Lógica Computacional

Aula Teórica 16: Forma Normal Prenex

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

9 de novembro de 2023

Formas normais na primeira ordem

Objectivo

Determinar a validade de raciocínios (ou de fórmulas) semanticamente, mas de forma eficaz e automática.

Meio: algoritmo

Define-se uma função que recebe uma fórmula e devolve a sua natureza: possível, contraditória ou válida.

Abordagens computacionais

Há vários algoritmos, de acordo com formas especiais em que as fórmulas podem estar. Uns são mais eficientes que outros. Vamos ver o mais eficiente: a *resolução*.

Formas normais na primeira ordem

Lógica Proposicional

Em Lógica Proposicional, para usar Resolução tínhamos de colocar a fórmula numa forma normal: Forma Normal Conjuntiva.

Lógica de Primeira Ordem

Como em Lógica de Primeira Ordem temos quantificadores, a tal forma normal será naturalmente mais complicada.
Vamos ver o primeiro passo: Forma Normal Prenex.

Literal

Um literal de primeira ordem é uma fórmula atómica ou a negação de uma fórmula atómica.

Forma Normal Conjuntiva de primeira ordem

Uma fórmula de primeira ordem diz-se na Forma Normal Conjuntiva se for uma conjunção de disjunções de literais de primeira ordem.

Forma Normal Prenex

Ideia intuitiva

Os quantificadores estão todos no início da fórmula.

Exemplos

- $Q(x) \vee P(x,y)$
- $\exists_y \forall_x Q(f(x),y)$
- $\forall_x \exists_y P(x,y,z)$
- $\exists_x (Q(f(x),y) \wedge P(x,y,z))$

Contra-Exemplos

- $Q(x) \vee \exists_y P(x,y)$
- $\forall_x \exists_y Q(f(x),y) \rightarrow \forall_x \exists_y P(x,y,z)$
- $Q(f(x),y) \wedge \forall_x \exists_y P(x,y,z)$
- $\neg\exists_x (Q(f(x),y) \wedge P(x,y,z))$

Forma Normal Prenex

Forma Normal Prenex

Uma fórmula φ da linguagem de primeira ordem está na Forma Normal Prenex ou FNP, e escreve-se FNP(φ), se

$$\varphi = {Q^1}_{x_1} \ldots {Q^n}_{x_n}\, \psi$$

sendo:

- Cada $Q^i \in \{\forall, \exists\}$ é um quantificador, com $1 \leq i \leq n$ e $n \geq 0$
- ψ uma fórmula de primeira ordem sem quantificadores.

Forma Normal Conjuntiva Prenex

Se FNP(φ) e ψ está na forma normal conjuntiva (aplicando o conceito a fórmulas de primeira ordem), então φ diz-se está na forma normal conjuntiva prenex ou FNCP, e escreve-se FNCP(φ).

Resultado fundamental

Teorema da Forma Normal Prenex

Para qualquer fórmula de primeira ordem φ existe uma fórmula de primeira ordem ψ tal que $\varphi \equiv \psi$ e FNP(ψ).

Qualquer fórmula é equivalente a uma fórmula na Forma Normal Prenex.

Teorema da Forma Normal Conjuntiva Prenex

Para qualquer fórmula de primeira ordem φ existe uma fórmula de primeira ordem ψ tal que $\varphi \equiv \psi$ e FNCP(ψ).

Resultado intermédios

Leis de de Morgan para quantificadores

- $\neg\forall_x \varphi \equiv \exists_x \neg\varphi$
- $\neg\exists_x \varphi \equiv \forall_x \neg\varphi$

Em geral temos:

- $\neg Q^1_{x_1} \ldots Q^n_{x_n} \varphi \equiv \overline{Q^1}_{x_1} \ldots \overline{Q^n}_{x_n} \neg\varphi$

onde $\overline{\forall} = \exists$ e $\overline{\exists} = \forall$.

Resultado intermédios

- $\forall_x \varphi \quad \equiv \quad \forall_y [\varphi]_y^x$ se $y \notin Var(\varphi)$
- $\exists_x \varphi \quad \equiv \quad \exists_y [\varphi]_y^x$ se $y \notin Var(\varphi)$

Quando $x \notin$ VL(ψ)

- $\forall_x \varphi \wedge \psi \equiv \forall_x (\varphi \wedge \psi)$
- $\forall_x \varphi \vee \psi \equiv \forall_x (\varphi \vee \psi)$
- $\exists_x \varphi \wedge \psi \equiv \exists_x (\varphi \wedge \psi)$
- $\exists_x \varphi \vee \psi \equiv \exists_x (\varphi \vee \psi)$

Resultado fundamental

Teorema da Forma Normal Prenex

Para qualquer fórmula de primeira ordem φ existe uma fórmula de primeira ordem ψ tal que $\varphi \equiv \psi$ e FNP(ψ).

Prova

Mostra-se por indução estrutural no conjunto F_Σ^X.

Casos base: as fórmulas atómicas já estão na FNP.

Passo: Vamos analisar apenas dois casos. Os restantes têm prova semelhante.

Caso 1: $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \exists_x \psi$
Por hipótese de indução existe δ tal que $\delta \equiv \psi$ e FNP(δ). Logo $\exists_x \delta \equiv \exists_x \psi$ e FNP($\exists_x \delta$). Basta agora notar que $\varphi \equiv \exists_x \psi \equiv \exists_x \delta$.

Resultado fundamental

Teorema da Forma Normal Prenex

Para qualquer fórmula de primeira ordem φ existe uma fórmula de primeira ordem ψ tal que $\varphi \equiv \psi$ e FNP(ψ).

Prova

Caso 2: $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Por hipótese de indução existem ψ_1, ψ_2 tal que $\varphi_1 \equiv \psi_1$ e FNP(ψ_1), e $\varphi_2 \equiv \psi_2$ e FNP(ψ_2). Logo, sendo $n, m \geq 0$, cada Q_i e R_j quantificadores, com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, e ψ_1', ψ_2' fórmulas de primeira ordem sem quantificadores, tem-se que

$$\psi_1 = Q^1_{x_1} \ \ldots Q^n_{x_n} \ \psi_1'$$

$$\psi_2 = R^1_{y_1} \ \ldots R^m_{y_m} \ \psi_2'$$

Resultado fundamental

Continuação da prova: caso $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 \wedge \varphi_2$

Tem-se então que FNP(ψ_1) e FNP(ψ_2) tal que $\varphi_1 \equiv \psi_1$ e $\varphi_2 \equiv \psi_2$, e $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2 = (Q^1_{x_1} \ldots Q^n_{x_n}\, \psi'_1) \wedge (R^1_{y_1} \ldots R^m_{y_m}\, \psi'_2)$.

Tomam-se variáveis novas (*i.e.*, não usadas nas fórmulas ψ_1 e ψ_2) todas diferentes entre si, $w_1, \ldots, w_n, z_1, \ldots, z_m$. Seja $\psi''_1 = [\psi'_1]^{x_1,\ldots,x_n}_{w_1,\ldots,w_n}$ e $\psi''_2 = [\psi'_2]^{y_1,\ldots,y_m}_{z_1,\ldots,z_m}$

Aplicando resultados sobre a equivalência vistos anteriormente, obtém-se uma fórmula em FNP:

$$
\begin{aligned}
\psi_1 \wedge \psi_2 &= (Q^1_{x_1} \ldots Q^n_{x_n}\, \psi'_1) \wedge (R^1_{y_1} \ldots R^m_{y_m}\, \psi'_2) \\
&\equiv (Q^1_{w_1} \ldots Q^n_{w_n}\, \psi''_1) \wedge (R^1_{z_1} \ldots R^m_{z_m}\, \psi''_2) \\
&\equiv Q^1_{w_1} \ldots Q^n_{w_n}\, (\psi''_1 \wedge R^1_{z_1} \ldots R^m_{z_m}\, \psi''_2) \\
&\equiv Q^1_{w_1} \ldots Q^n_{w_n}\, R^1_{z_1} \ldots R^m_{z_m}\, (\psi''_1 \wedge \psi''_2)
\end{aligned}
$$

Como colocar na FNP?

1. Eliminar $\rightarrow$
   - Como? Com a equivalência $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
2. Colocar $\neg$ junto dos literais
   - Como? Com as leis de de Morgan e da dupla negação
3. Cada quantificador com variável diferente
   - Como? Com as equivalências $\forall_x \varphi \equiv \forall_y [\varphi]_y^x$ e $\exists_x \varphi \equiv \exists_y [\varphi]_y^x$
4. Mover quantificadores para o início da fórmula
   - Como? Com equivalências tais como $\forall_x \varphi \wedge \psi \equiv \forall_x (\varphi \wedge \psi)$ se $x \notin \mathsf{VL}(\psi)$
5. Obter FNCP
   - Como? Aplicar distributividades

Exemplos de conversão de uma fórmula

Seja $\varphi = \forall_x\, (P(x) \wedge \exists_y\, \neg R(y,z)) \rightarrow \exists_x\, \forall_y\, Q(x,y,z)$

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \forall_x\, (P(x) \wedge \exists_y\, \neg R(y,z)) \rightarrow \exists_x\, \forall_y\, Q(x,y,z) & \\
&\equiv \neg\forall_x\, (P(x) \wedge \exists_y\, \neg R(y,z)) \vee \exists_x\, \forall_y\, Q(x,y,z) & [\text{passo}(1)] \\
&\equiv \exists_x\, \neg(P(x) \wedge \exists_y\, \neg R(y,z)) \vee \exists_x\, \forall_y\, Q(x,y,z) & [\text{passo}(2)] \\
&\equiv \exists_x\, (\neg P(x) \vee \neg\exists_y\, \neg R(y,z)) \vee \exists_x\, \forall_y\, Q(x,y,z) & [\text{passo}(2)] \\
&\equiv \exists_x\, (\neg P(x) \vee \forall_y\, \neg\neg R(y,z)) \vee \exists_x\, \forall_y\, Q(x,y,z) & [\text{passo}(2)] \\
&\equiv \exists_x\, (\neg P(x) \vee \forall_y\, R(y,z)) \vee \exists_x\, \forall_y\, Q(x,y,z) & [\text{passo}(2)] \\
&\equiv \exists_{x_1}\, (\neg P(x_1) \vee \forall_{x_2}\, R(x_2,z)) \vee \exists_{x_3}\, \forall_{x_4}\, Q(x_3,x_4,z) & [\text{passo}(3)] \\
&\equiv \exists_{x_1}\, \forall_{x_2}\, (\neg P(x_1) \vee R(x_2,z)) \vee \exists_{x_3}\, \forall_{x_4}\, Q(x_3,x_4,z) & [\text{passo}(4)] \\
&\equiv \exists_{x_1}\, \forall_{x_2}\, ((\neg P(x_1) \vee R(x_2,z)) \vee \exists_{x_3}\, \forall_{x_4}\, Q(x_3,x_4,z)) & [\text{passo}(4)] \\
&\equiv \exists_{x_1}\, \forall_{x_2}\, \exists_{x_3}\, \forall_{x_4}\, (\neg P(x_1) \vee R(x_2,z) \vee Q(x_3,x_4,z)) & [\text{passo}(4)]
\end{aligned}
$$

Esta última fórmula está na FNP. Na verdade está na FNCP.

Exemplos de conversão de uma fórmula

Seja $\varphi = \forall_x \exists_y P(x,y,z) \to \exists x \forall_y \neg Q(x,y,z)$

$$\begin{aligned}
\varphi &= \forall_x \exists_y P(x,y,z) \to \exists x \forall_y \neg Q(x,y,z) & \\
&\equiv \neg\forall_x \exists_y P(x,y,z) \vee \exists_x \forall_y \neg Q(x,y,z) & [\text{passo}(1)] \\
&\equiv \exists_x \forall_y \neg P(x,y,z) \vee \exists_x \forall_y \neg Q(x,y,z) & [\text{passo}(2)] \\
&\equiv \exists_{x_1} \forall_{x_2} \neg P(x_1,x_2,z) \vee \exists_{x_3} \forall_{x_4} \neg Q(x_3,x_4,z) & [\text{passo}(3)] \\
&\equiv \exists_{x_1} \forall_{x_2} (\neg P(x_1,x_2,z) \vee \exists_{x_3} \forall_{x_4} \neg Q(x_3,x_4,z)) & [\text{passo}(4)] \\
&\equiv \exists_{x_1} \forall_{x_2} \exists_{x_3} \forall_{x_4} (\neg P(x_1,x_2,z) \vee \neg Q(x_3,x_4,z)) & [\text{passo}(4)]
\end{aligned}$$

Esta última fórmula está na FNP. Na verdade está na FNCP.

Conversão para a Forma Normal Conjuntiva Prenex

Depois de convertermos para FNP, basta aplicar distributividade.

Conversão para FNCP

Seja

$$\varphi = Q^1_{x_1} \dots Q^n_{x_n}\, \delta$$

tal que FNP(φ). Seja $\gamma \equiv \delta$ tal que FNC(γ). Então,

$$\psi = Q^1_{x_1} \dots Q^n_{x_n} \gamma$$

é equivalente a φ e FNCP(ψ).

Obter γ corresponde a usar passo (5): aplicar distributividade.

Exemplo: $\varphi = (\forall_x P(x) \to \exists_y \neg R(y)) \to \exists_x \forall_y Q(x,y)$

$$
\begin{aligned}
\varphi &= (\forall_x P(x) \to \exists_y \neg R(y)) \to \exists_x \forall_y Q(x,y) & \\
&\equiv (\neg\forall_x P(x) \vee \exists_y \neg R(y)) \to \exists_x \forall_y Q(x,y) & [\text{passo}(1)] \\
&\equiv \neg(\neg\forall_x P(x) \vee \exists_y \neg R(y)) \vee \exists_x \forall_y Q(x,y) & [\text{passo}(1)] \\
&\equiv (\neg\neg\forall_x P(x) \wedge \neg\exists_y \neg R(y)) \vee \exists_x \forall_y Q(x,y) & [\text{passo}(2)] \\
&\equiv (\forall_x P(x) \wedge \forall_y \neg\neg R(y)) \vee \exists_x \forall_y Q(x,y) & [\text{passo}(2)] \\
&\equiv (\forall_x P(x) \wedge \forall_y R(y)) \vee \exists_x \forall_y Q(x,y) & [\text{passo}(2)] \\
&\equiv (\forall_{x_1} P(x_1) \wedge \forall_{x_2} R(x_2)) \vee \exists_{x_3} \forall_{x_4} Q(x_3,x_4) & [\text{passo}(3)] \\
&\equiv \forall_{x_1}(P(x_1) \wedge \forall_{x_2} R(x_2)) \vee \exists_{x_3} \forall_{x_4} Q(x_3,x_4) & [\text{passo}(4)] \\
&\equiv \forall_{x_1}\forall_{x_2}(P(x_1) \wedge R(x_2)) \vee \exists_{x_3} \forall_{x_4} Q(x_3,x_4) & [\text{passo}(4)] \\
&\equiv \forall_{x_1}\forall_{x_2}((P(x_1) \wedge R(x_2)) \vee \exists_{x_3} \forall_{x_4} Q(x_3,x_4)) & [\text{passo}(4)] \\
&\equiv \forall_{x_1}\forall_{x_2}\exists_{x_3}\forall_{x_4}((P(x_1) \wedge R(x_2)) \vee Q(x_3,x_4)) & [\text{passo}(4)]
\end{aligned}
$$

$\forall_{x_1}\forall_{x_2}\exists_{x_3}\forall_{x_4}((P(x_1) \vee Q(x_3,x_4)) \wedge (R(x_2) \vee Q(x_3,x_4)))$[passo(5)]

Esta última fórmula está na FNCP.