Lógica Computacional

Aula Teórica 4: Tabelas de verdade, Consequência semântica

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

22 de setembro de 2023

Análise combinatória de fórmulas

- A satisfação de uma fórmula $\varphi \in F_P$ por uma valoração V depende apenas do valor que V atribui a cada $p \in \mathrm{sProp}(\varphi)$.
- Pode-se determinar a natureza de dada fórmula (possível, contraditória ou válida) analisando todas as possíveis atribuições de valor aos seus símbolos proposicionais.
- Apesar de V ser uma aplicação com domínio infinito (o conjunto P pode ser infinito), cada fórmula é uma sequência finitas de símbolos e portanto só tem de um número finito de símbolos proposicionais
- Duas valorações V_1 e V_2 que atribuam os mesmos valores aos símbolos proposicionais de uma fórmula φ, atribuem o mesmo valor de verdade a φ.
- Logo, a análise exaustiva das possíveis valorações para os símbolos de uma dada fórmula permite decidir a sua natureza.

Lema dos símbolos omissos

Lema dos símbolos omissos

Seja $\varphi \in F_P$ e considerem-se duas valorações V_1 e V_2. Se para cada $p \in \mathrm{sProp}(\varphi)$ se tem $V_1(p) = V_2(p)$, então $V_1(\varphi) = V_2(\varphi)$.

Prova por indução estrutural

- Casos base: φ é uma fórmula atómica.
  Se $\varphi = \perp$, então $V_1(\perp) = V_2(\perp) = 0$.
  Se $\varphi = p$, com $p \in P$. Por hipótese, temos $V_1(p) = V_2(p)$, pois $p \in \mathrm{sProp}(\varphi)$.
- Passo: φ é uma fórmula não atómica.
  Caso $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ (os outros são semelhantes).

$$\begin{aligned}
V_1(\varphi) = V_1(\varphi_1 \vee \varphi_2) &= \text{(por definição)} \\
V_1(\varphi_1) \oplus V_1(\varphi_2) &= \text{(por hipótese de indução)} \\
V_2(\varphi_1) \oplus V_2(\varphi_2) &= \text{(por definição)} \\
V_2(\varphi_1 \vee \varphi_2) &= V_2(\varphi)
\end{aligned}$$

Tabelas de verdade

Construção da tabela de verdade para φ

Linhas: todas as possíveis combinações de valores para os símbolos proposicionais de φ;

Colunas: uma coluna para cada subfórmula de φ.

Disjunção, conjunção e implicação

Disjunção:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Conjunção:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Implicação:

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Negação e Equivalência

Negação:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Equivalência:

$$p \leftrightarrow q \overset{\text{abv}}{=} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Análise de fórmulas

Análise da natureza de fórmulas usando Tabelas de Verdade

- Fórmula **possível**: alguma linha da tabela tem 1.
- Fórmula **contraditória**: todas as linhas da tabela têm 0.
- Fórmula **válida**: todas as linhas da tabela têm 1.

Análise da validade de fórmulas

Tabela de $(p \wedge q) \to \perp$

p	q	$\perp$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to \perp$
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	1	0	1	0

Fórmula possível (não válida)

Coluna da fórmula tem 0's e 1's: há valorações que a satisfazem (possível), mas há uma que não a satisfaz (não é válida).

Na verdade não é necessário apresentar todas as linhas: basta uma com a coluna da fórmula a 1, para mostrar que é possível, e outra linha com 0 nessa coluna, para mostrar que não é válida.

Análise da validade de fórmulas

Tabela de $\varphi = (p \vee \neg p) \to \bot$

p	$\bot$	$\neg p$	$p \vee \neg p$	φ
0	0	1	1	0
1	0	0	1	0

Fórmula contraditória

Como a coluna da fórmula (a da direita) só tem 0's, nenhuma valoração a satisfaz.

Análise da validade de fórmulas

Tabela de $\bot \to (p \wedge q)$

p	q	$\bot$	$p \wedge q$	$\bot \to (p \wedge q)$
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	1	0	1	1

Fórmula válida

Como a coluna da fórmula (a da direita) só tem 1's, todas as valorações a satisfazem.

Construção da tabela de verdade

Para pensar...

- Se uma fórmula φ tem n símbolos proposicionais, quantas linhas terá a sua tabela de verdade?
- Como construir as possíveis combinações de valores sem enganar?

Exemplo

$\varphi = ((p \wedge (q \vee r)) \rightarrow q)$

Consequência semântica

Intuição

- Quer-se efectuar raciocínio entre asserções, de forma a retirar conclusões válidas a partir de hipóteses.
- Exemplo: se o metro se atrasar e não houver táxis na estação, o Pedro chega tarde. O Pedro não chegou tarde, mas o metro atrasou-se. Logo, havia táxis na estação.
- Formalização:
  - p: metro atrasa; q: taxis na estação; r: Pedro chega tarde
  - Hipótese 1: se p e não q então r, *i.e.*, $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$.
  - Hipótese 2: não r e p, *i.e.*, $\neg r \wedge p$.
  - Tese: q.
- Porque é que a Tese é consequência das Hipóteses?

Consequência semântica

Definição

Sejam $\Phi \subseteq F_P$ e $\varphi \in F_P$. Diz-se que φ é *consequência semântica* de Φ, o que se denota por $\Phi \models \varphi$, se para cada valoração V sobre P, se $V \Vdash \Phi$ então $V \Vdash \varphi$.

Exemplo

Quer-se provar que é válido o raciocínio:
"Se o metro se atrasar e não houver táxis na estação, o Pedro chega tarde. O Pedro não chegou tarde, mas o metro atrasou-se. Logo, havia táxis na estação."

Em lógica proposicional, trata-se de provar que
$\{(p \wedge \neg q) \to r, \neg r \wedge p\} \models q$.

Consequência semântica

Exemplo

Quer-se mostrar que $\{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \models q$ isto é, para todo o V tal que $V \Vdash \{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r \wedge p\}$ também $V \Vdash q$.

Seja V uma qualquer valoração tal que:
$V \Vdash (p \wedge \neg q) \rightarrow r$ e $V \Vdash \neg r \wedge p$.
De $V \Vdash \neg r \wedge p$ temos que:

$$V(\neg r \wedge p) =$$
$$V(\neg r) \otimes V(p) =$$
$$(\ominus V(r)) \otimes V(p) = 1$$

que se verifica se ambos os argumentos da multiplicação são 1, ou seja, se $V(r) = 0$ e $V(p) = 1$.

Consequência semântica

Continuação do exemplo

Como $V \Vdash (p \wedge \neg q) \rightarrow r$, temos que $V((p \wedge \neg q) \rightarrow r) = 1$

$$\begin{aligned} V((p \wedge \neg q) \rightarrow r) &= \\ (\ominus V(p \wedge \neg q)) \oplus V(r) &= \\ (\ominus(V(p) \otimes V(\neg q))) \oplus V(r) &= \\ (\ominus(1 \otimes V(\neg q))) \oplus 0 &= \\ (\ominus V(\neg q)) \oplus 0 &= \\ (\ominus V(\neg q)) &= \\ (\ominus(\ominus V(q))) &= \\ V(q) &= 1 \end{aligned}$$

Logo $\{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, \neg r \wedge p\} \models q$.

Consequência semântica: o caso da contradição

Conjuntos contraditórios permitem qualquer conclusão

Se nenhuma valoração V satisfaz Φ, *vacuosamente* $\Phi \models \varphi$.

Proposição

Se um conjunto de fórmulas Φ é contraditório então, para qualquer fórmula φ, tem-se que $\Phi \models \varphi$.

Exemplo: $\{p, \neg p\} \models \bot$

Não existe nenhum V que satisfaça simultaneamente p e $\neg p$ (porque V é uma função).

Logo, para qualquer V tal que $V \Vdash \{p, \neg p\}$ (que não existe) também $V \Vdash \bot$, portanto $\{p, \neg p\} \models \bot$

Provar ou refutar?

Estratégia

Quer-se provar ou refutar uma afirmação de consequência semântica. Como fazer?

1. Verifica-se primeiro se é falsa: existe valoração que satisfaz o antecedente mas não satisfaz o consequente? Se existir temos um contra-exemplo, e não há consequência semântica.
2. Se não se encontra um contra-exemplo, faz-se a prova.

$\{p \to q, r \to s, r \vee s\} \models p \vee q$?

Considere-se V tal que $V(p) = 0 = V(q) = V(r)$ e $V(s) = 1$.

Então $V \Vdash p \to q$, $V \Vdash r \to s$ e $V \Vdash r \vee s$, ou seja, $V \Vdash \{p \to q, r \to s, r \vee s\}$.

No entanto, $V \nVdash p \vee q$, logo $\{p \to q, r \to s, r \vee s\} \not\models p \vee q$.

Provar por absurdo

$\{(\varphi \wedge \psi) \to \delta, \gamma \to \varphi\} \models \psi \to (\gamma \to \delta)$?

Considera-se por hipótese que para algum V se tem que

1. $V \Vdash \{(\varphi \wedge \psi) \to \delta, \gamma \to \varphi\}$, mas que
2. $V \nVdash \psi \to (\gamma \to \delta)$. De 1 obtém-se:
3. $V \Vdash (\varphi \wedge \psi) \to \delta$ e
4. $V \Vdash \gamma \to \varphi$. De 2 obtém-se:
5. $V \Vdash \psi$ e $V \nVdash \gamma \to \delta$, ou seja
6. $V \Vdash \gamma$ e
7. $V \nVdash \delta$. De 4 e de 6 obtém-se:
8. $V \Vdash \varphi$. De 3, 5 e de 8 obtém-se:
9. $V \Vdash \delta$, o que está em contradição com 7. Logo, $\{(\varphi \wedge \psi) \to \delta, \gamma \to \varphi\} \models \psi \to (\gamma \to \delta)$.

Consequência semântica VS implicação

Metateorema da Dedução

$$\{\varphi\} \models \psi \text{ se e só se } \models \varphi \to \psi$$

Prova

Mostra-se primeiro que se $\{\varphi\} \models \psi$ então $\models \varphi \to \psi$.

Hipótese: $\{\varphi\} \models \psi$ — para qualquer V se $V \Vdash \varphi$ então $V \Vdash \psi$;
Mostrar: $\models \varphi \to \psi$ — qualquer V é tal que $V(\varphi \to \psi) = 1$.
Seja V qualquer valoração. Há dois casos possíveis:
Se $V(\varphi) = 0$, então $V(\varphi \to \psi) = (\ominus V(\varphi)) \oplus V(\psi) = 1$.

Se $V(\varphi) = 1$, então $V \Vdash \varphi$ e por hipótese temos que $V \Vdash \psi$.
Logo $V(\psi) = 1$, e portanto $V(\varphi \to \psi) = (\ominus V(\varphi)) \oplus V(\psi) = 1$.

Nos dois casos concluímos $V(\varphi \to \psi) = 1$, logo $\models \varphi \to \psi$.

Mostra-se que $\models \varphi \to \psi$ implica $\{\varphi\} \models \psi$ de forma semelhante.

Consequência semântica VS implicação

Metateorema da dedução generalizado

Seja $n \in \mathbb{N}$. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$ se e só se $\models (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$

Exercício

Adaptar a prova no slide anterior a este caso.

Algumas leis da lógica proposicional

Mais algumas propriedades da consequência semântica

1. $\{\bot\} \models \varphi$
2. $\{\varphi \wedge \psi\} \models \varphi$ e $\{\varphi \wedge \psi\} \models \psi$
3. $\{\varphi\} \models \varphi \vee \psi$ e $\{\psi\} \models \varphi \vee \psi$

Prova

1. $\{\bot\} \models \varphi$ vacuosamente, pois $\{\bot\}$ é um conjunto contraditório
2. Seja V tal que $V \Vdash \{\varphi \wedge \psi\}$, ou seja, $V(\varphi \wedge \psi) = 1$.
   Mas, $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \otimes V(\psi) = 1$.
   Logo $V(\varphi) = V(\psi) = 1$. Temos então que $V \Vdash \varphi$ e $V \Vdash \psi$;
   Logo $\{\varphi \wedge \psi\} \models \varphi$ e $\{\varphi \wedge \psi\} \models \psi$
3. Seja V tal que $V \Vdash \{\varphi\}$; logo $V \Vdash \varphi$, ou seja, $V(\varphi) = 1$, e tem-se também que $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \oplus V(\psi) = 1$, *i.e.*, $V \Vdash \varphi \vee \psi$; então $\{\varphi\} \models \varphi \vee \psi$
   O outro caso prova-se de forma semelhante.

A consequência semântica é uma pré-ordem

Pré-ordem

Uma relação é uma *pré-ordem* se for reflexiva e transitiva.

Reflexividade da consequência semântica

Trivialmente, a consequência semântica é reflexiva, isto é, $\{\varphi\} \models \varphi$.

Transitividade da consequência semântica

Se $\{\varphi\} \models \psi$ e $\{\psi\} \models \gamma$ então $\{\varphi\} \models \gamma$

Prova:

Por hipótese, $\{\varphi\} \models \psi$ e $\{\psi\} \models \gamma$. Queremos mostrar $\{\varphi\} \models \gamma$.
Seja V tal que $V \Vdash \varphi$.
Como por hipótese $\{\varphi\} \models \psi$, temos também que $V \Vdash \psi$; como por hipótese $\{\psi\} \models \gamma$, temos também $V \Vdash \gamma$.
Logo, sempre que $V \Vdash \varphi$ também $V \Vdash \gamma$, ou seja, $\{\varphi\} \models \gamma$.