Grelha de respostas certas

Versão A

Grupo	1	2		3						4				5
		a)	b)	a)	b)	c)	d)	e)	f)	a)i.	a)ii.	b)i.	b)ii.	
	C	D	B	B	C	B	A	F	A	C	B	D	D	C

Versão B

Grupo	1	2		3						4				5
		a)	b)	a)	b)	c)	d)	e)	f)	a)i.	a)ii.	b)i.	b)ii.	
	A	E	B	C	D	A	E	F	C	B	C	C	E	A

Resolução abreviada do 1º Teste

Versão A

1. Admita que A e B são dois acontecimentos independentes de um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, que $P(A) = \frac{1}{2}$ e que $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Considere as seguintes afirmações:

$$(1)\ \ P(B) = \frac{1}{3} \qquad\qquad (2)\ \ P(A|B) = \frac{1}{2}$$

Qual ou quais as afirmação(ões) correta(s)?

[A] Apenas a afirmação (1) [B] Apenas a firmação (2) [C] Ambas as afirmações [D] n.o.

---

(1) Pela independência dos acontecimentos, $P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{1}{2}P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{2}P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

(2) $P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}$

(1.6) 2. Uma empresa farmacêutica fez um ensaio clínico para avaliar a eficácia dos medicamentos A, B e C para o tratamento da obesidade. Os três medicamentos foram administrados respetivemente a 30%, 30% e 40% dos doentes, tendo cada um recebido apenas um dos medicamentos. No final do estudo, 75% dos doentes perderam peso. Sabe-se ainda que 90% dos doentes que tomaram o medicamento A perderam peso, e a correspondente percentagem para o medicamento B é 80%.
Seleccionado ao acaso um doente de entre os que realizaram este ensaio clínico:

(1.6) (a) Qual a probabilidade de um doente, que recebeu o medicamento C, perder peso?

[A] 0.3 [B] 0.4 [C] 0.5 [D] 0.6 [E] 0.7 [F] n.o.

(1.6) (b) Qual a probabilidade de um doente, que perdeu peso, ter recebido o medicamento A?

[A] 0.17 [B] 0.36 [C] 0.33 [D] 0.27 [E] 0.9 [F] n.o.

Considerem-se os acontecimentos:
A, B, C - a um doente ter sido administrado o tratamento A, B, C, respectivamente
L - um doente perder peso no final do estudo

$P(A) = 0.3 \quad P(B) = 0.3 \quad P(C) = 0.4$
$P(L|A) = 0.9 \qquad P(L|B) = 0.8 \qquad P(L) = 0.75$

(a) $P(L) = P(L|A)P(A) + P(L|B)P(B) + P(L|C)P(C) \Leftrightarrow$
$0.75 = 0.51 + 0.4\,P(L|C) \Leftrightarrow P(L|C) = 0.6$

(b) $P(A|L) = \dfrac{P(L \cap A)}{P(L)} = \dfrac{P(L|A)P(A)}{P(L)} = \dfrac{0.9 \times 0.3}{0.75} = 0.36$

---

3. Considere (X, Y) um par aleatório com a seguinte função de probabilidade conjunta:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	0.2	0	0.2
0	0	0.2	0
1	p	0	$0.4-p$

com $p \in]0, 0.4[$

(1.4) (a) O valor de $P(X+Y<0)$ é:

A $0.4-p$ B 0.2 C $0.4+p$ D 0.4 E 1 F n.o.

(1.4) (b) O valor de $V(X+1)$ é:

A $p(1-p)$ B 0.5 C 0.8 D 1.8 E $1.8+p$ F n.o.

(1.4) (c) Se $E(X+Y) = 0.2$, então:

A $p=0$ B $p=0.1$ C $p=0.2$ D $p=0.3$ E $p=0.4$ F n.o.

(1.4) (d) Assuma que $p = 0.2$. A covariância entre X e Y tem valor:

A 0 B 0.1 C 0.2 D 0.3 E 0.4 F n.o.

(1.0) (e) Indique o valor lógico da afirmação: X e Y são duas variáveis independentes.

☐ Verdadeira ☐ Falsa

(1.4) (f) Assuma $p = 0.2$ e considere a v.a. $M = \max(X, Y)$. A função de probabilidade da v.a. M é:

A $M \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{array} \right.$ B $M \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{array} \right.$ C $M \left\{ \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{array} \right.$

D $M \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{array} \right.$ E $M \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{array} \right.$ F n.o.

$X \setminus Y$	-1	0	1	
-1	0.2	0	0.2	0.4
0	0	0.2	0	0.2
1	p	0	$0.4-p$	0.4
	$0.2+p$	0.2	$0.6-p$	1

(a) $P(X+Y<0) = P(X=-1; Y=-1) + P(X=-1; Y=0) + P(X=0; Y=-1) = 0.2$

(b) $E(X) = 0 \qquad E(X^2) = 0.8 \qquad V(X) = 0.8 \qquad V(X+1) = V(X) = 0.8$

(c) $E(Y) = -0.2 - p + 0.6 - p = 0.4 - 2p$
$E(X+Y) = 0.2 \Leftrightarrow E(X) + E(Y) = 0.2 \Leftrightarrow 0.4 - 2p = 0.2 \Leftrightarrow p = 0.1$

(d) $E(X) = 0 \quad E(Y) = 0 \quad E(XY) = 0 \quad cov(X,Y) = 0$

(e) X e Y serão v.a.'s independentes sse
$P(X=x; Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y),\ \ x = -1, 0, 1\ ;\ y = -1, 0, 1$

Como $P(X=-1; Y=0) = 0$ e $P(X=-1)\,P(Y=0) = 0.4 \times 0.2$, concluímos que X e Y não são v.a.'s independentes.

(f) $M = \max(X,Y) \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{array} \right.$

---

4. Uma caixa contém 8 dados azuis e 12 dados vermelhos.

(a) Numa selecção ao acaso e sem reposição de 4 dados,

(1.5) i. o n.º de dados vermelhos obtidos tem distribuição:

A $B(4, 0.6)$ B $H(12, 8, 4)$ C $H(20, 12, 4)$ D $B(12, 0.5)$ E $H(20, 4, 8)$ F n.o.

(1.5) ii. A probabilidade de vir a ser seleccionado um dado azul tem valor (arredondado com 4 casas decimais):

A 0.0646 B 0.3633 C 0.1536 D 0.1387 E 0.3456 F n.o.

(b) Numa selecção ao acaso e com reposição de 5 dados, considere o n.º X de dados azuis obtidos:

(1.5) i. a probabilidade de serem obtidos mais de 4 dados azuis tem valor (arredondado com 4 casas decimais):

A 0.8925 B 0.8911 C 0.8448 D 0.0102 E 0.1648 F n.o.

(1.5) ii. a probabilidade da v.a. X assumir valores no intervalo $]E(X) - 1.5\sigma(X)\ ,\ E(X) + 1.5\sigma(X)[$ tem valor:

A 0.8925 B 0.8911 C 0.8448 D 0.8352 E 0.1648 F n.o.

(a) Seja Y - n.º de dados vermelhos obtidos após uma selecção casual e sem reposição de 4 dados.

i. $Y \sim H(20, 12, 4)$

ii. $P(Y = 3) = \frac{\binom{12}{3}\binom{8}{1}}{\binom{20}{4}} = 0.363261093$

(b) Seja X - n.º de dados azuis obtidos após 5 lançamentos independentes do dado.

$X \sim B\left(5, \frac{8}{20}\right) \equiv B(5, 0.4)$

i. $P(X > 4) = P(X = 5) = \binom{5}{5}0.4^5 = 0.01024$

ii. $E(X) = 5 \times 0.4 = 2 \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5 \times 0.4 \times 0.6} \approx 1.095$

$$P(X \in]E(X) - 1.5\sigma(X), E(X) + 1.5\sigma(X)[) = P(0.356832327 < X < 3.643167673) =$$

$$= P(1 \leq X \leq 3) = \sum_{k=1}^{3} P(X = k) = \sum_{k=1}^{3} \binom{5}{k} 0.4^k (1 - 0.4)^{5-k} = 0.8352$$

(1.2) 5. Sejam A e B acontecimentos de um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sabendo que A e B são acontecimentos mutuamente exclusivos, que $A \neq \bar{B}$, que $P(A) > 0$ e que $P(B) > 0$. Indique qual a opção correta:

A $P(A \cup B) = P(A \cap B)$ B $P(A \cup B) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$ C $P(A) \leq P(\overline{B})$

D $P(A) - P(B) = P(\overline{A}) - P(\overline{B})$ E n.o.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) > 0 \quad$ e $\quad P(A \cap B) = 0$ Falsa
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) > 0 \quad$ e $\quad P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 \quad$ Porque $A \neq \overline{B}$ Falsa
- $P(A) + P(B) < 1 \Leftrightarrow P(A) < 1 - P(B) \Leftrightarrow P(A) < P\left(\overline{B}\right)$

  $P(A) < P\left(\overline{B}\right)$ implica que a afirmação $P(A) \leq P\left(\overline{B}\right)$ é Verdadeira
- $P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(A) - 1 + P(B) = P(A) + P(B)$ Falsa

---

Resolução abreviada do 1º Teste

Versão B

(1.6) 1. Admita que A e B são dois acontecimentos independentes de um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, que $P(B) = \frac{1}{3}$ e que $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Considere as seguintes afirmações:

$$(1)\ \ P(A) = \frac{1}{4} \qquad\qquad (2)\ \ P(B|A) = \frac{1}{3}$$

Qual ou quais as afirmação(ões) correta(s)?

A Ambas as afirmações B Apenas a firmação (1) C Apenas a afirmação (2) D n.o.

---

(1) Pela independência dos acontecimentos, $P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{1}{3}P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = P(A) + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}P(A) \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$

(2) $P(B\,|A) = P(B) = \frac{1}{3}$

---

2. Uma empresa farmacêutica fez um ensaio clínico para avaliar a eficácia dos medicamentos A, B e C para o tratamento da obesidade. Os três medicamentos foram administrados respetivemente a 50%, 25% e 25% dos doentes, tendo cada um recebido apenas um dos medicamentos. No final do estudo, 80% dos doentes perderam peso. Sabe-se ainda que 80% dos doentes que tomaram o medicamento B perderam peso, e a correspondente percentagem para o medicamento C é 90%.
Seleccionado ao acaso um doente de entre os que realizaram este ensaio clínico:

(1.6) (a) Qual a probabilidade de um doente, que recebeu o medicamento A, perder peso?

A 0.375 B 0.125 C 0.425 D 0.36 E 0.75 F n.o.

(1.6) (b) Qual a probabilidade de um doente, que perdeu peso, ter recebido o medicamento C?

A 0.375 B 0.28125 C 0.9 D 0.225 E 0.2 F n.o.

Considerem-se os acontecimentos:
A, B, C - a um doente ter sido administrado o tratamento A, B, C, respectivamente
L - um doente perder peso no final do estudo

$P(A) = 0.5 \quad P(B) = 0.25 \quad P(C) = 0.25$
$P(L\,|B) = 0.8 \qquad P(L\,|C) = 0.9 \qquad P(L) = 0.8$

(a) $P(L) = P(L\,|A)\,P(A) + P(L\,|B)\,P(B) + P(L\,|C)\,P(C) \Leftrightarrow$
$0.8 = 0.425 + 0.5\,P(L\,|A) \Leftrightarrow P(L\,|A) = 0.75$

(b) $P(C\,|L) = \dfrac{P(L \cap C)}{P(L)} = \dfrac{P(L\,|C)\,P(C)}{P(L)} = \dfrac{0.9 \times 0.25}{0.8} = 0.28125$

---

3. Considere (X, Y) um par aleatório com a seguinte função de probabilidade conjunta:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	0.2	0	p
0	0	0.2	0
1	0.2	0	$0.4 - p$

com $p \in\,]0, 0.4[$

(1.4) (a) O valor de $P(X + Y \geq 0)$ é:

A 0.4 B 1 C 0.8 D $p + 0.2$ E 0.2 F n.o.

(1.4) (b) O valor de $V(2+Y)$ é:

A 2.8 B $p(1-p)$ C 3.2 D 0.8 E $2.8+p$ F n.o.

(1.4) (c) Se $E(X-Y)=0$, então:

A $p=0.2$ B $p=0.3$ C $p=0.4$ D $p=0.25$ E $p=0.1$ F n.o.

(1.4) (d) Assuma que $p=0.2$. A covariância entre X e Y tem valor:

A 0.2 B -0.1 C 0.3 D -0.2 E 0 F n.o.

(1.0) (e) Indique o valor lógico da afirmação: X e Y são duas variáveis independentes.

☐ Verdadeira ☐ Falsa

(1.4) (f) Assuma $p=0.1$ e considere a v.a. $M=\max(X,Y)$. A função de probabilidade da v.a. M é:

A $M\left\{\begin{array}{ccc}-1 & 0 & 1\\ 0.2 & 0.6 & 0.2\end{array}\right.$ B $M\left\{\begin{array}{cc}0 & 1\\ 0.4 & 0.6\end{array}\right.$ C $M\left\{\begin{array}{ccc}-1 & 0 & 1\\ 0.2 & 0.2 & 0.6\end{array}\right.$

D $M\left\{\begin{array}{cc}-1 & 1\\ 0.4 & 0.6\end{array}\right.$ E $M\left\{\begin{array}{ccc}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0.6 & 0.4\end{array}\right.$ F n.o.

$X \setminus Y$	-1	0	1	
-1	0.2	0	p	$0.2+p$
0	0	0.2	0	0.2
1	0.2	0	$0.4-p$	$0.6-p$
	0.4	0.2	0.4	1

(a) $P(X+Y\geq 0)=1-P(X+Y<0)=1-P(X=-1;Y=-1)-P(X=-1;Y=0)=1-0.2=0.8$

(b) $E(Y)=0 \quad E(Y^2)=0.8 \quad V(Y)=0.8 \quad V(2+Y)=V(Y)=0.8$

(c) $E(X)=-0.2-p+0.6-p=0.4-2p$
$E(X-Y)=0 \Leftrightarrow E(X)-E(Y)=0 \Leftrightarrow 0.4-2p=0 \Leftrightarrow p=0.2$

(d) $E(X)=0 \quad E(Y)=0 \quad E(XY)=0.2-p-0.2+0.4-p=0.4-2p=0 \quad cov(X,Y)=0$

(e) X e Y serão v.a.'s independentes sse
$P(X=x;Y=y)=P(X=x)\,P(Y=y)\,,\ \ x=-1,0,1\ ;\ y=-1,0,1$

Como $P(X=0;Y1)=0$ e $P(X=0)\,P(Y=1)=0.2\times 0.4$, concluímos que X e Y não são v.a.'s independentes.

(f) $M=\max(X,Y)\left\{\begin{array}{ccc}-1 & 0 & 1\\ 0.2 & 0.2 & 0.6\end{array}\right.$

---

4. Uma caixa contém 12 dados azuis e 8 dados vermelhos.

(a) Numa selecção ao acaso e sem reposição de 5 dados,

(1.5) i. o n.º de dados azuis obtidos tem distribuição:

A $H(12,8,5)$ B $H(20,12,5)$ C $B(5,0.6)$ D $H(20,5,12)$ E $B(12,0.5)$ F n.o.

(1.5) ii. A probabilidade de vir a ser seleccionado um dado vermelho tem valor (arredondado com 4 casas decimais):

A 0.0542 B 0.0768 C 0.2554 D 0.3456 E 0.1208 F n.o.

(b) Numa selecção ao acaso e com reposição de 4 dados, considere o n.º X de dados vermelhos obtidos:

(1.5) i. a probabilidade de serem obtidos mais de 3 dados vermelhos tem valor (arredondado com 4 casas decimais):

A 0.1296 B 0.4752 C 0.0256 D 0.0473 E 0.1022 F n.o.

(1.5) ii. a probabilidade da v.a. X assumir valores no intervalo $]E(X) - 1.5\sigma(X)\ ,\ E(X) + 1.5\sigma(X)[$ tem valor:

A 0.7447 B 0.1552 C 0.8925 D 0.8592 E 0.8448 F n.o.

(a) Seja Y - n.º de dados azuis obtidos após uma selecção casual e sem reposição de 5 dados.

i. $Y \sim H(20, 12, 5)$

ii. $P(Y=4) = \dfrac{\binom{12}{4}\binom{8}{1}}{\binom{20}{5}} = 0.255417957$

(b) Seja X - n.º de dados vermelhos obtidos após 4 lançamentos independentes do dado.

$X \sim B\left(4, \frac{8}{20}\right) \equiv B(4, 0.4)$

i. $P(X>3) = P(X=4) = \binom{4}{4}0.4^4 = 0.0256$

ii. $E(X) = 4 \times 0.4 = 1.6 \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4 \times 0.4 \times 0.6} = \sqrt{0.96} \approx 0.98$

$$P(X \in]E(X) - 1.5\sigma(X), E(X) + 1.5\sigma(X)[) = P(0.13 < X < 3.07) =$$

$$= P(1 \le X \le 2) = \sum_{k=1}^{2} P(X=k) = \sum_{k=1}^{2} \binom{4}{k} 0.4^k (1-0.4)^{4-k} = 0.8448$$

(1.2) 5. Sejam A e B acontecimentos de um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sabendo que A e B são acontecimentos mutuamente exclusivos, que $A \neq \bar{B}$, que $P(A) > 0$ e que $P(B) > 0$. Indique qual a opção correta:

A $P(A) \le P(\overline{B})$ B $P(A) - P(B) = P(\overline{A}) - P(\overline{B})$ C $P(A \cup B) = P(A \cap B)$

D $P(A \cup B) = P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$ E n.o.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) > 0 \quad$ e $\quad P(A \cap B) = 0$ Falsa
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) > 0 \quad$ e $\quad P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 \quad$ Porque $A \neq \overline{B}$ Falsa
- $P(A) + P(B) < 1 \Leftrightarrow P(A) < 1 - P(B) \Leftrightarrow P(A) < P\left(\overline{B}\right)$

  $P(A) < P\left(\overline{B}\right)$ implica que a afirmação $P(A) \le P\left(\overline{B}\right)$ é Verdadeira
- $P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(A) - 1 + P(B) = P(A) + P(B)$ Falsa

---