Lógica Computacional

Aula Teórica 3: Álgebra de Boole, natureza das fórmulas

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

21 de setembro de 2023

O que se pretende?

Intuição

- Lógica Proposicional:
  representação e manipulação de *asserções*.
- Dada uma fórmula, qual o seu valor de verdade?
  (0 — falsa, ou 1 — verdadeira).
- É necessário:
  - atribuir valores aos símbolos proposicionais;
  - conectivos propagam os valores de verdade:
    têm carácter funcional - a sua interpretação é fixa

Estrutura de interpretação

Valores de verdade

Seja $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ o *conjunto dos valores de verdade*.

Estrutura de interpretação

Uma *estrutura de interpretação* (ou *valoração*) sobre um conjunto de símbolos proposicionais P é uma *função* $V : P \to \mathcal{B}$.

- Para cada V:
  - se $V(p) = 1$ então diz-se que p é verdadeiro em V;
  - se $V(p) = 0$ então diz-se que p é falso em V.
- Cada V fixa o valor de verdade dos símbolos proposicionais.

Satisfação de fórmulas

Relação de satisfação

A satisfação de uma fórmula $\varphi \in F_P$ por uma valoração V, denotada por $V \Vdash \varphi$, é definida indutivamente do seguinte modo:

- $V \Vdash p$, se e só se $V(p) = 1$, para $p \in P$;
- não se verifica $V \Vdash \bot$, isto é $V \nVdash \bot$;
- $V \Vdash \neg\varphi$, se e só se $V \nVdash \varphi$;
- $V \Vdash \varphi \vee \psi$, se e só se $V \Vdash \varphi$ ou $V \Vdash \psi$;
- $V \Vdash \varphi \wedge \psi$, se e só se $V \Vdash \varphi$ e $V \Vdash \psi$;
- $V \Vdash \varphi \to \psi$, se sempre que $V \Vdash \varphi$ também $V \Vdash \psi$.

Quando $V \Vdash \varphi$, diz-se que a valoração V **satisfaz** a fórmula φ.
Quando $V \nVdash \varphi$, diz-se que a valoração V **não satisfaz** a fórmula φ.

Problema SAT

Dada $\varphi \in F_P$ decidir se existe V tal que $V \Vdash \varphi$.

Satisfação de fórmulas: como verificar?

Seja V tal que $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$

- $V \Vdash p \vee q$, pois $V \Vdash p$, pois $V(p) = 1$;
- $V \Vdash q \rightarrow p$, pois $V(q) = 0$ significa que não se tem $V \Vdash q$, saindo vacuosamente o resultado;
- não se tem $V \Vdash p \rightarrow q$, pois apesar de $V \Vdash p$ (i.e., $V(p) = 1$), ao contrário do exigido, não se tem $V \Vdash q$ (i.e., $V(q) = 0$);
- não se tem $V \Vdash p \wedge q$, pois apesar de $V \Vdash p$ (i.e., $V(p) = 1$) , ao contrário do exigido, não se tem $V \Vdash q$ (i.e., $V(q) = 0$).

A semântica informal não é fácil de usar na prática, sobretudo para estabelecer resultados negativos.
Quer-se uma semântica matematicamente rigorosa que seja mais fácil de usar.

Álgebra de Boole

George Boole propôs uma semântica para a Lógica Proposicional.

Conjunto dos valores de verdade $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, com as *operações*:

Multiplicação $\otimes$: $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ tal que

$$0 \otimes b = 0$$
$$1 \otimes b = b$$

Adição $\oplus$: $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ tal que

$$0 \oplus b = b$$
$$1 \oplus b = 1$$

Complementar $\ominus$: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ tal que

$$\ominus 0 = 1$$
$$\ominus 1 = 0$$

Propriedades básicas

Proposição

1. A multiplicação tem o valor 1 como elemento neutro e o 0 como elemento absorvente.
2. A adição tem o valor 0 como elemento neutro e o 1 como elemento absorvente.
3. A multiplicação e a adição são comutativas, associativas e mutuamente distributivas.
4. $b \oplus b = b$ e $b \otimes b = b$
5. $\ominus(\ominus b) = b$
6. $b \otimes (\ominus b) = 0$
7. $b \oplus (\ominus b) = 1$
8. $\ominus(b_1 \oplus b_2) = (\ominus b_1) \otimes (\ominus b_2)$
9. $\ominus(b_1 \otimes b_2) = (\ominus b_1) \oplus (\ominus b_2)$

Propriedades básicas

Provam-se alguns casos da proposição.

$\ominus(\ominus b) = b$

Considere-se que $b = 0$. Então, $\ominus(\ominus 0) = \ominus 1 = 0$.
O caso $b = 1$ tem prova semelhante.

$b \otimes b = b$

Considere-se que $b = 0$. Então, $b \otimes b = 0 \otimes 0 = 0 = b$.
Caso $b = 1$, então $b \otimes b = 1 \otimes 1 = 1 = b$.

$b \otimes (\ominus b) = 0$

Considere-se que $b = 0$. Então, $0 \otimes (\ominus 0) = 0$.
Caso $b = 1$, então $1 \otimes (\ominus 1) = (\ominus 1) = 0$.

Prova de algumas propriedades básicas

Comutatividade da adição: $b_1 \oplus b_2 = b_2 \oplus b_1$

Considere-se que $b_1 = 0$. Então, $b_1 \oplus b_2 = 0 \oplus b_2 = b_2$. Logo,

$$b_1 \oplus b_2 = \begin{cases} 0, & \text{se } b_2 = 0 \\ 1, & \text{se } b_2 = 1 \end{cases}$$

Por sua vez

$$b_2 \oplus b_1 = \begin{cases} 0 \oplus b_1 = b_1 = 0, & \text{se } b_2 = 0 \\ 1 \oplus b_1 = 1, & \text{se } b_2 = 1 \end{cases}$$

Logo, em ambos os casos se obtém o mesmo resultado.

Caso $b_1 = 1$ obtém-se o mesmo resultado de forma semelhante.

Prova de algumas propriedades básicas

Associatividade da multiplicação: $b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3) = (b_1 \otimes b_2) \otimes b_3$

Considere-se que $b_1 = 0$. Então,

$$b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3) = 0 \otimes (b_2 \otimes b_3) = 0$$

Por sua vez

$$(b_1 \otimes b_2) \otimes b_3 = (0 \otimes b_2) \otimes b_3 = 0 \otimes b_3 = 0$$

Caso $b_1 = 1$. Tem-se agora que

$$b_1 \otimes (b_2 \otimes b_3) = 1 \otimes (b_2 \otimes b_3) = b_2 \otimes b_3$$

Por sua vez

$$(b_1 \otimes b_2) \otimes b_3 = (1 \otimes b_2) \otimes b_3 = b_2 \otimes b_3$$

Propriedades básicas

A partir das provas apresentadas, observam-se os seguintes factos.

Lema

1. $b_1 \otimes b_2 = 0$ se e só se $b_1 = 0$ ou $b_2 = 0$.
2. $b_1 \otimes b_2 = 1$ se e só se $b_1 = 1$ e $b_2 = 1$.
3. $b_1 \oplus b_2 = 0$ se e só se $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$.
4. $b_1 \oplus b_2 = 1$ se e só se $b_1 = 1$ ou $b_2 = 1$.
5. $\ominus b = 0$ se e só se $b = 1$.
6. $\ominus b = 1$ se e só se $b = 0$.

As provas ficam como exercício.

Prova de algumas propriedades básicas

Distributividade do complementar sobre a adição:
$\ominus(b_1 \oplus b_2) = (\ominus b_1) \otimes (\ominus b_2)$

Prova-se por casos (considerando-se os possíveis valores de cada termo da igualdade).

Considere-se que $\ominus(b_1 \oplus b_2) = 0$. Então, $b_1 \oplus b_2 = 1$.
Logo, ou $b_1 = 1$ ou $b_2 = 1$, e portanto, ou $\ominus b_1 = 0$ ou $\ominus b_2 = 0$.
Conclui-se que $(\ominus b_1) \otimes (\ominus b_2) = 0$.

Considere-se que $\ominus(b_1 \oplus b_2) = 1$. Então, $b_1 \oplus b_2 = 0$.
Logo, $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$, e portanto, $\ominus b_1 = 1$ e $\ominus b_2 = 1$.
Conclui-se que $(\ominus b_1) \otimes (\ominus b_2) = 1$.

Avaliação de fórmulas

Intuição

- Uma estrutura de interpretação ou valoração apenas indica o valor de verdade dos símbolos proposicionais;
- A avaliação da fórmula depende também dos conectivos lógicos nela presentes.
- A avaliação dos conectivos é fixa (funcional).

Satisfação de fórmulas

Seja V uma *valoração* sobre P.

A extensão de V ao conjunto F_P é a aplicação $V : F_P \to \mathcal{B}$, definida indutivamente pelas seguintes regras:

- se $\varphi = p$ então $V(\varphi) = V(p)$, para cada $p \in P$
- $V(\bot) = 0$
- $V(\neg\varphi) = \ominus V(\varphi)$
- $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \oplus V(\psi)$
- $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \otimes V(\psi)$
- $V(\varphi \to \psi) = (\ominus V(\varphi)) \oplus V(\psi)$

Satisfação de fórmulas

Proposição

$$V \Vdash \varphi \quad \text{se e só se} \quad V(\varphi) = 1$$

Prova: por indução estrutural em φ (exercício).

Corolário

$$V(\neg\varphi) = 1 \quad \text{se e só se} \quad V(\varphi) = 0$$

Prova: Fica como exercício, mas é uma consequência simples da definição indutiva da extensão de V ao conjunto F_P.

Terminologia e notação

- Escreve-se $V \nVdash \varphi$ quando não se verifica que $V \Vdash \varphi$
  - diz-se que φ não é satisfeita por V, ou que φ é falsa em V
- Dado $\Phi \subseteq F_P$, escreve-se $V \Vdash \Phi$, se $V \Vdash \varphi$ para cada $\varphi \in \Phi$.

Satisfação de fórmulas: exercícios

Sejam $p, q \in P$ e $V : P \to \mathcal{B}$ tal que $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$

- $V \Vdash p \vee q$, pois $V(p \vee q) = V(p) \oplus V(q) = 1 \oplus V(q) = 1$;
- $V \nVdash p \wedge q$, pois $V(p \wedge q) = V(p) \otimes V(q) = 1 \otimes 0 = 0$;
- $V \Vdash p \to p$, pois $V(p \to p) = (\ominus V(p)) \oplus V(p) = (\ominus 1) \oplus 1 = 1$;
- $V \Vdash q \to q$, pois $V(q \to q) = (\ominus V(q)) \oplus V(q) = (\ominus 0) \oplus 0 = 1 \oplus 0 = 1$;
- $V \Vdash q \to p$, pois $V(q \to p) = (\ominus V(q)) \oplus V(p) = (\ominus 0) \oplus 1 = 1$;
- $V \nVdash p \to q$, pois $V(p \to q) = (\ominus V(p)) \oplus V(q) = (\ominus 1) \oplus 0 = 0 \oplus 0 = 0$;
- $V \nVdash \neg p \vee q$, pois $V(\neg p \vee q) = V(\neg p) \oplus V(q) = (\ominus V(p)) \oplus 0 = (\ominus 1) \oplus 0 = 0 \oplus 0 = 0$.

Semântica informal da implicação

Intuição

Uma implicação só não é satisfeita quando o antecedente é verdadeiro mas o consequente falso.

É o caso do mentiroso que promete mas não cumpre:

Se ganhar as eleições faço o clube ganhar o campeonato

Intuição

Uma implicação é sempre satisfeita quando o antecedente é falso.

É o caso da "falsa" promessa (vacuosamente verdadeira):

Nas aulas ao Domingo venho sempre de fato de banho.

Fórmula possível

Definição

Um fórmula diz-se possível se existir uma valoração que a satisfaça.

Exemplo

Seja $\varphi = p \vee q$:

Para $V_1 : P \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $V_1(p) = 1$ e $V_1(q) = 0$ temos que: $V_1 \Vdash p \vee q$, pois $V_1(p \vee q) = V_1(p) \oplus V_1(q) = 1 \oplus V_1(q) = 1$.

Já agora, para $V_2 : P \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $V_2(p) = 0$ e $V_2(q) = 0$ temos que: $V_2 \nVdash p \vee q$, pois $V_2(p \vee q) = V_2(p) \oplus V_2(q) = 0 \oplus 0 = 0$.

Fórmula válida

Definição

Um fórmula diz-se válida ou uma tautologia se for satisfeita por qualquer valoração.

Nota

Se uma fórmula é válida, então também é possível.

Exemplo: $(p \vee \neg p)$

Seja V uma valoração qualquer. Temos que:
$V(p \vee \neg p) = V(p) \oplus V(\neg p) = V(p) \oplus (\ominus V(p)) = 1$.
Logo $V \Vdash p \vee \neg p$ para toda a valoração V, logo é fórmula válida.

Fórmula contraditória

Definição

Um fórmula diz-se contraditória se não for satisfeita por nenhuma valoração.

Exemplo: $(p \wedge \neg p)$

Suponhamos que existe V tal que $V \Vdash p \wedge \neg p$. Então, $V(p \wedge \neg p) = 1$, isto é, $V(p) \otimes (\ominus V(p)) = 1$. Logo $V(p) = 1$ e $\ominus(V(p)) = 1$, o que significa que $V(p) = 0$. Isto é impossível porque V é uma função. Absurdo. Logo não pode existir valoração V que satisfaça $p \wedge \neg p$.

Fórmula possível, contraditória e válida

Terminologia

A fórmula $\varphi \in F_P$ diz-se:

- possível: se existe valoração V sobre P que a satisfaz;
- válida: se toda a valoração V sobre P a satisfaz;
- contraditória: se nenhuma valoração sobre P a satisfaz;
- fórmula válida diz-se também *tautologia* e escreve-se $\models \varphi$;
- escreve-se $\not\models \varphi$ se φ não é uma tautologia;
- um conjunto de fórmulas $\Phi \subseteq F_P$ diz-se *possível* se existe uma valoração V sobre P que satisfaz todas as fórmulas em Φ; caso contrário diz-se *contraditório*.

Possível, contraditória e válida: quais as relações entre elas?

A fórmula que não é:

1. válida, pode ser possível ou contraditória;
2. contraditória, pode ser possível ou válida;
3. possível também não pode ser válida, logo é contraditória.

A negação de uma fórmula:

1. válida, é contraditória;
2. contraditória, é válida;
3. possível e não válida, é possível.

Como provar estes resultados?

A negação de uma fórmula válida é contraditória

Prova:

1. Seja φ uma fórmula válida.
2. Então qualquer valoração V é tal que $V(\varphi) = 1$.
3. Logo $V(\neg\varphi) = \ominus V(\varphi) = \ominus 1 = 0$.
4. Logo $V(\neg\varphi) = 0$ para qualquer valoração V.
5. Podemos concluir que $\neg\varphi$ é contraditória.

Análise por via semântica

Qual a natureza da fórmula $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow \perp$?

Seja V uma qualquer valoração:

$$V(\varphi) = (\ominus V(p \wedge q)) \oplus V(\perp) = (\ominus V(p \wedge q)) \oplus 0 = \ominus V(p \wedge q).$$

- Seja V_1 tal que $V_1(p) = 0$ e $V_1(q) = 1$

$$V_1(\varphi) = \ominus V_1(p \wedge q) = \ominus(V_1(p) \otimes V_1(q)) = \ominus(0 \otimes 1) = \ominus 0 = 1.$$

Logo $V_1 \Vdash \varphi$.
Podemos concluir que a fórmula φ é possível.

- Será válida ou existe valoração que não a satisfaz?
- Seja V_2 tal que $V_2(p) = 1$ e $V_2(q) = 1$.

$$V_2(\varphi) = \ominus V_2(p \wedge q) = \ominus(V_2(p) \otimes V_2(q)) = \ominus(1 \otimes 1) = \ominus 1 = 0.$$

Podemos concluir que a fórmula φ não é válida.

Análise por via semântica

Qual a natureza da fórmula $\varphi = (p \vee \neg p) \rightarrow \bot$?

Seja V uma qualquer valoração:

$V(\varphi) = (\ominus V(p \vee \neg p)) \oplus V(\bot) = (\ominus V(p \vee \neg p)) \oplus 0 = \ominus V(p \vee \neg p)$.

Mas, $V(p \vee \neg p) = V(p) \oplus V(\neg p) = V(p) \oplus (\ominus V(p)) = 1$

Logo $V(\varphi) = \ominus V(p \vee \neg p) = \ominus 1 = 0$

Nota: $V(\varphi) = 0$ independentemente do valor que V dá a p.

Logo, a fórmula é contraditória.

Análise por via semântica

Qual a natureza da fórmula $\varphi = \perp \to (p \wedge q)$?

Seja V uma qualquer valoração:

$$V(\varphi) = (\ominus V(\perp)) \oplus V(p \wedge q) = (\ominus 0) \oplus V(p \wedge q) = 1 \oplus V(p \wedge q) = 1.$$

Nota: $V(\varphi) = 1$ independentemente do valor que V dá a p e a q.

Logo, a fórmula é válida.

Natureza de fórmula - os três casos

Qual a natureza de uma fórmula?

- Válida
  - Logo também é possível
- Contraditória
  - Logo não pode ser nem possível nem válida
- Possível e não válida
  - Dizer apenas “possível” não chega, pois ficamos sem saber se a forma é válida