Lógica Computacional

Aula Teórica 7
Algoritmo de Horn

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

6 de outubro de 2023

Como determinar a natureza de uma fórmula na FNC?

- ✓ Se FNC(φ) então verificar que $\models \varphi$ é simples: demora no máximo um tempo proporcional ao número de símbolos proposicionais da fórmula.
- × Transformar fórmulas arbitrárias para a FNC é moroso.
- × Determinar se dada fórmula (não válida) é possível ou contraditória requer análise combinatória.

Só no caso da validade a análise é eficiente.
Mas à partida não sabemos a natureza da fórmula dada...

Algoritmo de Horn [Alfred Horn]

Algoritmo eficiente para testar se uma fórmula é possível ou não, mas apenas para uma dada classe de fórmulas.

Cláusulas Horn

Cláusula

Uma cláusula é uma disjunção de literais.

Recordar

- Literal positivo: $\perp$ ou p, com $p \in P$
- Literal negativo: $\neg\perp$ ou $\neg p$, com $p \in P$

Cláusula de Horn

Uma cláusula de Horn é uma cláusula que tem no máximo um literal positivo.

Exemplos

- $\perp$, p, $(p \vee \neg q)$, $(\neg p \vee \neg q)$ são cláusulas de Horn;
- $(p \vee q)$ ou $(\perp \vee p)$ não são cláusulas de Horn.

Cláusulas de Horn

Há 3 tipos de cláusulas de Horn

1. Sem literais negativos (é então apenas um literal positivo).
2. Sem literais positivos.
3. Com literais negativos e um positivo.

Exemplos

1. p ou $\perp$
2. $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
3. $(\neg p \vee q \vee \neg r)$

Cláusulas de Horn como implicações

Proposição

Seja L um literal positivo.

1. $L \equiv \top \to L$
2. $\bigvee_{i=1}^{n} \neg L_i \equiv (\bigwedge_{i=1}^{n} L_i) \to \bot$
3. $(\bigvee_{i=1}^{n} \neg L_i) \vee L \equiv (\bigwedge_{i=1}^{n} L_i) \to L$

Prova

Exercícios simples.

Exemplos

1. $p \equiv \top \to p$
2. $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \equiv (p \wedge q \wedge r) \to \bot$
3. $(\neg p \vee q \vee \neg r) \equiv (p \wedge r) \to q$

Fórmulas de Horn

Fórmula de Horn

Uma fórmula $\varphi \in F_P$ é uma fórmula de Horn, denotado FH(φ), se:

- FNC(φ)
- cada disjunção tem no máximo um literal positivo.

Notas

- Uma fórmula de Horn é a conjunção de cláusulas de Horn.
- A conjunção de fórmulas de Horn ainda é fórmula de Horn.

Linguagem de Horn

Recordar: as cláusulas de Horn podem ser vistas como implicações

Forma de Implicações

Se $\varphi \in F_P$ e FH(φ), então existe ψ tal que $\varphi \equiv \psi$ e:

$$\psi = \bigwedge_{i=1}^{n} (C_i \to L_i)$$

para algum $n \geq 1$, e, para todo o $1 \leq i \leq n$, L_i é literal positivo e:

- $C_i = \top$ ou
- $C_i = \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{ij}$ com $k_i \geq 1$ e cada $L_{i,j}$ é simbolo proposicional.

Neste caso, ψ diz-se na *Forma de Implicações*.

Por $Claus(\varphi)$ vamos denotar o conjunto das cláusulas de φ.

Abuso de notação: $C_i = \{L_{ij} : 1 \leq j \leq k_i\}$

Linguagem de Horn

Exemplo

Considere a seguinte fórmula:

$$\varphi = (p) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

Temos que FH(φ) e φ é equivalente a:

$$(\top \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge ((p \wedge q \wedge r) \rightarrow \bot)$$

que está na Forma de Implicações.

Algoritmo de Horn

Operador de Consequência Imediata

Seja $\varphi \in F_P$ tal que φ está na Forma de Implicações.
A função $T_\varphi : \mathcal{P}(P \cup \{\top, \bot\}) \to \mathcal{P}(P \cup \{\top, \bot\})$, chamado o *operador de consequência imediata* de φ, é definida por:

$$T_\varphi(A) = \{L_i : \text{ existe } (C_i \to L_i) \in Claus(\varphi) \text{ e } C_i \subseteq A \cup \{\top\}\}$$

Exemplo

Seja $\varphi = (\top \to p) \wedge (p \to q) \wedge ((p \wedge q) \to r) \wedge ((p \wedge q \wedge r) \to \bot)$
Então:

- $T_\varphi(\emptyset) = \{p\}$
- $T_\varphi(\{p, q\}) = \{p, q, r\}$
- $T_\varphi(\{p, q, r\}) = \{p, q, r, \bot\}$

Algoritmo de Horn

Seja $\psi \in F_P$ tal que $FH(\psi)$

1. Encontra-se φ tal que $\varphi \equiv \psi$ e φ está na Forma de Implicações
2. Calcular $T_\varphi(\emptyset)$
3. Aplicar T_φ ao resultado até obter ponto fixo, i.e., $T_\varphi(A) = A$
4. Esse ponto fixo denota-se por $I_{min}(\varphi)$?
5. Identificar a natureza de φ:
   - Se $\perp \notin I_{min}(\varphi)$, então φ é possível
   - Se $\perp \in I_{min}(\varphi)$, então φ é contraditória
6. Como $\varphi \equiv \psi$, as duas fórmulas têm a mesma natureza

Correcção do algoritmo de Horn

Objectivo do algoritmo

Determinar se dada fórmula de Horn é contraditória ou possível.

Correcção e completude do algoritmo

Dada uma fórmula $\varphi \in F_P$ na Forma de Implicações, tem-se que:

- φ é possível se e só se $\perp \notin I_{min}(\varphi)$;
- φ é contraditória se e só se $\perp \in I_{min}(\varphi)$.

Resultados sobre o algoritmo de Horn

Se o algoritmo de Horn indica que uma fórmula é possível, então podemos extrair uma valoração que satisfaz a fórmula!

Proposição

Seja $\varphi \in F_P$ uma fórmula de Horn tal que $\perp \notin I_{min}(\varphi)$.
Então, a valoração V tal que

- $V(p) = 1$ se $p \in I_{min}(\varphi)$
- $V(p) = 0$ se $p \notin I_{min}(\varphi)$

é tal que $V \Vdash \varphi$.

Proposição

A função T_φ é monótona crescente.

Durante o passo 3 do algoritmo de Horn, logo que se encontra $\perp$ podemos concluir que $\perp \in I_{min}(\varphi)$, e por isso φ é contraditória.

Resultados sobre o algoritmo de Horn

O conjunto $I_{min}(\varphi)$ só tem literais que ocorrem em φ.

Proposição: literais omissos

Seja φ na Forma de Implicações, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n}(C_i \to L_i)$. Então

$$I_{min}(\varphi) \subseteq \{L_i : 1 \leq i \leq n\}$$

Corolário: casos particulares

1. Se $\perp \notin \{L_i : 1 \leq i \leq n\}$ então $\perp \notin I_{min}(\varphi)$.
2. Se $\top \neq C_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, então $I_{min}(\varphi) = \emptyset$

Propriedades do algoritmo de Horn

Terminação do algoritmo de Horn

Como $I_{min}(\varphi)$ está contido num conjunto finito e T_φ é uma função monótona crescente, temos que o ponto fixo é encontrado num número finito de passos.

Complexidade do algoritmo de Horn

Se φ é uma fórmula na Forma de Implicações, então o algoritmo termina num número polinomial (no tamanho de φ) de passos.

HORNSAT é um problema P

Algoritmo de Horn e validade

Nota

O algoritmo de Horn apenas permite responder à questão:
a fórmula φ é possível ou contraditória?

Se for possível, não sabemos se é válida ou não.
Recordar: negação de fórmula válida é contraditória (e vice-versa).

Seja $\varphi \in F_P$.

Seja $\psi \equiv \neg\varphi$ e $FNC(\psi)$ — colocar $\neg\varphi$ na FNC

Se ψ é fórmula de Horn, então aplicamos o algoritmo de Horn.

- Se $\perp \in I_{min}(\psi)$, então ψ é contraditória, e portanto φ é válida.
- Se $\perp \notin I_{min}(\psi)$, então ψ é possível, e portanto φ não é válida.

Algoritmo de Horn e Consequência Semântica

Proposição

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$$
se e só se
$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$ é contraditória

Se $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$ for equivalente a uma fórmula de Horn ψ, aplica-se o algoritmo de Horn a ψ:

- Se $\perp \in I_{min}(\psi)$, então ψ é contraditória e temos $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$
- Se $\perp \notin I_{min}(\psi)$, então ψ é possível e temos $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \not\models \varphi$

Aplicação do algoritmo

Exemplo

- Qual a natureza de
  $p \wedge (\neg r \vee s) \wedge (r \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg s) \wedge q$?
- A fórmula está na FNC
- A fórmula não é válida (pelo Lema da validade das disjunções)
- Como é fórmula de Horn, aplica-se o algoritmo de Horn

Aplicação do algoritmo de Horn

Converte-se primeiro para a Forma de Implicações:
$\varphi = (\top \to p) \wedge (r \to s) \wedge ((p \wedge q) \to r) \wedge ((r \wedge s) \to \bot) \wedge (\top \to q)$

Algoritmo de Horn

Primeiro calculamos $T_\varphi(\emptyset)$:

- $T_\varphi(\emptyset) = \{p, q\}$

Agora continuamos a aplicar T_φ até obter ponto fixo.

- $T_\varphi(\{p, q\}) = \{p, q, r\}$
- $T_\varphi(\{p, q, r\}) = \{p, q, r, s\}$
- $T_\varphi(\{p, q, r, s\}) = \{p, q, r, s, \bot\}$
- $T_\varphi(\{p, q, r, s, \bot\}) = \{p, q, r, s, \bot\} = I_{min}(\varphi)$

Como $\bot \in I_{min}$ temos que φ é contraditória.

Nota: podíamos ter parado logo que encontrámos $\bot$.

Outro exemplo

Natureza de $p \wedge (\neg r \vee s) \wedge (r \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg s)$
Converte-se primeiro para a forma de Implicações:
$\varphi = (\top \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow s) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge ((r \wedge s) \rightarrow \bot)$

Primeiro calculamos $T_\varphi(\emptyset)$:

- $T_\varphi(\emptyset) = \{p\}$

Agora continuamos a aplicar T_φ até obter ponto fixo.

- $T_\varphi(\{p\}) = \{p\} = I_{min}(\varphi)$

Como $\bot \notin I_{min}(\varphi)$, então φ é possível.

Considere-se a valoração V tal que:

$V(p) = 1$ e $V(q) = V(r) = V(s) = 0$

Facilmente se verifica que $V \Vdash \varphi$.

Mais um exemplo

Natureza de $p \wedge (\neg q \vee s) \wedge (r \vee \neg p) \wedge \neg r \wedge (\neg r \vee q)$

Converte-se primeiro para a Forma de Implicações:

$\varphi = (\top \to p) \wedge (q \to s) \wedge (p \to r) \wedge (r \to \bot) \wedge (r \to q)$

Primeiro calculamos $T_\varphi(\emptyset)$:

- $T_\varphi(\emptyset) = \{p\}$

Agora continuamos a aplicar T_φ até obter ponto fixo.

- $T_\varphi(\{p\}) = \{p, r\}$
- $T_\varphi(\{p, r\}) = \{p, q, r, \bot\}$

Podemos parar, pois já sabemos que $\bot \in I_{min}$.

Temos então que φ é contraditória.