Lógica Computacional

Aula Teórica 10: Sintaxe da Lógica de Primeira Ordem

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

19 de outubro de 2023

Necessidade de uma linguagem mais rica

Limitações da Lógica Proposicional

- Apenas compõe asserções com os operadores de negação, disjunção, conjunção e implicação.
- Trata declarações que não envolvam estes operadores como atómicas, por muito elaboradas que sejam.
- Não permite falar diretamente sobre objetos, propriedades e funções entre sobre.
- Como representamos em Lógica Proposicional a frase? "*O pai do Pedro é amigo do pai da Maria*"
- Queremos poder quantificar sobre objetos:
  - *Todo o homem é mortal* ou *Nenhum homem é mortal* ou *Algum homem é mortal* ou *Algum homem não é mortal*
  - *Qualquer estudante é mais novo que algum professor*
- A Lógica Proposicional representa estas asserções como básicas (um símbolo proposicional).

Lógica de Primeira Ordem

Representar elementos de um determinado domínio de interesse

Termos

- Constantes: representam elementos concretos
  Exemplos: Maria (pessoa), 1 (um inteiro), Sócrates (pessoa)
- Variáveis: representam elementos arbitrários de conjuntos.
  Exemplos: n, m, x, y, x_1
- Funções: permitem obter termos a partir de termos.
  Exemplos: pai(x), soma(n,m), quad(x)

O número de argumentos de uma função é a aridade da função.
pai(x) é unária (tem aridade 1)
soma(m,n) é binária (tem aridade 2)

É preciso ser funcional: filho(x) ou avó(x) não são funcionais

Lógica de Primeira Ordem

Asserções básicas

- Em Lógica Proposicional: símbolos proposicionais
- Em Lógica de Primeira Ordem: predicados aplicados a termos.
- O que são predicados? Relações entre elementos, que podem tomar valor de verdade. Exemplos:
  Mortal(Sócrates), Estudante(Pedro), Professor(António),
  Mais_novo(x,y), Maior(x,y), Filho_de(x,y,z)

O João é filho da Maria e do António

- Lógica Proposicional: $jfMA$ ou no máximo $(jfM \wedge jfA)$
- Lógica de Primeira Ordem: Filho_de(João, Maria, António)

Estas fórmulas mais simples são chamadas Fórmulas Atómicas.

Lógica de Primeira Ordem

A partir das fórmulas atómicas podemos construir fórmulas complexas

Fórmulas de Primeira Ordem

- Conectivos $\perp$, $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$
- Quantificadores
  - Universal: quantifica sobre todos os elementos
  - Existencial: quantifica sobre algum elemento

Exemplos

- $\forall_x \, Mortal(x)$ ou $\exists_x \, \neg Mortal(x)$
- $\forall_x (Estudante(x) \rightarrow (\exists_y (Professor(y) \wedge Mais\_novo(x, y))))$
- $\forall_n \, \exists_m \, (m > n)$

Qual o alfabeto da Lógica de Primeira Ordem?

Lógica proposicional: depende do conjunto P
Lógica de primeira ordem: depende das funções e predicados que considerarmos.

Assinatura de Primeira Ordem

Uma *assinatura de primeira ordem* é um par de conjuntos $\Sigma = (SF, SP)$ sendo:

- $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, onde:
  - SF_i é um conjunto de símbolos de *função* de aridade i
- $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, onde:
  - SP_i é um conjunto de símbolos de *predicado* de aridade i
- os conjuntos SF_i e SP_i são disjuntos dois a dois.

Os símbolos em SF_0 chamam-se *constantes*;
Os símbolos em SP_0 chamam-se *símbolos proposicionais*.

Notação

- Símbolos de predicado começam com letra maiúscula
  - Estudante, Professor, Filho_de, ...
- Símbolos de função começam com letra minúscula
  - soma, mãe, pai, ...
- Para constantes genéricas usamos início do alfabeto
  - $a, b, c, \ldots$
- Para variáveis usamos final do alfabeto
  - $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$

Exemplo de assinatura de primeira ordem

- $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, com
  - $SF_0 = \{zero\}$
  - $SF_1 = \{suc\}$
  - $SF_2 = \{soma\}$
  - $SF_i = \emptyset$, para todo o $i \geq 3$
- $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, com
  - $SP_1 = \{Primo\}$
  - $SP_2 = \{=, >, <\}$
  - $SP_i = \emptyset$, para todo o $i = 0$ ou $i \geq 3$

Com esta assinatura podemos escrever as fórmulas atómicas:

- $< (zero, suc(zero))$ e $= (soma(zero, zero), zero)$ e $Primo(suc(suc(zero)))$
- no caso de $<, >, =$ podemos notação usual:
- $zero < suc(zero)$ e $soma(zero, zero) = zero$

Outro exemplo de assinatura de primeira ordem

- $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, com
  - $SF_0 = \{ivo, rita, max\}$
  - $SF_1 = \{pai, mae\}$
  - $SF_i = \emptyset$, para todo o $i \geq 2$
- $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, com
  - $SP_1 = \{Adulto, Pessoa, Animal\}$
  - $SP_2 = \{Mais\_alto\}$
  - $SP_3 = \{Filho\_de\}$
  - $SP_i = \emptyset$, para todo o $i = 0$ ou $i \geq 4$

Com esta assinatura podemos escrever as fórmulas atómicas:

- $Adulto(pai(ivo))$ $\qquad$ $Pessoa(rita)$
- $Filho\_de(x, mae(x), pai(x))$
- $Mais\_alto(pai(pai(ivo)), mae(pai(ivo)))$

Outro exemplo de assinatura de primeira ordem

- $SF = \{SF_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, com
  - $SF_0 = \{a, b, c\}$
  - $SF_1 = \{f\}$
  - $SF_2 = \{g\}$
  - $SF_3 = \{h\}$
  - $SF_i = \emptyset$, para todo o $i \geq 4$
- $SP = \{SP_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, com
  - $SP_0 = \{p, q\}$
  - $SP_1 = \{R\}$
  - $SP_2 = \{T\}$
  - $SP_i = \emptyset$, para todo o $i \geq 3$

Com esta assinatura podemos escrever as fórmulas atómicas:

- $R(f(h(a, x, c)))$ ou $T(f(a), g(b, c))$
- p ou q

Que símbolos podemos usar para escrever fórmulas?

Alfabeto de primeira ordem

Dada uma assinatura de primeira ordem $\Sigma = (SF, SP)$ e um conjunto numerável X de *variáveis*, um alfabeto de primeira ordem sobre Σ e X, denotado por Alf_{Σ}^{X}, tem:

- cada um dos elementos de SF_i, para cada $i \in \mathbb{N}_0$;
- cada um dos elementos de SP_i, para cada $i \in \mathbb{N}_0$;
- cada um dos elementos de X;
- o símbolo $\perp$ (falso, contradição ou absurdo);
- os conectivos negação $\neg$, disjunção, $\vee$, conjunção, $\wedge$ e implicação, $\rightarrow$;
- os quantificadores universal, $\forall$, e existencial, $\exists$;
- o símbolo "," e os parênteses esquerdo "(" e direito ")".

Assume-se que $X \cap SF_i = \emptyset$ e $X \cap SP_i = \emptyset$, para cada $i \in \mathbb{N}_0$

Termos

Os termos representam elementos de um domínio de interesse

Conjunto de termos induzidos por alfabeto

O *conjunto de termos induzidos por* Alf_{Σ}^{X}, denotado por T_{Σ}^{X}, é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- *CONST*: $c \in T_{\Sigma}^{X}$, para cada $c \in SF_0$;
- *VAR*: $x \in T_{\Sigma}^{X}$, para cada $x \in X$;
- *FUN*: se $t_1, \ldots, t_n \in T_{\Sigma}^{X}$ então $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_{\Sigma}^{X}$ para cada $f \in SF_n$, com $n > 0$.

Exemplos

Considere-se a assinatura do exemplo anterior e assuma-se $x \in X$.

- Por *CONST*, tem-se que $zero \in T_{\Sigma}^{X}$, pois $zero \in SF_0$.
- Como $x \in T_{\Sigma}^{X}$ (por *VAR*), então $suc(x) \in T_{\Sigma}^{X}$ por *FUN*, pois $suc \in SF_1$.

Prova de pertença a T_Σ^X

Como T_Σ^X é um conjunto definido indutivamente, podemos fazer uma prova de pertença em forma de árvore

$suc(soma(x, zero)) \in T_\Sigma^X$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in X}{x \in T_\Sigma^X}\ \text{(VAR)} \qquad \dfrac{zero \in SF_0}{zero \in T_\Sigma^X}\ \text{(CONST)} \qquad soma \in SF_2}{soma(x, zero) \in T_\Sigma^X}\ \text{(FUN)} \qquad suc \in SF_1}{suc(soma(x, zero)) \in T_\Sigma^X}\ \text{(FUN)}
$$

Fórmulas de Primeira Ordem

Linguagem de primeira ordem induzida por Alf_Σ^X

O conjunto das fórmulas de primeira ordem induzido por Alf_Σ^X, denotada por F_Σ^X, é definido indutivamente pelas seguintes regras:

- *PROP*: $P \in F_\Sigma^X$, para cada $P \in SP_0$
- *BOT*: $\perp \in F_\Sigma^X$
- *PRED*: se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ e $P \in SP_n$, com $n > 0$, então $$P(t_1, \ldots, t_n) \in F_\Sigma^X$$
- *NEG*: se $\varphi \in F_\Sigma^X$ então $\neg\varphi \in F_\Sigma^X$
- *DIS*: se $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ então $(\varphi \vee \psi) \in F_\Sigma^X$
- *CON*: se $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ então $(\varphi \wedge \psi) \in F_\Sigma^X$
- *IMP*: se $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ então $(\varphi \to \psi) \in F_\Sigma^X$
- *UNIV*: se $x \in X$ e $\varphi \in F_\Sigma^X$ então $\forall_x \varphi \in F_\Sigma^X$
- *EXIST*: se $x \in X$ e $\varphi \in F_\Sigma^X$ então $\exists_x \varphi \in F_\Sigma^X$

Atenção: o que não são fórmulas?

Sejam: x variável, f função, P e Q predicados e ψ fórmula.

- Termos não são fórmulas:

$$suc(x) \;\text{ e }\; (suc(zero) \vee suc(suc(zero)))$$

  não são fórmulas de primeira ordem.

- Argumentos das funções e dos predicados são termos:

$$Q(f(P(x))),\; P(\psi), \;\text{ e } P(Q(x))$$

  não são fórmulas de primeira ordem.

- Quantifica-se sobre variáveis, mas não se quantifica sobre funções, predicados ou fórmulas:

$$\forall_x \forall_f P(f(x)),\; \forall_x \forall_P P(x),\; \text{e } \forall_\psi (\psi \vee P(x))$$

  não são fórmulas de primeira ordem.

Fórmulas VS Termos

- Termos representam elementos
  - podemos construir termos complexos usando funções

    Exemplo: $suc(soma(x, y))$ ou $pai(mae(x))$
- Fórmulas representam asserções acerca destes elementos
  - *PRED* permite construir fórmulas a partir de termos
  - depois de aplicarmos *PRED* obtemos fórmulas

    Exemplo: $=(suc(soma(x, y)), z)$ ou $Adulto(pai(mae(x)))$
  - depois de *PRED* só podemos aplicar conectivos e quantificadores para obter fórmulas mais complexas

    $\forall_y(\forall_z(Filho\_de(ivo, y, z) \to (Adulto(y) \wedge Adulto(z))))$

Prova de pertença a F_{Σ}^{X}

$$\forall_y(\forall_z(Filho\_de(ivo, y, z) \to (Adulto(y) \wedge Adulto(z))))$$

$$\dfrac{y \in X \qquad \dfrac{z \in X \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{ivo \in SF_0}{ivo \in T_{\Sigma}^{X}}\,\text{(CONST)} \quad \dfrac{y \in X}{y \in T_{\Sigma}^{X}}\,\text{(VAR)} \quad \dfrac{z \in X}{z \in T_{\Sigma}^{X}}\,\text{(VAR)} \quad F \in SP_3}{F(ivo, y, z) \in F_{\Sigma}^{X}}\,\text{(PRED)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{y \in X}{y \in T_{\Sigma}^{X}}\,\text{(VAR)} \quad A \in SP_1}{A(y) \in F_{\Sigma}^{X}}\,\text{(PRED)} \quad \dfrac{\dfrac{z \in X}{z \in T_{\Sigma}^{X}}\,\text{(VAR)} \quad A \in SP_1}{A(z) \in F_{\Sigma}^{X}}\,\text{(PRED)}}{A(y) \wedge A(z) \in F_{\Sigma}^{X}}\,\text{(CON)}}{F(ivo, y, z) \to (A(y) \wedge A(z)) \in F_{\Sigma}^{X}}\,\text{(IMP)}}{\forall_z(F(ivo, y, z) \to (A(y) \wedge A(z))) \in F_{\Sigma}^{X}}\,\text{(UNIV)}}{\forall_y(\forall_z(F(ivo, y, z) \to (A(y) \wedge A(z)))) \in F_{\Sigma}^{X}}\,\text{(UNIV)}$$

O que representam os termos e fórmulas?

- Termos: representam entidades
  - Constantes referem entidades concretas.
  - Variáveis referem entidades arbitrárias.
  - Funções expressam cálculo.
- Fórmulas: asserções sobre entidades
  - Predicados expressam relações (propriedades).
  - Quantificador universal:
    Captura ideias como "todo", "qualquer", "cada um", etc.
  - Quantificador existencial: Captura ideias como "algum", "pelo menos um", "existe um", ...

Abreviaturas

Abreviaturas

Temos as mesmas abreviaturas como em lógica proposicional.

Para simplificar a notação

- omitem-se por vezes os parênteses mais exteriores das fórmulas.
- Considera-se que $\neg$, $\forall$, $\exists$ têm precedência.

Exemplos

- $\forall_x P(x) \rightarrow Q(y) \quad \rightsquigarrow \quad (\forall_x P(x)) \rightarrow Q(y)$
- $\exists_y \neg \forall_x P(x) \rightarrow Q(y) \quad \rightsquigarrow \quad (\exists_y (\neg(\forall_x P(x)))) \rightarrow Q(y)$

Da linguagem natural para lógica de primeira ordem

Frases Aristotélicas

Afirmações Universais

Todos as aves voam.
Qualquer que seja o elemento, se ele for uma ave, então voa:

$$\forall_x (Ave(x) \rightarrow Voa(x))$$

Qualquer criança é mais nova que a sua mãe.
Quaisquer que sejam os elementos x e y, se x for uma criança e y a sua mãe, então x é mais novo que y.

$$\forall_x \forall_y ((Crianca(x) \wedge Mae(y,x)) \rightarrow Mais\_novo(x,y))$$

Da linguagem natural para lógica de primeira ordem

Frases Aristotélicas

Afirmações Existenciais

Algumas aves voam.
Existe pelo menos um elemento que é uma ave e que voa:

$$\exists_x (Ave(x) \wedge Voa(x))$$

Existe uma criança que é mais velha que o seu tio.
Existe um elemento x e um elemento y, tal que x é uma criança e y é o seu tio, e y é mais novo que x.

$$\exists_x \exists_y (Crianca(x) \wedge Tio(y, x) \wedge Mais\_novo(y, x))$$

Da linguagem natural para lógica de primeira ordem

Afirmações Universais e Existenciais estão relacionadas!
Como? Através da negação

Negação de Afirmação Universal

Não é verdade que todas as aves voam.

$$\neg\forall_x(Ave(x) \rightarrow Voa(x))$$

Podemos dizer o mesmo com uma Afirmação Existencial:

$$\exists_x(Ave(x) \land \neg Voa(x))$$

Como?
Iremos ver que $\neg\forall_x\varphi \equiv \exists_x\neg\varphi$. Depois aplicamos de Morgan:
$\neg\forall_x(Ave(x) \rightarrow Voa(x)) \equiv \exists_x\neg(Ave(x) \rightarrow Voa(x)) \equiv$
$\exists_x\neg(\neg Ave(x) \lor Voa(x)) \equiv \exists_x(Ave(x) \land \neg Voa(x))$

Da linguagem natural para lógica de primeira ordem

Afirmações Universais e Existenciais estão relacionadas!
Como? Através da negação

Negação de Afirmação Existencial

Não é verdade que alguns patos voem.

$$\neg\exists_x(Pato(x) \land Voa(x))$$

Podemos dizer o mesmo com uma Afirmação Universal:

$$\forall_x(Pato(x) \rightarrow \neg Voa(x))$$

Como?
Iremos ver que $\neg\exists_x\varphi \equiv \forall_x\neg\varphi$. Depois aplicamos de Morgan:
$\neg\exists_x(Pato(x) \land Voa(x)) \equiv \forall_x\neg(Pato(x) \land Voa(x)) \equiv$
$\forall_x(\neg Pato(x) \lor \neg Voa(x)) \equiv \forall_x(Pato(x) \rightarrow \neg Voa(x))$

Da linguagem natural para lógica de primeira ordem

Quando temos de modelar uma situação em lógica:

- Em Lógica Proposicional?
  Escolhemos os símbolos proposicionais
- Em Lógica de Primeira Ordem?
  Escolhemos a assinatura de primeira ordem
  - Que constantes considerar?
  - Que outros símbolos de função usar?
  - Que predicados usar?

Exemplo: os filhos do João e da Sandra já são todos adultos

Constantes? $SF_0 = \{joao, sandra\}$
Símbolos de função? $SF_i = \{\}$, para $i \geq 1$
Predicados? $SP_1 = \{Adulto\}$ e $SP_2 = \{Filho\_de\}$

$$\forall_x((Filho\_de(x, joao) \wedge Filho\_de(x, sandra)) \rightarrow Adulto(x))$$

Funções ou predicados: uma questão de escolha

Os irmãos do pai do Ivo são seus tios

- "Pai" como predicado binário:
  - $ivo \in SF_0$
  - $SP_2 = \{Tio\_de, Irmao\_de, Pai\_de\}$

$$\forall_x \forall_y ((Pai\_de(x, ivo) \wedge Irmao\_de(y, x)) \rightarrow Tio\_de(y, ivo))$$

- "Pai" como função:
  - $ivo \in SF_0$ e $pai \in SF_1$
  - $SP_2 = \{Tio\_de, Irmao\_de\}$

$$\forall_x (Irmao\_de(x, pai(ivo)) \rightarrow Tio\_de(x, ivo))$$

Nota: pudemos considerar a função "pai", pois "Pai de" é uma relação unívoca. Não o poderíamos fazer por exemplo para "filho" (pode ter mais do que um), "avô" (cada pessoa tem dois), ...