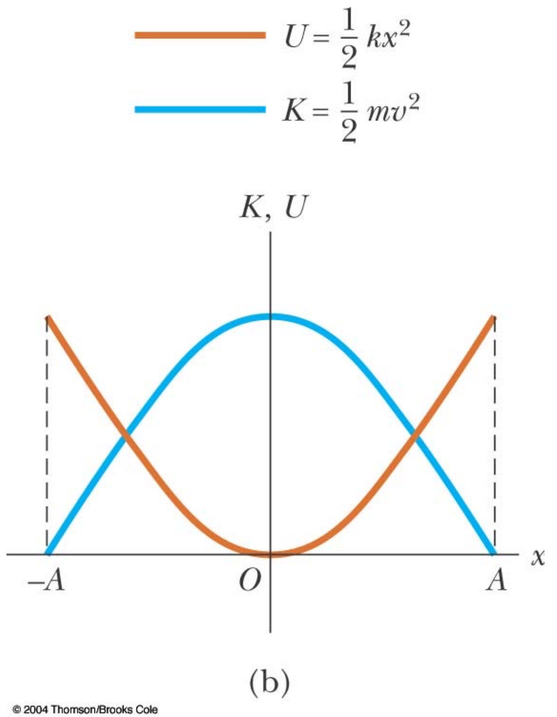
$$U = \frac{1}{2}kx_{max}{}^2$$

A energia mecânica total é proporcional ao quadrado da amplitude: $A = x_{max}$

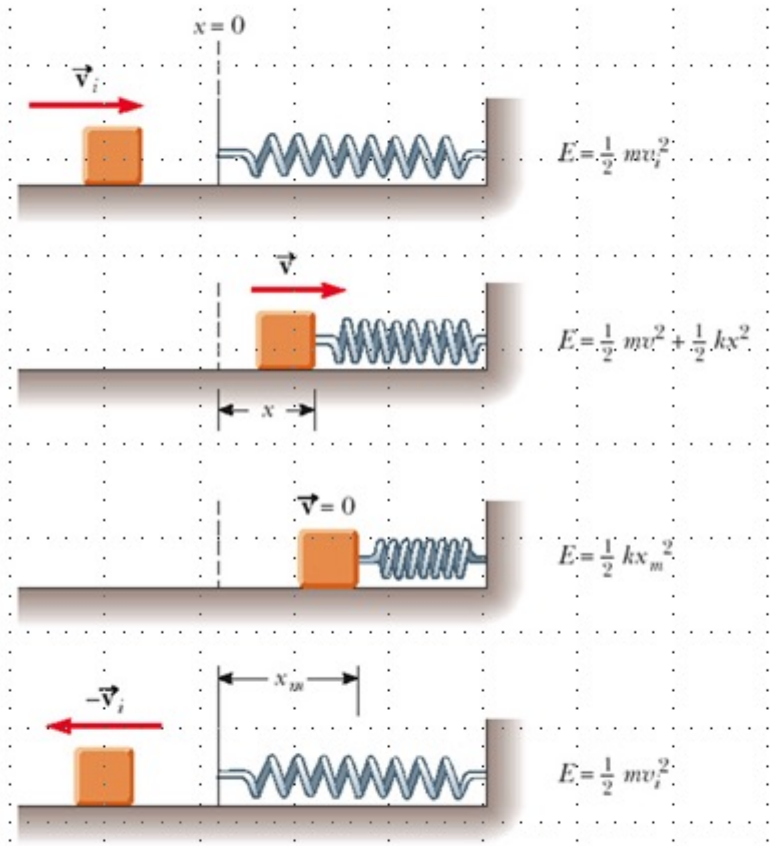


Energia do Oscilador MHS

- ✓ A energia mecânica total é constante;
- ✓ A energia está continuamente a ser transferida entre energia potencial acumulada na mola e energia cinética do bloco;



Energia do Oscilador MHS

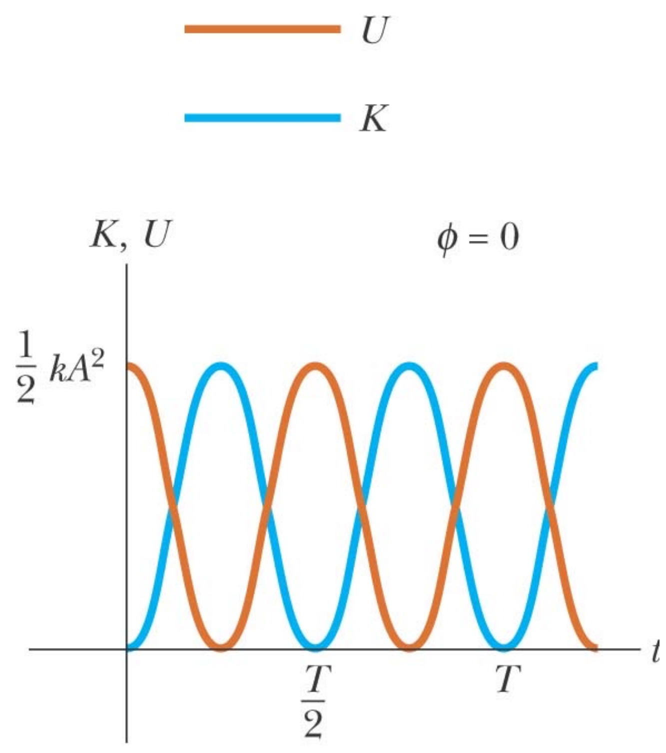


Energia do Oscilador MHS

- ✓ À medida que o movimento continua, a troca de energia também continua;

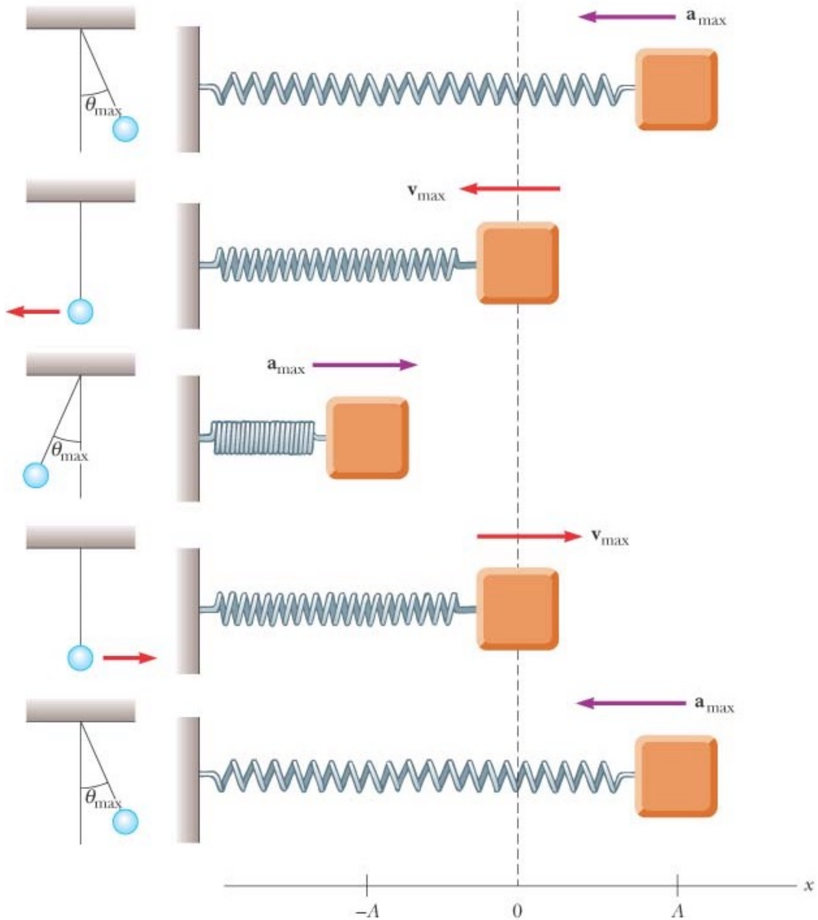
- ✓ A energia pode ser utilizada para encontrar a velocidade;

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$
$$= \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$



(a)

Energia do Oscilador MHS, sumário



t	x	v	a	E_C	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

O Pêndulo Simples

- ✓ Um pêndulo simples também exibe movimento periódico;
- ✓ O movimento ocorre no plano vertical e é provocado pela força gravítica;
- ✓ O movimento é muito próximo de MHS se o ângulo é pequeno (<10˚).

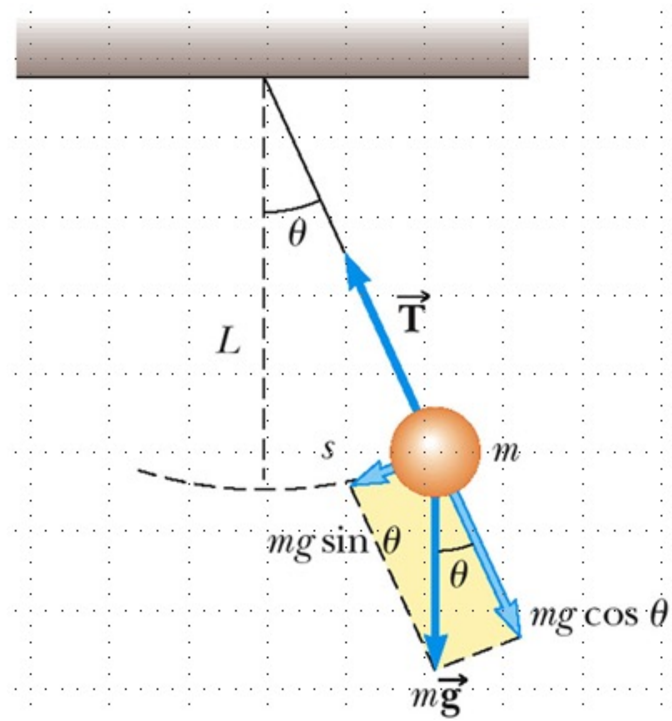
O Pêndulo Simples

A forças que actuam na esfera são $\vec{T}$ e $m\vec{g}$

$\vec{T}$ é a **tensão da corda**

$m\vec{g}$ é a **força gravítica**

A componente tangencial da força gravítica é uma força restauradora.



O Pêndulo Simples

Na direcção tangencial,

$$F_t = -mg\sin\theta = m\frac{d^2 s}{dt^2}$$

O comprimento, *L*, do pêndulo é constante, e para valores pequenos de θ

s=Lθ

s=Lθ: ds/dt=Ldθ/dt

$ds^2/dt^2=Ld\theta^2/dt^2$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta = -\frac{g}{L}\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Isto confirma que o movimento é MHS

O Pêndulo Simples

A função $\theta(t)$ pode ser escrita na forma:

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \phi)$$

A frequência angular é:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

O período é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

O Pêndulo Simples, Sumário

- ✓ O período e a frequência de um pêndulo simples dependem apenas do comprimento da corda e da aceleração da gravidade;

- ✓ O período é independente da massa;

- ✓ Todos os pêndulos simples com o mesmo comprimento e no mesmo local oscilam com o mesmo período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

O Pêndulo Simples

Oscilações Amortecidas

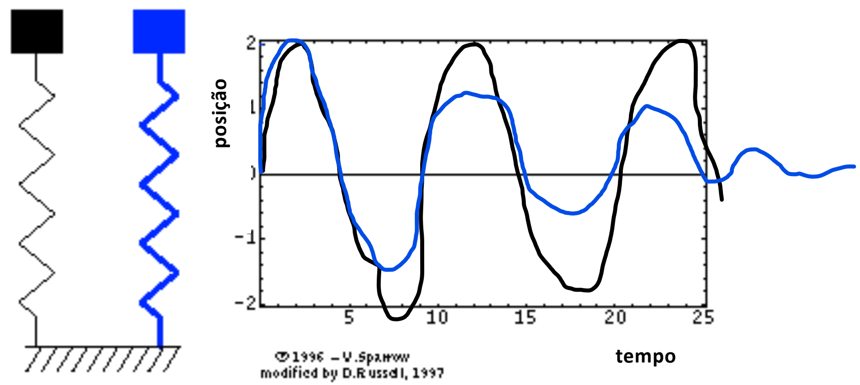
Em muitos sistemas reais, estão presentes forças não conservativas;

- ✓ O sistema deixa de ser ideal;
- ✓ O atrito é uma força não conservativa comum;

Neste caso, a energia mecânica do sistema diminui com o tempo, diz-se que o movimento é ***amortecido***.

Oscilações Amortecidas

Movimento oscilatório harmónico simples

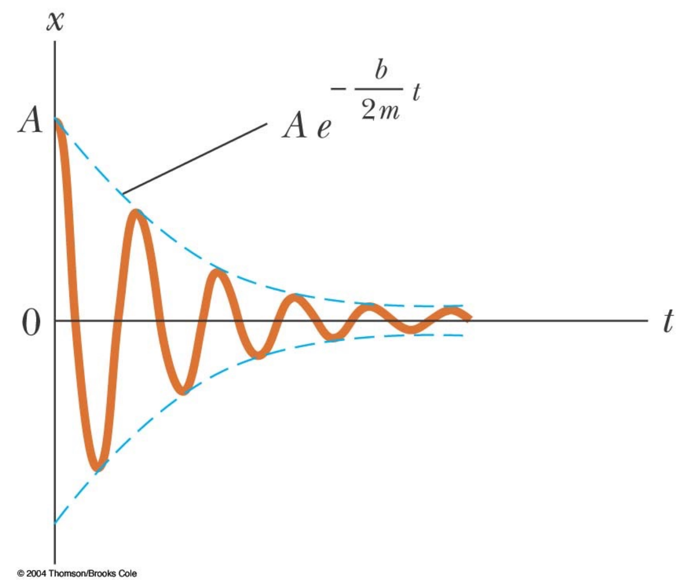


Movimento oscilatório harmónico amortecido

Oscilações Amortecidas

A amplitude diminui com o tempo;

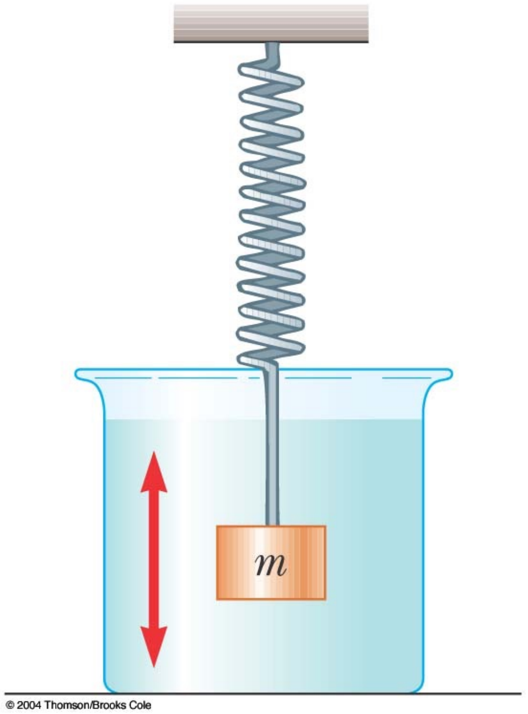
A linha azul a tracejado é o ***envelope*** do movimento.



Oscilações Amortecidas

Exemplo

Um exemplo de movimento amortecido ocorre quando um corpo ligado a uma mola é imerso num líquido viscoso



A força de amortecimento pode ser expressa como $\boldsymbol{R} = - b\,\boldsymbol{v}$ em que b é uma constante

b é denominado ***coeficiente de amortecimento***

Oscilações Amortecidas

A força restauradora é $-kx$;

Da Segunda Lei de Newton:

$$\sum F_x = -k\,x - bv_x = ma_x$$

Quando a força amortecedora é pequena comparada com o valor máximo da força restauradora, podemos obter uma expressão para x;

Isto ocorre quando b é pequeno.

Oscilações Amortecidas

A posição é dada por:

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

A frequência angular será:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Oscilações Amortecidas - Sumário

- ✓ Quando a força de amortecimento é pequena, o carácter oscilatório do movimento é preservado, mas a amplitude diminui exponencialmente com o tempo;
- ✓ O movimento cessará eventualmente;
- ✓ A frequência angular pode assumir outra forma:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

em que ω_0 é a frequência angular na ausência da força amortecedora:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Tipos de Amortecimento

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

é também chamada a ***frequência natural*** do sistema

Se $R_{max} = bv_{max} < kA$, diz-se que o sistema é ***subamortecido***;

Quando b atinge um valor crítico b_c tal que $b_c\,/2\text{ m} = \omega_0$, o sistema não oscilará.

Diz-se que o sistema é ***criticamente amortecido***;

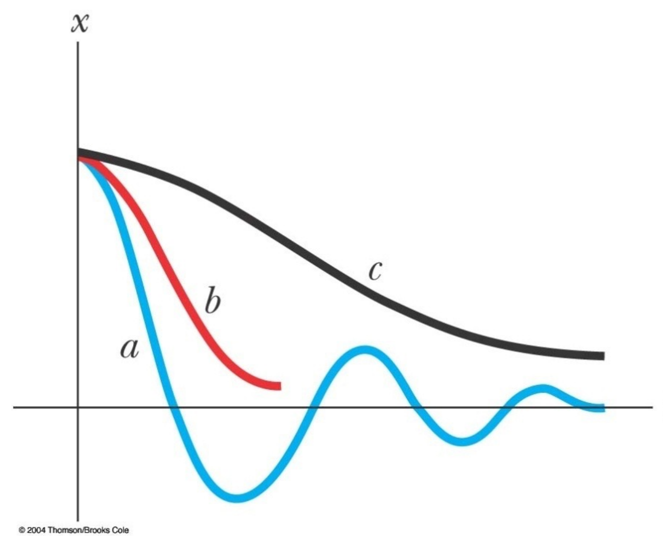
Tipos de Amortecimento

Gráficos da posição em função do tempo de:

(a) um oscilador subamortecido;

(b) um oscilador criticamente amortecido;

(c) um oscilador sobre-amortecido.



Nos casos de amortecimento crítico ou sobre-amortecimento, **não existe** frequência angular.

Oscilações Forçadas

- ✓ Podemos compensar a perda de energia num sistema amortecido, aplicando uma força exterior;

- ✓ A amplitude do movimento manter-se-á constante se a energia fornecida por ciclo for exactamente igual à perda de energia mecânica resultante das forças resistivas.

Oscilações Forçadas

Após a força exterior começar a actuar, a amplitude das oscilações aumentará;

Após um intervalo de tempo suficientemente elevado,

$$E_{\text{fornecida}} = E_{\text{transformada em energia interna}}$$

Eventualmente é atingido um estado estacionário e o movimento prosseguirá com amplitude constante.

Oscilações Forçadas

A amplitude das oscilações forçadas é:

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

em que ω_0 é a frequência natural do oscilador não amortecido.

Ressonância

Quando a frequência da força exterior está próxima da frequência natural do oscilador ($\omega \approx \omega_0$), ocorre um aumento da amplitude;

Este aumento dramático da amplitude é denominado ***ressonância***;

A frequência natural, ω_0, é também denominada *frequência de ressonância* do sistema.

Ressonância

- ✓ Na ressonância, a força aplicada está em fase com a velocidade e a potência transferida para o oscilador é máxima;

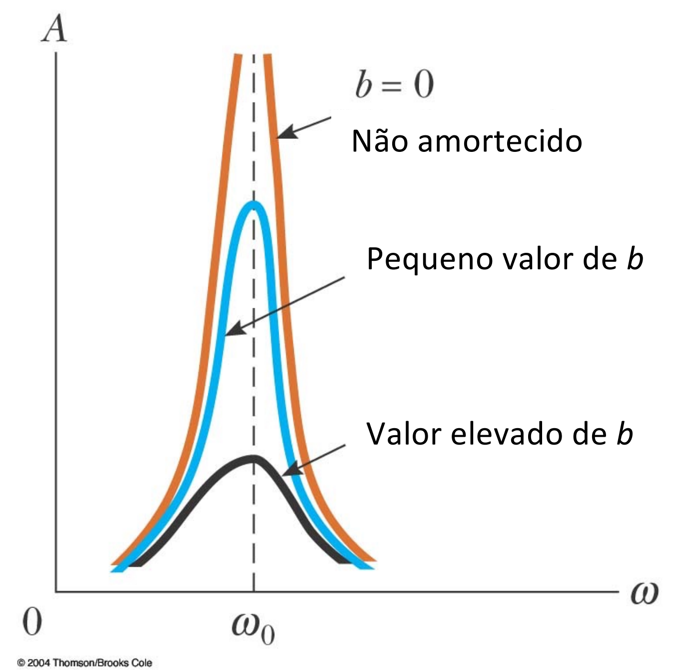
- ✓ A força aplicada e a velocidade são ambas proporcionais a sin $(\omega t + \phi)$;

- ✓ A potência transferid: $\vec{F} \cdot \vec{v}$

- ✓ É máxima quando $\vec{F}$ e $\vec{v}$ estão em fase.

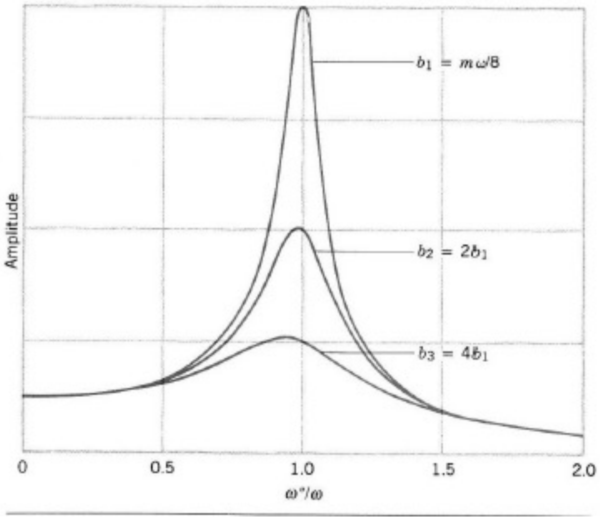
Ressonância

- A Ressonância (o máximo do pico) ocorre quando a frequência da força aplicada é igual à frequência natural;
- A amplitude aumenta quando o amortecimento diminui;
- A curva alarga-se quando o amortecimento aumenta;
- A forma da curva de ressonância depende de *b*.



Efeitos da ressonância

Colapso da ponte de Tacoma, EUA

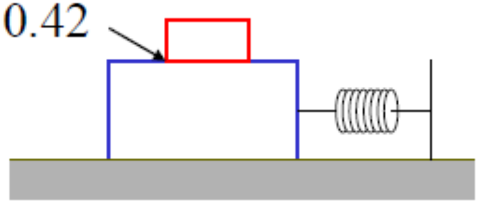


A amplitude é **máx.** quando a frequência imposta é ω_o

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

Dois blocos (m=1,22 kg e M=8,73kg) e uma mola (k=344 N/m) estão dispostos como se mostra na figura sobre uma superfície sem atrito. O coeficiente de atrito estático entre os blocos é 0,42. Qual a máxima amplitude de oscilação possível para que não haja deslizamento entre os blocos? R: 0.12 m

$\mu_e = 0.42$



A aceleração máxima antes do bloco *m* escorregar é,

$$a_{\max} = \frac{f_{ae,\max}}{m} = \frac{\mu_e(mg)}{m} = \mu_e g$$

Ora a aceleração do movimento oscilatório é,

$$a = \frac{dx^2}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

cujo valor máximo é: $A\omega^2$

Assim,

$$A\omega^2 < \mu_e g$$

$$A < \frac{\mu_e g}{\omega^2}$$

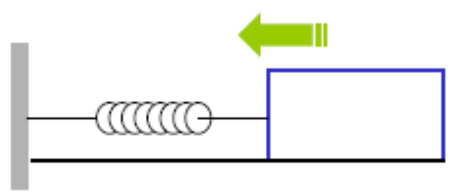
$$< \frac{\mu_e g(M+m)}{k} = 0.12m$$

Um objecto de 5,13 kg move-se numa superfície horizontal sem atrito sob a acção de uma mola de constante 9.88 N/cm. O objecto é deslocado de 53,5 cm e é-lhe dada uma velocidade inicial de 11,2 m/s no sentido da sua posição de equilíbrio. Determine (a) a frequência do movimento, (b) a energia potencial inicial, (c) a energia cinética inicial e (d) a amplitude do movimento (e) a fase inicial. (R: 2.2 Hz; 141 J; 322 J; 96.7 cm; 56º)

a) $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 2.2Hz$

b) $U_{eo} = \frac{1}{2}kx_o^2$

c) $E_{co} = \frac{1}{2}mv_o^2$



d) e e) $\begin{cases} x_o = A\cos(\phi) \\ v_o = -A\omega\sin(\phi) \end{cases}$

$\begin{cases} 0.535 = A\cos(\phi) \\ -11.2 = -13.9A\sin(\phi) \end{cases}$

$\begin{cases} A = 0.96m \\ \phi = 124^{o} \end{cases}$

Um oscilador consiste de um bloco preso a uma mola de constante 456 N/m. Num instante t, a posição, a velocidade e a aceleração são 0.112 m, -13.6 m/s e -123 m/s^2 respectivamente. Calcule (a) a frequência, (b) a massa do bloco e (c) a amplitude de oscilação (d) a fase inicial relativa a esse instante. (R: 5.27 Hz; 0.415 Kg; 0.425 m; 1.3 rad)

$$\begin{cases} x_o = A\cos(\phi) \\ v = -A\omega\sin(\phi) \\ a = -A\omega^2\cos(\phi) \end{cases} \begin{cases} A = 0.425m \\ \omega = 33.2\,rad/s \\ \phi = 1.3rad \end{cases}$$

A frequência é, $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$