

Lógica Computacional

Aula Teórica 1: Apresentação

Introdução à Lógica Proposicional

Ricardo Gonçalves
(thanks to António Ravara)

Departamento de Informática

14 de setembro de 2023

Regras de Funcionamento

- Somos todos adultos!
- Silêncio e respeito
 - mas podem sempre esclarecer dúvidas comigo
 - evitem perguntar ao colega do lado
- Uso de computadores só nas filas da frente e para tirar apontamentos
- Sala de aulas não é zona de descanso e lazer
- Não há faltas. Portanto...

Lógica: de que se trata?

A lógica está na base do raciocínio

- Qualquer processo racional de tirar conclusões a partir de hipóteses é baseado em lógica.
- É um processo inerentemente humano, tão básico que vimos todos de nascença equipados com essa capacidade: temos uma ideia intuitiva e inata do que é um processo dedutivo correcto e o que é “disparatado”.
- Exemplos de afirmações que podem ou não ser válidas:
 - ou gosto ou não gosto de lógica
 - hoje chove e não chove
 - hoje é dia 18 e dia 19
 - se apanhar o comboio das 18h não chego atrasado
 - não gostava de lógica se fosse marciano
 - $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$

Lógica: de que se trata?

Não trata d'A Verdade... disso ocupa-se a Filosofia (ou a Religião).

A lógica é um ramo do conhecimento

- Faz parte da matemática, mas surge em inúmeros campos.
 - Os outros ramos da matemática e a física são grandes “clientes”.
 - A filosofia é tanto um “cliente” como um “produtor” importante.
- Formalização começou na antiguidade.
Os Gregos deram o “pontapé de saída”, mas houve muitos outros contributos fundamentais.

Lógica: as figuras clássicas

Aristóteles: o pai da lógica dedutiva

- Viveu em Atenas de 384 a 322 A.C.
- Definiu as bases axiomáticas do raciocínio (lógico).
- Silogismos
- Junto com Sócrates e Platão, estabeleceu as bases do conhecimento científico da Europa.
- Dialética VS Retórica

Falácias



strawman

Misrepresenting someone's argument to make it easier to attack.

After Bill said that we should put more money into health and education, Warren responded by saying that he was confident that Bill takes our country so much more seriously than we do that he would be willing to sacrifice his own health and education to make it better.



slippery slope

Asserting that if we allow A to happen, then Z will consequently happen too, therefore A should not happen.

Colin Clark asserts that if we allow someone to sue to sue, then we will have a slippery slope to a society where everyone is suing everyone else, and we will have a society where everyone is suing everyone else.



special pleading

Moving the goalposts to create exceptions when a claim is shown to be false.

Edward Jones claimed to be psychic, but when his abilities were tested under proper scientific conditions, they mysteriously disappeared. Edward explained this by saying that one had to have faith in his abilities for them to work.



the gambler's fallacy

Believing that 'runs' occur to statistically independent phenomena such as roulette wheel spins.

Red had come up 40 times in a row on the roulette wheel, so Greg knew that it was close to certain that black would be next up. Surprisingly an economic form of natural selection with this thinking is soon lost to all of his savings.



black-or-white

Where two alternative states are presented as the only possibilities, when in fact more possibilities exist.

While asking support for his plan to fundamentally undermine citizen rights, the Supreme Leader told the people they were either on his side, or on the side of the enemy.



false cause

Presuming that a real or perceived relationship between things means that one is the cause of the other.

Pointing to a fiery crash, Roger shows how computers have been running over the past few centuries, whilst at the same time the numbers of people have been decreasing. This proves that the world's great warren is a false cause.



ad hominem

Attacking your opponent's character or personal traits in an attempt to undermine their argument.

After Sally presents an eloquent and compelling case for a more equitable taxation system, Sam asks the audience whether we should believe anything from a woman who isn't married, was once arrested, and smokes a lot of weed.



loaded question

Asking a question that has an assumption built into it so that it can't be answered without agreeing fully.

Grace and Helen were both romantically interested in Brad. One day, with Brad sitting within earshot, Grace asked in an inquisitive tone whether Helen was having any problems with a fungal infection.



appeal to authority

Using the opinion or position of an authority figure, or institution of authority, in place of an actual argument.

Not able to defend his position that evolution isn't real, Bob says that he knows a scientist who also questions evolution (and presumably isn't a scientist).



appeal to nature

Making the argument that because something is 'natural' it is therefore valid, justified, inevitable, good, or ideal.

The medicine man rolled into town on his horse, offering various natural remedies, such as 'very special plant water'. He said that it was only natural that people should be wary of 'artificial' medicines such as antibiotics.



appeal to emotion

Manipulating an emotional response in place of a valid or compelling argument.

Let's not vote on this, though, we've got chocolate bars and brownie sprinkles, but his father told him to keep his emotions in check, and in a third world country who wasn't fortunate enough to have any food at all.



tu quoque

Avoiding having to engage with criticism by turning it back on the accuser - answering criticism with criticism.

The blue candidate accused the red candidate of committing the tu quoque fallacy. The red candidate responded by accusing the blue candidate of the same, that while around an hour of back and forth criticism with not much progress.



burden of proof

Saying that the burden of proof lies not with the person making the claim, but with someone else to disprove.

Baroness declared that a lawsuit is, at the very moment, in effect, around the Sun between the Earth and Mars, and that because no one can prove them wrong his claim is therefore a valid one.



no true Scotsman

Making what could be called an appeal to purity as a way to dismiss relevant criticisms or flaws of an argument.

Angus declares that Scotsmen do not put sugar on their porridge, to which Lachlan points out that he is a true Scotsman, to which Lachlan points out that he is a true Scotsman, and therefore immune to the porridge. So, a true Scotsman, Angus yields that no true Scotsman sugar his porridge.



the Texas sharpshooter

Cherry-picking data points to suit an argument, or finding a pattern to fit a presumption.

The members of the Supreme Righty Drink point to research showing that of the five countries where Supreme drinks sell the most units, three of them are in the top ten healthiest countries on Earth, therefore Supreme drinks are healthy.



the fallacy fallacy

Presuming that because a claim has been poorly argued, or a fallacy has been made, that it is necessarily wrong.

Recognizing that Amanda had committed a fallacy in arguing that we should eat health food because a number said it was popular. After said we should therefore eat bacon (which doesn't change anything any day).



personal incredulity

Saying that because one finds something difficult to understand that it is therefore not true.

We drew a picture of a fish and a human and with obvious dissonance Richard the really thought we were stupid enough to believe that a fish somehow turned into a human through just, like, random things happening over time.



ambiguity

Using double meanings or ambiguities of language to mislead or misrepresent the truth.

When the judge asked the defendant why he hadn't paid his parking fine, he said that he couldn't have to pay them because the sign said 'Free for parking here' and so he naturally presumed that it would be true to park there.



genetic

Judging something good or bad on the basis of where it comes from, or from whom it comes.

Accused on the 100th case of corruption and bribery (bribe), the senator said we should be of the opinion of the things we hear in the media, because we all know how very unreliable the media can be.



middle ground

Saying that a compromise, or middle point, between two extremes is the truth.

Holly said that vaccinations caused autism in children, but her scientifically-minded friend Chad said that this claim had been debunked and proven false. Their friend also offered a compromise that vaccinations cause some autism.

thou shalt not commit logical fallacies

A logical fallacy is a flaw in reasoning. Strong arguments are valid of logical fallacies, whilst arguments that are weak tend to use logical fallacies to appear stronger than they are. They're like tricks or illusions of thought, and they're often very sneakily used by politicians, the media, and others to fool people. Don't be fooled! This poster has been designed to help you identify some of the more common fallacies. If you see someone committing a logical fallacy online, link them to the relevant fallacy to show them in their inbox. <http://youlogicalfallacies.com/strawman>

© 2018 This poster is published under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike license. You are free to print, copy, and redistribute this poster, with the understanding that you must not use it for any commercial purpose. It is also free to share it with others, as long as you credit the creator.

youlogicalfallacies.com

Falácias

false cause

You presumed that a real or perceived relationship between things means that one is the cause of the other.

Many people confuse correlation (things happening together or in sequence) for causation (that one thing actually causes the other to happen). Sometimes correlation is coincidental, or it may be attributable to a common cause.

Example: Pointing to a fancy chart, Roger shows how temperatures have been rising over the past few centuries, whilst at the same time the numbers of pirates have been decreasing; thus pirates cool the world and global warming is a hoax.

<https://yourlogicalfallacyis.com/>

Lógica: as figuras clássicas

Euclides: o pai da prova matemática

- Viveu em Alexandria, cerca do ano 300 A.C.
- Formalizou a Geometria, baseada em princípios matemáticos rigorosos.
- O seu livro “Os elementos” foi a referência central até ao Séc XIX.

Lógica: a formalização da Matemática

George Boole: o pai do uso da Álgebra na Lógica

- Nasceu em Inglaterra em 1815; morreu na Irlanda em 1864.
- Escreveu "Laws of Thought"(1854).
- Definiu uma semântica para a lógica clássica, agora chamada de Álgebra de Boole.
- Ajudou a estabelecer os fundamentos da Lógica Simbólica.

Lógica: a formalização da Matemática

Georg Cantor: o pai da teoria de conjuntos

- Nasceu na Rússia em 1845; morreu na Alemanha em 1918.
- Inventou a teoria de conjuntos, definiu a noção de infinito e de números transfinitos; mostrou que há mais reais que naturais.
- Estabeleceu os fundamentos da Matemática moderna.

David Hilbert (veremos à frente) disse em 1926 “Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós”.

Lógica: a formalização da Matemática

Bertrand Russell: o pai da Lógica como fundação da Matemática

- Viveu em Inglaterra de 1872 a 1970.
- Estudou os fundamentos da Matemática e descobriu o paradoxo que abalou a teoria de conjuntos.
- Escreveu “The Principles of Mathematics” mostrando que a Matemática pode ser deduzida de um pequeno número de princípios.

Lógica: a metamatemática

David Hilbert: o pai da “prova automática”

- Viveu na Alemanha de 1862 a 1943.
- O mais importante matemático da época.
- Definiu os Espaços de Hilbert, a matemática da relatividade e da quântica (“A Física é demasiado difícil para os Físicos”) , a Teoria da Prova e a Lógica Matemática.
- Em 1900 estabeleceu os 23 mais importantes problemas da Matemática, alguns deles estão ainda hoje por resolver.
- Definiu um programa de investigação para formular TODA a Matemática com bases sólidas e assentes na Lógica (a partir de um conjunto finito de axiomas, provados consistentes).
- No Congresso dedicado aos seus 70 anos, em 1923, afirmou “Temos que saber, viremos a saber!” para sublinhar que a Matemática desvendaria toda a Verdade.

Lógica: a consciência dos limites

Kurt Gödel: o pai da incompletude

- Nasceu na Austria em 1906; morreu nos EUA em 1978.
- Mostrou a completude da Lógica de 1ª ordem (no doutoramento, aos 24 anos) e a incompletude de qualquer sistema axiomático capaz de descrever a aritmética dos naturais.

Anunciou o resultado no Congresso de Hilbert (destruindo assim o programa que estava nesses dias em apoteose).

- Incompletude: há proposições verdadeiras num sistema consistente que não podem ser provadas.
- Estabeleceu as bases da Computação, com a Teoria das funções recursivas, entre outros trabalhos importantes na Física.

Lógica: o berço da computação

Church: o pai das linguagens de programação

- Viveu nos EUA de 1903 a 1995.
- Contribuiu para a Lógica Matemática e para a Teoria da Computação, tendo definido o Cálculo-Lambda para provar que é indecidível determinar se dada proposição arbitrária de uma teoria matemática é ou não verdadeira.
- A simplicidade e expressividade do Cálculo-Lambda, que permite codificar funções, fizeram dele a primeira linguagem de programação.

Lógica: o berço da computação

Alan Turing: o pai da computação

- Viveu em Inglaterra de 1912 a 1952.
- Definiu o primeiro modelo de computação (uma máquina que podia executar qualquer programa): a Máquina Universal de Turing.
- Mostrou a indecidibilidade do “Halting Problem”.
- Estabeleceu a Tese de Church-Turing:
Toda a função algoritmicamente calculável é computável por uma Máquina de Turing.
- Descodificou o sistema de encriptação da marinha Alemã.
Churchill disse que não é um homem que ganha uma guerra, mas que sem Turing a Grã-Bretanha teria provavelmente perdido a 2ª guerra.

Lógica: uma linguagem formal

A lógica é uma língua

- Diz-se uma linguagem artificial, por contraste com as línguas naturais (como o Português ou o Inglês, ambíguas e difíceis de representar).
- É uma linguagem (formal, ou simbólica), que usa símbolos próprios ($\vee, \rightarrow, \forall, \dots$), com sintaxe e semântica claras, distinguidas e rigorosamente definidas.
- É universal, precisa e dedicada ao objectivo.
- Equipada com regras para decidir da validade de uma afirmação (escrita na linguagem em causa), eventualmente a partir de outras afirmações válidas.

Processo dedutivo

Consequência lógica

- Se uma afirmação A decorre de outra B , então B não pode ser verdade sem que A o seja.
- Serve também para mostrar que uma teoria é falsa: se uma teoria económica diz que taxa de inflação alta é consequência de baixa taxa de desemprego, e se se observa simultaneamente baixa inflação e baixo desemprego, a teoria tem que ser revista.
- Permite obter provas: objecto matemático irrefutável que estabelece que dado facto é verdade.

Exemplo de dedução

Consequência lógica

- Se o metro se atrasar e não houver táxis na estação, o Pedro chega tarde. O Pedro não chegou tarde, mas o metro atrasou-se. Logo, havia táxis na estação.
- Se está a chover e a Ana não tiver um guarda-chuva com ela, vai-se molhar. A Ana não se está a molhar, mas está a chover. Logo, tem um guarda-chuva com ela.

Verificação

Intuitivamente estas as frases reflectem raciocínios válidos.

Mas como podemos verificar?

Na verdade, o raciocínio que prova uma também serve para provar a outra.

Verificação de consequência lógica

Formalização

- Hipótese 1: (se p e (não q)) então r .
- Hipótese 2: (não r) e p .
- Tese: q .

Prova

- Hipótese 1 é equivalente a (não p) ou q ou r .
- Hipótese 2 diz que p e (não r).
- Logo q .

O que dá a lógica à computação

Ferramentas essenciais

- Linguagem para modelar entidades computacionais (equipamentos, sistemas ou programas).
- Regras para raciocínio formal sobre propriedades de termos (palavras) da linguagem.
- O raciocínio formal pode ser executado mecanica e automaticamente.
- Fornece provas desse raciocínio formal.

Aplicações

- Circuitos digitais.
- Inteligência artificial.
- Teoria da complexidade.
- Verificação de programas.

Inteligência artificial

Objectivo

Desenvolver métodos e/ou dispositivos computacionais que simulem o pensamento humano.

Alguns ramos

- Representação do Conhecimento e Sistemas de Raciocínio.
- Robótica.
- Inteligência Artificial explicável.

Teoria da complexidade

Objectivo

Classificar problema de acordo com o seu grau de dificuldade.

Alguns problemas

- Calcular o tempo de execução de um programa em função do tamanho dos dados de entrada.
Programas dizem-se polinomiais (deterministas ou não) ou exponenciais.
- $P = NP$?
É um dos grandes problemas matemáticos em aberto (prémio de 1 milhão de dolares para quem o resolver).
Saber se a classe dos problemas resolúveis deterministicamente em tempo polinomial coincide com a classe dos problemas resolúveis não deterministicamente em tempo polinomial.

Verificação de programas

Objectivo

Garantir que dado programa tem o comportamento pretendido.
São de facto dois problemas: especificar comportamento e provar correcção.

Algumas aplicações

- Síntese de programas correctos.
- Sistemas de tipos.
- Verificação de modelos (“model checking”).

Objectivos

Descrição geral

- Introdução à lógica proposicional e de primeira ordem: noção de linguagem (sintaxe), de tabelas de verdade e de estrutura de interpretação (semântica) e de sistema dedutivo (sistema de prova).
- Resultados de correcção e completude do sistema de prova relativamente à semântica.
- Mecanismos computacionais: forma normal conjuntiva e forma clausal; Skolemização e unificação; resolução.

Por onde estudar

Os acetatos de apoio às aulas teóricas não substituem os livros de texto.

Bibliografia

- A First Course in Logic: An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity. Shawn Hedman. Oxford Texts in Logic, 2004.
- Logic in Computer Science: modelling and reasoning about systems (2nd edition). Michael Huth and Mark Ryan. Cambridge University Press, 2004.
- Lógica Computacional: Proposicional e de 1ª ordem. Apontamentos de Paula Gouveia e F. Miguel Dionísio. Instituto Superior Técnico.
- Language Proof and Logic (4th edition). Jon Barwise and John Etchemendy. CSLI Publications, 2003.

Como obter aprovação

Provas

A avaliação é feita através da média de 2 testes ou em alternativa 1 exame (recurso), realizados individualmente por cada aluno, e avaliados de 0 a 20.

Aprovação

Obtém aprovação na disciplina o aluno que esteja numa das duas seguintes situações:

- a média dos dois testes seja de pelo menos 9,5 valores (em 20)
ou
- tenha uma nota de exame maior ou igual a 9,5.

Funcionamento

Frequência e faltas

Não há faltas nas aulas nem avaliação de frequência.

Comunicação

O CLIP é:

- o veículo preferencial de informação;
- a página da cadeira;
- activem as notificações!

O que se espera dos alunos

- Trabalho contínuo!
São 6 créditos, implica investimento autónomo semanal
- Crítica (construtiva) frontal e atempada.

Lógica proposicional

Um sistema formal de raciocínio, constituído por:

- Um *alfabeto* (conjunto de símbolos).
- Uma *linguagem* (conjunto de fórmulas).
- Uma *semântica* (para valoração de símbolos e fórmulas).
- Um *cálculo* (sistema sintático de prova, para raciocinar).

Objecto

- Ocupa-se do estudo do comportamento dos *conectivos* lógicos (negação, disjunção, conjunção, implicação e equivalência) e das regras que os manipulam.
- Linguagem das *asserções* ou *proposições*: afirmações que são ou verdadeiras ou falsas.
- Linguagem construída a partir de símbolos proposicionais (asserções básicas) e conectivos lógicos (ligam asserções).

Asserções

Exemplos

- Básicas:
 - hoje chove;
 - todo o natural par maior que 2 é a soma de dois primos.
- Compostas:
 - estudo hoje *ou* amanhã;
 - jogo hoje e amanhã;
 - se tenho aulas *então* vou à Faculdade;
 - n é par se e só se $\text{mod}(n, 2) = 0$.
- Não são asserções:
 - passe-me o sal, se faz favor;
 - quanto mais depressa, mais devagar.

Definição da sintaxe da lógica proposicional

Objectivo

- Obter a linguagem formal das fórmulas proposicionais.
- A partir de um alfabeto (conjunto de símbolos, representando asserções) define-se como construir palavras (sequências finitas de símbolos, ditas *fórmulas*).

Alfabeto proposicional sobre um conjunto P

Seja P um conjunto numerável (de símbolos proposicionais). O *alfabeto proposicional sobre P* , denotado Alf_P , é o conjunto constituído:

- por cada um dos elementos de P (as *asserções básicas*);
- pelo símbolo \perp (chamado *falso*, ou *absurdo*);
- pelos conectivos:
negação (\neg), *disjunção* (\vee), *conjunção* (\wedge) e *implicação* (\rightarrow);
- pelos parênteses esquerdo e direito, (e).

Definição da sintaxe da lógica proposicional

Nem toda a sequência de símbolos do alfabeto é uma palavra da linguagem. Vamos defini-la com (axiomas e) regras.

Linguagem proposicional induzida por Alf_P

A *linguagem proposicional induzida por Alf_P* , denotada F_P , é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:

- *BOT*: $\perp \in F_P$
- *PROP*: se $p \in P$ então $p \in F_P$
- *NEG*: se $\varphi \in F_P$ então $\neg\varphi \in F_P$
- *DIS*: se $\varphi, \psi \in F_P$ então $(\varphi \vee \psi) \in F_P$
- *CON*: se $\varphi, \psi \in F_P$ então $(\varphi \wedge \psi) \in F_P$
- *IMP*: se $\varphi, \psi \in F_P$ então $(\varphi \rightarrow \psi) \in F_P$

Terminologia

- Os elementos de F_P dizem-se *fórmulas*.
- Os elementos de P e o símbolo \perp dizem-se fórmulas *atómicas*.

Que sequências são fórmulas?

Nem todas as sequências de símbolos do alfabeto são fórmulas.

As sequências seguintes não são fórmulas

- $pq \notin F_P$, porque não se podem fazer sequências de símbolos proposicionais;
- $(p \vee) \notin F_P$, porque a disjunção é um operador binário e a expressão só tem um argumento;
- $(p \rightarrow (\vee q)) \notin F_P$, porque a implicação é um operador binário que deve ter como argumentos duas fórmulas; no entanto, apesar de p ser uma fórmula, $(\vee q)$ não o é.
- $(p \rightarrow (\neg q)) \notin F_P$
Porquê? Porque a regra NEG não coloca parêntesis à volta.

Não foram seguidas as regras para definir fórmulas!

Que sequências são fórmulas?

Como mostrar que $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r)) \in F_P$

Prova de fórmulas

Sejam $p, q, r \in P$.

- 1 Por *PROP*, tem-se que $p \in F_P$.
- 2 Por *PROP*, tem-se que $q \in F_P$.
- 3 Por *PROP*, tem-se que $r \in F_P$.
- 4 Por *DIS*, com 1 e 2, tem-se que $(p \vee q) \in F_P$.
- 5 Por *IMP*, com 4 e 3, tem-se que $((p \vee q) \rightarrow r) \in F_P$.
- 6 Por *CON*, com 1 e 5, tem-se que $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r)) \in F_P$.

Exemplos de fórmulas da lógica proposicional

Asserções básicas e compostas

Considere as seguintes asserções básicas.

- p : 'estudo hoje'
- q : 'estudo amanhã'
- r : 'tenho exame amanhã'.

Constroem-se as seguintes asserções compostas:

- estudo hoje *ou* estudo amanhã: $p \vee q$
- estudo hoje *e* estudo amanhã: $p \wedge q$
- se tenho exame amanhã *então* estudo hoje e estudo amanhã:
 $r \rightarrow (p \wedge q)$

Abreviaturas

Abreviaturas

São úteis novos conectivos para abreviar alguns tipos de fórmulas.

- Verdade: $\top \stackrel{\text{abv}}{=} \neg \perp$;
- Equivalência: $(\varphi \leftrightarrow \psi) \stackrel{\text{abv}}{=} ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$.

Convenções

- Para simplificar a notação omitem-se por vezes os parênteses mais exteriores das fórmulas.
- Consideramos que o conectivo \neg tem precedência.

Exemplos

- $\neg(\neg\varphi \wedge \psi)$ notem que $\neg((\neg\varphi) \wedge \psi)$ não é fórmula válida - Porquê?
- $\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \vee \delta)$ - omitimos parênteses externos