

# Física

Licenciatura em Engenharia Informática

Susana Sério

Aula 09

# Sumário

## Oscilações

- ✓ A Energia no Movimento Harmónico Simples
- ✓ Um Oscilador Harmónico Simples Angular
- ✓ O Pêndulo simples
- ✓ O Movimento Harmónico Simples Amortecido
- ✓ Oscilações Forçadas e Ressonância

## Energia do Oscilador MHS

Supomos que um sistema de uma massa e uma mola se move sobre uma superfície sem atrito;

Concluimos que a energia total é constante;

A energia cinética é:

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2 (\omega t + \phi)$$

A energia potencial elástica é:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 (\omega t + \phi)$$

A energia total é:  $E_C + U = \frac{1}{2} k A^2 = C^{te}$ .

## Energia do Oscilador MHS

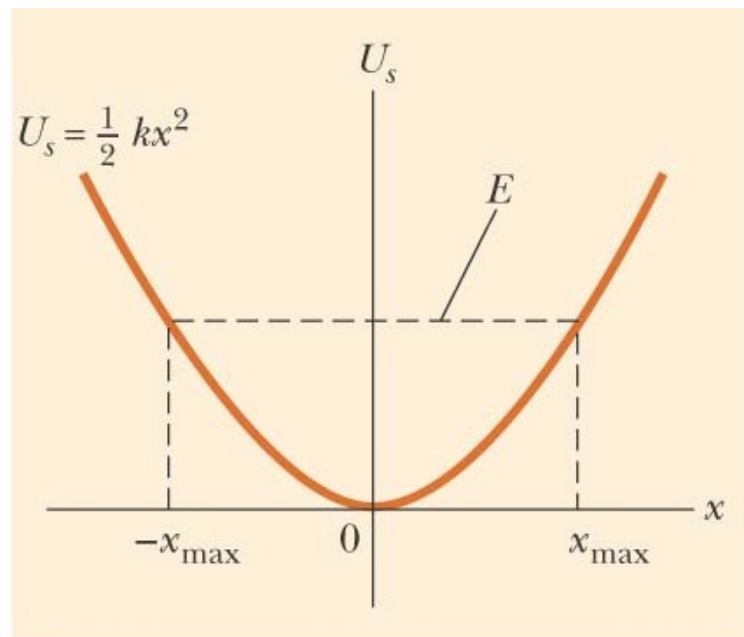
A energia potencial é:

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

A energia mecânica total é constante:

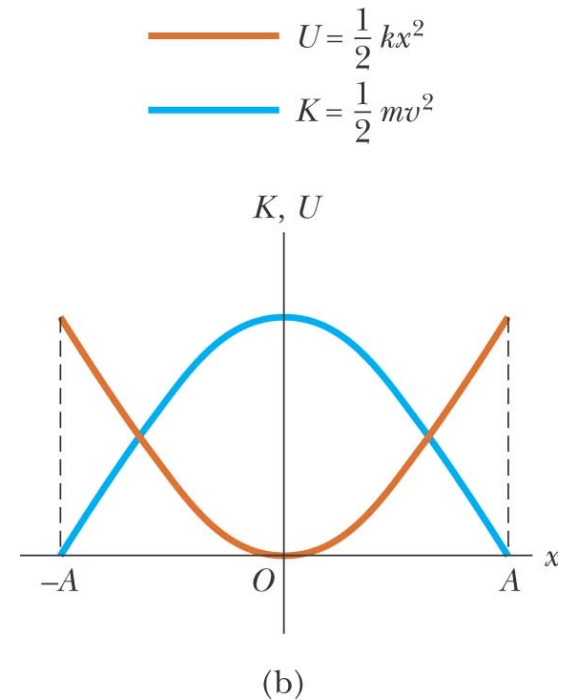
$$U = \frac{1}{2} kx_{\max}^2$$

A energia mecânica total é proporcional ao quadrado da amplitude:  $A = x_{\max}$



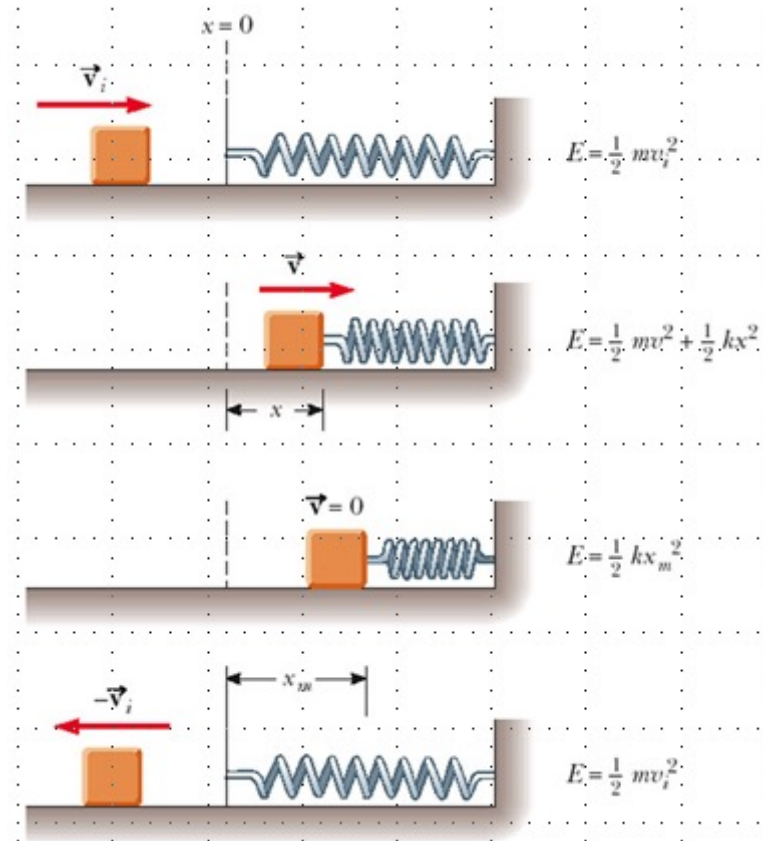
## Energia do Oscilador MHS

- ✓ A energia mecânica total é constante;
- ✓ A energia está continuamente a ser transferida entre energia potencial acumulada na mola e energia cinética do bloco;



© 2004 Thomson/Brooks Cole

# Energia do Oscilador MHS

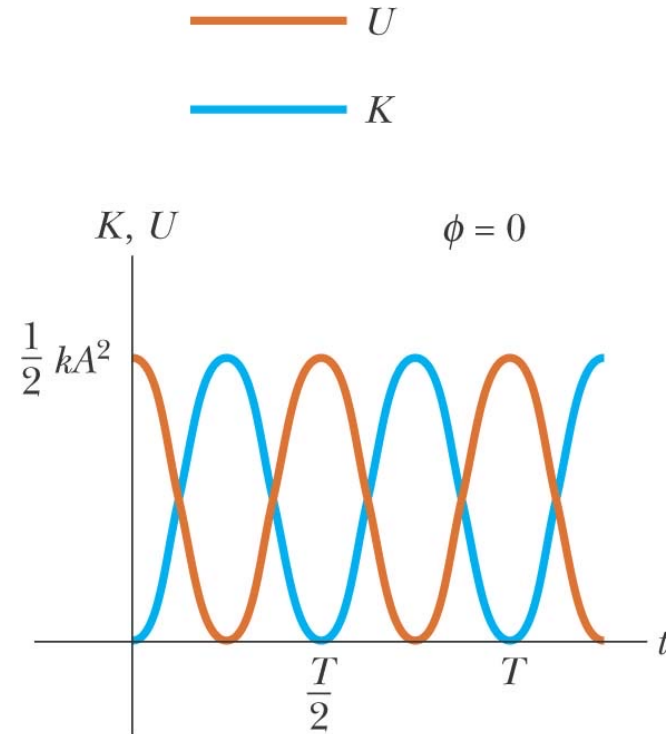


## Energia do Oscilador MHS

- ✓ À medida que o movimento continua, a troca de energia também continua;
- ✓ A energia pode ser utilizada para encontrar a velocidade;

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)}$$

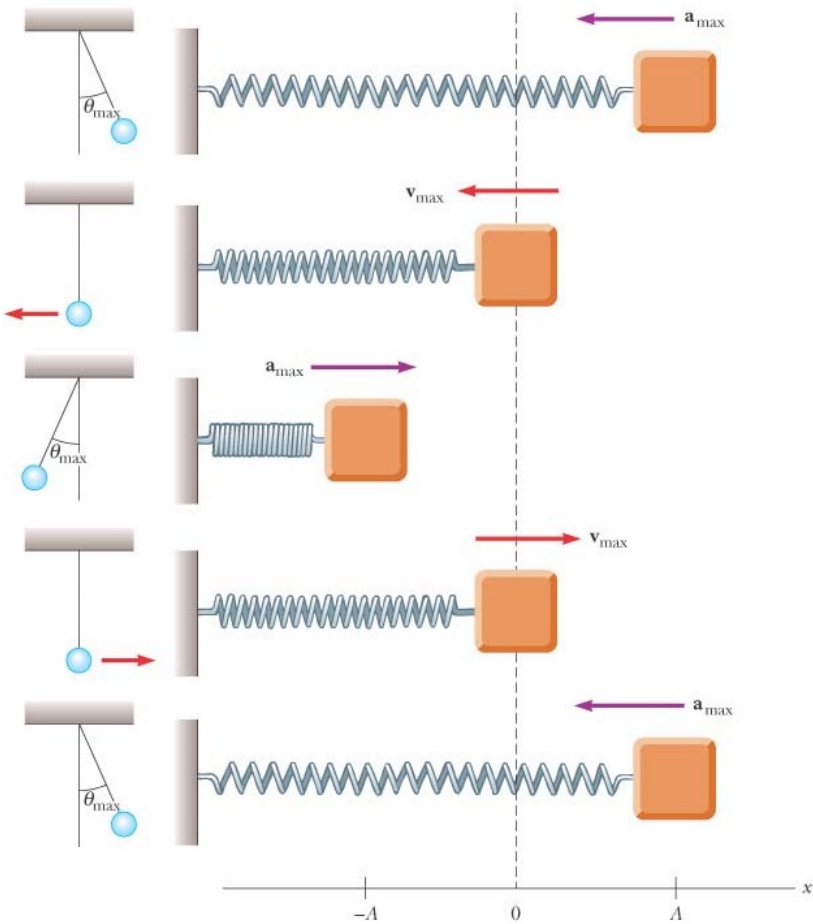
$$= \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$



(a)

© 2004 Thomson/Brooks Cole

# Energia do Oscilador MHS, sumário



$t$	$x$	$v$	$a$	$E_c$	$U$
$0$	$A$	$0$	$-\omega^2 A$	$0$	$\frac{1}{2} k A^2$
$T/4$	$0$	$-\omega A$	$0$	$\frac{1}{2} k A^2$	$0$
$T/2$	$-A$	$0$	$\omega^2 A$	$0$	$\frac{1}{2} k A^2$
$3T/4$	$0$	$\omega A$	$0$	$\frac{1}{2} k A^2$	$0$
$T$	$A$	$0$	$-\omega^2 A$	$0$	$\frac{1}{2} k A^2$



## O Pêndulo Simples

- ✓ Um pêndulo simples também exhibe movimento periódico;
- ✓ O movimento ocorre no plano vertical e é provocado pela força gravítica;
- ✓ O movimento é muito próximo de MHS se o ângulo é pequeno ( $<10^\circ$ ).

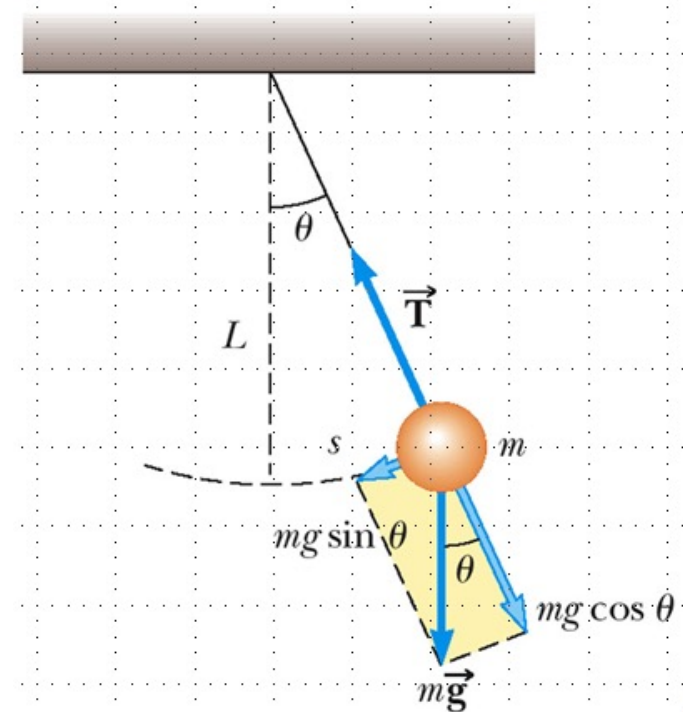
# O Pêndulo Simples

A forças que actuam na esfera são  $\vec{T}$  e  $m\vec{g}$

$\vec{T}$  é a **tensão da corda**

$m\vec{g}$  é a **força gravítica**

A componente tangencial da força gravítica é uma força restauradora.



# O Pêndulo Simples

Na direcção tangencial,

$$F_t = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

O comprimento,  $L$ , do pêndulo é constante, e para valores pequenos de  $\theta$

$$s = L\theta$$

$$s = L\theta: ds/dt = L d\theta/dt$$

$$ds^2/dt^2 = L d\theta^2/dt^2$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta = -\frac{g}{L} \theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Isto confirma que o movimento é MHS

## O Pêndulo Simples

A função  $\theta(t)$  pode ser escrita na forma:

$$\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi)$$

A frequência angular é:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

O período é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

## O Pêndulo Simples, Sumário

- ✓ O período e a frequência de um pêndulo simples dependem apenas do comprimento da corda e da aceleração da gravidade;
- ✓ O período é independente da massa;
- ✓ Todos os pêndulos simples com o mesmo comprimento e no mesmo local oscilam com o mesmo período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

# O Pêndulo Simples



# Oscilações Amortecidas

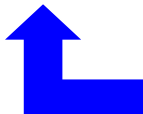
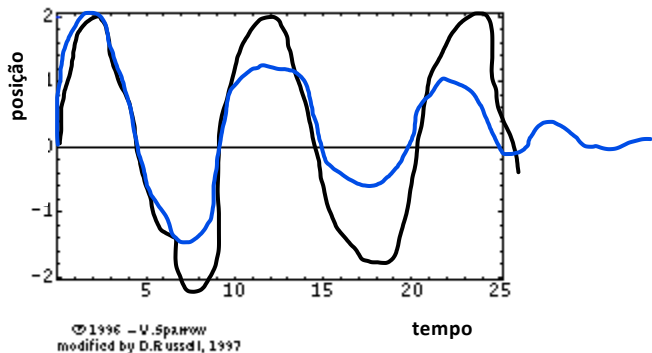
Em muitos **sistemas reais**, estão presentes **forças não conservativas**;

- ✓ O sistema deixa de ser ideal;
- ✓ O atrito é uma força não conservativa comum;

Neste caso, a **energia mecânica do sistema diminui com o tempo**, diz-se que o movimento é ***amortecido***.

# Oscilações Amortecidas

Movimento  
oscilatório  
harmónico  
simples



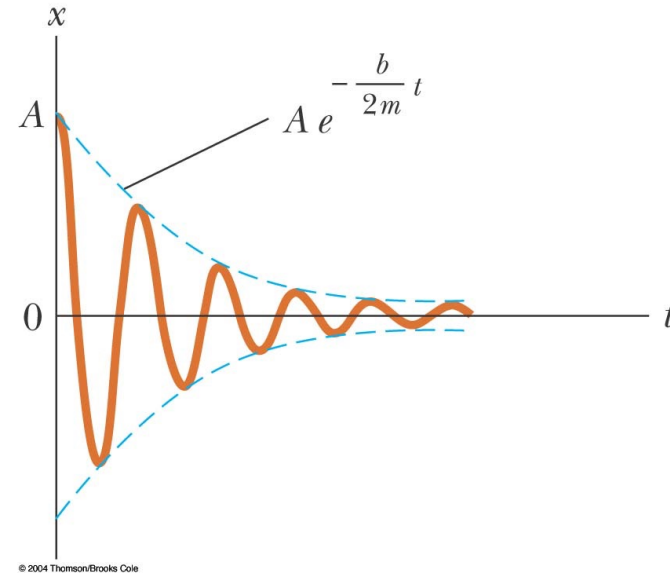
Movimento  
oscilatório  
harmónico  
amortecido



# Oscilações Amortecidas

A amplitude diminui com o tempo;

A linha azul a tracejado é o ***envelope*** do movimento.



© 2004 Thomson/Brooks Cole

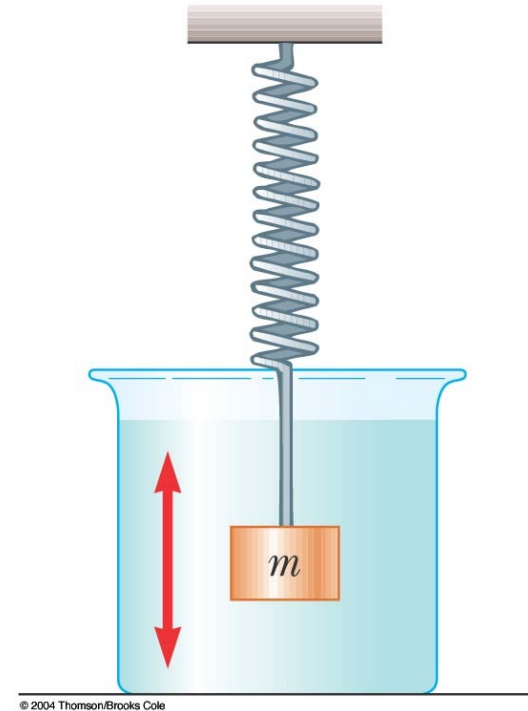
# Oscilações Amortecidas

## Exemplo

Um exemplo de movimento amortecido ocorre quando um corpo ligado a uma mola é imerso num líquido viscoso

A força de amortecimento pode ser expressa como  $R = -b v$  em que  $b$  é uma constante

$b$  é denominado **coeficiente de amortecimento**



© 2004 Thomson/Brooks Cole

# Oscilações Amortecidas

A força restauradora é  $-kx$ ;

Da Segunda Lei de Newton:

$$\Sigma F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

Quando a força amortecedora é pequena comparada com o valor máximo da força restauradora, podemos obter uma expressão para  $x$ ;

Isto ocorre quando  $b$  é pequeno.

## Oscilações Amortecidas

A **posição** é dada por:

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

A **frequência angular** será:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

## Oscilações Amortecidas - Sumário

- ✓ Quando a força de amortecimento é pequena, o carácter oscilatório do movimento é preservado, mas a amplitude diminui exponencialmente com o tempo;
- ✓ O movimento cessará eventualmente;
- ✓ A frequência angular pode assumir outra forma:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

em que  $\omega_0$  é a frequência angular na ausência da força amortecedora:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

## Tipos de Amortecimento

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

é também chamada a *frequência natural* do sistema

Se  $R_{\max} = bv_{\max} < kA$ , diz-se que o sistema é *subamortecido*;

Quando  $b$  atinge um valor crítico  $b_c$  tal que  $b_c / 2m = \omega_0$ , o sistema não oscilará.

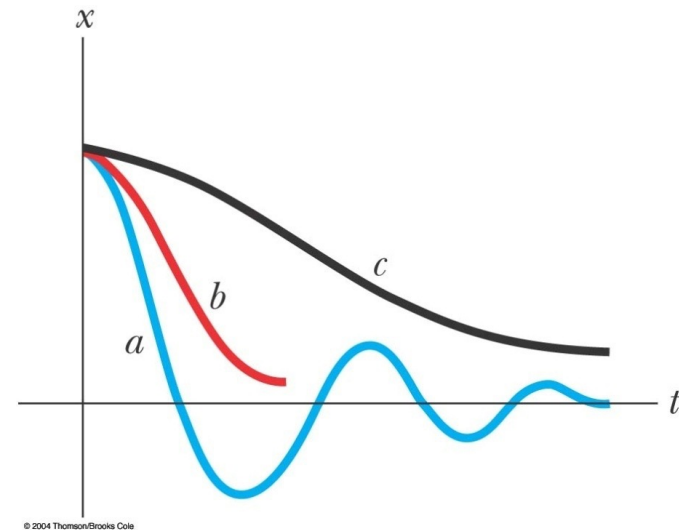
Diz-se que o sistema é *criticamente amortecido*;

## Tipos de Amortecimento

Gráficos da posição em função do tempo de:

- (a) um oscilador subamortecido;
- (b) um oscilador criticamente amortecido;
- (c) um oscilador sobre-amortecido.

Nos casos de amortecimento crítico ou sobre-amortecimento, **não existe** frequência angular.



## Oscilações Forçadas

- ✓ Podemos compensar a perda de energia num sistema amortecido, aplicando uma força exterior;
- ✓ A amplitude do movimento manter-se-á constante se a energia fornecida por ciclo for exactamente igual à perda de energia mecânica resultante das forças resistivas.



# Oscilações Forçadas

Após a força exterior começar a actuar, a amplitude das oscilações aumentará;

Após um intervalo de tempo suficientemente elevado,

$$E_{\text{fornecida}} = E_{\text{transformada em energia interna}}$$

Eventualmente é atingido um estado estacionário e o movimento prosseguirá com amplitude constante.

# Oscilações Forçadas

A amplitude das oscilações forçadas é:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

em que  $\omega_0$  é a frequência natural do oscilador não amortecido.

# Ressonância

Quando a frequência da força exterior está próxima da frequência natural do oscilador ( $\omega \approx \omega_0$ ), ocorre um aumento da amplitude;

Este aumento dramático da amplitude é denominado *ressonância*;

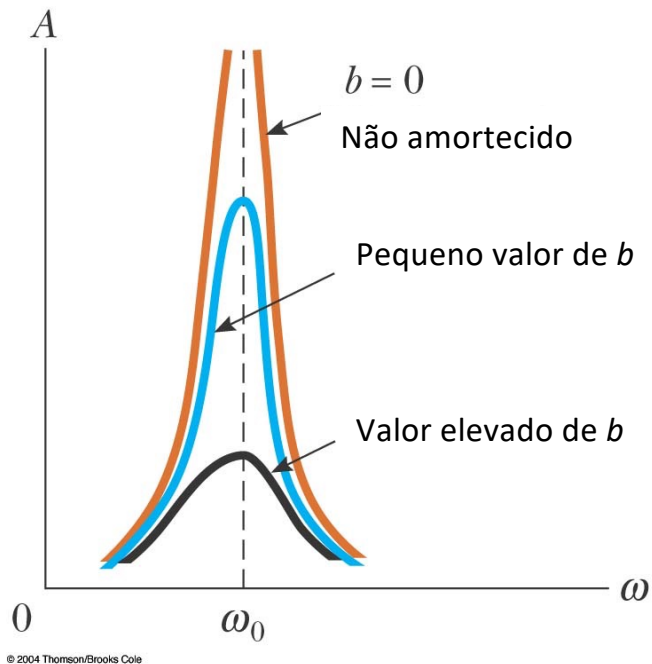
A frequência natural,  $\omega_0$ , é também denominada *frequência de ressonância do sistema*.

# Ressonância

- ✓ Na ressonância, a força aplicada está em fase com a velocidade e a potência transferida para o oscilador é máxima;
- ✓ A força aplicada e a velocidade são ambas proporcionais a  $\sin(\omega t + \phi)$ ;
- ✓ A potência transferida:  $\vec{F} \cdot \vec{v}$
- ✓ É máxima quando  $\vec{F}$  e  $\vec{v}$  estão em fase.

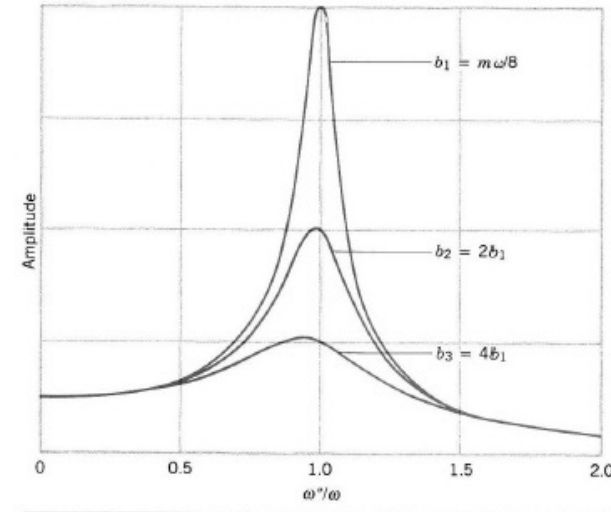
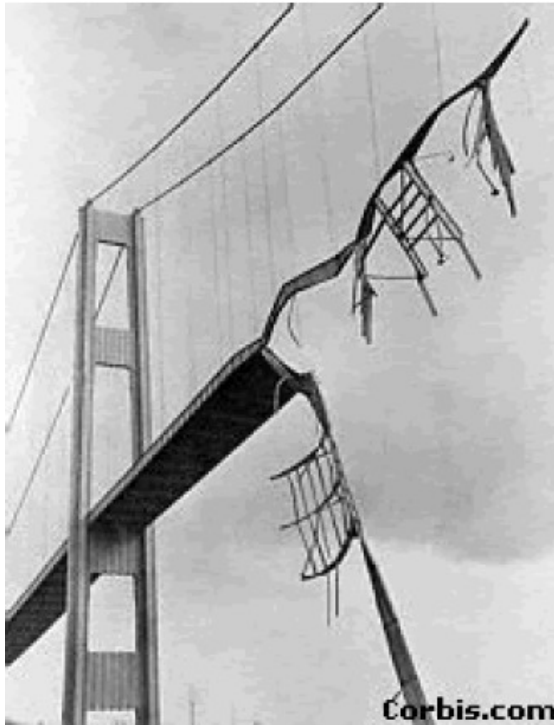
# Ressonância

- ✓ A Ressonância (o máximo do pico) ocorre quando a frequência da força aplicada é igual à frequência natural;
- ✓ A amplitude aumenta quando o amortecimento diminui;
- ✓ A curva alarga-se quando o amortecimento aumenta;
- ✓ A forma da curva de ressonância depende de  $b$ .



## Efeitos da ressonância

Colapso da ponte de Tacoma, EUA



A amplitude é **máx.** quando a frequência imposta é  $\omega_0$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

Dois blocos (  $m=1,22$  kg e  $M=8,73$ kg) e uma mola ( $k=344$  N/m) estão dispostos como se mostra na figura sobre uma superfície sem atrito. O coeficiente de atrito estático entre os blocos é 0,42. Qual a máxima amplitude de oscilação possível para que não haja deslizamento entre os blocos? R: 0.12 m

A aceleração máxima antes do bloco  $m$  escorregar é,

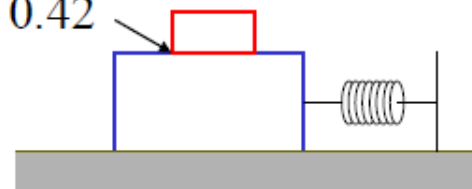
$$a_{\max} = \frac{f_{ae,\max}}{m} = \frac{\mu_e (mg)}{m} = \mu_e g$$

Ora a aceleração do movimento oscilatório é,

$$a = \frac{dx^2}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

cujo valor máximo é:  $A\omega^2$

$$\mu_e = 0.42$$



Assim,

$$A\omega^2 < \mu_e g$$

$$A < \frac{\mu_e g}{\omega^2}$$

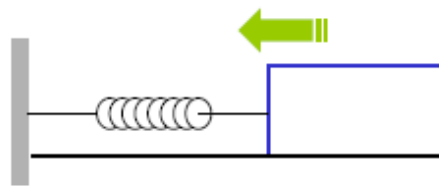
$$< \frac{\mu_e g (M + m)}{k} = 0.12 m$$

Um objecto de 5,13 kg move-se numa superfície horizontal sem atrito sob a acção de uma mola de constante 9.88 N/cm. O objecto é deslocado de 53,5 cm e é-lhe dada uma velocidade inicial de 11,2 m/s no sentido da sua posição de equilíbrio. Determine (a) a frequência do movimento, (b) a energia potencial inicial, (c) a energia cinética inicial e (d) a amplitude do movimento (e) a fase inicial. (R: 2.2 Hz; 141 J; 322 J; 96.7 cm; 56°)

$$a) f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 2.2 \text{ Hz}$$

$$b) U_{eo} = \frac{1}{2} kx_o^2$$

$$c) E_{co} = \frac{1}{2} mv_o^2$$



$$d) \text{ e } e) \begin{cases} x_o = A \cos(\phi) \\ v_o = -A\omega \sin(\phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.535 = A \cos(\phi) \\ -11.2 = -13.9 A \sin(\phi) \\ A = 0.96 \text{ m} \\ \phi = 124^\circ \end{cases}$$



Um oscilador consiste de um bloco preso a uma mola de constante 456 N/m. Num instante  $t$ , a posição, a velocidade e a aceleração são 0.112 m, -13.6 m/s e -123 m/s<sup>2</sup> respectivamente. Calcule (a) a frequência, (b) a massa do bloco e (c) a amplitude de oscilação (d) a fase inicial relativa a esse instante. (R: 5.27 Hz; 0.415 Kg; 0.425 m; 1.3 rad)

$$\begin{cases} x = A \cos(\phi) \\ v = -A\omega \sin(\phi) \\ a = -A\omega^2 \cos(\phi) \end{cases} \begin{cases} A = 0.425 \text{ m} \\ \omega = 33.2 \text{ rad/s} \\ \phi = 1.3 \text{ rad} \end{cases}$$

A frequência é,  $f = \frac{\omega}{2\pi}$