

Lógica Computacional

Aula Teórica 15: Dedução Natural em Primeira Ordem

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

3 de novembro de 2023

Quantificador Universal: é fácil eliminar

Eliminação do quantificador Universal

Se todos os indivíduos do universo satisfazem uma certa propriedade, então cada um em particular satisfaz essa propriedade.

$$\frac{\mathcal{D} \quad \forall x \varphi}{[\varphi]_t^x} (\forall_E)$$

t livre para x em φ .

Eliminação do Quantificador Universal

A seguinte árvore **não** é uma derivação de
 $\{\forall x \exists y (x < y)\} \vdash \exists y (y < y)$

$$\frac{\forall x \exists y (x < y)}{\exists y (y < y)} (\forall_E)$$

O problema é que y não é livre para x em $\exists y (x < y)$.

Eliminação do Quantificador Universal

$$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \vdash Q(a)$$

$$\frac{\frac{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))^1}{P(a) \rightarrow Q(a)} (\forall_E) \quad P(a)^2}{Q(a)} (\rightarrow_E)$$

Introdução do Quantificador Existencial

Regra de introdução

Se um indivíduo de dado universo satisfaz uma propriedade, então existe algum indivíduo do universo que satisfaz essa propriedade.

$$\frac{\mathcal{D} \quad [\varphi]_t^x}{\exists_x \varphi} (\exists_I)$$

t livre para x em φ .

Introdução do Quantificador Existencial

A seguinte árvore **não** é uma derivação de
 $\{\forall_x Eq(x, x)\} \vdash \exists_y \forall_x Eq(y, x)$

$$\frac{\forall_x Eq(x, x)}{\exists_y \forall_x Eq(y, x)} (\forall_E)$$

O problema é que x não é livre para y em $\forall_x Eq(y, x)$.

Introdução do quantificador Existencial

$$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)\} \vdash \exists x Q(x)$$

$$\frac{\frac{\frac{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))^1}{P(a) \rightarrow Q(a)} (\forall_E) \quad P(a)^2}{Q(a)} (\rightarrow_E)}{\exists x Q(x)} (\exists_I)$$

Quantificador Universal: como introduzir?

Já introduzimos as duas regras mais simples:

- Eliminação do Universal
- Introdução do Existencial

Faltam as duas regras com condições mais complicadas:

- Introdução do Universal
- Eliminação do Existencial

Quantificador Universal

Regra de introdução

Se um indivíduo arbitrário de dado universo goza de certa propriedade, então qualquer indivíduo goza também dessa propriedade.

$$\frac{\mathcal{D} \quad [\varphi]_y^x}{\forall_x \varphi} (\forall_I)$$

Onde:

- 1 y não ocorre livre nas hipóteses abertas de \mathcal{D} ;
- 2 se $x \neq y$ então $y \notin VL(\varphi)$

Quantificador Universal: como introduzir?

$$\{\forall_y (P(y) \rightarrow Q(y)), \forall_y P(y)\} \vdash \forall_x Q(x)$$

$$\frac{\frac{\frac{\forall_y (P(y) \rightarrow Q(y))^1}{P(x) \rightarrow Q(x)} (\forall_E) \quad \frac{\frac{\forall_y P(y)^2}{P(x)} (\forall_E)}{Q(x)} (\rightarrow_E)}{\forall_x Q(x)} (\forall_I)$$

x é uma entidade arbitrária porque não ocorre nas hipóteses

Quantificador Universal: condições

$$\frac{\frac{\frac{\forall_x (P(x) \rightarrow Q(x))^1}{P(x) \rightarrow Q(x)} (\forall_E) \quad P(\textcolor{red}{x})^2}{Q(x)} (\rightarrow_E)}{\forall_x Q(x)} (\forall_I)$$

Esta árvore **não** é uma prova:

a variável x na hipótese $P(x)$ representa uma entidade concreta (apesar de desconhecida), pelo que não pode ser abstraída.

Quantificador Universal: como introduzir?

E se há variáveis livres nas hipóteses fechadas?

$$\frac{\frac{\frac{\neg P(x)^3}{\exists_x \neg P(x)} (\exists_I) \quad \neg \exists_x \neg P(x)^2}{\perp} (\neg_E) \quad \frac{\perp}{P(x)} (\perp, 3)}{\forall_x P(x)} (\forall_I)$$

É uma prova válida para $\{\neg \exists_x \neg P(x)\} \vdash \forall_x P(x)$ porque x apenas aparece livre numa hipótese fechada!

Quantificador Universal: como introduzir?

Podemos abstrair usando outra variável.

Se temos $Q(y)$ e y é **arbitrário** então podemos concluir $\forall_x Q(x)$.

$$\{\forall_x \forall_y P(x, y)\} \vdash \forall_y \forall_x P(y, x)$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\forall_x \forall_y P(x, y)^1}{\forall_y P(z, y)} (\forall_E)}{P(z, x)} (\forall_E)}{\forall_x P(\textcolor{red}{z}, x)} (\forall_I)}{\forall_y \forall_x P(y, x)} (\forall_I)$$

Quantificador Universal: condições

Caso em que a condição:

❶ y não ocorre livre nas hipóteses abertas de \mathcal{D}
não é satisfeita.

$$\frac{(y \leq 3)^1}{\forall x(x \leq 3)} (\forall_I)$$

Esta árvore **não** é uma prova:

y ocorre livre na hipótese em aberto (1).

Quando abstraímos uma variável, ela tem de ser genérica.

Quantificador Universal: condições

Caso em que a condição:

② se $x \neq y$ então $y \notin VL(\varphi)$

não é satisfeita.

$$\frac{\frac{\frac{\forall_y (y \geq y)}{(y \geq y)} (\forall_E)}{\forall_x (x \geq y)} (\forall_I)}{\exists_y \forall_x (x \geq y)} (\exists_I)$$

Esta árvore **não** é uma prova:

$[(x \geq y)]_y^x = (y \geq y)$, mas y ocorre livre em $(x \geq y)$.

Quando abstraímos uma variável, devemos abstrair todas as suas ocorrências.

Quantificador Existencial: como eliminar?

Ideia

Se a partir de $\varphi(y)$ com y um elemento genérico, conseguirmos concluir ψ (que não depende y), então podemos concluir ψ a partir de $\exists\varphi(x)$.

Requisitos

- 1 O indivíduo concreto que se assume ter a propriedade φ deve ser genérico: não pode estar (livre) nas hipóteses abertas.
- 2 a propriedade a concluir não depende do indivíduo.

Quantificador Existencial

Regra de eliminação

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \exists_x \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} ([\varphi]_y^x)^m \\ \mathcal{D}_2 \\ \psi \end{array}}{\psi} (\exists_E, m)$$

Onde:

- ❶ y não ocorre livre nem em ψ nem nas hipóteses abertas de \mathcal{D}_2 distintas de $[\varphi]_y^x$
- ❷ se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ ;
- ❸ a marca m apenas fecha (eventualmente) hipóteses $[\varphi]_y^x$ em \mathcal{D}_2 .

Eliminação do Existencial: Condições

A árvore seguinte **não** é uma prova de

$\{\exists_x Par(x), \forall_x (Par(x) \rightarrow Par(sq(x)))\} \vdash \forall_x Par(sq(x))$

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\exists_x Par(x))^1 \quad \frac{Par(x)^3 \quad \frac{(\forall_x (Par(x) \rightarrow Par(sq(x))))^2}{Par(x) \rightarrow Par(sq(x))} (\forall_E)}{Par(sq(x))} (\rightarrow_E)}{Par(sq(x))} (\exists_E, 3) \\
 \frac{Par(sq(x))}{\forall_x Par(sq(x))} (\forall_I)
 \end{array}$$

O problema é que a variável x ocorre livre no nó $Par(sq(x))$.

Eliminação do Existencial: condições

A árvore seguinte **não** é uma prova de
 $\{P(a), Q(x)\} \vdash \exists_x (P(x) \wedge Q(x))$

$$\frac{\frac{P(a)^1}{\exists_x P(x)} (\exists_I) \quad \frac{\frac{P(x)^3 \quad Q(x)^2}{P(x) \wedge Q(x)} (\wedge_I) \quad \frac{\quad}{\exists_x (P(x) \wedge Q(x))} (\exists_I)}{\exists_x (P(x) \wedge Q(x))} (\exists_E, 3)$$

O problema é que a variável x ocorre livre na hipótese aberta $Q(x)$.

Eliminação do Existencial: Condições

A árvore seguinte **não** é uma prova de

$\{\exists_x (Par(x) \wedge (y = 3))\} \vdash \exists_z (Par(z) \wedge (z = 3))$

$$\frac{(\exists_x (Par(x) \wedge (y = 3)))^1 \quad \frac{(Par(y) \wedge (y = 3))^2}{\exists_z (Par(z) \wedge (z = 3))} (\exists_I)}{\exists_z (Par(z) \wedge (z = 3))} (\exists_E, 2)$$

Note-se que $Par(y) \wedge (y = 3) = [Par(x) \wedge (y = 3)]_y^x$.

O problema é que a variável y é diferente de x mas ocorre livre em $Par(x) \wedge (y = 3)$.

Regras dos quantificadores

∀ - Eliminação

$$\frac{\mathcal{D} \quad \forall x \varphi}{[\varphi]_t^x} (\forall_E)$$

- t livre para x em φ

∀ - Introdução

$$\frac{\mathcal{D} \quad [\varphi]_y^x}{\forall x \varphi} (\forall_I)$$

- y não ocorre livre em hipóteses abertas de \mathcal{D}
- se $x \neq y$ então $y \notin VL(\varphi)$

∃ - Introdução

$$\frac{\mathcal{D} \quad [\varphi]_t^x}{\exists x \varphi} (\exists_I)$$

- t livre para x em φ

∃ - Eliminação

$$\frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2 \quad \begin{array}{c} ([\varphi]_y^x)^m \\ \exists x \varphi \quad \psi \end{array}}{\psi} (\exists_E, m)$$

- y não ocorre livre em ψ nem nas hipóteses abertas de \mathcal{D}_2 que não $[\varphi]_y^x$
- se $x \neq y$ então y não ocorre livre em φ
- a marca m apenas fecha (eventualmente) hipóteses $[\varphi]_y^x$ em \mathcal{D}_2

Exemplos

Prove, usando Dedução Natural, os seguintes resultados:

- ❶ $\{\forall_x (P(x) \wedge Q(x))\} \vdash \forall_x P(x) \wedge \forall_x Q(x)$
- ❷ $\{\exists_x (P(x) \vee Q(x))\} \vdash \exists_x P(x) \vee \exists_x Q(x)$
- ❸ $\{\exists_x \neg P(x)\} \vdash \neg \forall_x P(x)$
- ❹ $\{\neg \forall_x \neg \varphi\} \vdash \exists_x \varphi$
- ❺ $\{\exists_x (T(x) \wedge S(x)), \forall_x (S(x) \rightarrow L(x, b))\} \vdash \exists_x \exists_y L(x, y)$