Probabilidades e Estatística D
Ano Lectivo 2022/23
3º Teste - 16 de Junho de 2023

Grelha de respostas certas

<u>Versão A</u>

Grupo	1	2			3				4		5
		a)	b)	c)	a)	b)	c)	d)	a)	b)	
	C	C	A	A	C	A	C	B	B	A	A

<u>Versão B</u>

Grupo	1	2			3				4		5
		a)	b)	c)	a)	b)	c)	d)	a)	b)	
	B	B	C	B	B	D	A	C	C	D	C

Resolução abreviada do 3º Teste

Versão A

(3.0) 1. O tempo de reparação (em minutos) de uma máquina é uma variável aleatória X com distribuição Normal. Procedeu-se à recolha dos tempos de reparação de 16 máquinas escolhidas ao acaso, tendo-se obtido um desvio padrão amostral de 2.4 minutos. Chegou-se a conclusão que o tempo médio de reparação de cada máquina se situa entre um mínimo de 5.23 e um máximo de 8.77 minutos. Qual o nível de confiança a atribuir a esta afirmação?

☐ 0.9968 ☐ 0.975 ☐ 0.99 ☐ n.o.

População; X-tempo reparação/máquina (em mi

---

2. Admite-se que o peso (em Kg), de um saco de fertilizante produzido por uma determinada empresa é uma v.a. X com distribuição Normal de valor médio desconhecido. O responsável pelo controlo de qualidade afirma que o desvio padrão do peso dos sacos deverá ter um valor máximo de 3 kg. Foi recolhida uma amostra casual dos pesos de 25 sacos de adubos para a qual se obteve: $\sum_{i=1}^{25} x_i = 1255$ e $\sum_{i=1}^{25} (x_i - \overline{x})^2 = 245.76$.

(2.4) (a) A estimativa por intervalo de confiança a 90% para o desvio padrão do peso dos sacos de fertilizantes é (valores arredondados com 3 casas decimais):

$[6.752, 17.809]$ $[2.721, 3.956]$ $[2.598, 4.220]$ n.o.

Estimativa por intervalo de

(2.4) (b) Numa outra amostra de pesos de 100 sacos, recolhida ao acaso, registaram-se 20 sacos com um peso superior a 51 kg. A estimativa por intervalo de confiança (o menos preciso) a 95% para a proporção de sacos com peso superior a 51 kg é (valores arredondados com 4 casas decimais):

$[0.1216, 0.2784]$ $[0.1340, 0.2660]$ $[0.1686, 0.2314]$ n.o.

(1.0) (c) As hipóteses que permitem testar o <u>não</u> cumprimento da afirmação do responsável pelo controlo da qualidade são:

$H_0 : \sigma^2 \leq 9 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 > 9$ $H_0 : \sigma^2 = 3^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 \neq 3^2$

$H_0 : S^2 \leq 3^2 \quad vs \quad H_1 : S^2 > 3^2$ $H_0 : \sigma \leq 3 \quad vs \quad H_1 : \sigma > 3$ n.o.

---

3. Uma fábrica que produz resmas de papel, adquiriu uma nova máquina cujo tempo de produção por resma (em minutos) é uma v.a. X com desvio padrão 0.35 minutos/resma. De forma a realizar o teste de hipóteses,

$$H_0 : \mu \geq 2 \quad vs \quad H_1 : \mu < 2$$

recolheu-se uma amostra casual de 64 resmas produzidas por esta esta nova máquina da qual se obteve uma média amostral de 1.8 minutos.

(1.8) (a) Para um nível de 1% de significância, a região de rejeição é:

$]2.33, +\infty[$ $\quad]-\infty, -2.58[$ $\quad]-\infty, -2.33[$ $\quad]-\infty, -2.58[\cup]2.58, +\infty[$ $\quad$ n.o.

(1.8) (b) O valor observado da estatística de teste é: (arredondado com 3 casas decimais)

-4.571 $\quad -13.061$ $\quad 4.571$ $\quad -2.704$ $\quad$ n.o.

(1.8) (c) Para outra amostra de dimensão 100, a estatística de teste apresentou um valor observado de -2.64. O $p-value$ associado ao teste destas hipóteses, tem valor: (arredondado com 4 casas decimais)

0.9959 $\quad$ 0.4980 $\quad$ 0.0041 $\quad$ 0.0082 $\quad$ n.o.

(1.4) (d) Se para uma outra amostra se tiver $p - value = 0.06$, rejeitamos a hipótese nula para valores do nível de significância:

$\alpha \leq 0.06$ $\quad \alpha > 0.06$ $\quad 0.01 < \alpha < 0.1$ $\quad$ n.o.

---

4. Seja X a variável aleatória que representa a quantidade de um composto químico por embalagem de 75 centilitros. Admita que X tem distribuição $N(\mu, 4)$. Para realizar o teste,

$$H_0 : \mu = 75 \quad vs \quad H_1 : \mu = 74$$

selecionou-se uma amostra casual de 9 embalagens, rejeitando-se a hipótese nula se $\overline{X} < 73.8$.

(1.2) (a) O nível de significância associado ao teste, é: (valor arredondado a 4 casas decimais)

0.0718 $\quad$ 0.0359 $\quad$ 0.3821 $\quad$ 0.1911 $\quad$ n.o.

(1.2) (b) A probabilidade do erro de tipo II ($2^{\underline{a}}$ espécie) é: (valor arredondado a 4 casas decimais)

0.6179 $\quad$ 0.1841 $\quad$ 0.5398 $\quad$ 0.5596 $\quad$ n.o.

(2.0) 5. Considere o parâmetro $\tau \in]0,1[$ associado à distribuição de uma população X que admite valores reais positivos. Para uma amostra aleatória de dimensão $n \geq 30$, e para efeitos de estimação por intervalo de confiança deste parâmetro, tenha em conta a seguinte variável pivot e a sua distribuição aproximada:

$$W = \sqrt{2n}\left(3\tau\,\overline{X} - 2\right) \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

O intervalo com confiança aproximadamente 98% para o parâmetro τ é:

$\left[\frac{1}{3\,\overline{X}}\left(2 - \frac{2.33}{\sqrt{2n}}\right), \frac{1}{3\,\overline{X}}\left(2 + \frac{2.33}{\sqrt{2n}}\right)\right]$ $\quad$ $\left[-\frac{2.05}{3\sqrt{2n}\,\overline{X}}, \frac{2.05}{3\sqrt{2n}\,\overline{X}}\right]$

$\left[-\frac{1}{\overline{X}}\left(\frac{2.33}{\sqrt{2n}} + 2\right), \frac{1}{\overline{X}}\left(\frac{2.33}{\sqrt{2n}} + 2\right)\right]$ $\quad$ $\left[\frac{1}{3\,\overline{X}}\left(2 - \frac{2.05}{\sqrt{2n}}\right), \frac{1}{3\,\overline{X}}\left(2 + \frac{2.05}{\sqrt{2n}}\right)\right]$ $\quad$ n.o.

Versão B

(3.0) 1. O tempo de reparação (em minutos) de uma máquina é uma variável aleatória X com distribuição Normal. Procedeu-se à recolha dos tempos de reparação de 25 máquinas escolhidas ao acaso, tendo-se obtido um desvio padrão amostral de 2.5 minutos. Chegou-se a conclusão que o tempo médio de reparação de cada máquina se situa entre um mínimo de 8.97 e um máximo de 11.03 minutos. Qual o nível de confiança a atribuir a esta afirmação?

0.975 $\quad$ B 0.95 $\quad$ C 0.9606 $\quad$ D n.o.

População; X-tempo reparação/máquina (em miniutos) $\qquad X \sim N(\mu, ?)$

Informação amostral: $n = 25$, $s = 2.5$

I. $T = \sqrt{25}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \sim t_{25-1} \equiv t_{24}$

II. Para um coeficiente de confiança $(1-\alpha)$, com $a \in \mathbb{R}^+$, $P(-a \leq T \leq a) = 1 - \alpha \Leftrightarrow a = t_{24:\alpha/2}$

III. $-t_{24:\alpha/2} \leq 5\frac{\overline{X} - \mu}{S} \leq t_{24:\alpha/2} \Leftrightarrow \overline{X} - t_{24:\alpha/2}\frac{S}{5} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{24:\alpha/2}\frac{S}{4}$

IV. $IC_{100(1-\alpha)\%} \equiv \left[\overline{X} - t_{24:\alpha/2}\frac{S}{4}, \overline{X} + t_{24:\alpha/2}\frac{S}{5}\right]$

A amplitude deste intervalo é $A_{100(1-\alpha)\%} \equiv 2\,t_{24:\alpha/2}\frac{S}{5}$

Para a estimativa apresentada:

$$A_{100(1-\alpha)\%} = 11.03 - 8.97 = 2.06 \Rightarrow 2.06 = 2\,t_{24:\alpha/2}\frac{s}{5} \Rightarrow t_{24:\alpha/2} = \frac{2.5}{2.5}2.06 = 2.06 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025$$

$$\Rightarrow (1-\alpha) = 1 - 2 \times 0.025 = 0.95$$

---

2. Admite-se que o peso (em Kg), de um saco de fertilizante produzido por uma determinada empresa é uma v.a. X com distribuição Normal de valor médio desconhecido. O responsável pelo controlo de qualidade afirma que o desvio padrão do peso dos sacos deverá ter um valor máximo de 2 kg. Foi recolhida uma amostra casual dos pesos de 25 sacos de adubos para a qual se obteve: $\sum_{i=1}^{25} x_i = 1255$ e $\sum_{i=1}^{25}(x_i - \overline{x})^2 = 245.76$.

(2.4) (a) A estimativa por intervalo de confiança a 95% para o desvio padrão do peso dos sacos de fertilizantes é (valores arredondados com 3 casas decimais):

A [6.238, 19.819] B [2.498, 4.452] C [2.598, 4.220] D n.o.

Informação amostral: $n = 25$, $\overline{x} = 50.2$, $s^2 = 10.24$

- $W = \dfrac{(25-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{25-1} \equiv \chi^2_{24}$
- $P\,(a \le W \le b) = 0.95$, com $P\,(W < a) = 0.025$ e $P\,(W > b) = 0.025$

  $a = \chi^2_{24:0.975} = 12.4 \qquad b = \chi^2_{24:0.025} = 39.4$

- $12.4 \le \dfrac{24\,S^2}{\sigma^2} \le 39.4 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{24\,S^2}{39.4} \le \sigma^2 \le \dfrac{24\,S^2}{12.4}$
- $IC_{95\%}\left(\sigma^2\right) \equiv \left[\dfrac{24\,S^2}{39.4}\,,\,\dfrac{24\,S^2}{12.4}\right]$

  $IC_{95\%}\left(\sigma\right) \equiv \left[\sqrt{\dfrac{24\,S^2}{39.4}}\,,\,\sqrt{\dfrac{24\,S^2}{12.4}}\right]$

Estimativa por intervalo de 95% de confiança para σ

$$IC_{95\%}\left(\sigma\right) = \left[\sqrt{\frac{245.76}{39.4}}\,,\,\sqrt{\frac{245.76}{12.4}}\right] = [2.497511452\,,\ 4.451893399]$$

(2.4) (b) Numa outra amostra de pesos de 100 sacos, recolhida ao acaso, registaram-se 20 sacos com um peso superior a 51 kg. A estimativa por intervalo de confiança (o menos preciso) a 98% para a proporção de sacos com peso superior a 51 kg é (valores arredondados com 4 casas decimais):

A [0.1176, 0.2824] B [0.1627, 0.2373] C [0.1068, 0.2932] D n.o.

$p = P\,(\text{saco com peso superior a 51 kg})$

Informação amostral: $n = 100$, $\hat{p} = \dfrac{20}{100} = 0.2$

- $W = \sqrt{100}\dfrac{\hat{P} - p}{\sqrt{\hat{P}\left(1 - \hat{P}\right)}} \overset{a}{\sim} N\,(0,1)$
- $P\,(-a \le W \le a) = 0.98 \Rightarrow a \approx z_{0.01} = 2.33$
- $-2.33 \le \sqrt{100}\dfrac{\hat{P} - p}{\sqrt{\hat{P}\left(1 - \hat{P}\right)}} \le 2.33 \;\Leftrightarrow\; \hat{P} - 2.33\sqrt{\dfrac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{100}} \le \hat{P} + 2.33\sqrt{\dfrac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{100}}$
- $IC_{98\%}\,(p) \equiv \left[\hat{P} - 2.33\sqrt{\dfrac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{100}}\,,\,\hat{P} + 2.33\sqrt{\dfrac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{100}}\right]$
- Estimativa: $IC_{98\%}\,(p) = \left[0.2 - 2.33\sqrt{\dfrac{0.2\,(1-0.2)}{100}}\,,\,0.2 + 2.33\sqrt{\dfrac{0.2\,(1-0.2)}{100}}\right] = [0.1068\,,\ 0.2932]$

(1.0) (c) As hipóteses que permitem testar o <u>não</u> cumprimento da afirmação do responsável pelo controlo da qualidade são:

A $H_0 : \sigma \ge 2 \quad vs \quad H_1 : \sigma < 2$ B $H_0 : \sigma^2 \le 4 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 > 4$

C $H_0 : S \le 2 \quad vs \quad H_1 : S > 2$ D $H_0 : \sigma^2 = 2^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 \ne 2^2$ E n.o.

---

3. Uma fábrica que produz resmas de papel, adquiriu uma nova máquina cujo tempo de produção por resma (em minutos) é uma v.a. X com desvio padrão 0.35 minutos/resma. De forma a realizar o teste de hipóteses,

$$H_0 : \mu \ge 2 \quad vs \quad H_1 : \mu < 2$$

recolheu-se uma amostra casual de 64 resmas produzidas por esta esta nova máquina da qual se obteve uma média amostral de 1.8 minutos.

(1.8) (a) Para um nível de 2% de significância, a região de rejeição é:

$\boxed{\text{A}}$ $]-\infty, -2.33[$ $\boxed{\text{B}}$ $]-\infty, -2.05[$ $\boxed{\text{C}}$ $]-\infty, -2.33[\cup]2.33, +\infty[$ $\boxed{\text{D}}$ $]2.05, +\infty[$ $\boxed{\text{E}}$ n.o.

- Para $n \geq 30$, $W = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - 2}{0.35} \underset{\mu=2}{\overset{a}{\sim}} N(0,1)$
- $R_{0.02} \approx]-\infty, -z_{0.02}[=]-\infty, -2.05[$

(1.8) (b) O valor observado da estatística de teste é: (arredondado com 3 casas decimais)

$\boxed{\text{A}}$ -2.704 $\boxed{\text{B}}$ 4.571 $\boxed{\text{C}}$ -13.061 $\boxed{\text{D}}$ -4.571 $\boxed{\text{E}}$ n.o.

$w_{obs} = \sqrt{64}\dfrac{1.8 - 2}{0.35} = -4.571428571$

(1.8) (c) Para outra amostra de dimensão 100, a estatística de teste apresentou um valor observado de -2.74. O $p - value$ associado ao teste destas hipóteses, tem valor: (arredondado com 4 casas decimais)

$\boxed{\text{A}}$ 0.0031 $\boxed{\text{B}}$ 0.9969 $\boxed{\text{C}}$ 0.0062 $\boxed{\text{D}}$ 0.4985 $\boxed{\text{E}}$ n.o.

$R_{p-value} =]-\infty, -2.74[$

$p - value = P(W \leq -2.74) \approx P(Z \leq -2.74) = 1 - P(Z \leq 2.74) = 1 - 0.9969 = 0.0031$

(1.4) (d) Se para uma outra amostra se tiver $p - value = 0.07$, rejeitamos a hipótese nula para valores do nível de significância:

$\boxed{\text{A}}$ $0.01 < \alpha < 0.12$ $\boxed{\text{B}}$ $\alpha \leq 0.07$ $\boxed{\text{C}}$ $\alpha > 0.07$ $\boxed{\text{D}}$ n.o.

Rejeitamos a hipótese H_0 se, $p - value < \alpha$. Assim, $\alpha > 0.07$

---

4. Seja X a variável aleatória que representa a quantidade de um composto químico por embalagem de 75 centilitros. Admita que X tem distribuição $N(\mu, 16)$. Para realizar o teste,

$$H_0 : \mu = 75 \quad vs \quad H_1 : \mu = 74$$

selecionou-se uma amostra casual de 16 embalagens, rejeitando-se a hipótese nula se $\overline{X} < 73.8$.

(1.2) (a) O nível de significância associado ao teste, é: (valor arredondado a 4 casas decimais)

$\boxed{\text{A}}$ 0.2302 $\boxed{\text{B}}$ 0.2104 $\boxed{\text{C}}$ 0.1151 $\boxed{\text{D}}$ 0.4207 $\boxed{\text{E}}$ n.o.

$\alpha = P\left(\overline{X} < 73.8 \,|\mu = 75\right) = P\left(\sqrt{16}\dfrac{\overline{X} - 75}{4} < \sqrt{16}\dfrac{73.8 - 75}{4}\right) = P(Z < -1.2)$

$= 1 - P(Z \leq 1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151$

(1.2) (b) A probabilidade do erro de tipo II (2ª espécie) é: (valor arredondado a 4 casas decimais):

$\boxed{\text{A}}$ 0.5199 $\boxed{\text{B}}$ 0.4801 $\boxed{\text{C}}$ 0.3821 $\boxed{\text{D}}$ 0.5793 $\boxed{\text{E}}$ n.o.

$P(\text{erro tipo II}) = P\left(\overline{X} \geq 73.8 \,|\mu = 74\right) = P\left(\sqrt{16}\dfrac{\overline{X} - 74}{4} \geq \sqrt{16}\dfrac{73.8 - 74}{4}\right) = P(Z \geq -0.2)$

$= P(Z \leq 0.2) = 0.5793$

(2.0) 5. Considere o parâmetro $\tau \in \,]0,1[$ associado à distribuição de uma população X que admite valores reais positivos. Para uma amostra aleatória de dimensão $n \geq 30$, e para efeitos de estimação por intervalo de confiança deste parâmetro, tenha em conta a seguinte variável pivot e a sua distribuição aproximada:

$$W = \sqrt{2n}\left(3\tau\,\overline{X} - 2\right) \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

O intervalo com confiança aproximadamente 92% para o parâmetro τ é:

A $\left[-\frac{1}{\overline{X}}\left(\frac{1.75}{\sqrt{2n}}+2\right), \frac{1}{\overline{X}}\left(\frac{1.75}{\sqrt{2n}}+2\right)\right]$

B $\left[\frac{1}{3\,\overline{X}}\left(2-\frac{1.41}{\sqrt{2n}}\right), \frac{1}{3\,\overline{X}}\left(2+\frac{1.41}{\sqrt{2n}}\right)\right]$

C $\left[\frac{1}{3\,\overline{X}}\left(2-\frac{1.75}{\sqrt{2n}}\right), \frac{1}{3\,\overline{X}}\left(2+\frac{1.75}{\sqrt{2n}}\right)\right]$

D $\left[-\frac{1.41}{3\sqrt{2n}\,\overline{X}}, \frac{1.41}{3\sqrt{2n}\,\overline{X}}\right]$

E n.o.

- $W = \sqrt{2n}\left(3\tau\,\overline{X} - 2\right) \overset{a}{\sim} N(0,1)$
- $P(-a \leq W \leq a) \approx P(-a \leq Z \leq a) = 0.92 \;\Rightarrow a \approx z_{0.04} = 1.75$
- $-1.75 \leq \sqrt{2n}\left(3\tau\,\overline{X} - 2\right) \leq 1.75 \;\Leftrightarrow\; -\frac{1.75}{\sqrt{2n}} \leq 3\tau\overline{X} - 2 \leq \frac{1.75}{\sqrt{2n}} \;\Leftrightarrow\; 2 - \frac{1.75}{\sqrt{2n}} \leq 3\tau\overline{X} \leq 2 + \frac{1.75}{\sqrt{2n}}$

  $\Leftrightarrow\; \frac{1}{3\overline{X}}\left(2 - \frac{1.75}{\sqrt{2n}}\right) \leq \tau \leq \frac{1}{3\overline{X}}\left(2 + \frac{1.75}{\sqrt{2n}}\right)$
- $IC_{92\%}(\tau) = \left[\frac{1}{3\overline{X}}\left(2 - \frac{1.75}{\sqrt{2n}}\right)\;,\;\frac{1}{3\overline{X}}\left(2 + \frac{1.75}{\sqrt{2n}}\right)\right]$
