Apontamentos

14 de abril de 2024 20:17

TEORIA DAS PROBABILIDADES

Ω → espaço de resultados / universo = conj de todos os resultados possíveis

acontecimento → qql subconjunto de Ω

$(\Omega, \mathcal{F})$ → espaço de acontecimentos

$\bar{A}$ → complementar

Ω → Acontecimento certo

$\emptyset = \{\}$ → Acontecimento impossível

Acontecimento elementar → formado por um único elemento

Mutuamente Exclusivos ou Disjuntos → $A \cap B = \emptyset$

$$P(A) = \frac{N_A}{N} \quad \begin{matrix} N_A \to n \text{ resultados favoráveis} \\ N \to n \text{ casos possíveis} \end{matrix}$$ } Lei de Laplace

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n_A}{n} \quad \begin{matrix} n_A \to n \text{ de ocorrências de } A \\ n \to n \text{ de repetições da experiência} \end{matrix}$$ } conceito Frequentista de Probabilidade

▷ Propriedades

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P(\emptyset) = 0$

$P(\Omega) = 1$

$P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$

$\forall A, B \in \mathcal{F}$ $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ ou $P(B-A) = P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A \subset B \to P(A) \leq P(B)$??

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \quad + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Probabilidade Condicional → $P(D|M) = \frac{P(D \cap M)}{P(M)}$ * Sabendo M, então qual a Probabilidade de D

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)\, P(B|A)\, P(A)$

Independência de acontecimentos → $P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B)/P(B) = P(A)$
$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

ω	$X(\omega)$
Cara	1
Coroa	0

$X(A) = \{X(w) \quad w \in A\}$

$X^{-1}(E) = \{w \in \Omega \quad X(w) \in E\}$

Cara	1
Coroa	0

$X^{-1}(E)=\{w \in \Omega \quad X(w)\in E\}$

→ uma variável aleatória X é uma $X \ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ tal que, para qql intervalo real I, $E = X^{-1}(I)$ é um acontecimento de $(\Omega, \mathcal{F})$ e por isso $P(X\in I)=P(E)$ existe e pode ser determinada

Função de Distribuição → $F_X(x) = P(X \le x)$

$\to F_X(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
$\to F_X(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

$$P(X<x) = F_X(x^-)$$
$$P(X=a) = F_X(a) - F_X(a^-)$$

$$P(a<X\le b) = P(X\le b) - P(X\le a) = F_X(b) - F_X(a)$$
$$P(a\le X\le b) = P(X\le b) - P(X<a) = F_X(b) - F_X(a^-)$$
$$P(a\le X<b) = P(X<b) - P(X<a) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$$
$$P(a\le X\le b) = P(X\le b) - P(X<a) = F_X(b) - F_X(a^-)$$

Função de Probabilidade (f p) $\quad S_X = \{a_1, a_2, \ \}$

$$X = \begin{cases} a_1 & a_2 & a_i \\ P(X=a_1) & P(X=a_2) & P(X=a_i) \end{cases}$$

Propriedades

$$P(X=a_i)>0 \ , \ \forall a_i \in S_X$$
$$\sum_{a_i\in S_X} P(X=a_i) = 1$$

Cálculo da função distribuição

$$F_X(x) = P(X\le x) = \sum_{a_i\in S_X\cap\{a_i\le x\}} P(X=a_i)$$

X diz-se v a **absolutamente contínua** se $P(X=a)=0$, $\forall a \in \mathbb{R}$ e existe uma função não negativa f_X (**função densidade de probabilidade**) $\Rightarrow P(X\in I) = \int_I f_X(x)\,dx$

conjunto de valores reais $S_X = \{x \in \mathbb{R} \ \ f_X(x)>0\} \Rightarrow$ **suporte** de X

Propriedades

$$f_X(x)\ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

$$P(X\le a) = P(X<a) + \underbrace{P(X=a)}_{0} = P(X<a) \quad , \forall a \in \mathbb{R}$$

$$P(a\le X\le b) = P(a\le X<b) = P(a<X\le b) = P(a<X<b) \quad , \forall_{a,b}\in\mathbb{R}$$

→ **Cálculo da função distribuição**

$$F_X(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \ , \ \forall_x \in \mathbb{R}$$

PAR ALEATÓRIO

$$S_{(X,Y)} = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots\}$$

Classificação de um par aleatório

- (X,Y) é um par aleatório discreto se as v.a.'s X e Y são do tipo discreto.
- (X,Y) é um par aleatório contínuo se as v.a.'s X e Y são do tipo contínuo.
- (X,Y) é um par aleatório misto se uma das v.a.'s X e Y é do tipo discreto e a outra do tipo contínuo.

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE CONJUNTA DO P.A. (X,Y)

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0.05	0.03	0.02
2	0.1	0.06	0.04
3	0.15	0.09	0.06
4	0.2	0.12	0.08

$\sum\sum_{(x_i,y_j)\in S_{(X,Y)}} p_{ij} = 1$ $\qquad 0 \le p_{ij} \le 1, \quad \forall (x_i, y_j) \in S_{(X,Y)}$

$P(X=3, Y=3)$ $\qquad p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j), \quad i,j = 1,2,\ldots$

$X \setminus Y$	1	2	3		
1	0.05	0.03	0.02	0.1	$P(X=1)$
2	0.1	0.06	0.04	0.2	$P(X=2)$
3	0.15	0.09	0.06	0.3	$P(X=3)$
4	0.2	0.12	0.08	0.4	$P(X=4)$
	0.5	0.3	0.2	1	
	$P(Y=1)$	$P(Y=2)$	$P(Y=3)$		

Definição 3.3 *Dado um par aleatório discreto (X,Y) é possível definir a **função de probabilidade marginal de X** e a **função de probabilidade marginal de Y**, por, respectivamente:*

$$p_{i\cdot} = P(X = x_i) = \sum_{y_j \in S_{(X,Y)}} P(X = x_i; Y = y_j) = \sum_{y_j \in S_{(X,Y)}} p_{ij}, \quad \forall x_i \in S_{(X,Y)}$$

$$p_{\cdot j} = P(Y = y_j) = \sum_{x_i \in S_{(X,Y)}} P(X = x_i; Y = y_j) = \sum_{x_i \in S_{(X,Y)}} p_{ij}, \quad \forall y_j \in S_{(X,Y)}$$

Estas duas funções são funções de probabilidade de variáveis aleatórias unidimensionais.

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE MARGINAL DA V.A. X

$$X \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{cases}$$

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE MARGINAL DA V.A. Y

$$Y \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{cases}$$

Confirmar se 2 variáveis são independentes

$$\begin{cases} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i)\, P(Y = y_j) \\ P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i)\, P(Y = y_j) \\ p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j} \end{cases}$$

—//—

Falta a função densidade de Pares Aleatórios

—//—

MOMENTOS E PARÂMETROS

Valor Médio ⇒ $E(X)$ → medida de localização da va que se aplica

$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$, → X é v a discreta

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$, → X é v a absolutamente contínua

Proposição 4.1 *Sejam X e Y v.a.'s, a e b constantes reais e g, h são funções reais de variável real.*

- $E(b) = b$;
- $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- $E(g(X) + h(X)] = E[g(X)] + E[h(X)]$;
- $E[g(X) + h(Y)] = E[g(X)] + E[h(Y)]$;
- *Se X e Y são v.a.'s independentes, então $E(XY) = E(X)E(Y)$. (ver proposição 4.5)*

Variânca ⇒ $V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - E^2(X)$ ← demons

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left[X^2 - 2XE(X) - E^2(X)\right] = \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) - E^2(X) = E(X^2) - E^2(X) \end{aligned}$$

Proposição 4.3 *Sejam X e Y v.a.'s, a e b constantes reais.*

- $V(b) = 0$;
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$;
- $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2\,cov(X, y)$

Teorema 4.1 *(Desigualdade de Chebychev)*
Se X é uma v.a. para a qual existe variância e $c > 0$ é uma constante real, então

$$P(|X - E(X)| \ge c\sigma(X)) \le \frac{1}{c^2}$$

A desigualdade de Chebychev também pode ser expressa por

$$P(|X - E(X)| < c\sigma(X)) \ge 1 - \frac{1}{c^2}$$

desvio Padrão ⇒ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

covariância ⇒ $cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$cov(X,Y) = E[(X - a)(Y - b)] = E(XY - aY - bX + ab) =$$

$$= E(XY) - aE(Y) - bE(X) + ab = E(XY) - ab - ab + ab = E(XY) - ab$$

demonstração $a = E(X)$ e $b = E(Y)$

Proposição 4.5 *Sejam X, Y, W e Z v.a.'s, a,b, c e d constantes reais.*

- $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2\,cov(X, Y)$;
- *Se X e Y são v.a.'s independentes, então $cov(X,Y) = 0$;*
- $cov(a + bX, c + dY) = bd\,cov(X, Y)$;
- $cov(aX + bY, cZ + dW) = ac\,cov(X, Z) + ad\,cov(X, W) + bc\,cov(Y, Z) + bd\,cov(Y, W)$.

coeficiente de correlação ⇒ $\rho(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

Proposição 4.6 *Seja (X,Y) um par aleatório,*

- $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$;
- $|\rho(X,Y)| = 1$ *se, e só se, $P(Y = a + bX) = 1$, sendo a e b constantes reais;*
- *Se X e Y são v.a.'s independentes, então $\rho(X,Y) = 0$.*

Nota muito importante: O coeficiente de correlação só permite quantificar a relação entre duas v.a.'s, desde que se admita que essa relação é linear.

é' mto??

- $|\rho(X,Y)| = 1$ *se, e só se,* $P(Y = a + bX) = 1$, *sendo* a *e* b *constantes reais;*
- *Se* X *e* Y *são v.a.'s independentes, então* $\rho(X,Y) = 0$.

Nota muito importante: O coeficiente de correlação só permite quantificar a relação entre duas v.a.'s, desde que se admita que essa relação é linear.

Por exemplo, se via coeficente de correlação, quisermos avaliar a relação linear:

- $Y = a + bX^2$, devemos determinar $\rho(Y, X^2)$;
- $\cos Y = a + bX$, devemos determinar $\rho(\cos Y, X)$.

Nota: Regra empírica: O coeficiente de correlação espelha uma relação linear forte entre duas v.a.'s, desde que atinja valores inferiores a -0.7 ou superiores a 0.7.

estes valores entram como ??

— " —

4 5 → falta outros parâmetros de localização e dispersão

— " —

DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS IMPORTANTES

1 Hipergeométrica

$X \sim H(N, M, n)$.

n de vezes que se faz a experiência

elementos com a característica

todos os elementos

→ sem reposição

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n + M - N) \le k \le \min(n, M) \qquad E(X) = n\frac{M}{N} \qquad V(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

2 Binomial

$\mathbf{X \sim B(n, p)}$.

probabilidade de sair com a característica

n vezes que se faz a experiência

→ com reposição

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \qquad E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p)$$

Diferenças fundamentais entre as distribuições hipergeométrica e binomial

Hipergeométrica	Binomial
População finita constituída por N elementos	População infinita
Extracção sem reposição	Extracção com reposição
Sucessivas extracções são não independentes	Sucessivas extracções são independentes

p -> a probabilidade tem que ser sempre constante

3 Poisson

$\mathbf{Y \sim P(\lambda)}$. $\lambda \in \mathbb{R}^+$

→ Aproximadamente

$$P(Y = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \qquad E(Y) = \lambda \qquad V(Y) = \lambda$$

Aproximação da distribuição Binomial pela distribuição de Poisson

II. Se X é uma v.a. com distribuição $B(n,p)$, em que n tem um valor "grande" e p tem um valor "pequeno", então

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

sendo $\lambda = np$.

Regra prática Considera-se "razoável" a aproximação quando $n \ge 30$ e $np \le 5$.

4 Geométrica

$\mathbf{X \sim G\left(p\right)}$

→ Com reposição
→ até a 1 vez

$$P\left(X=k\right)=p\left(1-p\right)^{k-1}, \quad k\in S_X \qquad E\left(X\right)=\frac{1}{p} \qquad V\left(X\right)=\frac{1-p}{p^2}$$

$$P\left(X=k\right)=p\left(1-p\right)^{k-1}\geq 0,\ \forall\, k\in S_X \qquad \textit{porque } 0<p<1;$$

$$\sum_{k\in S_X} P\left(X=k\right)=1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} p\left(1-p\right)^{k-1}=1 \Leftrightarrow p\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1-p\right)^{k-1}=1 \Leftrightarrow p\frac{1}{1-\left(1-p\right)}=1 \Leftrightarrow 1=1$$

Função distribuição

$$F_X\left(x\right)=\begin{cases} 0, & x\in\left]-\infty,1\right[\\ 1-\left(1-p\right)^{[x]}, & x\in\left[1,+\infty\right[\end{cases}$$

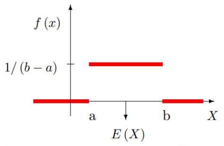
DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS IMPORTANTES

1 Uniforme

$\mathbf{X \sim U\left(a,b\right)}$

$$f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x\in\left[a,b\right] \\ 0, & x\notin\left[a,b\right] \end{cases}$$

Figura 6.1: Função densidade da distribuição Uniforme



$$E\left(X\right)=\frac{a+b}{2}, \quad E\left(X^2\right)=\frac{b^2+ab+a^2}{3} \quad e \quad V\left(X\right)=\frac{\left(b-a\right)^2}{12}$$

Função distribuição

$$F_X\left(x\right)\equiv P\left(X\leq x\right)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leq x<b \\ 1, & x\geq b \end{cases}$$