Licenciatura em Engenharia Informática
Universidade Nova de Lisboa

Lógica Computacional

Terceiro Teste – Sem Consulta – 1h

21 de dezembro de 2022

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Pergunta 1 [5 valores]

a) Converta a seguinte fórmula para a Forma Normal Conjuntiva Prenex, indicando os vários passos. Nota: pode juntar vários passos num só, desde que tenham a mesma justificação.

$$\varphi = (\forall_x \exists_y (T(y) \to R(x))) \to (\forall_x \forall_y (S(x) \to P(y)))$$

b) Converta a seguinte fórmula para a Forma Normal de Skolem. Nota: basta indicar o resultado final.

$$\psi = \exists_{x_0} \forall_{x_1} \exists_{x_2} \forall_{x3} \exists_{x_4} (R(x_1, f(x_0)) \vee S(g(x_2, x_3), a, x_4))$$

Pergunta 2 [4 valores]

Mostre, usando Resolução, que a seguinte fórmula é contraditória.

$$\varphi = \forall_x \forall_y ((\neg C(x) \vee R(f(x))) \wedge (\neg C(x) \vee A(x, f(x))) \wedge (\neg A(x,y) \vee \neg R(y)) \wedge C(a))$$

Pergunta 3 [7 valores]

Prove, usando Dedução Natural, as seguintes afirmações:

a) $\{\forall_x (R(x) \wedge \neg S(x))\} \vdash \neg \exists_x (R(x) \to S(x))$

b) $\{\forall_x (P(x) \to Q(x)), \forall_y \neg Q(y)\} \vdash \forall_z \neg P(z)$

Pergunta 4 [2 valores]

Para cada uma das seguintes alíneas, indique se corresponde a uma árvore válida do Sistema $\mathcal{N}$. No caso de ser árvore válida, indique uma consequência do Sistema $\mathcal{N}$ que fica provada com a árvore. No caso de não ser árvore válida, indique, justificando, qual a regra que está mal aplicada.

a)
$$\dfrac{\exists x\, P(x)^1 \qquad \dfrac{\dfrac{P(y)^2 \qquad Q(y)^3}{P(y) \wedge Q(y)}\,{\scriptstyle(\wedge_I)}}{\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))}\,{\scriptstyle(\exists_I)}}{\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))}\,{\scriptstyle(\exists_E, 2)}$$

b)
$$\dfrac{\dfrac{\exists x\, P(x)^1 \qquad \dfrac{P(y)^2 \qquad \dfrac{\forall_x (P(x) \to Q)^3}{P(y) \to Q}\,{\scriptstyle(\forall_E)}}{Q}\,{\scriptstyle(\to_E)}}{Q}\,{\scriptstyle(\exists_E, 2)}}{\exists_x P(x) \to Q}\,{\scriptstyle(\to_I, 1)}$$

Pergunta 5 [2 valores]

a) Seja $\Sigma = (SP, SF)$ uma assinatura de Primeira Ordem tal que $SF_0 = \{a\}$, $SF_1 = \{f\}$ e $SF_n = \{\}$, para $n > 1$. Seja X um conjunto de variáveis. Indique, justificando, se o conjunto dos termos T_Σ^X é finito.

b) Seja $\varphi = \exists_x \psi$, onde ψ é uma fórmula sem quantificadores.
Prove que se φ é possível, então a sua Skolemização φ^S também é possível.