Física

Licenciatura em Engenharia Informática

Susana Sério

Aula 04

Movimento de um Projéctil

Um objecto pode mover-se simultaneamente nas direcções dos eixos dos *x* e dos *y;*

Ao movimento bidimensional em que a componente da aceleração segundo o eixo horizontal (em geral, o eixo dos *x*) **é nula** e a componente da aceleração segundo o eixo vertical (em geral, o eixo dos *y*) **é constante**, dá-se o nome de **movimento de um projéctil**.

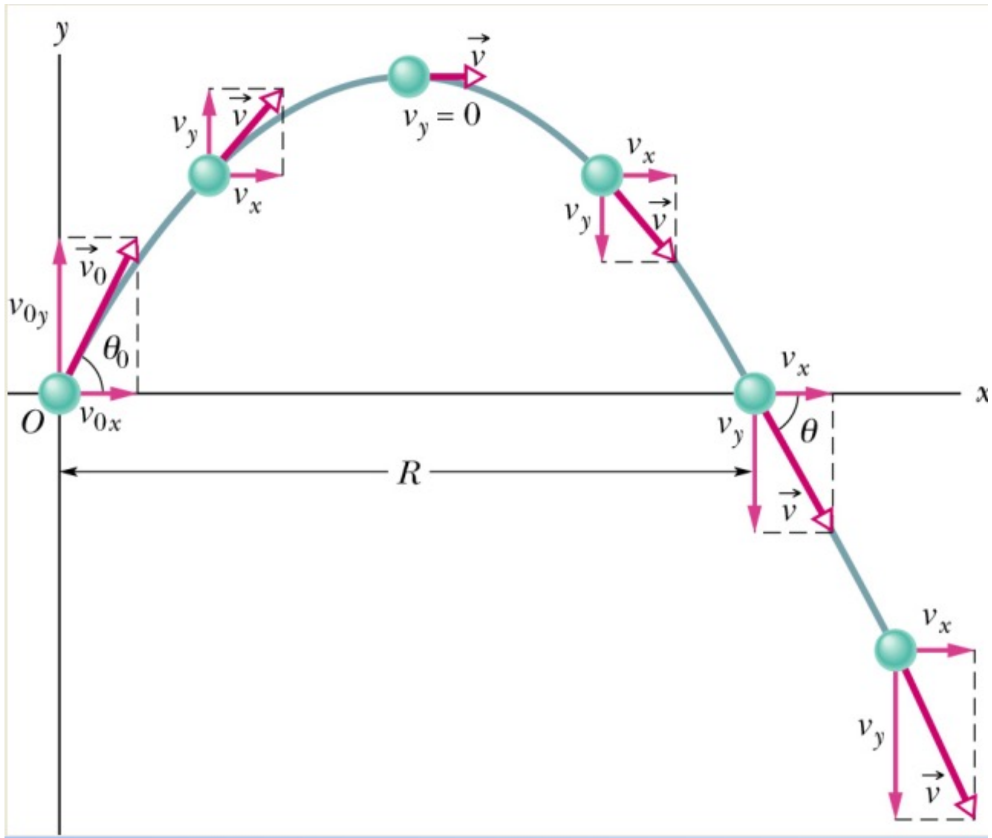
A aceleração de queda livre, $\vec{g}$, **é constante durante todo o movimento**

Aponta para baixo

Despreza-se a resistência do ar;

Nestas condições, um objecto com movimento de projéctil seguirá uma trajectória parabólica.

Diagrama do Movimento de um Projéctil



Obtenção da Equação da Trajectória

Componentes do deslocamento, a partir da origem do referencial, no instante de tempo *t*

$x = v_{x0}t = (v_0 \cos \theta)\, t$

$y = v_{y0}t + ½a_y\, t^2 = (v_0 \sin \theta)t - ½\, gt^2$

Combinando estas equações :

$$y = (\tan \theta_0)\, x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \right) x^2$$

Esta equação é da forma $y = ax - bx^2$ que é a equação de uma parábola

Análise do Movimento de um Projéctil

Pode considerar-se este movimento como a sobreposição dos movimentos nas direcções dos eixos dos *x* e dos *y;*

Na direcção do eixo dos *x* a velocidade é constante porque $a_x = 0$

Na direcção do eixo dos *y* o movimento é de queda livre
$a_y = - g$ (porque o eixo dos *y* aponta para cima)

A **posição num determinado instante de tempo** é dada por:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Vectores no Movimento de um Projéctil

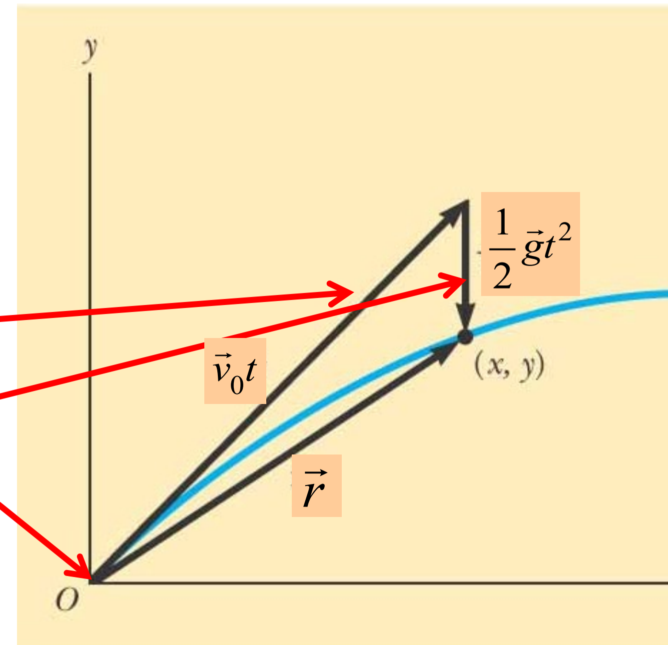
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

A posição final é o vector soma de:

-posição inicial

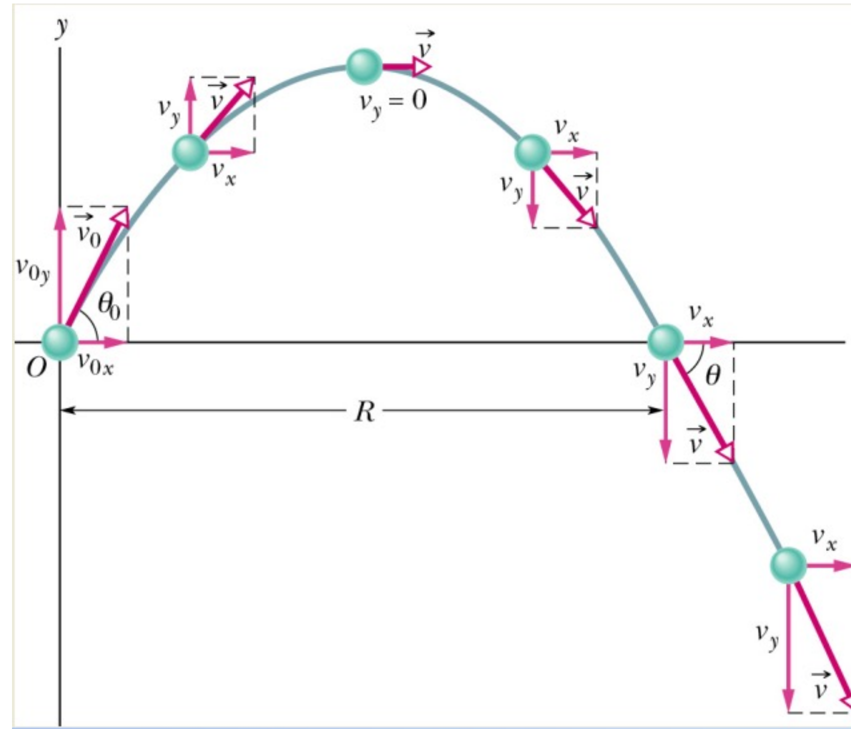
-deslocamento resultante da velocidade inicial

-deslocamento resultante da aceleração



Características do Movimento de um Projéctil

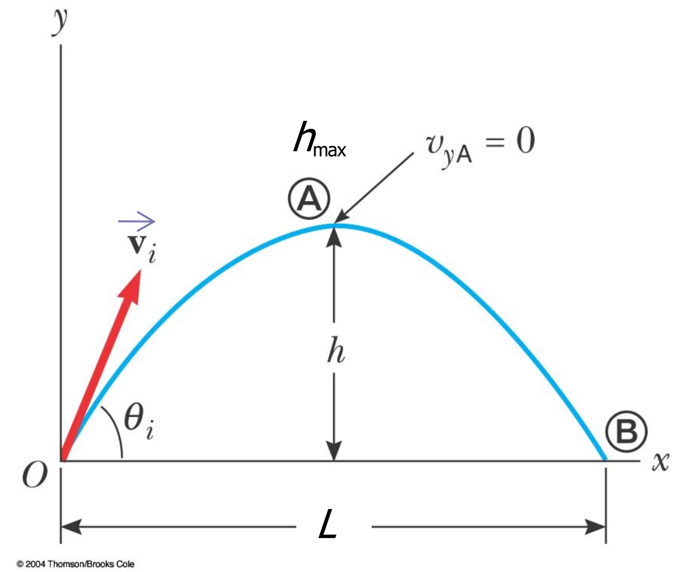
- ✓ A componente da velocidade segundo o eixo dos x é constante em todos os pontos da trajectória;
- ✓ A componente da velocidade segundo o eixo dos y é nula na altura máxima da trajectória;
- ✓ A aceleração é a mesma em todos os pontos da trajectória.



Alcance e Altura Máxima de um Projéctil

Na análise do movimento de um projéctil há duas grandezas com interesse especial:

- O **alcance**, *L*, é a distância horizontal alcançada pelo projéctil;
- A **altura máxima** atingida pelo projéctil é h_{max}.



Equação da Altura Máxima de um Projéctil

A altura máxima do projéctil ocorre no instante em que a componente vertical da velocidade é nula. Fazemos $v_y = 0$ na equação

$$v_y = v_{0_y} - gt$$

para obtermos o **tempo de subida**

$$t_{\text{sub}} = \frac{v_{0_y}}{g}$$

A **altura máxima** de um projéctil é obtida substituindo este instante de tempo na expressão da coordenada vertical

$$y = v_{0_y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

conduzindo a

$$h_{\text{max}} = \frac{v_{0_y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

Equação do Alcance de um Projéctil

O alcance de um projéctil obtém-se fazendo $y_f = 0$ na expressão

$$y_{\mathrm{f}} = v_{0_y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

para obter o **tempo de voo**,

$$t_{\mathrm{voo}} = \frac{2 v_{0_y}}{g}$$

Substituindo $t = t_{\mathrm{voo}}$ na expressão $x = v_{0_x} t$

obtemos o **alcance**

$$L = \frac{2 v_{0_x} v_{0_y}}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

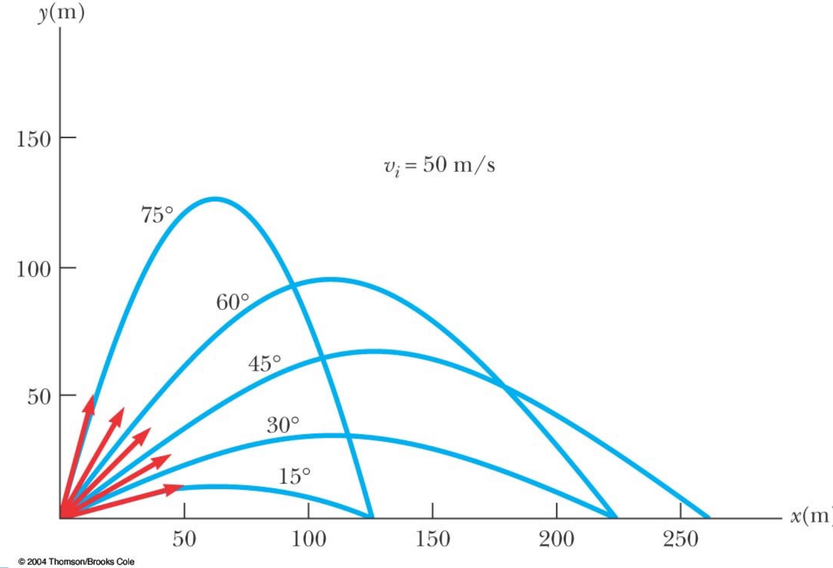
Alcance de um Projéctil

- ✓ O valor máximo do alcance ocorre para q_i = 45º;
- ✓ Ângulos complementares dão origem ao mesmo valor do alcance;
- ✓ A altura máxima é diferente para os dois valores do ângulo da velocidade inicial;
- ✓ Os tempos de voo serão diferentes para os dois ângulos;

$$L = \frac{2v_{0_x} v_{0_y}}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

$$h_{\max} = \frac{v_{0_y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

$$t_{\text{voo}} = \frac{2v_{0_y}}{g}$$



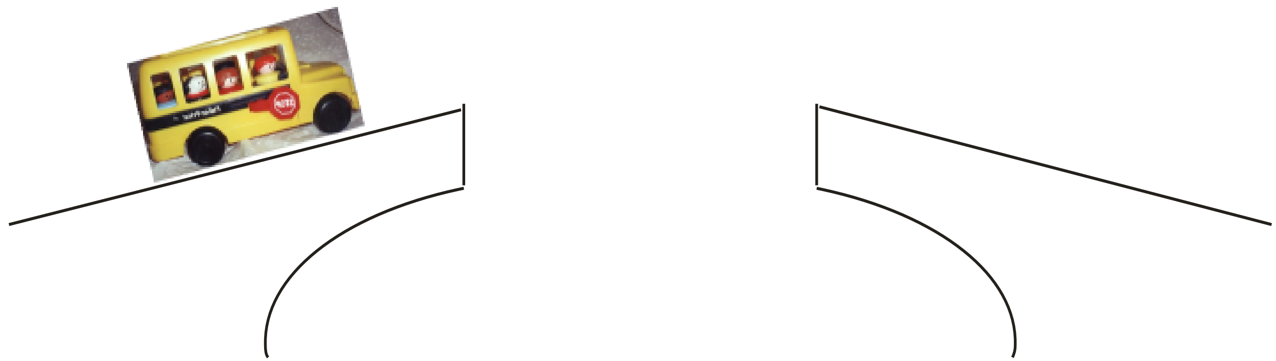
Problema

As personagens principais do filme "Speed", que em Portugal teve o nome "Terror na Auto-estrada", viajam num autocarro em que existe uma bomba, que rebentará se a velocidade do autocarro se tornar inferior a 80 km/h.

O autocarro viaja na direcção de um viaduto, cujo tabuleiro está interrompido numa extensão de 15 m.

Os ocupantes decidem fazer o autocarro saltar de um lado para o outro do viaduto, "voando" através do espaço. A rampa que conduz ao viaduto tem uma inclinação de 5° em relação à horizontal e o autocarro viajava a 110 km/h quando entrou no viaduto.

No filme, o autocarro salta com sucesso.



O problema que nos propomos é o seguinte:

A cena apresentada no filme é realista, isto é, naquelas condições um autocarro real conseguiria saltar ou é tudo ficção de cinema?

Dados:

Módulo da velocidade inicial: $\left|\vec{v}_0\right| = 110\,\text{km/h}$

Ângulo que a velocidade inicial faz com a horizontal: $\theta_0 = 5^{\text{o}}$

Distância horizontal a transpor: $\ell = 15\,\text{m}$

Pretende-se determinar se, nestas condições a trajectória de voo do autocarro irá passar no outro lado do viaduto ou na zona em que o tabuleiro está interrompido.

Modelo utilizado:

- Vamos considerar o autocarro como pontual;

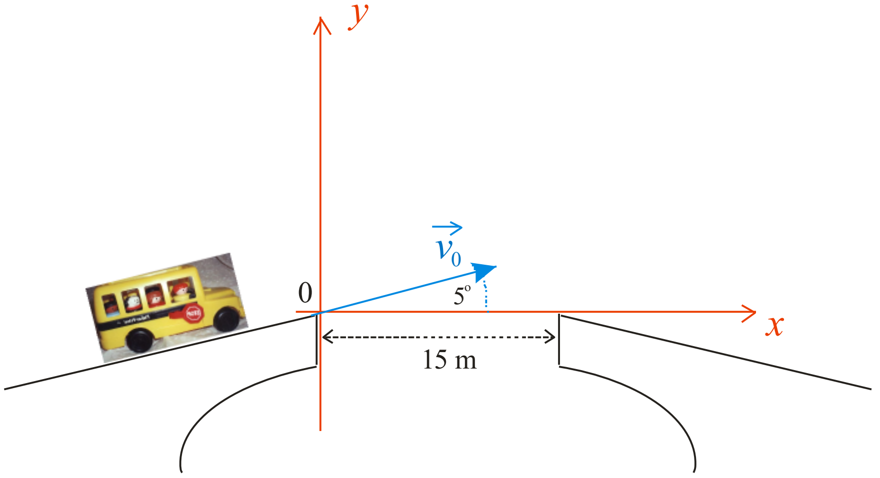
- Vamos desprezar a resistência do ar.

Vamos escolher o sistema de referência

- ✓ O eixo dos x é horizontal
- ✓ O eixo dos y é vertical e aponta para cima
- ✓ Colocamos a origem no ponto em que o autocarro deixa o tabuleiro
- ✓ Fazemos $t = 0$ no instante em que o autocarro deixa o tabuleiro

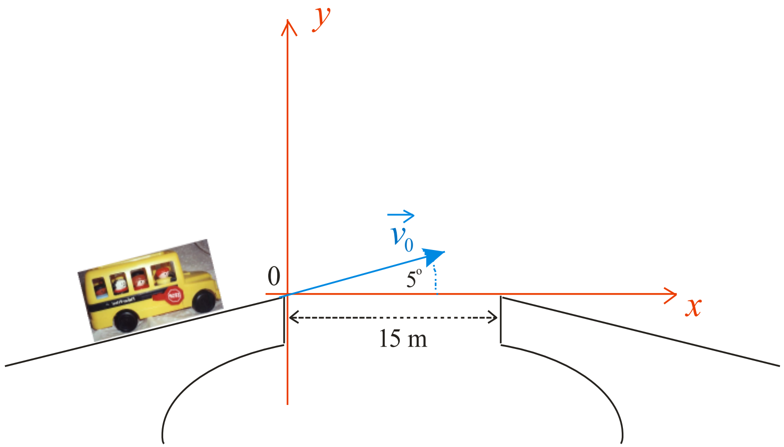
Componentes da aceleração neste sistema de referência

$a_y = -g$ e $a_x = 0$



Componentes da velocidade inicial

$v_{x0} = v_0 \cos \theta_0$ e $v_{y0} = v_0 \sin \theta_0$



v_0 = 110 km/h = 30,6 m/s

$a_y = -g$

$x_0 = y_0 = 0$

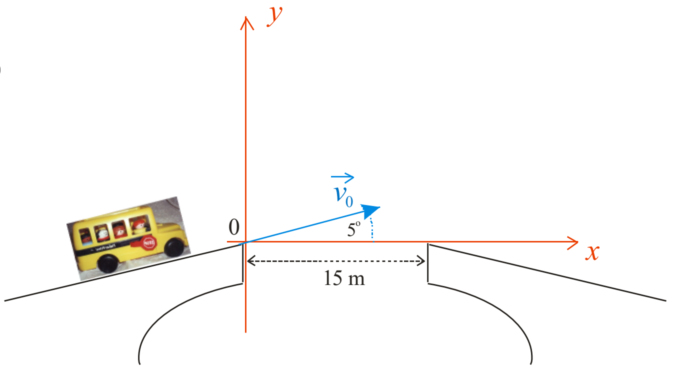
$$\vec{a} = a\vec{j}$$
$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$$
$$t_0 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = x_0; y = y_0$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = a \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + at \end{cases} \Rightarrow \vec{r}\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_0\cos\theta \\ v_y = v_0\sin\theta - gt \end{cases} \Rightarrow \vec{r}\begin{cases} x = v_0\cos\theta t \\ y = v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Problema

O que pretendemos saber é se o alcance é superior ou inferior a 15 m.



Substituímos os dados do problema na expressão do alcance

Obtemos:

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{\left(30.6\ \mathrm{m/s}\right)^2 \sin 10^{\mathrm{o}}}{9.8\ \mathrm{m/s}^2} = 16.5\ \mathrm{m}$$

Efectivamente, o autocarro transpõe o obstáculo!!!

- ✓ Movimento circular uniforme
- ✓ Força Centrípeta
- ✓ O Movimento em Referenciais Acelerados
- ✓ Força Fictícia

Movimento Circular Uniforme

Existe ***movimento circular uniforme*** quando um objecto se move numa trajectória circular com velocidade de módulo constante;

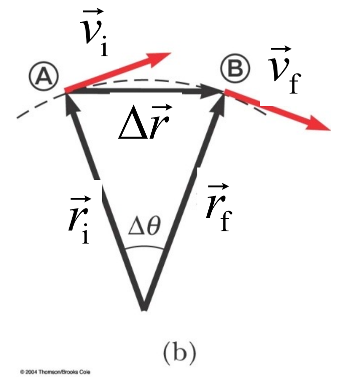
A aceleração *não é* nula porque a *direcção* do movimento está constantemente a variar;

Esta variação da velocidade está relacionada com uma aceleração

O vector velocidade é sempre tangente à trajectória do objecto.

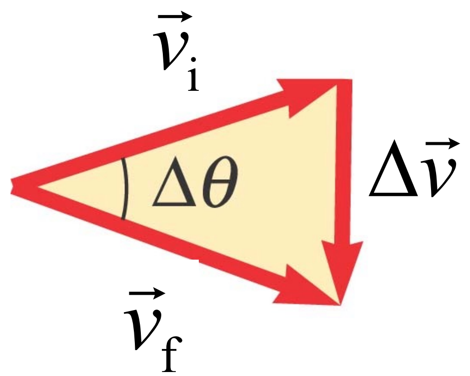
Variação da Velocidade no Movimento Circular Uniforme

O vector velocidade varia apenas em direcção



O diagrama vectorial apresenta

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$$



A Aceleração Centrípeta

- ✓ No movimento circular uniforme a aceleração é **perpendicular** à trajectória em cada ponto;
- ✓ A aceleração aponta sempre para o centro da trajectória circular;
- ✓ Daí a designação de ***aceleração centrípeta***.

A Aceleração Centrípeta

O módulo do vector *aceleração centrípeta* é dado por:

$$a_C = \frac{v^2}{r}$$

A direcção do vector aceleração centrípeta varia continuamente, de forma a estar sempre a apontar para o centro da trajectória.

A Aceleração Centrípeta

No ponto *p* a velocidade é:

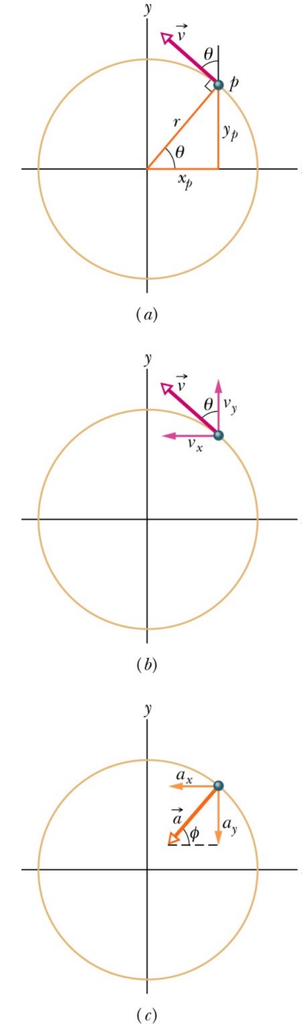
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = (\text{-}v\sin\theta)\vec{i} + (v\cos\theta)\vec{j}$$

$$= \left(-\frac{vy_p}{r}\right)\vec{i} + \left(\frac{vx_p}{r}\right)\vec{j}$$

Diferenciando esta equação, em ordem ao tempo, com *r* e *v* constantes, obtemos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_\mathrm{p}}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_\mathrm{p}}{dt}\right)\vec{j}$$

Mas, $\frac{dy_\mathrm{p}}{dt} = v_y = v\cos\theta$ e $\frac{dx_\mathrm{p}}{dt} = v_x = -v\sin\theta$



A Aceleração Centrípeta

Então

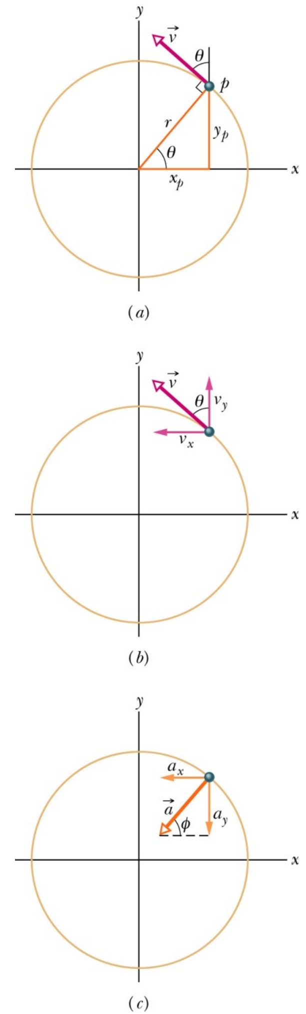
$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\vec{i} + \left(-\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\vec{j}$$

de onde

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{v^2}{r}$$

e $$\tan\phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-\left(v^2/r\right)\sin\theta}{-\left(v^2/r\right)\cos\theta} = \tan\theta$$

ou $\phi = \theta$ e $\vec{a}$ tem a direcção de $\vec{r}$



A Aceleração Tangencial

- ✓ No movimento circular, em geral, o módulo da velocidade pode também variar;
- ✓ Neste caso, existe ***aceleração tangencial*** <u>diferente de zero</u>.

A Aceleração no Movimento Circular (caso geral)

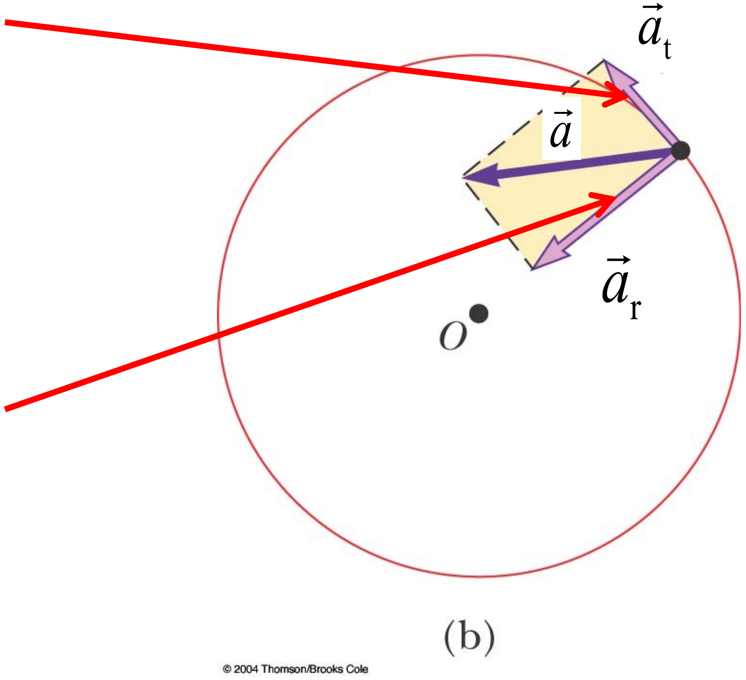
A **componente tangencial do vector aceleração** dá origem à variação do módulo do vector velocidade da partícula

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

A **componente radial** (ou centrípeta) do vector aceleração dá origem à variação da direcção do vector velocidade

$$a_r = -a_C = -\frac{v^2}{r}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$



A Aceleração no Movimento Circular (caso geral)

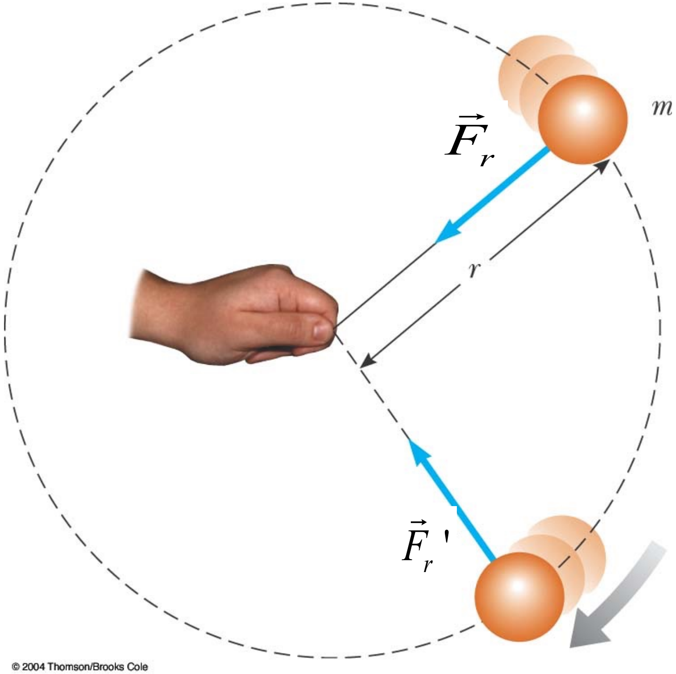
Componente tangencial : $a_t = \dfrac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}$

Componente radial: $a_r = -a_C = -\dfrac{v^2}{r}$

Módulo da aceleração : $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$

Movimento Circular Uniforme

Uma força, $\vec{F}_r$, aponta para o centro da trajectória circular;



Esta força está associada à **aceleração *centrípeta***, $\vec{a}_c$

Aplicando a 2.ª Lei de Newton na direcção radial, obtém-se:

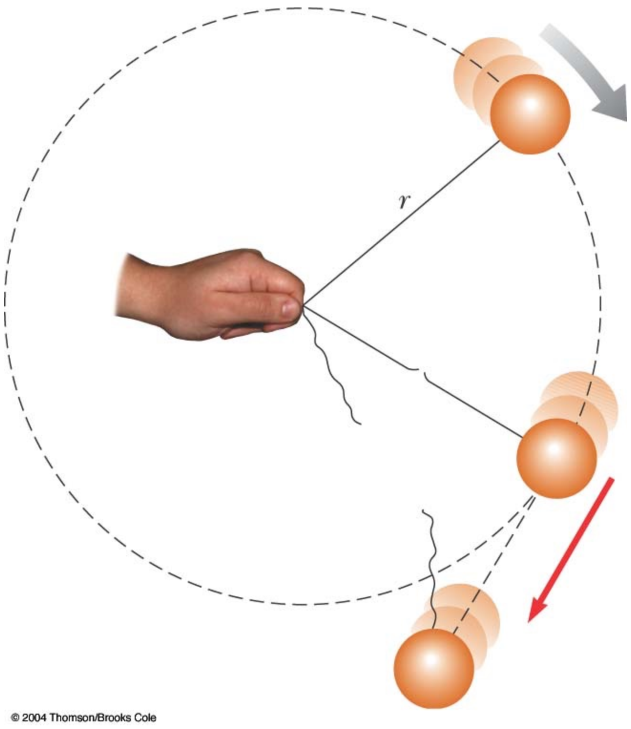
$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r}$$

Movimento Circular Uniforme

- Uma força que dá origem a uma aceleração centrípeta tem a direcção radial e aponta para o centro da circunferência;

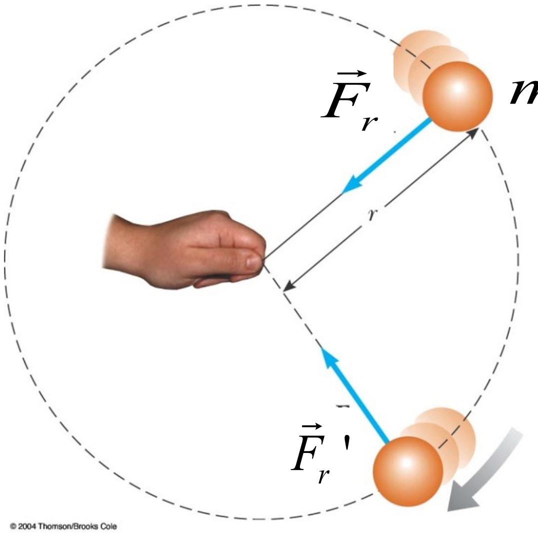
- Provoca uma variação da direcção do vector velocidade;

- Se essa força desaparecer, o corpo passará a mover-se numa trajectória rectilínea tangente à circunferência.



Movimento Circular com Trajectória Horizontal

O módulo da velocidade do corpo depende da massa do corpo e da tensão da corda;



A força centrípeta é a tensão da corda:

$$T = m\frac{v^2}{r}$$

e

$$v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

O Período do Movimento Circular Uniforme

O ***período***, *T*, é o intervalo de tempo necessário para uma revolução completa;

O módulo da velocidade da partícula é o perímetro da trajectória dividido pelo período;

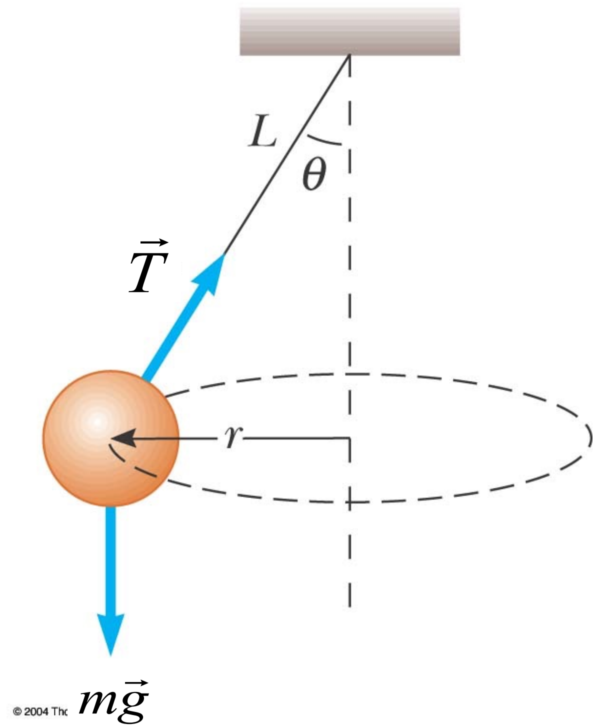
O período é, portanto, $T \equiv \dfrac{2\pi r}{v}$

O Pêndulo Cónico

O corpo está em equilíbrio na direcção vertical e executa movimento circular uniforme na direcção horizontal;

v é independente de *m*;

$$v = \sqrt{Lg \sin\theta \tan\theta}$$



Força Centrípeta

A força que dá origem à aceleração centrípeta é denominada ***força centrípeta***;

Não é um novo tipo de força, denomina apenas o *efeito* que uma determinada força tem;

É uma força que actua de forma a fazer variar apenas a direcção da velocidade, dando origem a um movimento circular.

O Movimento em Referenciais Acelerados

Num referencial acelerado (portanto não inercial) surge uma ***força fictícia***;

Uma força fictícia parece actuar num corpo como uma força real, mas não é possível identificar um segundo corpo que origine esta força fictícia.

A Força “Centrífuga”

No referencial da passageira (b), uma força parece empurrá-la para a porta;

Do ponto de vista do referencial ligado à Terra, o carro aplica uma força à passageira apontando para a esquerda;

À força dirigida para fora dá-se o nome de força ***centrífuga***;

> É uma força fictícia que resulta da aceleração associada à variação da direcção da velocidade do carro.

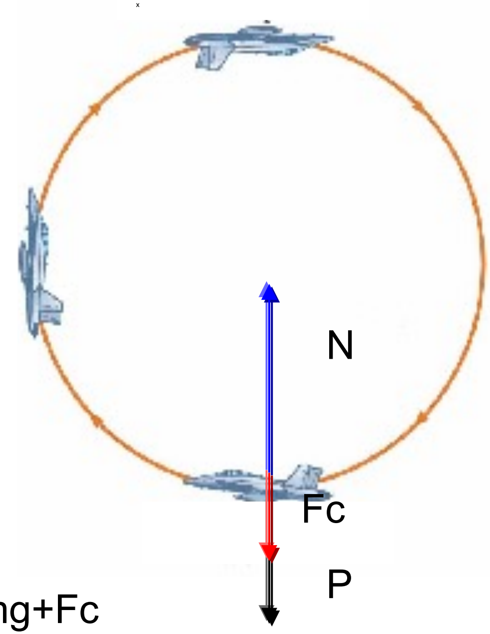
O "Loop"

É um exemplo de uma trajectória circular vertical; (carrinho que percorre uma calha)

No ponto mais baixo da trajectória, o módulo da força dirigida para cima que exercida no corpo tem de ser superior ao módulo do peso deste:

$$N = mg\left(1 + \frac{v^2}{rg}\right)$$

N=mg+Fc
N=mg+mv²/R

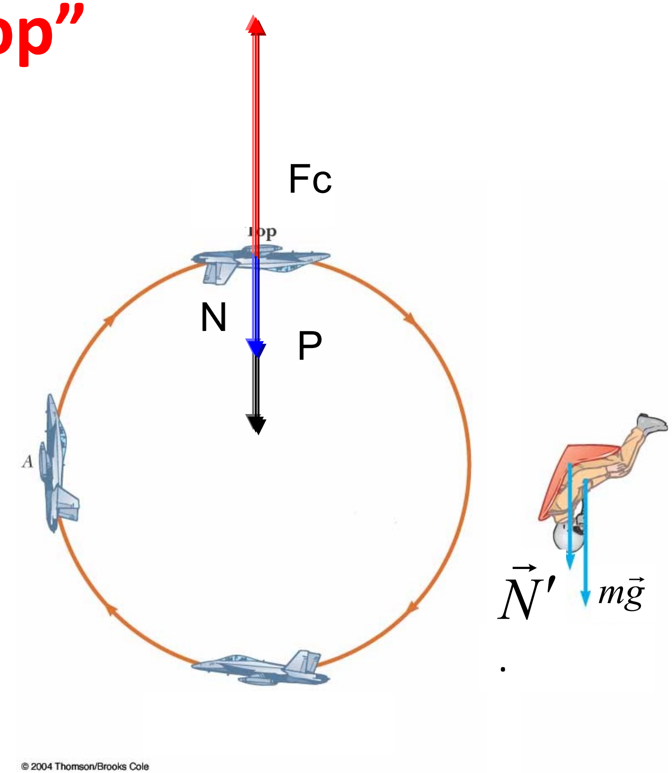


O “Loop”

No ponto mais alto da trajectória circular, o módulo da força exercida no corpo pode ser inferior ao módulo do peso do corpo:

Fc=mg+N
Fc=mv²/r

$$N' = mg\left(\frac{v^2}{rg} - 1\right)$$



Forças Fictícias, exemplos

Ainda que as forças fictícias não sejam forças reais, podem ter efeitos reais;

Exemplos:

Os objectos dentro do carro escorregam;

Sentimo-nos empurrados para fora de uma plataforma em rotação.