Lógica Computacional

Aula Teórica 13: Semântica da Lógica de Primeira Ordem

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

27 de outubro de 2023

Satisfação de fórmulas

Satisfação de fórmulas dada estrutura de interpretação e atribuição:

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi \quad \text{se e só se} \quad [\![\varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1$$

$[\![\varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}}$ definida indutivamente no conjunto das fórmulas

Nota

Estrutura de interpretação e atribuição é tudo o que precisamos para interpretar fórmulas.
Dado $\mathcal{M}$ e ρ, qualquer fórmula φ é verdadeira ou falsa:

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}, \rho \Vdash \neg\varphi$$

Satisfação de fórmulas

Resultados úteis

- $\mathcal{M}, \rho \nVdash \perp$
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg\varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \nVdash \varphi$
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi \wedge \psi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ e $\mathcal{M}, \rho \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi \vee \psi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ ou $\mathcal{M}, \rho \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho \nVdash \varphi$ ou $\mathcal{M}, \rho \Vdash \psi$
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x \varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ para todo o $u \in U$
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists_x \varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ para algum $u \in U$

Lema das variáveis livres

Para interpretar termos, só interessam variáveis que neles ocorram

Interpretação de termos

Sejam ρ e ρ' atribuições tal que $\rho(x) = \rho'(x)$ para todo $x \in \mathsf{Var}(t)$. Então

$$[\![t]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = [\![t]\!]^{\rho'}_{\mathcal{M}}$$

Para interpretar fórmulas, só interessam as suas variáveis livres

Interpretação de fórmulas

Sejam ρ e ρ' atribuições tal que $\rho(x) = \rho'(x)$ para todo $x \in \mathsf{VL}(\varphi)$. Então

$$[\![\varphi]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]^{\rho'}_{\mathcal{M}}$$

o que é equivalente a dizer que:

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi \quad \text{se e só se} \quad \mathcal{M}, \rho' \Vdash \varphi$$

Lema das variáveis livres

Se tivermos uma variável que não é livre na fórmula?

Se $x \notin \mathsf{VL}(\varphi)$ então:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=u]} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho}$$

o que é equivalente a dizer que:

$$\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \quad \text{se e só se} \quad \mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$$

Lema das variáveis livres

Quando não há variáveis livres?

Interpretação de termo fechado

Seja t um termo fechado e ρ e ρ' quaisquer atribuições. Então

$$[\![t]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = [\![t]\!]^{\rho'}_{\mathcal{M}}$$

Satisfação de fórmula fechada

Seja φ uma fórmula fechada e ρ e ρ' quaisquer atribuições. Então:

- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M}, \rho' \Vdash \varphi$.
- $\mathcal{M}, \rho \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M} \Vdash \varphi$.
- $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ ou $\mathcal{M} \Vdash \neg\varphi$.

Variáveis mudas

A identidade das variáveis mudas não é importante:

- qualquer identificador serve
- podemos trocá-lo sem alterar o sentido da fórmula.

Seja $\varphi \in F_\Sigma^X$ e $y \notin \mathsf{VL}(\varphi)$, tal que y é livre para x em φ. Então:

- $\forall_x \varphi \quad \equiv \quad \forall_y [\varphi]_y^x$
- $\exists_x \varphi \quad \equiv \quad \exists_y [\varphi]_y^x$

Fecho de variáveis em fórmulas

Se a satisfação de uma fórmula não depende da atribuição considerada, as variáveis podem ser quantificadas universalmente

- $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M} \Vdash \forall_x \varphi$
- $\mathcal{M} \Vdash \varphi$ se e só se $\mathcal{M} \Vdash \mathsf{FchU}(\varphi)$, sendo $\mathsf{FchU}(\varphi)$ o fecho universal de φ

Variável por termo

Dada $\varphi \in F_{\Sigma}^{X}$ e sendo $t \in T_{\Sigma}^{X}$ livre para x em φ, tem-se que:

- $[\varphi]_t^x \models \exists_x \varphi$
- $\forall_x \varphi \models [\varphi]_t^x$

Quantificadores vs conectivos proposicionais

Alguns resultados

- $\{(\forall_x \varphi) \vee (\forall_x \psi)\} \models \forall x\, (\varphi \vee \psi)$
- $\{\exists_x (\varphi \wedge \psi)\} \models \exists x\, \varphi \wedge \exists_x \psi$
- $\{\forall_x (\varphi \rightarrow \psi)\} \models \forall_x \varphi \rightarrow \forall_x \psi$
- $\{\exists_y \forall_x \varphi\} \models \forall_x \exists_y \varphi$

Recíprocos não são verdadeiros

As fórmulas em cada item não são equivalentes.

Prova de consequência semântica

$$\{(\forall_x \varphi) \vee (\forall_x \psi)\} \models \forall_x (\varphi \vee \psi)$$

Consideremos uma estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (U, I)$ e uma atribuição $\rho : \ X \to U$ tal que $\mathcal{M}, \rho \Vdash (\forall_x \varphi) \vee (\forall_x \psi)$, ou seja,

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x \varphi \text{ ou } \mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x \psi \tag{1}$$

Queremos mostrar que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x (\varphi \vee \psi)$.
Considerando um valor arbitrário $u \in U$, por (1) obtém-se

$$\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \text{ ou } \mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \psi \tag{2}$$

Então, de (2) conclui-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \vee \psi$; logo tem-se também que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x (\varphi \vee \psi)$, como se queria mostrar.

Um contra-exemplo: $\{\forall_x\,(\varphi \vee \psi)\} \not\models \forall_x\,\varphi \vee \forall_x\,\psi$

Seja $\varphi = P(x)$ e $\psi = Q(x)$.
Considere-se a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ tal que
$\underline{P}_I : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ tal que $\underline{P}_I(n) = 1$ sse n é par
$\underline{Q}_I : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ tal que $\underline{Q}_I(n) = 1$ sse n é ímpar
Seja ρ uma qualquer atribuição.

- primeiro mostramos que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x\,(P(x) \vee Q(x))$

$[\![\forall_x\,(P(x) \vee Q(x))]\!]^{\rho}_{\mathcal{M}} = 1$ sse $[\![P(x) \vee Q(x)]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}} = 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$. Seja então n arbitrário:
$[\![P(x) \vee Q(x)]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}} = [\![P(x)]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}} \oplus [\![Q(x)]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}} =$
$\underline{P}_I([\![x]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}}) \oplus \underline{Q}_I([\![x]\!]^{\rho[x:=n]}_{\mathcal{M}}) = \underline{P}_I(n) \oplus \underline{Q}_I(n)$. Mas como para qualquer n, se tem $\underline{P}_I(n) = 1$ (n é par) ou $\underline{Q}_I(n) = 1$ (n é ímpar), temos que $\underline{P}_I(n) \oplus \underline{Q}_I(n) = 1$.
Logo, temos que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x\,(P(x) \vee Q(x))$.

Um contra-exemplo: $\{\forall_x (\varphi \vee \psi)\} \not\models \forall_x \varphi \vee \forall_x \psi$

Seja $\varphi = P(x)$ e $\psi = Q(x)$.
Considere-se a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ tal que
$\underline{P}_I : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ tal que $\underline{P}_I(n) = 1$ sse n é par
$\underline{Q}_I : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ tal que $\underline{Q}_I(n) = 1$ sse n é ímpar
Seja ρ uma qualquer atribuição.

- Vamos agora mostrar que $\mathcal{M}, \rho \not\Vdash \forall_x P(x) \vee \forall_x Q(x)$.

Note-se que $[\![P(x)]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=1]} = \underline{P}_I([\![x]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=1]}) = \underline{P}_I(1) = 0$. Logo $[\![\forall_x P(x)]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho} = 0$ e portanto $\mathcal{M}, \rho \not\Vdash \forall_x P(x)$.
Também temos $[\![Q(x)]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=2]} = \underline{Q}_I([\![x]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho[x:=2]}) = \underline{Q}_I(2) = 0$. Logo $[\![\forall_x Q(x)]\!]_{\mathcal{M}}^{\rho} = 0$ e portanto $\mathcal{M}, \rho \not\Vdash \forall_x Q(x)$.
Fica então provado que $\mathcal{M}, \rho \not\Vdash \forall_x P(x) \vee \forall_x Q(x)$.

Prova de consequência semântica

$$\{\exists_y \forall_x \varphi\} \models \forall_x \exists_y \varphi$$

Seja $\mathcal{M} = (U, I)$ uma estrutura de interpretação e $\rho : X \to U$ uma atribuição tal que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists_y \forall_x \varphi$, ou seja, para um dado $v \in U$,

$$\mathcal{M}, \rho[y := v] \Vdash \forall_x \varphi \tag{3}$$

Considerando um valor arbitrário $u \in U$, por (3) obtém-se

$$\mathcal{M}, \rho[y := v][x := u] \Vdash \varphi \tag{4}$$

De (4) conclui-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \exists_y \varphi$. Como isto é verdade para qualquer $u \in U$, temos que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x \exists y \varphi$, como se queria mostrar.

Outro contra-exemplo

$$\{\forall_x \exists_y \varphi\} \not\models \exists_y \forall_x \varphi$$

Seja $\varphi = M(x, y)$.

Considere-se a estrutura de interpretação $\mathcal{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ com $\underline{M}_I : \mathbb{N}_0^2 \to \{0, 1\}$ tal que $\underline{M}_I(n, m) = 1$ se n é menor do que m.

Só intuição (detalhes ficam como exercício):
Para todo o número existe um outro número maior do que ele, logo $\mathcal{M} \Vdash \forall_x \exists_y M(x, y)$. No entanto, não existe um número que é maior do que todos os outros, logo $\mathcal{M} \nVdash \exists_y \forall_x M(x, y)$.

Leis de De Morgan para quantificadores

$$\neg\forall_x\, \varphi \equiv \exists_x\, \neg\varphi$$

Vamos provar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ se tem

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg\forall x\, \varphi \quad \text{se e só se} \quad \mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, \neg\varphi$$

Prova-se o sentido "só se" (o recíproco tem prova semelhante):

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg\forall_x\, \varphi$, ou seja, $\mathcal{M}, \rho \nVdash \forall_x\, \varphi$. Então, para algum $u \in U$, temos $\mathcal{M}, \rho[x := u] \nVdash \varphi$, e logo $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \neg\varphi$, o que leva a concluir que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists_x\, \neg\varphi$, como se queria mostrar.

Leis de De Morgan para quantificadores

$$\neg \exists_x \varphi \equiv \forall_x \neg \varphi$$

Vamos provar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ se tem

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg \exists x \, \varphi \quad \text{se e só se} \quad \mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x \, \neg \varphi$$

Prova-se o sentido "só se" (o recíproco tem prova semelhante).

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \neg \exists_x \varphi$, ou seja, $\mathcal{M}, \rho \nVdash \exists_x \varphi$. Então, para todo $u \in U$, se tem que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \nVdash \varphi$, *i.e.*, todo $u \in U$, temos $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \neg \varphi$, o que leva a concluir que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x \, \neg \varphi$, como se queria mostrar.

Quantificadores como abreviatura

$$\exists_x \varphi \equiv \neg\forall_x \neg\varphi$$

Como $\neg\exists_x \varphi \equiv \forall_x \neg\varphi$, pelo Lema da Substitutividade temos que $\neg\neg\exists_x \varphi \equiv \neg\forall_x \neg\varphi$.Como $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$, para qualquer φ, temos, pela transitividade de $\equiv$, que $\exists_x \varphi \equiv \neg\forall_x \neg\varphi$.

$$\forall_x \varphi = \neg\exists_x \neg\varphi$$

A prova é semelhante. Exercício...

Leis de distribuição

$$\forall_x \varphi \wedge \forall_x \psi \equiv \forall x (\varphi \wedge \psi)$$

Vamos mostrar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ se tem

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x \varphi \wedge \forall_x \psi \;\; \text{se e só se} \;\; \mathcal{M}, \rho \Vdash \forall x (\varphi \wedge \psi)$$

Prova-se o sentido "se" (o recíproco tem prova semelhante).

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x (\varphi \wedge \psi)$, ou seja, qualquer $u \in U$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \wedge \psi$. Então, para todo o $u \in U$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ e $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \psi$. Logo $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x \varphi$ e $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x \psi$, e portanto $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x \varphi \wedge \forall x \psi$, como queríamos.

Leis de distribuição

$$\exists_x \varphi \vee \exists_x \psi \equiv \exists x\, (\varphi \vee \psi)$$

Mostra-se que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e $\rho \in ATR^X_{\mathcal{M}}$ se tem que

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists_x \varphi \vee \exists_x \psi \text{ se e só se } \mathcal{M}, \rho \Vdash \exists x\, (\varphi \vee \psi)$$

Prova-se o sentido "se" (o recíproco tem prova semelhante).

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists_x (\varphi \vee \psi)$, ou seja, para algum valor $u \in U$, tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \vee \psi$. Para esse u tem-se, por definição, que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ ou $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \psi$; logo, ou se tem $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists_x \varphi$ ou se tem $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists_x \psi$, o que leva a concluir que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \exists_x \varphi \vee \exists_x \psi$, como se queria mostrar.

Leis de âmbito de quantificadores

Ordem dos quantificadores

- $\forall_x \forall_y \varphi \equiv \forall_y \forall_x \varphi$
- $\exists_x \exists_y \varphi \equiv \exists_y \exists_x \varphi$

Quando $x \notin \mathsf{VL}(\psi)$

- $\forall_x (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall_x \varphi \wedge \psi$
- $\forall_x (\varphi \vee \psi) \equiv \forall_x \varphi \vee \psi$
- $\exists_x (\varphi \wedge \psi) \equiv \exists_x \varphi \wedge \psi$
- $\exists_x (\varphi \vee \psi) \equiv \exists_x \varphi \vee \psi$
- $\forall_x (\psi \to \varphi) \equiv \psi \to \forall_x \varphi$
- $\exists_x (\psi \to \varphi) \equiv \psi \to \exists_x \varphi$
- $\forall_x (\varphi \to \psi) \equiv \exists_x \varphi \to \psi$
- $\exists_x (\varphi \to \psi) \equiv \forall_x \varphi \to \psi$

Leis de âmbito de quantificadores

Se $x \notin \mathsf{VL}(\psi)$ então:

$$\forall_x (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall_x \varphi \wedge \psi$$

Vamos mostrar que para qualquer $\mathcal{M} = (U, I)$ e $\rho \in ATR_{\mathcal{M}}^{X}$ se tem

$$\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x (\varphi \wedge \psi) \quad \text{se e só se} \quad \mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x \varphi \wedge \psi$$

Prova-se o sentido "só se" (o recíproco tem prova semelhante).

Por hipótese, $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x (\varphi \wedge \psi)$, ou seja, qualquer $u \in U$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi \wedge \psi$. Então, para todo o $u \in U$ tem-se que $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \varphi$ e $\mathcal{M}, \rho[x := u] \Vdash \psi$. Como $x \notin \mathsf{VL}(\psi)$, temos que $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x \varphi$ e $\mathcal{M}, \rho \Vdash \psi$, e portanto $\mathcal{M}, \rho \Vdash \forall_x \varphi \wedge \psi$, como queríamos.

Provas de equivalência usando o Lema da Substutividade

$\forall_x (\psi \to \varphi) \equiv \psi \to \forall x\, \varphi$, se $x \notin$ VL ψ

$$
\begin{aligned}
\forall_x (\psi \to \varphi) &\equiv \forall_x (\neg\psi \vee \varphi) && (\text{pois } \psi \to \varphi \equiv \neg\psi \vee \varphi)\\
&\equiv \forall_x (\varphi \vee \neg\psi) && (\text{pois } \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi)\\
&\equiv \forall_x \varphi \vee \neg\psi && (\text{pois } \forall_x (\varphi \vee \psi) \equiv \forall_x \varphi \vee \psi)\\
&\equiv \neg\psi \vee \forall_x \varphi && (\text{pois } \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi)\\
&\equiv \psi \to \forall_x \varphi && (\text{pois } \neg\psi \vee \varphi \equiv \psi \to \varphi)
\end{aligned}
$$

$\forall_x (\varphi \to \psi) \equiv \exists_x \varphi \to \psi$, se $x \notin$ VL ψ

$$
\begin{aligned}
\forall_x (\varphi \to \psi) &\equiv \forall_x (\neg\varphi \vee \psi) && (\text{pois } \psi \to \varphi \equiv \neg\psi \vee \varphi)\\
&\equiv \forall_x \neg\varphi \vee \psi && (\text{pois } \forall_x (\varphi \vee \psi) \equiv \forall_x \varphi \vee \psi)\\
&\equiv \neg\exists_x \varphi \vee \psi && (\text{pois } \forall_x \neg\varphi \equiv \neg\exists_x \varphi)\\
&\equiv \exists_x \varphi \to \psi && (\text{pois } \neg\varphi \vee \psi \equiv \varphi \to \psi)
\end{aligned}
$$