

# Lógica Computacional

## Aula Teórica 9

### Resolução proposicional: Propriedades e estratégias de prova

Ricardo Gonçalves

Departamento de Informática

13 de outubro de 2023

# Correcção e Completude da Resolução

## Teorema da Correção e Completude da Resolução

Dada  $\varphi \in F_P$  com  $\text{FNC}(\varphi)$ , então:

$\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$  se e só se  $\varphi$  é contraditória



resolvente da fórmula toda

# Verificação de natureza da fórmula

Qual a natureza de  $\varphi \in F_P$ ?

- 1 Colocar na FNC
- 2 Aplicar Lema das disjunções para verificar se é válida
- 3 Se não for válida, usar Resolução para verificar se é possível ou contraditória

# Resolução e Validade

## Objetivo do algoritmo de Resolução

Verificar se uma dada fórmula é contraditória ou não.

## Resolução para verificar validade

Podemos usar Resolução para verificar a validade de fórmula?

## Proposição

$\varphi$  é válida   se e só se    $\neg\varphi$  é contraditória

## Corolário

Dada uma fórmula  $\varphi \in F_P$ , tem-se que:

$\varphi$  é válida   se e só se    $\emptyset \in \text{Res}^*(\neg\varphi)$

# Resolução e Consequência Semântica

## Resolução para verificar Consequência Semântica

Podemos usar Resolução para verificar Consequência Semântica?

## Proposição

$\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \models \varphi$  se e só se  $(\bigwedge_{i=1}^n \psi_i) \wedge (\neg \varphi)$  é contraditória

## Corolário

Dadas fórmulas  $\psi_1, \dots, \psi_n, \varphi \in F_P$ , tem-se que:

$\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \models \varphi$  se e só se  $\emptyset \in \text{Res}^*((\bigwedge_{i=1}^n \psi_i) \wedge (\neg \varphi))$

# Objectivo

## Procedimento automático

- Pretende-se encontrar formas de implementar o método de resolução, de forma a que seja mais eficiente.
- No caso de uma fórmula  $\varphi$  ser contraditória:
  - não queremos ter de calcular todo o conjunto  $Res^*(\varphi)$
  - queremos uma prova simples que mostre que  $\emptyset \in Res^*(\varphi)$
  - com que ordem calculamos os resolventes de forma a obter  $\emptyset$ ?
  - estratégias ad-hoc não são (necessariamente) eficientes

# Sistemas de prova

## Sistema de prova

Um sistema de prova sobre  $F_P$  é um conjunto de regras de inferência.

## Prova formal ou derivação

Dado um sistema de prova sobre  $F_P$ , uma prova formal ou derivação de uma fórmula  $\varphi$  a partir de um conjunto de fórmulas  $\mathcal{C}$  é uma sequência finita de fórmulas de  $F_P$  tal que:

- o último elemento da sequência é  $\varphi$
- cada elemento da sequência é:
  - um elemento de  $\mathcal{C}$  ou
  - obtido de anteriores usando uma das regras de inferência

# Resolução

## Sistema $\mathcal{R}$

$\emptyset$  pode ser derivado no Sistema  $\mathcal{R}$  a partir de um conjunto  $\mathcal{C}$  de cláusulas se existir uma sequência finita de cláusulas tal que:

- a última cláusula da sequência é  $\emptyset$
- cada cláusula da sequência é:
  - uma cláusula de  $\mathcal{C}$  ou
  - obtido de duas cláusulas anteriores usando Resolução

A sequência é uma prova no Sistema  $\mathcal{R}$  de  $\emptyset$  a partir de  $\mathcal{C}$ .  
É também chamada uma *refutação* por Resolução de  $\mathcal{C}$ .

## Notas

- Em cada passo colocamos a justificação para esse passo
- Numeramos a sequência para ser mais fácil referir um elemento anterior



# Exemplo de prova por resolução

Seja  $\mathcal{C} = \{\{p, q, \neg r\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p\}, \{p, q, r\}\}$

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{p, q, \neg r\}$	$C_1$
2	$\{p, q, r\}$	$C_4$
3	$\{p, q\}$	Res: 1 e 2
4	$\{p, \neg q\}$	$C_2$
5	$\{p\}$	Res: 3 e 4
6	$\{\neg p\}$	$C_3$
7	$\emptyset$	Res: 5 e 6

# Resultados

## Teorema

Seja  $\varphi \in F_P$  tal que  $\text{FNC}(\varphi)$ .

Se existe uma prova no Sistema  $\mathcal{R}$  de  $\emptyset$  a partir do conjunto de cláusulas que representa  $\varphi$ , então  $\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$ .

## Aplicação

Pelo Teorema da Correção do algoritmo de Resolução, podemos mostrar que uma formula  $\varphi$  é contraditória fazendo uma prova no Sistema  $\mathcal{R}$  de  $\emptyset$  a partir do conjunto das cláusulas de  $\varphi$ .

## Corolário - Correção do Sistema $\mathcal{R}$

Seja  $\varphi \in F_P$  tal que  $\text{FNC}(\varphi)$ .

Se existe uma prova no Sistema  $\mathcal{R}$  de  $\emptyset$  a partir do conjunto de cláusulas que representa  $\varphi$ , então  $\varphi$  é contraditória.

# Estratégias de resolução

Com que ordem/estratégia aplicamos a regra da Resolução para derivar  $\emptyset$ ?

# Uma estratégia de Resolução

## Resolução Negativa

Diz-se que uma prova por Resolução segue a estratégia de Resolução Negativa ou Resolução-N, se em todas as aplicações da regra da Resolução nessa prova pelo uma das cláusulas só tem literais negativos.

# Exemplo de Resolução-N

$$\mathcal{C} = \{\{p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r\}, \{\neg s\}\}$$

## Resolução-N, solução 1

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{\neg r\}$	$C_4$
2	$\{\neg p, r\}$	$C_2$
3	$\{\neg p\}$	Res: 1 e 2
4	$\{p, q\}$	$C_1$
5	$\{q\}$	Res: 3 e 4
6	$\{\neg s\}$	$C_5$
7	$\{\neg q, s\}$	$C_3$
8	$\{\neg q\}$	Res: 6 e 7
9	$\emptyset$	Res: 5 e 8

## Outro exemplo de Resolução-N

$$\mathcal{C} = \{\{p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r\}, \{\neg s\}\}$$

### Resolução-N, solução 2

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{\neg s\}$	$C_5$
2	$\{\neg q, s\}$	$C_3$
3	$\{\neg q\}$	Res: 1 e 2
4	$\{\neg r\}$	$C_4$
5	$\{\neg p, r\}$	$C_2$
6	$\{\neg p\}$	Res: 4 e 5
7	$\{p, q\}$	$C_1$
8	$\{q\}$	Res: 6 e 7
9	$\emptyset$	Res: 3 e 8

# Propriedade da Resolução-N

## Teorema da Completude da Resolução-N

Seja  $\varphi \in F_P$  tal que  $\text{FNC}(\varphi)$ . Então,

$$\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$$

se e só se

$\emptyset$  pode ser derivado por Resolução-N a partir de  $\varphi$

## Outra estratégia de Resolução

### Resolução Linear

Diz-se que uma prova por Resolução segue a estratégia de Resolução Linear ou Resolução-L, se cada aplicações da regra da Resolução é aplicada ao resolvente obtido no passo anterior.



# Exemplo de Resolução-L

$$\mathcal{C} = \{\{p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r\}, \{\neg s\}\}$$

## Resolução-L, solução 1

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{\neg p, r\}$	$C_2$
2	$\{\neg r\}$	$C_4$
3	$\{\neg p\}$	Res: 1 e 2
4	$\{p, q\}$	$C_1$
5	$\{q\}$	Res: 3 e 4
6	$\{\neg q, s\}$	$C_3$
7	$\{s\}$	Res: 5 e 6
8	$\{\neg s\}$	$C_5$
9	$\emptyset$	Res: 7 e 8

## Exemplo de Resolução-L

$$\mathcal{C} = \{\{p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r\}, \{\neg s\}\}$$

### Resolução-L, solução 2

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{\neg q, s\}$	$C_3$
2	$\{\neg s\}$	$C_5$
3	$\{\neg q\}$	Res: 1 e 2
4	$\{p, q\}$	$C_1$
5	$\{p\}$	Res: 3 e 4
6	$\{\neg p, r\}$	$C_2$
7	$\{r\}$	Res: 5 e 6
8	$\{\neg r\}$	$C_4$
9	$\emptyset$	Res: 7 e 8

Este e a anterior são provas por Resolução-N?

# Propriedade da Resolução-L

## Teorema da Completude da Resolução-L

Seja  $\varphi \in F_P$  tal que  $\text{FNC}(\varphi)$ . Então,

$$\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$$

se e só se

$\emptyset$  pode ser derivado por Resolução-L a partir de  $\varphi$

# Resolução-LN

Será que podemos combinar as duas estratégias?

Podemos sempre fazer Resolução-LN ?

Exemplo:  $\mathcal{C} = \{\{p, q\}, \{\neg p, r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg s\}, \{\neg r\}\}$

## Resolução-LN?

Pela estratégia N temos de começar de  $C_4$  ou de  $C_5$ .

- Começando com  $C_4$ : juntamente com  $C_3$  obtém-se  $\{\neg q\}$ . Depois usamos  $C_1$  e obtemos  $\{p\}$ . Teríamos de usar  $C_2$ . Falha a estratégia N
- Começando com  $C_5$ : juntamente com  $C_2$  obtém-se  $\{\neg p\}$ . Depois usamos  $C_1$  e obtemos  $\{q\}$ . Teríamos de usar  $C_3$ . Falha a estratégia N

Por Resolução-LN não dá.

A estratégia LN não é universal!

# Fórmulas de Horn

## Recordar

Seja  $\varphi \in F_P$  tal que  $\text{FNC}(\varphi)$ . Se cada cláusula em  $\varphi$  contém no máximo um literal positivo, então  $\varphi$  diz-se uma fórmula de Horn.

## Teorema

Seja  $\varphi \in F_P$  tal que  $\text{FNC}(\varphi)$ . Se  $\varphi$  é uma fórmula de Horn então

$$\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$$

se e só se

$\emptyset$  pode ser derivado por Resolução-LN a partir de  $\varphi$

# Resolução-SLD

## Terminologia

- Cláusula só com literais negativos diz-se *objetivo*
- Cláusula só com um literal positivo diz-se *determinada*
- Na aplicação de Resolução-N temos de escolher, de uma cláusula objetivo, que literal negativo vai se usado para calcular o próximo resolvente
- Chama-se *função de seleção* a uma estratégia de escolha do literal negativo a usar
- A função de seleção deve ser *invariante* para qualquer função de substituição (não pode depender dos símbolos).

## Resolução-SLD

A Resolução-SLD (Linear e Determinada, com Selector) é a Resolução-LN com uma função de seleção.

# Exemplo de Resolução-SLD

A Resolução-SLD está na base da programação em lógica.

## Teorema

Seja  $\varphi \in F_P$  tal que  $\text{FNC}(\varphi)$ . Se  $\varphi$  é uma fórmula de Horn então

$$\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$$

se e só se

$\emptyset$  pode ser derivado por Resolução-SLD a partir de  $\varphi$

igual ao slide 21, em vez de Resolução-SLD está Resolução-LN  
( ver slide 20 que diz que uma é outra???)

## Exemplo de Resolução-SLD

$$\mathcal{C} = \{\{\neg p, s\}, \{p, \neg q\}, \{q\}, \{\neg r, \neg s\}, \{r, \neg t\}, \{t\}\}$$

É fórmula de Horn. Vamos usar Resolução-SLD com seletor “à direita” (selecionar o literal mais à direita):

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{\neg r, \underline{\neg s}\}$	$C_4$
2	$\{\neg p, s\}$	$C_1$
3	$\{\neg p, \underline{\neg r}\}$	Res: 1 e 2
4	$\{r, \neg t\}$	$C_5$
5	$\{\neg p, \underline{\neg t}\}$	Res: 3 e 4
6	$\{t\}$	$C_6$
7	$\{\underline{\neg p}\}$	Res: 5 e 6
8	$\{p, \neg q\}$	$C_2$
9	$\{\underline{\neg q}\}$	Res: 7 e 8
10	$\{q\}$	$C_3$
11	$\emptyset$	Res: 9 e 10



## Outro exemplo de Resolução-SLD

$$\mathcal{C} = \{\{\neg p, \neg q, t\}, \{p\}, \{\neg p, q\}, \{\neg t\}\}$$

É fórmula de Horn. Vamos usar Resolução-SLD com seletor “à esquerda” (selecionar o literal mais à esquerda):

Passo	Dedução	Justificação
1	$\{\underline{\neg t}\}$	$C_4$
2	$\{\neg p, \neg q, t\}$	$C_1$
3	$\{\underline{\neg p}, \neg q\}$	Res: 1 e 2
4	$\{p\}$	$C_2$
5	$\{\underline{\neg q}\}$	Res: 3 e 4
6	$\{\neg p, q\}$	$C_3$
7	$\{\underline{\neg p}\}$	Res: 5 e 6
8	$\{p\}$	$C_2$
9	$\emptyset$	Res: 7 e 8

# Verificação de natureza da fórmula

Qual a natureza de  $\varphi \in F_P$ ?

- ① Colocar na FNC
- ② Aplicar Lema das disjunções para verificar se é válida
- ③ Se não for válida, usar Resolução para verificar se é possível ou contraditória:
  - Se suspeitarmos que a fórmula é contraditória, podemos tentar usar o Sistema  $\mathcal{R}$ :
    - Se for fórmula de Horn usamos Resolução-SLD
    - Caso contrário podemos usar Resolução-N ou Resolução-L
  - Em caso de dúvida, podemos sempre calcular  $\text{Res}^*$

# Exercícios

Qual a natureza das seguintes fórmulas?

- $(p \rightarrow (r \wedge q)) \wedge ((s \wedge q) \rightarrow r) \wedge \neg(r \rightarrow p)$
- $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow (r \vee q))$