Lógica Computacional

Aula Teórica 5: Dedução Natural em Lógica Proposicional

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

28 de setembro de 2023

Sistema dedutivo

Objectivo

Determinar a validade de raciocínios ou de fórmulas:

- manipulação sintáctica dos símbolos que ocorrem nas fórmulas
- sem recorrer à semântica

Sistema Dedutivo

É um conjunto de regras

- são chamadas regras de inferência
- permitam inferir novas fórmulas a partir de outras fórmulas
- regras sem hipóteses dizem-se axiomas

Provas

Prova formal ou derivação

Dado um sistema dedutivo, uma prova formal ou derivação de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ é uma sequência finita de fórmulas de F_P tal que:

- o último elemento da sequência é φ
- cada elemento da sequência é:
  - um elemento de Γ ou
  - obtido de anteriores usando uma das regras de inferência

Notação

Sendo Γ um conjunto de hipóteses e φ uma conclusão a provar,

$$\Gamma \vdash \varphi$$

indica que a partir de Γ se consegue construir uma prova para φ.

Propriedades

Terminologia

- Se $\Gamma \vdash \varphi$ então φ diz-se consequência de Γ;
- Se $\emptyset \vdash \varphi$ então φ diz-se teorema do sistema dedutivo escreve-se $\vdash \varphi$

Correção de Sistema Dedutivo

Só permite provar de tautologias e consequências semânticas

- Se $\vdash \varphi$ então $\models \varphi$
- Se $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$ então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$

Completude de Sistema Dedutivo

Permite provar todas as tautologias e consequências semânticas

- Se $\models \varphi$ então $\vdash \varphi$
- Se $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$ então $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$

Dedução Natural: a ideia

Provas como árvores etiquetadas

- Uma prova ou inferência é apresentada em árvore:
  - árvores de derivação
- Cada árvore é construída a partir de árvores singulares (folhas)
- Novo nível da árvore obtido aplicando uma regra de inferência.
- As etiquetas dos nós da árvore são fórmulas.
  - As fórmulas nas folhas são as hipóteses, e têm associadas marcas (números inteiros);
  - A hipóteses distintas devem-se associar marcas distintas;
  - A fórmula na raíz é a conclusão da prova. Diz-se que a árvore é uma derivação dessa fórmula.

Dedução Natural para Lógica Proposicional

Regras do sistema $\mathcal{N}$

- Os conectivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ têm regras associadas para:
  - Eliminação
  - Introdução
- $\perp$ tem uma regra associada

Marcas

A cada hipótese/folha é associada uma marca (número natural)

- fórmulas diferentes têm marcas diferentes
- hipótese fechada: a sua marca é usada numa regra da árvore
- há quatro regras que fecham hipóteses:
  - Regra do absurdo
  - Introdução da negação
  - Introdução da implicação
  - Eliminação da disjunção
- hipótese diz-se aberta se não está fechada

Dedução Natural para Lógica Proposicional

Consequência no sistema $\mathcal{N}$

Uma fórmula φ é consequência em $\mathcal{N}$ de um conjunto Γ de fórmulas, denotado $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}} \varphi$, se existe árvore de derivação tal que:

- A raíz da árvore é φ
- todas as hipóteses abertas da árvore estão contidas em Γ

Quando for claro, podemos omitir $\mathcal{N}$ e escrever apenas $\vdash$

Teoremas no sistema $\mathcal{N}$

Se $\emptyset \vdash \varphi$ então escrevemos apenas $\vdash \varphi$ e dizemos que φ é teorema do sistema $\mathcal{N}$.

Regras simples

As regras

- Introdução e Eliminação da conjunção
- Eliminação da implicação
- Introdução da disjunção
- Eliminação da negação

não manipulam as marcas, pelo que, por isso, as podemos considerar mais simples.

Conectivo $\wedge$

Para concluir $\varphi \wedge \psi$ é preciso ter provado cada um deles

Regra da Introdução da Conjunção

$$\frac{\begin{array}{cc} \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \varphi & \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi} \ (\wedge_I)$$

Conectivo $\wedge$

Se já provámos $\varphi \wedge \psi$ podemos concluir qualquer um deles

Regra da Eliminação da Conjunção

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\varphi}\ (\wedge_{E_d}) \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\psi}\ (\wedge_{E_e})$$

Exemplo de derivação

Podemos já provar que $\{\varphi_1 \wedge \varphi_2\} \vdash \varphi_2 \wedge \varphi_1$

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^1}{\varphi_2}\,(\wedge_{E_e}) \qquad \dfrac{(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^1}{\varphi_1}\,(\wedge_{E_d})}{\varphi_2 \wedge \varphi_1}\,(\wedge_I)$$

Conectivo $\rightarrow$

Se já provámos φ e $\varphi \rightarrow \psi$, podemos concluir ψ

Regra da Eliminação da Implicação

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ \varphi \rightarrow \psi\end{matrix}}{\psi}\ (\rightarrow_E)$$

Exemplo de derivação

Podemos provar que $\{(\varphi_1 \land \varphi_2),\ (\varphi_2 \to \varphi_3)\} \vdash \varphi_3$

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi_1 \land \varphi_2)^1}{\varphi_2}\,(\land_{E_e}) \qquad (\varphi_2 \to \varphi_3)^2}{\varphi_3}\,(\to_E)$$

Conectivo $\vee$

Se já provámos φ (ou ψ), podemos concluir $\varphi \vee \psi$

Regras da Introdução da Disjunção

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_{I_d}) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \psi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_{I_e})$$

Exemplo de derivação

Podemos provar que $\{\varphi_1 \wedge \varphi_2\} \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^1}{\varphi_1}\,(\wedge_{E_d})}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\,(\vee_{I_d})$$

Conectivo $\neg$

Se conseguimos derivar uma fórmula φ e a sua negação $\neg\varphi$ então é porque temos um absurdo $\perp$.

Regra da Eliminação da Negação

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \neg\varphi\end{array}}{\perp}\ (\neg_E)$$

Exemplo de derivação

Podemos provar que $\{\varphi_1, (\varphi_1 \to \varphi_2), \neg\varphi_2\} \vdash \perp$

$$\dfrac{\dfrac{{\varphi_1}^1 \qquad (\varphi_1 \to \varphi_2)^2}{\varphi_2}\,(\to_E) \qquad {\neg\varphi_2}^3}{\perp}\,(\neg_E)$$

Regras de $\mathcal{N}$

Nota

As regras até agora apresentadas não mencionam as marcas.
Só as regras restantes mencionam as marcas:

- Eliminação da disjunção
- Introdução da implicação
- Regra do absurdo
- Introdução da negação

Conectivo $\vee$

Para concluir ψ a partir de $\varphi_1 \vee \varphi_2$, temos que raciocinar por casos: obter ψ quer no caso φ_1, quer no caso φ_2

Regra da Eliminação da Disjunção

$$\dfrac{\begin{matrix} \\ \mathcal{D}_1 \\ \varphi_1 \vee \varphi_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [\varphi_1]^m \\ \mathcal{D}_2 \\ \psi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [\varphi_2]^n \\ \mathcal{D}_3 \\ \psi \end{matrix}}{\psi} \; (\vee_E, m, n)$$

As marcas m e n da justificação da regra:

1. m (resp. n) é marca de uma ou mais hipóteses φ_1 (resp. φ_2) que estavam abertas na árvore $\mathcal{D}_2$ (resp. $\mathcal{D}_3$)
2. é uma marca nova, *i.e.*, que não ocorre na árvore.

Depois da aplicar a regra, $[\varphi_1]^m$ e $[\varphi_2]^n$ ficam fechadas.
Em $\mathcal{D}_2$ só podemos fechar φ_1 e em $\mathcal{D}_3$ só podemos fechar φ_2.

Exemplo de derivação

Provar que $\{(\varphi_1 \vee \varphi_2),\ (\varphi_1 \to \varphi_3),\ (\varphi_2 \to \varphi_3)\} \vdash \varphi_3$

$$\dfrac{(\varphi_1 \vee \varphi_2)^1 \qquad \dfrac{(\varphi_1)^{\cancel{2}} \qquad (\varphi_1 \to \varphi_3)^3}{\varphi_3}\,(\to_E) \qquad \dfrac{(\varphi_2)^{\cancel{4}} \qquad (\varphi_2 \to \varphi_3)^5}{\varphi_3}\,(\to_E)}{\varphi_3}\,(\vee_{E,2,4})$$

Atenção: Exemplo que não é derivação

$$\dfrac{(\varphi_1 \vee \varphi_2)^1 \qquad \dfrac{(\varphi_1)^{\cancel{2}} \qquad (\varphi_2)^{\cancel{3}}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\,(\wedge_I) \qquad \dfrac{(\varphi_1)^{\cancel{2}} \qquad (\varphi_2)^{\cancel{3}}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\,(\wedge_I)}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\,(\vee_{E,2,3})$$

Provaria que $\{\varphi_1 \vee \varphi_2\} \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$

Mas, a regra $\vee_{E,2,3}$ fechou uma hipótese em $\mathcal{D}_2$ que não era φ_1

Logo esta árvore não é uma derivação válida no sistema $\mathcal{N}$.

Conectivo $\rightarrow$

Se, fixando φ como hipótese (eventualmente), conseguirmos derivar ψ, então provámos que $\varphi \rightarrow \psi$

Regra da Introdução da Implicação

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^m \\ \mathcal{D} \\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow_{I,m})$$

A marca m associada à justificação da regra $\rightarrow_{I,m}$:

1. é marca de uma ou mais hipóteses φ que estavam abertas; ou
2. é uma marca nova, *i.e.*, que não ocorre na árvore.

Depois da aplicar a regra, a hipótese $[\varphi]^m$ fica fechada.

Exemplo de derivação

Provar que $\{(\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \varphi_3\} \vdash \varphi_1 \to \varphi_3$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi_1{}^{\cancel{1}}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\,(\vee_{I_d}) \qquad (\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \varphi_3{}^{2}}{\varphi_3}\,(\to_E)}{\varphi_1 \to \varphi_3}\,(\to_I, 1)$$

Exemplo de derivação

Provar que $\{\varphi_2\} \vdash (\varphi_1 \to \varphi_2)$

$$\dfrac{(\varphi_2)^1}{\varphi_1 \to \varphi_2}\,(\to_{I,2})$$

Aplicação de $\to_I$ menciona hipótese φ_1 (com marca 2) que não ocorre na árvore.

Conectivo $\perp$

Se (eventualmente) se considera por hipótese $\neg\varphi$ e se deriva (eventualmente recorrendo a outras hipóteses) o absurdo, a hipótese (se usada) era falsa, e provou-se φ.

Regra do absurdo

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^m \\ \mathcal{D} \\ \perp\end{array}}{\varphi}\ (\perp, m)$$

A marca m associada à justificação da regra:

1. é marca de uma ou mais hipóteses $\neg\varphi$ que estavam abertas; ou
2. é uma marca nova, *i.e.*, que não ocorre na árvore.

Depois da aplicar a regra, a hipótese $[\neg\varphi]^m$ fica fechada.

Conectivo $\perp$

Provar que $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi^{\cancel{1}} \qquad \neg\neg\varphi^{2}}{\perp}\,(\neg_E)}{\varphi}\,(\perp, 1)$$

Exemplo de derivação

Provar que $\vdash (\perp \to \varphi)$

$$\dfrac{\dfrac{\perp^{\cancel{1}}}{\varphi}\ (\perp, 2)}{\perp \to \varphi}\ (\to_1)$$

Aplicação de $\perp, 2$ menciona hipótese $\neg\varphi$ (com marca 2) que não ocorre na árvore.

Não há hipóteses abertas, logo $\perp \to \varphi$ é teorema de $\mathcal{N}$.

Conectivo $\neg$

Se se considera por hipótese φ e se deriva (eventualmente recorrendo a outras hipóteses) o absurdo, a hipótese era falsa, e provámos a negação da fórmula, isto é, $\neg\varphi$.

Regra da introdução da negação

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^m \\ \mathcal{D} \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_I, m)$$

A marca m associada à justificação da regra:

1. é marca de uma ou mais hipóteses φ que estavam abertas

Depois da aplicar a regra, a hipótese $[\varphi]^m$ fica fechada.

Conectivo $\neg$

Provar que $\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi^1 \qquad \neg\varphi^{\cancel{2}}}{\bot}\,(\neg_E)}{\neg\neg\varphi}\,(\neg_I, 2)$$

Correcção e Completude de $\mathcal{N}$

Teorema da Correção e Completude da Dedução Natural

Dada uma fórmula $\varphi \in F_P$ e conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq F_P$, então:

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{N}} \varphi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma \models \varphi$$

Como usar a Correção do Sistema $\mathcal{N}$?

Ao provarmos que $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}} \varphi$, construindo uma árvore de derivação, a Correção do Sistema $\mathcal{N}$ permite concluir que $\Gamma \models \varphi$.

Exemplo

Como provar que $\{\neg p \to q\} \models \neg q \to p$ usando o Sistema $\mathcal{N}$?
Provando primeiro que $\{\neg p \to q\} \vdash_{\mathcal{N}} \neg q \to p$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg p \to q^{1} \qquad \neg p^{\not 2}}{q}\,(\to_E) \qquad \neg q^{\not 3}}{\bot}\,(\neg_E)}{p}\,(\bot, 2)}{\neg q \to p}\,(\to_I, 3)$$

Pela Correção do Sistema $\mathcal{N}$, podemos concluir que:
$\{\neg p \to q\} \models \neg q \to p$

Mais um exemplo

Provar que $\models p \vee \neg p$ usando o Sistema $\mathcal{N}$?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p^{\cancel{1}}}{p \vee \neg p}\,(\vee_{I_d}) \qquad \neg(p \vee \neg p)^{\cancel{2}}}{\bot}\,(\neg_E)}{\neg p}\,(\neg_I, 1)}{p \vee \neg p}\,(\vee_{I_e}) \qquad \neg(p \vee \neg p)^{\cancel{2}}}{\bot}\,(\neg_E)}{p \vee \neg p}\,(\bot, 2)$$

Pela Correção do Sistema $\mathcal{N}$, podemos concluir que $\models p \vee \neg p$

Exercícios

Prove, usando o Sistema $\mathcal{N}$, que:

- $\{\varphi \vee \psi, (\varphi \to \delta), (\psi \to \delta)\} \models \delta$
- $\vdash (\psi \to \gamma) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \gamma)$
- $\models \varphi \vee (\varphi \to \psi)$
- $\{\neg\varphi \wedge \neg\psi\} \models \neg(\varphi \vee \psi)$