Lógica Computacional

Aula Teórica 8
Resolução proposicional

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

12 de outubro de 2023

Como determinar a natureza de uma fórmula na FNC?

Verificação semântica e axiomática

- Se FNC(φ) então verificar $\models \varphi$ é simples:
  - proporcional ao número de símbolos proposicionais de φ
  - usa o Lema da validade da disjunção
- Como fazer automaticamente provas axiomáticas?
- Há métodos universais para determinar se dada fórmula é contraditória ou possível?
  - Vimos um que não é universal: algoritmo de Horn

Sistema formal de prova

Regra principal

Transitividade da implicação:

$$(L_1 \to L_2) \land (L_2 \to L_3) \models (L_1 \to L_3)$$

Transitividade da implicação escrita com disjunções

$$(\neg L_1 \lor L_2) \land (\neg L_2 \lor L_3) \models (\neg L_1 \lor L_3)$$

Cláusulas

Disjunções como conjuntos

- Recordar: *cláusula* é uma disjunção de literais.
- Cláusula $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ pode ser vista como $\{L_1, \ldots, L_n\}$.
- O conjunto vazio denota $\perp$ (elemento neutro da disjunção).

Simplificações

- Omitimos $\perp$ usando a lei do elemento neutro: $\perp \vee L \equiv L$.
- leis de idempotência: $L \vee L \equiv L$ e $C \wedge C \equiv C$;
- leis do elemento neutro: $L \vee \perp \equiv L$ e $C \wedge \top \equiv C$;

Exemplos

- $(p \vee \neg q \vee s \vee p \vee \neg r)$ é representada por $\{p, \neg q, s, \neg r\}$
- $(\perp \vee \neg s \vee q \vee \neg p \vee r)$ é representada por $\{\neg s, q, \neg p, r\}$
- $\neg p$ é representada por $\{\neg p\}$

Propriedades das cláusulas

Propriedades

- Toda a cláusula determina um conjunto de literais.
- O contrário não é verdadeiro:
  o conjunto $\{L_1, L_2\}$ pode resultar de $L_1 \vee L_2$, ou de $L_2 \vee L_1$, ou de $(L_1 \vee L_2) \vee L_1$, ou de $L_1 \vee (L_2 \vee L_1)$, etc.

Proposição

Se duas cláusulas C_1 e C_2 determinam o mesmo conjunto, então:

$$C_1 \equiv C_2$$

Cláusulas como conjuntos

Proposição

Se duas cláusulas C_1 e C_2 determinam o mesmo conjunto, então:

$$C_1 \equiv C_2$$

Esboço de prova

Os conjuntos não têm ordem nem repetições. Há 3 situações em que cláusulas sintaticamente diferentes geram o mesmo conjunto:

1. Numa um dado literal ocorre mais vezes do que na outra — pela lei da idempotência são equivalentes.
2. Um literal ocorre numa cláusula numa posição diferente da que ocorre na outra — pela lei da comutatividade são equivalentes.
3. Os literais estão associados nas cláusulas de forma diferente — pela lei da associatividade são equivalentes.

Conjuntos de cláusulas

Fórmulas como conjuntos de cláusulas

- Uma fórmula na FNC é uma conjunção de cláusulas.
- Seja $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} C_i$ onde cada C_i é uma cláusula:
  φ é representada (univocamente) por $\{C_1, \ldots, C_n\}$.
- O conjunto vazio denota $\top$ (elemento neutro da conjunção)
- omitimos $\top$ usando a lei do elemento neutro:
  $\top \wedge (p \vee q)$ é equivalente a $p \vee q$, que corresponde $\{\{p, q\}\}$

Exemplo

- $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (r \vee s) \wedge \neg p \wedge (\neg q \vee \neg s)$ é representada por:
  $\{\{p, q, \neg r\}, \{r, s\}, \{\neg p\}, \{\neg q, \neg s\}\}$
- $(s \vee t \vee \neg r \vee s) \wedge s \wedge \neg p \wedge (\neg p \vee \neg s)$ é representada por:
  $\{\{s, t, \neg r\}, \{s\}, \{\neg p\}, \{\neg p, \neg s\}\}$

Propriedades dos conjuntos de cláusulas

Propriedades

- Toda a fórmula na FNC determina um conjunto de cláusulas.
- O contrário não é verdadeiro:
  o conjunto $\{\{r, s\}, \{p, \neg q\}\}$ pode resultar de:
  - $(r \vee s) \wedge (p \vee \neg q)$
  - $(\neg q \vee p) \wedge (r \vee s)$
  - $(r \vee s \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee p) \wedge (r \vee s)$
  - etc.

Proposição

Se φ_1, φ_2 são duas fórmulas na FNC e que determinam o mesmo conjunto de cláusulas, então $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

Sistema dedutivo

Resolvente

Sejam C_1 e C_2 duas cláusulas tal que para algum $p \in P$ se tem $p \in C_1$ e $\neg p \in C_2$. Então um *resolvente* de C_1 e C_2 é a cláusula

$$R = (C_1 \setminus \{p\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg p\})$$

Exemplo

Sejam $C_1 = \{p, \neg q, r\}$, $C_2 = \{q, \neg r, s\}$ e $C_3 = \{\neg p\}$:

- um resolvente de C_1 e C_2 é a cláusula $\{p, \neg q, q, s\}$
- outro resolvente de C_1 e C_2 é a cláusula $\{p, r, \neg r, s\}$
- o único resolvente de C_1 e C_3 é a cláusula $\{\neg q, r\}$
- Não há nenhum resolvente de C_2 e C_3

Correcção do sistema dedutivo

Propriedades do resolvente

Seja R um resolvente de duas cláusulas C_1 e C_2. Então:

- Se a fórmula $C_1 \wedge C_2$ é fórmula possível, então R também é.
- $\{C_1, C_2\} \models R$
- $R = \emptyset$ se e só se $C_1 = \{L\}$ e $C_2 = \{\overline{L}\}$, para algum literal L

Resolução

Algoritmo de Resolução

Seja $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} C_i$ uma fórmula em FNC.

Define-se a função Res de geração de resolventes da seguinte forma:

- $\mathsf{Res}^0(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{C_1, \ldots, C_n\}$.
- Para qualquer $n > 0$ define-se:

  $\mathsf{Res}^n(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{Res}^{n-1}(\varphi) \cup$
  $\{R \mid R \text{ é resolvente de duas cláusulas de } \mathsf{Res}^{n-1}(\varphi)\}$
- $\mathsf{Res}^*(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n \geq 0} \mathsf{Res}^n(\varphi)$

Exemplificação do cálculo dos resolventes

Resultados

- A função Res é monótona crescente
- Se $C \in \text{Res}^n(\varphi)$, para algum n, então $C \in \text{Res}^*(\varphi)$
- Se $\emptyset \in \text{Res}^n(\varphi)$, para algum n, então $\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$
- Para dado φ, o conjunto $\text{Res}^*(\varphi)$ é único
- Se $\text{Res}^n(\varphi) = \text{Res}^{n+1}(\varphi)$, então $\text{Res}^*(\varphi) = \text{Res}^n(\varphi)$

A última propriedade indica que para encontrar $\text{Res}^*(\varphi)$ basta encontrar um ponto fixo.

Exemplificação do cálculo dos resolventes

$$\varphi = (p \vee p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (s) \wedge (r \vee \neg q) \wedge (\neg p)$$

A fórmula é composta pelas seguintes cláusulas:
$C_1 = \{p, q\},\ C_2 = \{\neg p\},\ C_3 = \{s\},\ C_4 = \{r, \neg q\},\ C_5 = \{\neg p\}$

Logo:

$\mathrm{Res}^0(\varphi) = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\} = \{\{p, q\}, \{s\}, \{r, \neg q\}, \{\neg p\}\}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^1(\varphi) &= \mathrm{Res}^0(\varphi) \cup \{\{p, r\}, \{q\}\} = \\ &= \{\{p, q\}, \{s\}, \{r, \neg q\}, \{\neg p\}, \{p, r\}, \{q\}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}^2(\varphi) &= \mathrm{Res}^1(\varphi) \cup \{\{r\}\} \\ &= \{\{p, q\}, \{s\}, \{r, \neg q\}, \{\neg p\}, \{p, r\}, \{q\}, \{r\}\}\end{aligned}$$

$\mathrm{Res}^n(\varphi) = \mathrm{Res}^2(\varphi)$, para qualquer $n > 2$, logo

$\mathrm{Res}^*(\varphi) = \{\{p, q\}, \{s\}, \{r, \neg q\}, \{\neg p\}, \{p, r\}, \{q\}, \{r\}\}$

Algoritmo de Resolução

Finitude do ponto fixo

Para toda a fórmula φ em FNC existe um $m \in \mathbb{N}_0$ tal que:

- $\text{Res}^*(\varphi) = \text{Res}^m(\varphi)$ e
- $\text{Res}^k(\varphi) = \text{Res}^m(\varphi)$, para todo $k > m$

Esboço de prova

As fórmulas são conjuntos finitos de símbolos, logo qualquer fórmula contém um número finito de símbolos proposicionais. O conjunto de todas as cláusulas sobre um conjunto finito de símbolos proposicionais é finito.$\text{Res}^*(\varphi)$ é um conjunto de cláusulas sobre os símbolos proposicionais de φ.
Então, $\text{Res}^*(\varphi)$ é finito. Como Res é função monotona crescente, temos que existe um m tal que $\text{Res}^{m+i}(\varphi) = \text{Res}^m(\varphi)$, com $i \geq 1$.

Algoritmo de Resolução

Teorema da correção e completude da Resolução

Dada $\varphi \in F_P$ com FNC(φ), então:

$$\emptyset \in Res^*(\varphi) \text{ se e só se } \varphi \text{ é contraditória}$$

Esboço da prova da correção

Já sabemos que existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $\text{Res}^*(\varphi) = \text{Res}^m(\varphi)$.

- Se $m = 0$: $\emptyset \in \text{Res}^0(\varphi)$ se e só se $C_i = \perp$ para algum i. Como $\perp$ é elemento absorvente da conjunção, φ é contraditória.
- Caso $\emptyset \notin \text{Res}^m(\varphi)$ mas $\emptyset \in \text{Res}^{m+1}(\varphi)$. Então $\emptyset$ é o resolvente de duas cláusulas unitárias $\{p\}$ e $\{\neg p\}$ de $\text{Res}^m(\varphi)$. Logo, tanto p como $\neg p$ são consequências de φ, o que implica que φ é contraditória.

Algoritmo de Resolução

Objetivo do algoritmo da Resolução

Dada uma fórmula φ na FNC:

verificar se φ é contraditória ou não.

Fórmulas contraditórias

Se φ é contraditória, não precisamos calcular explicitamente Res*:

Derivamos $\emptyset$ calculando resolventes a partir das cláusulas de φ.

Exemplo

Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p \wedge (p \vee q \vee r)$

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{p, q, \neg r\}$	Cláusula C_1
2	$\{p, q, r\}$	Cláusula C_4
3	$\{p, q\}$	Resolvente de 1 e 2
4	$\{p, \neg q\}$	Cláusula C_2
5	$\{p\}$	Resolvente de 3 e 4
6	$\{\neg p\}$	Cláusula C_3
7	$\emptyset$	Resolvente de 5 e 6

Pelo Teorema da Correção conclui-se que a fórmula é contraditória.

Fórmulas possíveis

Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \vee q) \wedge (r \vee s) \wedge \neg p \wedge (\neg q \vee \neg s)$

Pelo Lema da disjunção de literais, a fórmula não é válida.

A fórmula é composta pelas seguintes cláusulas:
$C_1 = \{p, q\},\ C_2 = \{r, s\}, C_3 = \{\neg p\},\ C_4 = \{\neg q, \neg s\}$

Por definição,

$\mathsf{Res}^0(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{4}\{C_i\} = \{\{p, q\}, \{r, s\}, \{\neg p\}, \{\neg q, \neg s\}\}$

$\mathsf{Res}^1(\varphi) = \mathsf{Res}^0(\varphi) \cup \{\{q\}, \{p, \neg s\}, \{r, \neg q\}\}$

$\mathsf{Res}^2(\varphi) = \mathsf{Res}^1(\varphi) \cup \{\{p, r\}, \{r\}, \{\neg s\}\}$

$\mathsf{Res}^n(\varphi) = \mathsf{Res}^2(\varphi)$, para qualquer $n > 2$

Como $\emptyset \notin \mathsf{Res}^*(\varphi)$, a fórmula não é contraditória. Logo, é possível.

Exemplo

Seja $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \vee s) \wedge \neg q \wedge (\neg p \vee r) \wedge (q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r)$
Será contraditória? Se sim, não precisamos calcular Res*

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{\neg q\}$	Cláusula C_2
2	$\{q, \neg s\}$	Cláusula C_4
3	$\{\neg s\}$	Resolvente de 1 e 2
4	$\{p, s\}$	Cláusula C_1
5	$\{p\}$	Resolvente de 3 e 4
6	$\{\neg p, r\}$	Cláusula C_3
7	$\{r\}$	Resolvente de 5 e 6
8	$\{\neg p, \neg r\}$	Cláusula C_5
9	$\{\neg r\}$	Resolvente de 5 e 8
10	$\emptyset$	Resolvente de 7 e 9

Pelo Teorema da Correção conclui-se que a fórmula é contraditória.

Exemplo

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \vee s) \wedge \neg q \wedge (\neg p \vee r) \wedge (q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \perp) \wedge (p \vee r \vee \neg p)$$

É válida?

Será contraditória?

Em caso de dúvida, podemos sempre calcular $\text{Res}^*(\varphi)$

Exercício!