Lógica Computacional

Aula Teórica 14: Dedução Natural em Primeira Ordem

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

2 de novembro de 2023

Um sistema dedutivo

Objectivo

Determinar a validade de raciocínios ou de fórmulas de Primeira Ordem simplesmente por manipulação sintáctica dos símbolos que ocorrem nas fórmulas (sem recorrer à semântica).

Dedução Natural em Primeira Ordem

Uma extensão de Dedução Natural em Lógica Proposicional: às regras dos conectivos proposicionais juntam-se regras de introdução e eliminação para cada quantificador.

Recordar

Provas como árvores etiquetadas

- Uma prova ou inferência é apresentada em árvore:
  - árvores de derivação
- Cada árvore é construída a partir de árvores singulares (folhas)
- Novo nível da árvore obtido aplicando uma regra de inferência.
- As etiquetas dos nós da árvore são fórmulas.
  - As fórmulas nas folhas são as hipóteses, e têm associadas marcas (números inteiros);
  - A hipóteses distintas devem-se associar marcas distintas;
  - A fórmula na raíz é a conclusão da prova. Diz-se que a árvore é uma derivação dessa fórmula.

Quantificador Universal: é fácil eliminar

Eliminação do quantificador Universal

Se todos os indivíduos do universo satisfazem uma certa propriedade, então cada um em particular satisfaz essa propriedade.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \forall_x \, \varphi\end{array}}{[\varphi]_t^x} \; (\forall_E)$$

t livre para x em φ.

Eliminação do Quantificador Universal

A seguinte árvore não é uma derivação de
$\{\forall_x \exists_y (x < y)\} \vdash \exists_y (y < y)$

$$\dfrac{\forall_x \exists_y (x < y)}{\exists_y (y < y)}\ (\forall_E)$$

O problema é que y não é livre para x em $\exists_y (x < y)$.

Eliminação do Quantificador Universal

$$\{\forall_x \,(P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \vdash Q(a)$$

$$\cfrac{\cfrac{\forall_x \,(P(x) \rightarrow Q(x))^1}{P(a) \rightarrow Q(a)}\,(\forall_E) \qquad P(a)^2}{Q(a)}\,(\rightarrow_E)$$

Introdução do Quantificador Existencial

Regra de introdução

Se um indivíduo de dado universo satisfaz uma propriedade, então existe algum indivíduo do universo que satisfaz essa propriedade.

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ [\varphi]_t^x\end{array}}{\exists_x \varphi}\ (\exists_I)$$

t livre para x em φ.

Introdução do quantificador Existencial

$$\{\forall_x\,(P(x) \to Q(x)), P(a)\} \vdash \exists_x\, Q(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall_x\,(P(x) \to Q(x))^1}{P(a) \to Q(a)}\,(\forall_E) \qquad P(a)^2}{Q(a)}\,(\to_E)}{\exists_x\, Q(x)}\,(\exists_I)$$

Quantificador Universal: como introduzir?

Já introduzimos as duas regras mais simples:

- Eliminação do Universal
- Introdução do Existencial

Faltam as duas regras com condições mais complicadas:

- Introdução do Universal
- Eliminação do Existencial

Introdução do Quantificador Universal: motivação

Se um indivíduo arbitrário de dado universo goza de certa propriedade, então qualquer indivíduo goza também dessa propriedade.

Se temos $Q(x)$ e x é arbitrário então podemos concluir $\forall_x Q(x)$.

Que condição corresponde à noção de arbitrário em Dedução Natural?

Quantificador Universal: como introduzir?

$$\{\forall_y\,(P(y) \to Q(y)), \forall_y\,P(y)\} \vdash \forall_x\,Q(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall_y\,(P(y) \to Q(y))^1}{P(x) \to Q(x)}\,(\forall_E) \qquad \dfrac{\forall_y\,P(y)^2}{P(x)}\,(\forall_E)}{Q(\color{red}{x})}\,(\to_E)}{\forall_x\,Q(x)}\,(\forall_I)$$

x é uma entidade arbitrária porque não ocorre nas hipóteses

Será que x pode ocorrer nas hipóteses?

Quantificador Universal: condições

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall_x\,(P(x)\to Q(x))^1}{P(x)\to Q(x)}\,(\forall_E) \qquad P(\color{red}{x}\color{black})^2}{Q(x)}\,(\to_E)}{\forall_x\,Q(x)}\,(\forall_I)$$

Esta árvore não é uma prova:
a variável x na hipótese $P(x)$ representa uma entidade concreta (apesar de desconhecida), pelo que não pode ser abstraida.

Do conhecimento que um valor particular tem certa propriedade não se pode concluir que todos os valores a têm.

x não pode ocorrer livre nas hipóteses abertas!
Será que pode ocorrer sequer?

Quantificador Universal: como introduzir?

E se há variáveis livres nas hipóteses fechadas?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P(x)^3}{\exists_x \neg P(x)}\,(\exists_I) \qquad \neg \exists_x \neg P(x)^2}{\dfrac{\bot}{P(x)}\,(\bot, 3)}\,(\rightarrow_E)}{\forall_x P(x)}\,(\forall_I)$$

É uma prova válida para $\{\neg \exists_x \neg P(x)\} \vdash \forall_x P(x)$ porque x apenas aparece livre numa hipótese fechada!

Quantificador Universal: como introduzir?

Podemos abstrair usando outra variável.

Se temos $Q(y)$ e y é arbitrário então podemos concluir $\forall_x Q(x)$.

$$\{\forall_x \forall_y P(x,y)\} \vdash \forall y \forall_x P(y,x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall_x \forall_y P(x,y)^1}{\forall_y P(z,y)}\,(\forall_E)}{P(z,x)}\,(\forall_E)}{\forall_x P(z,x)}\,(\forall_I)}{\forall_y \forall_x P(y,x)}\,(\forall_I)$$

Quantificador Universal

Regra de introdução

Se um indivíduo arbitrário de dado universo goza de certa propriedade, então qualquer indivíduo goza também dessa propriedade.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ [\varphi]^x_y\end{array}}{\forall_x\,\varphi}\ (\forall_I)$$

Onde:

1. y não ocorre livre nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}$;
2. se $x \neq y$ então $y \notin VL(\varphi)$

Quantificador Universal: condições

Caso em que a condição:

1. y não ocorre livre nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}$

não é satisfeita.

$$\frac{(y \leq 3)^1}{\forall_x (x \leq 3)} \, (\forall_I)$$

Esta árvore não é uma prova:
y ocorre livre na hipótese em aberto (1).

Quando abstraímos uma variável, ela tem de ser genérica.

Quantificador Universal: condições

Caso em que a condição:

2. se $x \neq y$ então $y \notin VL(\varphi)$

não é satisfeita.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall_y\,(y \geq y)}{(y \geq y)}\,(\forall_E)}{\forall_x\,(x \geq y)}\,(\forall_I)}{\exists_y\,\forall_x\,(x \geq y)}\,(\exists_I)$$

Esta árvore não é uma prova:
$[(x \geq y)]_y^x = (y \geq y)$, mas y ocorre livre em $(x \geq y)$.

Quando abstraímos uma variável, devemos abstrair todas as suas ocorrências.

Quantificador Existencial: como eliminar?

Ideia

Se a partir de $\varphi(y)$ com y um elemento genérico, conseguirmos concluir ψ (que não depende y), então podemos concluir ψ a partir de $\exists\varphi(x)$.

$\{\forall_x\,(P(x) \to Q), \exists_x\,P(x)\} \vdash Q$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall_x\,(P(x) \to Q)^1}{P(y) \to Q}\,(\forall_E) \qquad P(y)^2}{Q}\,(\to_E) \qquad \exists_x\,P(x)^3}{Q}\,(\exists_E, 2)$$

Requisitos

1. O indivíduo concreto que se assume ter a propriedade φ deve ser genérico: não pode estar (livre) nas hipóteses abertas.
2. a propriedade a concluir não depende do indivíduo.

Quantificador Existencial

Regra de eliminação

$$\dfrac{\begin{array}{cc} & ([\varphi]_y^x)^m \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \exists_x\, \varphi & \psi \end{array}}{\psi}\ (\exists_E, m)$$

Onde:

1. y não ocorre livre nem em ψ nem nas hipóteses abertas de $\mathcal{D}_2$ distintas de $[\varphi]_y^x$
2. se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ;
3. a marca m apenas fecha (eventualmente) hipóteses $[\varphi]_y^x$ em $\mathcal{D}_2$.

Eliminação do Existencial: Condições

A árvore seguinte não é uma prova de
$\{\exists x\, Par(x), \forall x\,(Par(x) \to Par(sq(x)))\} \vdash \forall x\, Par(sq(x))$

$$\dfrac{\dfrac{(\exists x\, Par(x))^1 \qquad \dfrac{Par(x)^3 \qquad \dfrac{(\forall x\,(Par(x) \to Par(sq(x))))^2}{Par(x) \to Par(sq(x))}\,(\forall_E)}{Par(sq(x))}\,(\to_E)}{Par(sq(x))}\,(\exists_E, 3)}{\forall x\, Par(sq(x))}\,(\forall_I)$$

O problema é que a variável x ocorre livre no nó $Par(sq(x))$.

Eliminação do Existencial: condições

A árvore seguinte não é uma prova de
$\{P(a), Q(x)\} \vdash \exists x\,(P(x) \land Q(x))$

$$\dfrac{\dfrac{P(a)^1}{\exists x\, P(x)}\,(\exists_I) \qquad \dfrac{\dfrac{P(x)^3 \qquad Q(x)^2}{P(x) \land Q(x)}\,(\land_I)}{\exists x\,(P(x) \land Q(x))}\,(\exists_I)}{\exists x\,(P(x) \land Q(x))}\,(\exists_E, 3)$$

O problema é que a variável x ocorre livre na hipótese aberta $Q(x)$.

Eliminação do Existencial: Condições

A árvore seguinte não é uma prova de
$\{\exists x\,(Par(x) \wedge (y = 3))\} \vdash \exists_z(Par(z) \wedge (z = 3))$

$$\dfrac{(\exists x\,(Par(x) \wedge (y = 3)))^1 \qquad \dfrac{(Par(y) \wedge (y = 3))^2}{\exists_z(Par(z) \wedge (z = 3))}\,(\exists_I)}{\exists_z(Par(z) \wedge (z = 3))}\,(\exists_E, 2)$$

Note-se que $Par(y) \wedge (y = 3) = [Par(x) \wedge (y = 3)]^x_y$.

O problema é que a variável y é diferente de x mas ocorre livre em $Par(x) \wedge (y = 3)$.