

# Lógica Computacional

## Aula Teórica 19: Exercícios de Resolução em Primeira Ordem

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

17 de novembro de 2023

## Resolventes de Primeira Ordem

Seja:

- $C_1$  e  $C_2$  duas cláusulas sem variáveis em comum
- $A_1$  e  $A_2$  duas fórmulas atômicas tal que  $A_1 \in C_1$  e  $\neg A_2 \in C_2$
- $\{A_1, A_2\}$  é unificável
- $\sigma$  o unificador mais geral de  $\{A_1, A_2\}$

Então, a cláusula

$$[(C_1 - \{A_1\}) \cup (C_2 - \{\neg A_2\})]^\sigma$$

é um **resolvente** de  $C_1$  e  $C_2$ .

E se duas cláusulas partilharem variáveis?

Aplicamos substituição a uma delas (ou às duas) mudando o nome das variáveis, de modo a não terem variáveis em comum.

## Resolução em primeira ordem

O sistema dedutivo da Resolução é semelhante ao caso proposicional.

Dada uma fórmula  $\varphi$  tal que  $FNS(\varphi)$ , uma **refutação** de  $\varphi$  é uma sequência  $C_1 \dots C_n$  de cláusulas tal que:

- $C_n = \emptyset$

Cada  $C_i$  é:

- Uma das cláusulas de  $\varphi$ , ou
- obtida de cláusulas anteriores usando Resolução, ou
- renomeação de variáveis de cláusulas anteriores ou de  $\varphi$

### Teorema

Seja  $\varphi$  tal que  $FNS(\varphi)$ . Então:

$\varphi$  é contraditória se e só se existe refutação de  $\varphi$ .

Nota: há casos patológicos em que uma definição mais geral de resolvente é necessária, mas não vamos explorar aqui.

## Resolução e consequência semântica

### Teorema

Dadas fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi, \gamma \in F_{\Sigma}^X$  então:

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi$$

se e só se

existe refutação de  $\gamma^S$ , com  $\gamma = (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi)$

# Provar correcto um raciocínio

## Como proceder?

- ❶ Traduzir a afirmação para Lógica de Primeira Ordem:
  - $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi$
- ❷ Converter  $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi)$  para FNCP.
- ❸ Converter depois para FNS.
- ❹ Usar resolução e encontrar refutação.

# Representação do raciocínio

## Base de conhecimento

- ① Amigo do meu amigo, meu amigo é.
- ② A amizade é uma relação simétrica.
- ③ O João é amigo do Rui.
- ④ A Ana é amiga do Rui.

Será que do conhecimento anterior se pode inferir que:

- ⑤ O João é amigo da Ana

## Assinatura a usar

Considere-se uma assinatura de primeira ordem tal que:

- $\{joao, rui, ana\} \subseteq SF_0$
- $\{Amigo\} \subseteq SP_2$

## Representação do raciocínio

### Tradução para Lógica de Primeira Ordem

- ❶ Amigo do meu amigo, meu amigo é.

$$\varphi_1 = \forall_x \forall_y \forall_z ((Amigo(x, y) \wedge Amigo(y, z)) \rightarrow Amigo(x, z))$$

- ❷ A amizade é uma relação simétrica.

$$\varphi_2 = \forall_x \forall_y (Amigo(x, y) \rightarrow Amigo(y, x))$$

- ❸ O João é amigo do Rui.

$$\varphi_3 = Amigo(joao, rui)$$

- ❹ A Ana é amiga do Rui.

$$\varphi_4 = Amigo(ana, rui)$$

- ❺ O João é amigo da Ana

$$\varphi_5 = Amigo(joao, ana)$$

# Representação do raciocínio

## Afirmção a provar

Base de conhecimento (1)-(4) tem como consequência (5) , isto é:

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_5$$

Vamos usar usar Resolução para provar que

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \neg \varphi_5$$

é contraditória.



## Conversão para FNS

Para conjunções, podemos colocar cada elemento na FNCP e depois tratamos de colocar os quantificadores no início da fórmula.

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \forall_x \forall_y \forall_z ((Amigo(x, y) \wedge Amigo(y, z)) \rightarrow Amigo(x, z)) \\ &\equiv \forall_x \forall_y \forall_z (\neg (Amigo(x, y) \wedge Amigo(y, z)) \vee Amigo(x, z)) \\ &\equiv \forall_x \forall_y \forall_z (\neg Amigo(x, y) \vee \neg Amigo(y, z) \vee Amigo(x, z))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \forall_x \forall_y (Amigo(x, y) \rightarrow Amigo(y, x)) \\ &\equiv \forall_x \forall_y (\neg Amigo(x, y) \vee Amigo(y, x))\end{aligned}$$

$\varphi_3$ ,  $\varphi_4$  e  $\neg\varphi_5$  já estão na FNCP.

## Conversão para FNS

Trocando os nomes das variáveis quantificadas, obtemos então:

$$\begin{aligned} &\forall_{x_0} \forall_{x_1} \forall_{x_2} (\neg Amigo(x_0, x_1) \vee \neg Amigo(x_1, x_2) \vee Amigo(x_0, x_2)) \wedge \\ &\forall_{x_3} \forall_{x_4} (\neg Amigo(x_3, x_4) \vee Amigo(x_4, x_3)) \wedge \\ &Amigo(joao, rui) \wedge Amigo(ana, rui) \wedge \neg Amigo(joao, ana) \end{aligned}$$

Movendo os quantificadores para o início da fórmula, obtemos:

$$\begin{aligned} &\forall_{x_0} \forall_{x_1} \forall_{x_2} \forall_{x_3} \forall_{x_4} ( \\ &(\neg Amigo(x_0, x_1) \vee \neg Amigo(x_1, x_2) \vee Amigo(x_0, x_2)) \wedge \\ &(\neg Amigo(x_3, x_4) \vee Amigo(x_4, x_3)) \wedge \\ &Amigo(joao, rui) \wedge Amigo(ana, rui) \wedge \neg Amigo(joao, ana)) \end{aligned}$$

Está na FNS.

## Representação em cláusulas

Temos então 5 cláusulas:

$$C_1 = \{\neg Amigo(x_0, x_1), \neg Amigo(x_1, x_2), Amigo(x_0, x_2)\}$$

$$C_2 = \{\neg Amigo(x_3, x_4), Amigo(x_4, x_3)\}$$

$$C_3 = \{Amigo(joao, rui)\}$$

$$C_4 = \{Amigo(ana, rui)\}$$

$$C_5 = \{\neg Amigo(joao, ana)\}$$

## Resolução: o conjunto de cláusulas é contraditório

$$C_1 = \{\neg Amigo(x_0, x_1), \neg Amigo(x_1, x_2), Amigo(x_0, x_2)\}$$

$$C_2 = \{\neg Amigo(x_3, x_4), Amigo(x_4, x_3)\}$$

$$C_3 = \{Amigo(joao, rui)\}$$

$$C_4 = \{Amigo(ana, rui)\}$$

$$C_5 = \{\neg Amigo(joao, ana)\}$$

	Dedução	Justificação
1	$\{\neg A(joao, ana)\}$	$C_5$
2	$\{(\neg A(x_0, x_1), \neg A(x_1, x_2), A(x_0, x_2))\}$	$C_1$
3	$\{(\neg A(joao, x_1), \neg A(x_1, ana))\}$	$\text{Res}(1,2) \{x_0/joao, x_2/ana\}$
4	$\{A(joao, rui)\}$	$C_3$
5	$\{\neg A(rui, ana)\}$	$\text{Res}(3,4) \{x_1/rui\}$
6	$\{\neg A(x_3, x_4), A(x_4, x_3)\}$	$C_2$
7	$\{\neg A(ana, rui)\}$	$\text{Res}(3,4) \{x_3/ana, x_4/rui\}$
8	$\{A(ana, rui)\}$	$C_4$
6	$\emptyset$	$\text{Res}(7,8)$

## Mais um exemplo

Mostre, usando Resolução, a seguinte consequência semântica:

$$\{\exists x P(f(x)), \exists x P(x) \rightarrow (\forall x S(x) \vee \forall x Q(x)), \exists x \neg S(x)\} \models Q(a)$$

Vamos mostrar que a seguinte fórmula é contraditória:

$$\varphi = \exists x P(f(x)) \wedge (\exists x P(x) \rightarrow (\forall x S(x) \vee \forall x Q(x))) \wedge \exists x \neg S(x) \wedge \neg Q(a)$$

Vamos começar por colocar na FNCP:

$$\begin{aligned} \varphi &= \exists x P(f(x)) \wedge (\neg \exists x P(x) \vee (\forall x S(x) \vee \forall x Q(x))) \wedge \exists x \neg S(x) \wedge \neg Q(a) && [\text{passo(1)}] \\ &\equiv \exists x P(f(x)) \wedge (\forall x \neg P(x) \vee (\forall x S(x) \vee \forall x Q(x))) \wedge \exists x \neg S(x) \wedge \neg Q(a) && [\text{passo(2)}] \\ &\equiv \exists x_1 P(f(x_1)) \wedge (\forall x_2 \neg P(x_2) \vee \forall x_3 S(x_3) \vee \forall x_4 Q(x_4)) \wedge \exists x_5 \neg S(x_5) \wedge \neg Q(a) && [\text{passo(3)}] \\ &\equiv \exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \exists x_5 (P(f(x_1)) \wedge (\neg P(x_2) \vee S(x_3) \vee Q(x_4)) \wedge \neg S(x_5) \wedge \neg Q(a)) && [\text{passo(4)}] \end{aligned}$$

Esta última fórmula está na FNP. Na verdade está na FNCP.

Colocar na FNS

$$\forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 (P(f(b)) \wedge (\neg P(x_2) \vee S(x_3) \vee Q(x_4)) \wedge \neg S(g(x_2, x_3, x_4)) \wedge \neg Q(a))$$

## Resolução: o conjunto de cláusulas é contraditório

$$C_1 = \{P(f(b))\}$$

$$C_2 = \{\neg P(x_2), S(x_3), Q(x_4)\}$$

$$C_3 = \{\neg S(g(x_2, x_3, x_4))\}$$

$$C_4 = \{\neg Q(a)\}$$

	Dedução	Justificação
1	$\{P(f(b))\}$	$C_1$
2	$\{\neg P(x_2), S(x_3), Q(x_4)\}$	$C_2$
3	$\{S(x_3), Q(x_4)\}$	$\text{Res}(1,2) \{x_2/f(b)\}$
4	$\{\neg Q(a)\}$	$C_4$
5	$\{S(x_3)\}$	$\text{Res}(3,4) \{x_4/a\}$
6	$\{\neg S(g(x_6, x_7, x_8))\}$	$C_3\{x_2/x_6, x_3/x_7, x_4/x_8\}$
7	$\emptyset$	$\text{Res}(5,6)\{x_3/g(x_6, x_7, x_8)\}$

# Resolução: exercícios

Usando resolução, mostre que:

$$\textcircled{1} \quad \exists x \forall y P(x, y) \models \forall y \exists x P(x, y)$$

$$\textcircled{2} \quad \models \exists x \forall y \forall z ((P(y) \rightarrow Q(z)) \rightarrow (P(x) \rightarrow Q(x)))$$

$$\textcircled{3} \quad \{\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\} \models \forall x (P(x) \vee Q(x))$$