Probabilidades e Estatística D
Ano Lectivo 2023/2024
2º Teste - 22 de Maio de 2024

Grelha de respostas certas

Versão A

Grupo	1				2				3			
	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	d)	a)	b)i.	b)ii.	b)iii.
	C	A	B	B	C	A	A	C	B	A, C	B	B

Versão B

Grupo	1				2				3			
	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	d)	a)	b)i.	b)ii.	b)iii.
	A	B	C	A	B	C	C	A	C	B, D	A	D

Resolução abreviada do 2.º Teste

1. $N(t)$-n.º de clientes que chegam à loja em t minutos

   $\{N(t)\}_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ é um Processo de Poisson de taxa $\beta = 0.05$ clientes/minuto $\qquad N(t) \sim P(\beta t) \equiv P(0.05t)$

   (a) $N(30) \sim P(0.05 \times 30) \equiv P(1.5)$

   $P(N(30) \leq 1) = P(N(30) = 0) + P(N(30) = 0) = e^{-1.5}\dfrac{1.5^0}{0!} + e^{-1.5}\dfrac{1.5^1}{1!} = 2.5\, e^{-1.5}$

   (b) Seja T-tempo, em minutos, entre entradas consecutivas de clientes na loja $\qquad T \sim E(0, 1/\beta) \equiv E(0, 20)$

   $P(T > 30 \,|T > 10) = P(T > 20) = 1 - P(T \leq 20) = 1 - \left[1 - e^{-20/20}\right] = e^{-1}$

   (c) Considere as v.a.'s:
   T_1-tempo, em minutos, entre a chegada do 10.º e do 11.º clientes $\qquad T_1 \sim E(0, 20)$
   T_2-tempo, em minutos, entre a chegada do 11.º e do 12.º clientes $\qquad T_2 \sim E(0, 20)$

   $E(T_1) = E(T_2) = 20 \quad$ e $\quad E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 40$

   (d) $N(180) \sim P(0.05 \times 180) \equiv P(9)$

   Pelo T.L.C., $\dfrac{N(180) - 9}{\sqrt{9}} \equiv \dfrac{N(180) - 9}{3} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$

   $P(N(180) > 12) = 1 - P\left(\dfrac{N(180) - 9}{3} \leq \dfrac{12 - 9}{3}\right) \approx 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

2. $X \sim N\left(\delta - 1, \delta^2\right), \quad \delta \in \mathbb{R}^+$

   (a) $P(X \leq \delta) = 0.9772 \Leftrightarrow P\left(\dfrac{X - (\delta - 1)}{\delta} \leq \dfrac{\delta - (\delta - 1)}{\delta}\right) = 0.9772 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{1}{\delta}\right) = 0.9772 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\delta} = 2 \Leftrightarrow \delta = \dfrac{1}{2}$

   (b) $X \sim N(0, 1)$ independente de $Z \sim N(0, 1)$

   Seja $D = X - Z \sim N(0 + 0, 1 + 1) \equiv N(0, 2)$ porque X e Z são v.a.'s independentes e ambas com distribuição Normal

   $P\left(X > Z + \sqrt{2}\right) = P\left(X - Z > \sqrt{2}\right) = P\left(D > \sqrt{2}\right) = P\left(\dfrac{D}{\sqrt{2}} > \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) =$

   $= P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

   (c) $Z \sim N(0, 1)$ e $W \sim U(0, 2)$ são v.a.'s independentes

   $P(Z \leq 1.96) = 0.975$ e $P(W \leq 1) = \dfrac{1 - 0}{2 - 0} = \dfrac{1}{2}$

   $P[(Z \leq 1.96) \cap (W \leq 1)] = P(Z \leq 1.96) \times P(W \leq 1) = 0.4875$

(d) Como $\overline{X}=\frac{1}{35}\sum_{i=1}^{35}X_i$ é uma combinação linear de v.a.'s independentes e todas com distribuição Normal, então $\overline{X}$ tem distribuição Normal.

Por sua vez: $E\left(\overline{X}\right)=\frac{1}{35}\sum_{i=1}^{35}E\left(X_i\right)=\frac{1}{35}\sum_{i=1}^{35}(\delta-1)=\delta-1$ e

$V\left(\overline{X}\right)=\frac{1}{35^2}\sum_{i=1}^{35}V\left(X_i\right)=\frac{1}{35^2}\sum_{i=1}^{35}\delta^2=\frac{\delta^2}{35}$

Assim $\frac{\overline{X}-(\delta-1)}{\sqrt{\delta^2/35^2}}\equiv\frac{\overline{X}-\delta+1}{\delta/\sqrt{35}}\sim N(0,1)$

3. (a) $\begin{cases} E(X)=\overline{X} \\ V(X)=M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\theta}{2}=\overline{X} \\ \frac{\theta^2}{4(2\beta+1)}=M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta=2\overline{X} \\ \frac{4\overline{X}^2}{4(2\beta+1)}=M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta=2\overline{X} \\ \beta=\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{X}^2}{M_2}-1\right) \end{cases}$

$\theta^*=2\overline{X}$ e $\beta^*=\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{X}^2}{M_2}-1\right)$

(b) $\beta=1$

i. $E\left(2\overline{X}\right)=2E\left(\overline{X}\right)=2E(X)=2\frac{\theta}{2}=\theta$ $\quad 2\overline{X}$ é estatística centrada para o parâmetro θ

$E\left(\frac{n+1}{n}N_n\right)=\frac{n+1}{n}E\left(N_n\right)=\frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1}\theta=\theta$ $\quad \frac{n+1}{n}N_n$ é estatística centrada para o parâmetro θ

ii. $V\left(\hat{\theta}\right)=V\left(2\overline{X}\right)=2^2V\left(\overline{X}\right)=4\frac{V(X)}{n}=4\frac{\theta^2}{12n}=\frac{\theta^2}{3n}$

$V\left(\tilde{\theta}\right)=V\left(\frac{n+1}{n}N_n\right)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2V\left(N_n\right)=\theta^2\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$

Como os dois estimadores são centrados, o mais eficiente é o que tiver menor variância. Para $n\geq 2$, $n+2>3$. Assim $\tilde{\theta}$ é o estimador mais eficiente

iii. $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$, $\quad V\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\theta^2}{3n}$

Pelo T.L.C., para $\theta=-1$ e $n=1200$ $\quad \frac{\hat{\theta}-E\left(\hat{\theta}\right)}{\sqrt{V\left(\hat{\theta}\right)}}\equiv 60\left(\hat{\theta}+1\right)\overset{a}{\sim}N(0,1)$

$P\left(\left|\hat{\theta}+1\right|>0.02\right)=P\left(\left|60\left(\hat{\theta}+1\right)\right|>60\times 0.02\right)\approx P(|Z|>1.2)=2P(Z>1.2)=$

$=2\left[1-P(Z\leq 1.2)\right]=2(1-0.8849)=0.2302$