Lógica Computacional

Aula Teórica 12: Semântica da Lógica de Primeira Ordem

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

26 de outubro de 2023

Interpretar fórmulas

Como interpretar os símbolos que usamos para escrever fórmulas?

Em Lógica Proposicional temos as valorações, que dão valor aos símbolos proposicionais

Em Lógica de Primeira Ordem precisamos algo mais complexo

- Temos de indicar o universo dos elementos que estamos a considerar
- Temos de interpretar os símbolos de função que operam nesse universo
- Temos de interpretar os símbolos de predicado que são asserções sobre esses elementos

Estrutura de interpretação sobre assinatura

Estrutura de interpretação

Seja $\Sigma = (SF, SP)$ uma assinatura de primeira ordem. Uma estrutura de interpretação sobre Σ é um par $\mathcal{M} = (U, I)$ sendo:

- U um conjunto não vazio, designado por *universo* ou *domínio* da estrutura;
- I uma *função*, designada *de interpretação*, que a cada símbolo de Σ associa uma aplicação do seguinte modo:
  - para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $f \in SF_n$, tem-se $I(f) : U^n \to U$;
  - para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $P \in SP_n$, tem-se $I(P) : U^n \to \{0, 1\}$.

Notação

Escrevemos $\underline{f}_I$ e $\underline{P}_I$ em vez de $I(f)$ e $I(P)$

Exemplo

Os naturais

Considere-se a assinatura $\Sigma = (SF, SP)$, onde

- $SF_0 = \{zero\}$, $SF_1 = \{suc, quad\}$ e $SF_i = \emptyset$, para $i \geq 2$;
- $SP_1 = \{Q\}$, $SP_2 = \{M\}$ e $SP_i = \emptyset$, para $i = 0$ ou $i \geq 3$.

A estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ sobre Σ é definida por:

- $\underline{zero}_I = 0$
- $\underline{suc}_I : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, tal que $\underline{suc}_I(n) = n + 1$
- $\underline{quad}_I : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, tal que $\underline{quad}_I(n) = n \times n$
- $\underline{Q}_I : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$, tal que $\underline{Q}_I(n) = 1$ sse n é quadrado perfeito
- $\underline{M}_I : \ \mathbb{N}_0^2 \to \{0, 1\}$ é tal que $\underline{M}_I(n, m) = 1$ sse $n > m$.

Exemplo

Atenção: assinatura é sintaxe. Interpretação pode não corresponder à intuição sobre os nomes dos símbolos de função/predicado.

Exemplo: os naturais de novo

Considere-se a mesma assinatura $\Sigma = (SF, SP)$, onde

- $SF_0 = \{zero\}$, $SF_1 = \{suc, quad\}$ e $SF_i = \emptyset$, para $i \geq 2$;
- $SP_1 = \{Q\}$, $SP_2 = \{M\}$ e $SP_i = \emptyset$, para $i = 0$ ou $i \geq 3$.

A estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ sobre Σ é definida por:

- $\underline{zero}_I = 7$
- $\underline{suc}_I : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, tal que $\underline{suc}_I(n) = n$
- $\underline{quad}_I : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, tal que $\underline{quad}_I(n) = 2 * n$
- $\underline{Q}_I : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$, tal que $\underline{Q}_I(n) = 1$ sse n é primo
- $\underline{M}_I : \ \mathbb{N}_0^2 \to \{0, 1\}$ é tal que $\underline{M}_I(n, m) = 1$ sse $n - m = 1$.

Exemplo

Ainda sobre o exemplo

Será que as fórmulas

$$Q(suc(suc(suc(suc(zero)))))$$

ou

$$M(suc(zero), zero)$$

são sempre iguais a 1 em todas as interpretações?

Interpretar termos

- Uma estrutura de interpretação só interpreta símbolos de função e predicado
- Falta interpretar variáveis!

Interpretação das variáveis

Atribuição de X em $\mathcal{M}$

- Dada $\mathcal{M} = (U, I)$ uma estrutura de interpretação sobre Σ, uma atribuição de X em $\mathcal{M}$ é uma aplicação

$$\rho : \; X \to U$$

que associa a cada variável de X um elemento do universo U.

O conjunto de todas as atribuições de X em $\mathcal{M}$ denota-se $ATR^{X}_{\mathcal{M}}$.

Interpretação das variáveis

Intuição

- Duas atribuições ρ, ρ' dizem-se é x-equivalentes se, no máximo, diferem em x
- a atribuição $\rho[x := u]$ é igual a ρ em todas as variáveis, menos em x, na qual vale u

Formalmente

- Dadas duas atribuições ρ, ρ' de X em $\mathcal{M}$, diz-se que ρ é x-equivalente a ρ', se $\rho(y) = \rho'(y)$, para cada $y \in X \setminus \{x\}$.
- Seja $\rho[x := u]$ a atribuição x-equivalente a ρ que atribui o valor u à variável x.

Função de interpretação de termos

Interpretação de termos

Considere-se uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ sobre uma assinatura Σ e uma atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$.

A *interpretação dos termos em* $\mathcal{M}$ *com* ρ é uma função

$$[\![\cdot]\!]^\rho_{\mathcal{M}} : \; T^X_\Sigma \to U$$

definida indutivamente pelas seguintes regras:

- $[\![x]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = \rho(x)$, para $x \in X$;
- $[\![c]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = \underline{c}_I$, para $c \in SF_0$;
- $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = \underline{f}_I([\![t_1]\!]^\rho_{\mathcal{M}}, \ldots, [\![t_n]\!]^\rho_{\mathcal{M}})$, para $f \in SF_n, \; t_1, \ldots, t_n \in T^X_\Sigma$ e $n > 0$.

Exemplo

Ainda sobre os naturais

Considerando a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ do primeiro anterior, e assumindo $x, y \in X$ e a atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ tal que $\rho(x) = 1$ e $\rho(y) = 2$, tem-se que:

- $[\![zero]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = \underline{zero}_I = 0$
- $[\![suc(x)]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = \underline{suc}_I([\![x]\!]^\rho_{\mathcal{M}}) = \underline{suc}_I(\rho(x)) = \underline{suc}_I(1) =$
  $= 1 + 1 = 2$
- $[\![quad(y)]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = \underline{quad}_I([\![y]\!]^\rho_{\mathcal{M}}) = \underline{quad}_I(\rho(y)) = \underline{quad}_I(2) =$
  $= 2 \times 2 = 4$
- $[\![quad(suc(x))]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = \underline{quad}_I([\![suc(x)]\!]^\rho_{\mathcal{M}}) =$
  $= \underline{quad}_I(\underline{suc}_I([\![x]\!]^\rho_{\mathcal{M}})) = \underline{quad}_I(\underline{suc}_I(\rho(x)))$
  $= \underline{quad}_I(\underline{suc}_I(1)) = \underline{quad}_I(1 + 1) =$
  $= \underline{quad}_I(2) = 2 \times 2 = 4$

Interpretar fórmulas

- Já sabemos como interpretar termos
- Vamos estender a interpretação dos termos a fórmulas
- vamos definir $[\![.]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}$ para fórmulas

Avaliação de fórmula

Seja $\mathcal{M} = (U, I)$ uma estrutura de interpretação sobre Σ e $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ uma atribuição

Avaliação de fórmulas

A avaliação de fórmulas por $\mathcal{M}$ dada atribuição ρ é uma função $[\![\cdot]\!]^\rho_{\mathcal{M}} : \; F^X_\Sigma \to \mathcal{B}$ definida indutivamente pelas seguintes regras:

- $[\![\bot]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = 0$
- $[\![p]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = \underline{p}_I$, para cada $p \in SP_0$
- $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = \underline{P}_I([\![t_1]\!]^\rho_{\mathcal{M}}, \ldots, [\![t_n]\!]^\rho_{\mathcal{M}})$, para cada $P \in SP_n,\; t_1, \ldots, t_n \in T^X_\Sigma$ e $n > 0$
- $[\![\neg\varphi]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = \ominus[\![\varphi]\!]^\rho_{\mathcal{M}}$
- $[\![\varphi \vee \psi]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]^\rho_{\mathcal{M}} \oplus [\![\psi]\!]^\rho_{\mathcal{M}}$
- $[\![\varphi \wedge \psi]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]^\rho_{\mathcal{M}} \otimes [\![\psi]\!]^\rho_{\mathcal{M}}$
- $[\![\varphi \to \psi]\!]^\rho_{\mathcal{M}} = \ominus[\![\varphi]\!]^\rho_{\mathcal{M}} \oplus [\![\psi]\!]^\rho_{\mathcal{M}}$
- ...continua a seguir

Avaliação de fórmula (continuação)

Caso dos quantificadores

- $[\![\forall x\, \varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1$ se para todo o $u \in U$ se tem $[\![\varphi]\!]^{\rho[x:=u]}_{\mathcal{M}} = 1$ e $[\![\forall x\, \varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 0$ se para algum $u \in U$ se tem $[\![\varphi]\!]^{\rho[x:=u]}_{\mathcal{M}} = 0$
- $[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1$ se para algum $u \in U$ se tem $[\![\varphi]\!]^{\rho[x:=u]}_{\mathcal{M}} = 1$ e $[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 0$ se para todo o $u \in U$ se tem $[\![\varphi]\!]^{\rho[x:=u]}_{\mathcal{M}} = 0$

Relação de satisfação

- Uma fórmula $\varphi \in F^X_\Sigma$ é *satisfeita por* $\mathcal{M}$ *com* ρ, *i.e.*, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$, se $[\![\varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1$.
- Se $[\![\varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 0$ diz-se que a fórmula *não é satisfeita por* $\mathcal{M}$ *com* ρ, e escreve-se $\mathcal{M}, \rho \nVdash \varphi$

Estas noções estendem-se naturalmente para conjuntos de fórmulas.

Modelo de fórmula

Por vezes as variáveis não desempenham um papel relevante.

Modelo de fórmula

Uma estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ diz-se um modelo de uma fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$, o que se denota por $\mathcal{M} \Vdash \varphi$, se para qualquer $\rho \in ATR_\mathcal{M}^X$ se tem $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$.

Nota: é o caso das fórmulas fechadas!

Resultados úteis

- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg\varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \nVdash \varphi$.
- se φ é fórmula fechada:

  $\mathcal{M} \Vdash \neg\varphi$ se e só se $\mathcal{M} \nVdash \varphi$

Exemplo

Continuação do exemplo dos naturais

Considerando a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ do primeiro exemplo, e assumindo $x, y \in X$ e a atribuição $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ tal que $\rho(x) = 1$ e $\rho(y) = 2$, tem-se que

- $\mathcal{M}, \rho \Vdash Q(zero)$ pois:

  $$[\![Q(zero)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = \underline{Q}_I([\![zero]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}) = \underline{Q}_I(\underline{zero}_I) = \underline{Q}_I(0) = 1$$

- $\mathcal{M}, \rho \nVdash M(x, y)$ pois:

  $$\begin{aligned}[\![M(x,y)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} &= \underline{M}_I([\![x]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}, [\![y]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}) = \underline{M}_I(\rho(x), \rho(y)) = \\ &= \underline{M}_I(1, 2) = 0\end{aligned}$$

Exemplo

Continuação do exemplo anterior

$$\mathcal{M}, \rho \not\Vdash Q(suc(x)) \wedge M(quad(suc(y)), suc(x))$$

vejamos que $\mathcal{M}, \rho \not\Vdash Q(Suc(x))$:

$$\begin{aligned}
[\![Q(suc(x))]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} &= \underline{Q}_I([\![suc(x)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}) \\
&= \underline{Q}_I(\underline{suc}_I([\![x]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}})) \\
&= \underline{Q}_I(\underline{suc}_I(\rho(x))) \\
&= \underline{Q}_I(\underline{suc}_I(1)) \\
&= \underline{Q}_I(1+1) = \underline{Q}_I(2) = 0
\end{aligned}$$

Logo,

$$[\![Q(suc(x)) \wedge M(quad(suc(y)), suc(x))]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} =$$
$$[\![Q(suc(x))]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} \otimes [\![M(quad(suc(y)), suc(x))]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 0$$

Exemplo

Continuação do exemplo anterior

$\mathcal{M}, \rho \not\Vdash \forall x\, Q(x)$ pois nem todos os naturais são quadrados perfeitos.Vejamos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, Q(x) \text{ sse } & [\![\forall x\, Q(x)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1 \\ \text{sse } & \text{ para todo } u \in U, \text{ se tem } [\![Q(x)]\!]^{\rho[x:=u]}_{\mathcal{M}} = 1 \end{aligned}$$

Mas, tomando, por exemplo, 5 para valor de x tem-se que:

$$[\![Q(x)]\!]^{\rho[x:=5]}_{\mathcal{M}} = \underline{Q}_I([\![x]\!]^{\rho[x:=5]}_{\mathcal{M}}) = \underline{Q}_I(\rho[x := 5](x)) = \underline{Q}_I(5) = 0$$

Nota: valor de $[\![\forall x\, Q(x)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}$ não depende de ρ, pois não há variáveis livres

Exemplo

Continuação do exemplo anterior

$\mathcal{M}, \rho \Vdash Q(zero) \wedge \exists x\, M(x, zero)$ pois

- já vimos que $[\![Q(zero)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1$; e
- vamos mostrar que $[\![\exists x\, M(x, zero)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1$, isto é, existe $u \in U$, tal que $[\![M(x, zero)]\!]^{\rho[x:=u]}_{\mathcal{M}} = 1$

  Tomando $u = 4$, temos que:

$$
\begin{aligned}
[\![M(x, zero)]\!]^{\rho[x:=4]}_{\mathcal{M}} = \underline{M}_I([\![x]\!]^{\rho[x:=4]}_{\mathcal{M}}, [\![zero]\!]^{\rho[x:=4]}_{\mathcal{M}}) = \\
\underline{M}_I(\rho[x := 4](x), \underline{zero}_I)) = \\
\underline{M}_I(4, 0) = 1
\end{aligned}
$$

Logo,

$$[\![Q(zero) \wedge \exists x\, M(x, zero)]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1 \otimes 1 = 1$$

Exemplo

$\mathcal{M} \Vdash \forall x\, Q(quad(x))$

Para qualquer $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ mostra-se que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, Q(quad(x))$.

$[\![\forall x\, Q(quad(x))]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1$ sse $[\![Q(quad(x))]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}} = 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

Seja $n \in \mathbb{N}_0$ um qualquer natural:

$$\begin{array}{rcl}
[\![Q(quad(x))]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}} & = & \underline{Q}_I([\![quad(x)]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}}) \\
& = & \underline{Q}_I(\underline{quad}_I([\![x]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}})) \\
& = & \underline{Q}_I(\underline{quad}_I(\rho[x := n](x))) \\
& = & \underline{Q}_I(\underline{quad}_I(n)) \\
& = & \underline{Q}_I(n \times n) = 1
\end{array}$$

Logo, $[\![\forall x\, Q(quad(x))]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1$, e portanto $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x\, Q(quad(x))$

Fórmulas contraditórias, possíveis e válidas

Fórmula válida

$\varphi \in F_\Sigma^X$ diz-se válida, o que se denota por $\models \varphi$, se $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ qualquer que seja a estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre Σ.

Verdade em toda a estrutura de interpretação e toda a atribuição.

Fórmula possível

$\varphi \in F_\Sigma^X$ diz-se possível se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ para alguma estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre Σ e alguma atribuição $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^X$.

Verdade em alguma estrutura de interpretação e alguma atribuição.

Fórmula contraditória

$\varphi \in F_\Sigma^X$ diz-se contraditória se $\mathcal{M}, \rho \nVdash \varphi$ qualquer que seja a estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre Σ e atribuição $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^X$.

Falsa em toda a estrutura de interpretação e toda a atribuição.

Consequência semântica e equivalência de fórmulas

Consequência Semântica

Uma fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$ diz-se consequência semântica de conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq F_\Sigma^X$, o que se denota por $\Gamma \models \varphi$, se para toda a estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre Σ e toda a atribuição $\rho \in ATR_\mathcal{M}^X$ se tem que:

$$\text{se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \Gamma \text{ então } \mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$$

Equivalência Lógica

As fórmulas $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ dizem-se logicamente equivalentes, o que se denota por $\varphi \equiv \psi$, se para toda a estrutura de interpretação $\mathcal{M}$ sobre Σ e toda a atribuição $\rho \in ATR_\mathcal{M}^X$ se tem que:

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \psi$$

Resultados

Lema da Substitutividade

Se $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ e $\psi_1 \equiv \psi_2$ então:

- $(\neg\varphi_1) \equiv (\neg\varphi_2)$
- $(\varphi_1 \wedge \psi_1) \equiv (\varphi_2 \wedge \psi_2)$
- $(\varphi_1 \vee \psi_1) \equiv (\varphi_2 \vee \psi_2)$
- $(\varphi_1 \rightarrow \psi_1) \equiv (\varphi_2 \rightarrow \psi_2)$
- $(\forall_x \varphi_1) \equiv (\forall_x \varphi_2)$
- $(\exists_x \varphi_1) \equiv (\exists_x \varphi_2)$

Em geral:

- $\delta \equiv \delta'$ onde δ' resulta de substituir φ_1 por φ_2 em δ