Lógica Computacional

Aula Teórica 11: Sintaxe da Lógica de Primeira Ordem

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

20 de outubro 2023

Ocorrências de variáveis em fórmulas

Validade depende do modelo?

- Em Lógica Proposicional o valor de uma fórmula depende da valoração que escolhemos para os símbolos proposicionais.
- Em Lógica de Primeira Ordem temos de interpretar os símbolos de função (incluindo as constantes) e os de predicados. O valor de uma fórmula depende do domínio e da interpretação que consideramos.
- Há fórmulas que são sempre verdadeiras, independentemente do modelo: $(P(c) \wedge \forall_x (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow Q(c)$

E as variáveis? Como as tratamos?

Variáveis em termos

Conjunto das variáveis de um termo

O conjunto das variáveis de um termo $t \in T_{\Sigma}^{X}$, denotado por $\mathsf{Var}(t)$, é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $\mathsf{Var}(c) = \emptyset$, para cada $c \in SF_0$;
- $\mathsf{Var}(x) = \{x\}$, para cada $x \in X$;
- se $t_1, \ldots, t_n \in T_{\Sigma}^{X}$ e $f \in SF_n$, com $n > 0$, então $\mathsf{Var}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathsf{Var}(t_i)$.

Um termo t sem variáveis diz-se *fechado*: $\mathsf{Var}(t) = \emptyset$

- Exemplo: $pai(ana)$ ou $soma(zero, suc(suc(zero)))$

caso contrário t diz-se *aberto*: $\mathsf{Var}(t) \neq \emptyset$

- Exemplo: $pai(x)$ ou $soma(zero, suc(suc(y)))$

Estes conceitos estendem-se naturalmente a conjuntos de termos.

Variáveis e quantificadores

Tipos de ocorrências de variáveis em fórmulas.

Ideia intuitiva

- variável diz-se *muda* numa fórmula φ se se encontra quantificada em φ. Exemplos:
  - x em $\forall_x(P(x) \to Q(x))$
  - z em $\exists_y(\forall_z(P(z) \to Q(y)))$
- variável diz-se *livre* numa fórmula φ se tem uma ocorrência em φ que não está no âmbito de um quantificador.
  - y em $\forall_x((P(x) \to Q(x)) \wedge R(x,y))$
  - x e y em $\forall_x(P(x) \to Q(x)) \wedge R(x,y)$

Pelos exemplos podemos ver que é possível uma variável ser muda e livre na mesma fórmula.

Variáveis livres

Conjunto das variáveis livres de uma fórmula

O conjunto das variáveis livres numa fórmula $\varphi \in F_{\Sigma}^{X}$, denotado por $\mathsf{VL}(\varphi)$, é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $\mathsf{VL}(\varphi) = \emptyset$, para cada $\varphi \in SP_0 \cup \{\perp\}$;
- se $t_1, \ldots, t_n \in T_{\Sigma}^{X}$ e $R \in SP_n$, com $n > 0$, então $\mathsf{VL}(R(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathsf{Var}(t_i)$;
- se $\varphi, \psi \in F_{\Sigma}^{X}$ então $\mathsf{VL}(\varphi \vee \psi) = \mathsf{VL}(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{VL}(\varphi \to \psi) = \mathsf{VL}(\varphi) \cup \mathsf{VL}(\psi)$ $\mathsf{VL}(\neg\varphi) = \mathsf{VL}(\varphi)$;
- se $x \in X$ e $\varphi \in F_{\Sigma}^{X}$ então $\mathsf{VL}(\forall_x \varphi) = \mathsf{VL}(\exists_x \varphi) = \mathsf{VL}(\varphi) \setminus \{x\}$.

Uma fórmula sem variáveis *livres* diz-se fechada;
Caso contrário diz-se aberta.
O conceito estende-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.

Variáveis mudas

Conjunto das variáveis mudas de uma fórmula

O conjunto das variáveis mudas numa fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$, denotado por $\mathsf{VM}(\varphi)$, é definido indutivamente pelas seguintes regras.

- $\mathsf{VM}(\varphi) = \emptyset$, para cada $\varphi \in SP_0 \cup \{\perp\}$;
- se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ e $R(t_1, \ldots, t_n) \in F_\Sigma^X$ para cada $R \in SP_n$, com $n > 0$, então $\mathsf{VM}(R(t_1, \ldots, t_n)) = \emptyset$;
- se $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ então
  $\mathsf{VM}(\varphi \vee \psi) = \mathsf{VM}(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{VM}(\varphi \to \psi) = \mathsf{VM}(\varphi) \cup \mathsf{VM}(\psi)$
  $\mathsf{VM}(\neg\varphi) = \mathsf{VM}(\varphi)$;
- se $x \in X$ e $\varphi \in F_\Sigma^X$ então
  $\mathsf{VM}(\forall_x \varphi) = \mathsf{VM}(\exists_x \varphi) = \mathsf{VM}(\varphi) \cup \{x\}$.

O conceito estende-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.

Variáveis livres e mudas

Conjunto das variáveis de uma fórmula

O conjunto das variáveis de uma fórmula $\varphi \in F_\Sigma^X$, denotado por Var(φ), é o conjunto Var$(\varphi) =$ VL$(\varphi) \cup$ VM(φ).
O conceito estende-se naturalmente a conjuntos de fórmulas.

Fecho universal de fórmula

Seja $\varphi \in F_\Sigma^X$. Se VL$(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}, n \geq 1$, então a fórmula

$$\forall_{x_1} \ldots \forall_{x_n} \varphi$$

é o fecho universal de φ (único a menos da ordem das variáveis).
Se VL$(\varphi) = \emptyset$, então φ é o seu próprio fecho universal.

Variáveis livres e mudas: exemplos e cálculo

Exemplos

- Seja $\varphi = \forall_x (P(x) \to Q(x))$

$$\mathsf{VL}(\varphi) = \emptyset,\ \mathsf{VM}(\varphi) = \{x\} = \mathsf{Var}(\varphi)$$

- Seja $\varphi = \forall_x (P(x) \to R(x, y))$

$$\mathsf{VL}(\varphi) = \{y\},\ \mathsf{VM}(\varphi) = \{x\} \text{ e } \mathsf{Var}(\varphi) = \{x, y\}$$

- Seja $\varphi = \forall_x \forall_z (P(x) \to R(x, y)) \vee Q(x)$

$$\mathsf{VL}(\varphi) = \{x, y\},\ \mathsf{VM}(\varphi) = \{x, z\} \text{ e } \mathsf{Var}(\varphi) = \{x, y, z\}$$

Variáveis livres e mudas: exemplos e cálculo

Cálculo recursivo: $\mathsf{VL}(\forall_x(P(x) \to R(x,y)) \vee Q(x)) = \{x,y\}$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{VL}(\forall_x(P(x) \to R(x,y)) \vee Q(x)) &= \\
\mathsf{VL}(\forall_x(P(x) \to R(x,y))) \cup \mathsf{VL}(Q(x)) &= \\
(\mathsf{VL}(P(x) \to R(x,y)) \setminus \{x\}) \cup \mathsf{Var}(x) &= \\
(\mathsf{VL}(P(x)) \cup \mathsf{VL}(R(x,y)) \setminus \{x\}) \cup \{x\} &= \\
(\mathsf{Var}(x) \cup (\mathsf{Var}(x) \cup \mathsf{Var}(y))) \setminus \{x\}) \cup \{x\} &= \\
(\{x\} \cup \{x,y\}) \setminus \{x\}) \cup \{x\} &= \\
(\{x,y\} \setminus \{x\}) \cup \{x\} &= \\
\{y\} \cup \{x\} &= \\
\{x,y\}
\end{aligned}
$$

O que se pretende?

Motivação

- Uma fórmula como $\forall_x P(x)$ captura o facto de a propriedade P ser verdadeira para todos os elementos de dado universo.
- Então, substituindo a variável por um termo qualquer, a propriedade é verdadeira.

  Ou seja, se se tem $\forall_x P(x)$ também se deve ter $P(t)$, para qualquer termo $t \in T_\Sigma^X$, pois os termos designam elementos do universo em questão.

  A fórmula $\forall_x P(x) \to P(t)$, sendo $t \in T_\Sigma^X$, é válida.

E para uma fórmula em geral?
Será que $\forall_x \varphi \to [\varphi]_t^x$ é fórmula válida?
Depende de x e de t, como iremos ver.

Termos por variáveis

Substituição de termo por variável num termo

Dados termos $s, t \in T_\Sigma^X$, o termo $[s]_t^x$, que se obtém substituindo x por t em s é definido indutivamente pelas seguintes regras:

- $[c]_t^x = c$, para cada $c \in SF_0$;
- $[x]_t^x = t$, para cada $x \in X$;
- $[y]_t^x = y$, para cada $y \neq x$;
- se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ e $f \in SF_n$, com $n > 0$, então

$$[f(t_1, \ldots, t_n)]_t^x = f([t_1]_t^x, \ldots, [t_n]_t^x)$$

Exemplo:

- $[f(x, g(y, x))]_3^x = f(3, g(y, 3))$
- $[mae(x)]_{mae(y)}^x = mae(mae(y))$

Termos por variáveis

Substituição de termo por variável em fórmula

Dadas $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ e $x \in X$ e $t \in T_\Sigma^X$, a fórmula $[\varphi]_t^x$, que se obtém substituindo x por t em φ é definida indutivamente pelas regras:

- $[\varphi]_t^x = \varphi$, para cada $\varphi \in SP_0 \cup \{\perp\}$
- se $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma^X$ e $P \in SP_n$, com $n > 0$, então
$$[P(t_1, \ldots, t_n)]_t^x = P([t_1]_t^x, \ldots, [t_n]_t^x)$$
- $[\varphi * \psi]_t^x = [\varphi]_t^x * [\psi]_t^x$, para cada $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$
- $[\neg\varphi]_t^x = \neg[\varphi]_t^x$
- $[\forall_x\, \varphi]_t^x = \forall_x\, \varphi$
- $[\exists_x\, \varphi]_t^x = \exists_x\, \varphi$
- $[\forall_y\, \varphi]_t^x = \forall_y\, [\varphi]_t^x$, se $y \neq x$
- $[\exists_y\, \varphi]_t^x = \exists_y\, [\varphi]_t^x$, se $y \neq x$

Termos por variáveis

Exemplos

Considere as variáveis x, y, z e a assinatura $\Sigma = (SF, SP)$, com $f, g \in SF_1$, $P \in SP_1$ e $Q \in SP_2$. Sejam:

- $\varphi = \forall_x (P(x) \rightarrow Q(x, g(y)))$
- $\psi = P(z) \wedge \exists_z Q(f(z), x)$
- $t = f(y)$
- $t' = g(z)$

Então:

- $[g(x)]_t^x = g(f(y))$;
- $[\varphi]_t^y = \forall_x (P(x) \rightarrow Q(x, g(f(y))))$;
- $[\varphi]_t^x = \varphi$;
- $[\psi]_t^z = P(f(y)) \wedge \exists_z Q(f(z), x)$;
- $[\psi]_{t'}^x = P(z) \wedge \exists_z Q(f(z), g(z))$.

Termos por variáveis

$$[P(z) \wedge \exists_z Q(r(z), x)]^z_{f(y)} = P(f(y)) \wedge \exists_z Q(f(z), x)$$

Cálculo recursivo

$$\begin{aligned} &[P(z) \wedge \exists_z Q(r(z), x)]^z_{f(y)} = \\ &[P(z)]^z_{f(y)} \wedge [\exists_z Q(r(z), x)]^z_{f(y)} = \\ &P([z]^z_{f(y)}) \wedge \exists_z Q(r(z), x) = \\ &P(f(y)) \wedge \exists_z Q(r(z), x) \end{aligned}$$

Termos por variáveis

Captura de variáveis

Substituição sem cuidado permite alterar o "sentido" das fórmulas.

- $\exists_x\, Maior(x, y)$ tem significado diferente de $\exists_x\, Maior(x, x)$

$$[\exists_x\, Maior(x, y)]^y_x = \exists_x\, Maior(x, x)$$

- Em $\forall_x(P(x) \rightarrow Q(x, y))$ não se deve substituir o y por um termo que contenha x.

$$[\forall_x(P(x) \rightarrow Q(x, y))]^y_{s(x)} = \forall_x(P(x) \rightarrow Q(x, s(x)))$$

Em geral, deve-se evitar substituir x por t nos casos em que t tem uma variável que fica capturado por um quantificador.

Termos por variáveis

Termo livre para variável numa fórmula

Sejam $\varphi, \psi \in F_\Sigma^X$ e $x \in X$ e $t \in T_\Sigma^X$.
Então, t diz-se livre para x em φ se

- φ é uma fórmula atómica (predicado ou $\perp$);
- $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$ com $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ e t livre para x em φ_1 e φ_2;
- $\varphi = \neg\varphi$ e t livre para x em φ;
- $\varphi = \forall_x \psi$ ou $\varphi = \exists x \, \psi$;
- $\varphi = \forall_y \psi$ ou $\varphi = \exists_y \psi$, sendo $y \neq x$, e $y \notin \mathrm{Var}(t)$ e t livre para x em ψ.

Substituição de termo por variável

Observações

- Ao substituir x por t em φ, só são efectivamente substituídas as ocorrências de x que sejam livres.
  - $[\varphi]_t^x = \varphi$ se φ é fechada
  - $[\forall_x \varphi]_t^x = \forall_x \varphi$ e $[\exists_x \varphi]_t^x = \exists_x \varphi$
- o termo x é sempre livre para x em qualquer fórmula
- Se $\mathsf{Var}(t) = \emptyset$, então t é livre para qualquer variável em qualquer fórmula
- Se $\mathsf{Var}(t) \cap \mathsf{VM}(\varphi) = \emptyset$, então t é livre para qualquer variável em φ

Termo livre para variável numa fórmula

Exemplos

Seja $\varphi = \exists_y (M(x, y))$.

- Se $t = s(y)$ então t não é livre para x em φ.

  A substituição de x por t em φ leva à captura de y:
  Como $y \in \mathsf{Var}(t)$, t não é livre para x em $\exists_y (M(x, y))$
- Se $t = s(x)$ ou mesmo $t = s(z)$ então t é livre para x em φ.

  Basta notar que $\{x, z\} \cap \mathsf{VM}(\varphi) = \emptyset$.
- Os termos $s(x)$, $s(y)$ e $s(z)$ são livre para y em φ.

Termo livre para variável numa fórmula

Voltando à questão motivadora:

Será que $(\forall_x \varphi) \to [\varphi]_t^x$ é fórmula válida?

Sim, desde que t seja livre para x em φ.

Exemplo:

$$(\forall_x \exists_y Maior(y,x)) \to [\exists_y Maior(y,x)]_t^x$$

Se não tivéssemos a restrição, podíamos tomar $t = y$:

$$(\forall_x \exists_y Maior(y,x)) \to \exists_y Maior(y,y)$$

Exemplo: $\varphi = \exists_y \, (M(x, y)) \wedge \forall_z (R(f(x), y, z))$

- $\mathsf{VL}(\varphi) = ?$
- $\mathsf{VM}(\varphi) = ?$
- $\mathsf{Var}(\varphi) = ?$
- Exemplos de termos livres para x em φ?
- Exemplos de termos livres para y em φ?
- Exemplos de termos livres para z em φ?
- Exemplos de termos que não são livres para x em φ?
- Exemplos de termos que não são livres para y em φ?
- Exemplos de termos que não são livres para z em φ?