Nome completo: ____

N.º aluno: ____________ Curso: ____________

Em cada pergunta apenas uma das respostas está correcta. Assinale a sua resposta com um **X** no quadrado correspondente. Se pretender anular uma resposta já assinalada, rasure por completo o respectivo quadrado. Uma resposta correcta tem a cotação indicada na prova. Uma resposta incorrecta desconta 0.2 valores e uma não resposta nada vale nem desconta. n.o. significa nenhuma das outras opções de resposta.

---

1. De forma a avaliar a velocidade (de leitura sequencial) duma unidade de memória flash USB 2.0 de certo fabricante, considere a população X-velocidade (em MB/s) por unidade de memória. Admita que X tem distribuição Normal de parâmetros (μ, σ^2). Seleccionaram-se aleatoriamente n ($n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$), unidades e mediu-se, em cada uma, a respectiva velocidade (em MB/s).

(1.6) (a) Se $n = 25$, as medições amostrais resultaram numa velocidade média de 31 MB/s e num desvio padrão de 3 MB/s. Admitindo que $\sigma = 2.5$, a estimativa por intervalo de 80% de confiança para a velocidade média destas unidades de memória é (valores arredondados com 3 casas decimais)

A [30.232 , 31.768] B [30.208 , 31.792] C [30.872 , 31.128] D [30.360 , 31.640] E n.o.

(1.5) (b) Para uma amostra de $n = 9$ observações da velocidade, cuja variância amostral é $s^2 = 9.61$, a estimativa do limite superior do intervalo de confiança a $100\,(1-\alpha)\,\%$ para σ^2 é 35.266055 (valor arredondando com 6 casas decimais). Determine o coeficiente de confiança da estimativa referida.

A 90% B 95% C 80% D 5% E n.o.

(c) Considere a amostra de registos da velocidade em 36 unidades de memória.

3	3	2	1	4	3	4	2	5	6	1	8
1	5	3	3	4	4	1	2	2	7	7	2
9	2	2	1	3	3	4	5	6	7	6	6

(1.5) i. A estimativa pontual para a proporção de unidades de memória cuja velocidade é superior a 5 MB/s é:

A 0.75 B 0.2 C 0.25 D 0.9 E n.o.

(1.5) ii. Admita que para **outra amostra de igual dimensão**, a estimativa pontual para a proporção de unidades de memória cuja velocidade é inferior a 6 MB/s é de 0.75. A estimativa por intervalo de 95% de confiança para a proporção de unidades de memória cuja velocidade é inferior a 6 MB/s é (Use o intervalo menos preciso e valores arrendondados com 4 casas decimais):

A [0.6085 , 0.8915] B [0.5867 , 0.9133] C [0.7228 , 0.7772] D [0.7398 , 0.7602] E n.o.

2. O tempo de resposta, em milissegundos (ms), de um servidor web da NOVA FCT a pedidos dos utilizadores é uma variável aleatória que se supõe ter distribuição Normal. Um Engenheiro Informático afirma que o tempo médio de resposta do referido servidor difere de 100 ms. Com o objectivo de se fazer estudos sobre parâmetros desconhecidos da população, recolheu-se uma amostra com 9 tempos de resposta onde se observou $\bar{x} = 101$ e $\sum_{i=1}^{9} (x_i - \bar{x})^2 = 72$.

(1.6) (a) Para se testar a afirmação do Engenheiro, as hipóteses a considerar são:

A $H_0 : \mu = 100 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 100$ B $H_0 : \mu \leq 100 \quad vs \quad H_1 : \mu > 100$

C $H_0 : \bar{X} = 100 \quad vs \quad H_1 : \bar{X} \neq 100$ D $H_0 : \mu \geq 100 \quad vs \quad H_1 : \mu < 100$ E n.o.

(b) **Considere agora as hipóteses**: $H_0 : \mu = 102 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 102$.

(1.6) i. Para um nível de 2% de significância, a região de rejeição é:

$\boxed{\text{A}}$ $R_{0.02} =]-\infty, -2.33[\cup]2.33, +\infty[$ $\boxed{\text{B}}$ $R_{0.02} =]2.05, +\infty[$

$\boxed{\text{C}}$ $R_{0.02} =]-\infty, -2.90[\cup]2.90, +\infty[$ $\boxed{\text{D}}$ $R_{0.02} =]-\infty, -2.05[$ $\boxed{\text{E}}$ n.o.

(1.6) ii. O valor observado da estatística de teste é :

$\boxed{\text{A}}$ 6 $\boxed{\text{B}}$ -1 $\boxed{\text{C}}$ $2/3$ $\boxed{\text{D}}$ $-2/3$ $\boxed{\text{E}}$ n.o.

(1.5) iii. Para **outra amostra de igual dimensão**, a estatística de teste apresentou um valor observado 1.86. O $p - value$ associado ao teste destas hipóteses, tem valor:

$\boxed{\text{A}}$ 0.05 $\boxed{\text{B}}$ 0.0314 $\boxed{\text{C}}$ 0.1 $\boxed{\text{D}}$ 0.025 $\boxed{\text{E}}$ n.o.

(1.5) iv. Se para **uma outra amostra** se tiver $p - value = 0.08$, rejeitamos a hipótese nula para valores do nível de significância:

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha \leq 0.08$ $\boxed{\text{B}}$ $\alpha > 0.08$ $\boxed{\text{C}}$ $0.01 < \alpha < 0.1$ $\boxed{\text{D}}$ $\alpha = 0.05$ $\boxed{\text{E}}$ n.o.

(c) **Considere agora as hipóteses**: $H_0 : \mu \leq 100 \quad vs \quad H_1 : \mu > 100$. Admitindo que o **desvio padrão** dos tempos de resposta do servidor é $\sigma = \mathbf{3}$ e que se rejeita a hipótese nula se $\bar{X} > c$:

(1.6) i. A estatística de teste apropriada e a sua distribuição, sob a validade de H_0, é:

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - 100}{S} \underset{\mu=100}{\overset{a}{\sim}} N(0,1)$ $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - 100}{\sigma} \underset{\mu=100}{\sim} N(0,1)$

$\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu}{S} \underset{\mu=100}{\sim} t_{n-1}$ $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \underset{\mu=100}{\overset{a}{\sim}} N(0,1)$ $\boxed{\text{E}}$ n.o.

(1.5) ii. Se o nível de significância do teste for $\alpha = 0.0228$ (para $\mu = 100$), a probabilidade do erro de tipo II para $\mu = 101$ é:

$\boxed{\text{A}}$ 0.8413 $\boxed{\text{B}}$ 0.0250 $\boxed{\text{C}}$ 0.0228 $\boxed{\text{D}}$ 0.9772 $\boxed{\text{E}}$ n.o.

3. Admita que X é uma população cuja distribuição é caracterizada por um parâmetro $\theta \in \mathbb{R}^+$. Considere $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, uma amostra aleatória desta população.

(1.5) (a) Para $n \geq 30$, a variável pivot para θ e a sua distribuição aproximada, $W = \sqrt{\dfrac{n\pi}{4-\pi}}\dfrac{\theta^* - \theta}{\theta} \overset{a}{\sim} N(0,1)$, o intervalo de confiança de aproximadamente 95% de confiança para θ tem expressão:

$\boxed{\text{A}}$ $\left[\dfrac{\theta^*}{1 + 1.96\sqrt{\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}, \dfrac{\theta^*}{1 - 1.96\sqrt{\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}\right]$ $\boxed{\text{B}}$ $\left[\dfrac{\theta^*}{1 + 1.65\sqrt{\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}, \dfrac{\theta^*}{1 - 1.65\sqrt{\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}\right]$

$\boxed{\text{C}}$ $\left[\theta^* - 1.96\sqrt{\dfrac{n\,\pi}{4-\pi}}, \theta^* + 1.96\sqrt{\dfrac{n\,\pi}{4-\pi}}\right]$ $\boxed{\text{D}}$ $\left[\dfrac{\theta^*}{1 - 1.96\sqrt{\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}, \dfrac{\theta^*}{1 + 1.96\sqrt{\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}\right]$

$\boxed{\text{E}}$ $\left[\dfrac{\theta^*}{1 + \sqrt{1.96\,\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}, \dfrac{\theta^*}{1 - \sqrt{1.96\,\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}\right]$ $\boxed{\text{F}}$ n.o.

(1.5) (b) Considere o parâmetro β e o seu estimador $\hat{\beta}$. Sabemos que $W = 2n\dfrac{\hat{\beta}}{\beta} \sim \chi^2_{2n}$. Para uma amostra de dimensão $n = 5$, o intervalo de confiança $100\,(1-\alpha)\,\%$ para β tem expressão:

$\boxed{\text{A}}$ $\left[0\,, \dfrac{10\hat{\beta}}{\chi^2_{10:1-\alpha}}\right]$ $\boxed{\text{B}}$ $\left[\dfrac{5\hat{\beta}}{\chi^2_{10:1-\alpha/2}}, \dfrac{5\hat{\beta}}{\chi^2_{10:\alpha/2}}\right]$

$\boxed{\text{C}}$ $\left[\dfrac{10\hat{\beta}}{\chi^2_{10:\alpha/2}}, \dfrac{10\hat{\beta}}{\chi^2_{10:1-\alpha/2}}\right]$ $\boxed{\text{D}}$ $\left[\hat{\beta} - z_{\alpha/2}\sqrt{10}\,, \hat{\beta} + z_{\alpha/2}\sqrt{10}\right]$ $\boxed{\text{E}}$ n.o.

Nome completo: ______________________________

N.º aluno: __________ Curso: __________

Em cada pergunta apenas uma das respostas está correcta. Assinale a sua resposta com um **X** no quadrado correspondente. Se pretender anular uma resposta já assinalada, rasure por completo o respectivo quadrado. Uma resposta correcta tem a cotação indicada na prova. Uma resposta incorrecta desconta 0.2 valores e uma não resposta nada vale nem desconta. n.o. significa nenhuma das outras opções de resposta.

---

1. De forma a avaliar a velocidade (de leitura sequencial) duma unidade de memória flash USB 2.0 de certo fabricante, considere a população X-velocidade (em MB/s) por unidade de memória. Admita que X tem distribuição Normal de parâmetros (μ, σ^2). Seleccionaram-se aleatoriamente n ($n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$), unidades e mediu-se, em cada uma, a respectiva velocidade (em MB/s).

(1.6) (a) Se $n = 25$, as medições amostrais resultaram numa velocidade média de 31 MB/s e num desvio padrão de 3 MB/s. Admitindo que $\sigma = 2.5$, a estimativa por intervalo de 80% de confiança para a velocidade média destas unidades de memória é (valores arredondados com 3 casas decimais)

A [30.232 , 31.768] B [30.360 , 31.640] C [30.872 , 31.128] D [30.208 , 31.792] E n.o.

(1.5) (b) Para uma amostra de $n = 9$ observações da velocidade, cuja variância amostral é $s^2 = 9.61$, a estimativa do limite superior do intervalo de confiança a $100\,(1-\alpha)\,\%$ para σ^2 é 35.266055 (valor arredondando com 6 casas decimais). Determine o coeficiente de confiança da estimativa referida.

A 95% B 80% C 90% D 5% E n.o.

(c) Considere a amostra de registos da velocidade em 36 unidades de memória.

3	3	2	1	4	3	4	2	5	6	1	8
1	5	3	3	4	4	1	2	2	7	7	2
9	2	2	1	3	3	4	5	6	7	6	6

(1.5) i. A estimativa pontual para a proporção de unidades de memória cuja velocidade é superior a 5 MB/s é:

A 0.25 B 0.2 C 0.75 D 0.9 E n.o.

(1.5) ii. Admita que para **outra amostra de igual dimensão**, a estimativa pontual para a proporção de unidades de memória cuja velocidade é inferior a 6 MB/s é de 0.75. A estimativa por intervalo de 95% de confiança para a proporção de unidades de memória cuja velocidade é inferior a 6 MB/s é (Use o intervalo menos preciso e valores arrendondados com 4 casas decimais):

A [0.7228 , 0.7772] B [0.5867 , 0.9133] C [0.6085 , 0.8915] D [0.7398 , 0.7602] E n.o.

2. O tempo de resposta, em milissegundos (ms), de um servidor web da NOVA FCT a pedidos dos utilizadores é uma variável aleatória que se supõe ter distribuição Normal. Um Engenheiro Informático afirma que o tempo médio de resposta do referido servidor difere de 100 ms. Com o objectivo de se fazer estudos sobre parâmetros desconhecidos da população, recolheu-se uma amostra com 9 tempos de resposta onde se observou $\bar{x} = 101$ e $\sum_{i=1}^{9} (x_i - \bar{x})^2 = 72$.

(1.6) (a) Para se testar a afirmação do Engenheiro, as hipóteses a considerar são:

A $H_0 : \mu \leq 100 \quad vs \quad H_1 : \mu > 100$ B $H_0 : \mu = 100 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 100$

C $H_0 : \bar{X} = 100 \quad vs \quad H_1 : \bar{X} \neq 100$ D $H_0 : \mu \geq 100 \quad vs \quad H_1 : \mu < 100$ E n.o.

(b) **Considere agora as hipóteses**: $H_0 : \mu = 102 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 102$.

(1.6) i. Para um nível de 2% de significância, a região de rejeição é:

A $R_{0.02} =]-\infty, -2.05[$ B $R_{0.02} =]2.05, +\infty[$

C $R_{0.02} =]-\infty, -2.33[\cup]2.33, +\infty[$ D $R_{0.02} =]-\infty, -2.90[\cup]2.90, +\infty[$ E n.o.

(1.6) ii. O valor observado da estatística de teste é :

A $-2/3$ B 6 C $2/3$ D -1 E n.o.

(1.5) iii. Para **outra amostra de igual dimensão**, a estatística de teste apresentou um valor observado 1.86. O $p - value$ associado ao teste destas hipóteses, tem valor:

A 0.1 B 0.0314 C 0.025 D 0.05 E n.o.

(1.5) iv. Se para **uma outra amostra** se tiver $p - value = 0.08$, rejeitamos a hipótese nula para valores do nível de significância:

A $\alpha = 0.05$ B $\alpha \leq 0.08$ C $0.01 < \alpha < 0.1$ D $\alpha > 0.08$ E n.o.

(c) **Considere agora as hipóteses**: $H_0 : \mu \leq 100 \quad vs \quad H_1 : \mu > 100$. Admitindo que o **desvio padrão** dos tempos de resposta do servidor é $\sigma = \mathbf{3}$ e que se rejeita a hipótese nula se $\bar{X} > c$:

(1.6) i. A estatística de teste apropriada e a sua distribuição, sob a validade de H_0, é:

A $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - 100}{S} \underset{\mu=100}{\overset{a}{\sim}} N(0,1)$ B $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu}{S} \underset{\mu=100}{\sim} t_{n-1}$

C $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - 100}{\sigma} \underset{\mu=100}{\sim} N(0,1)$ D $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \underset{\mu=100}{\overset{a}{\sim}} N(0,1)$ E n.o.

(1.5) ii. Se o nível de significância do teste for $\alpha = 0.0228$ (para $\mu = 100$), a probabilidade do erro de tipo II para $\mu = 101$ é:

A 0.9772 B 0.8413 C 0.0228 D 0.0250 E n.o.

3. Admita que X é uma população cuja distribuição é caracterizada por um parâmetro $\theta \in \mathbb{R}^+$. Considere $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, uma amostra aleatória desta população.

(1.5) (a) Para $n \geq 30$, a variável pivot para θ e a sua distribuição aproximada, $W = \sqrt{\dfrac{n\pi}{4-\pi}}\dfrac{\theta^* - \theta}{\theta} \overset{a}{\sim} N(0,1)$, o intervalo de confiança de aproximadamente 95% de confiança para θ tem expressão:

A $\left[\dfrac{\theta^*}{1 + \sqrt{1.96\,\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}, \dfrac{\theta^*}{1 - \sqrt{1.96\,\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}\right]$ B $\left[\dfrac{\theta^*}{1 + 1.65\sqrt{\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}, \dfrac{\theta^*}{1 - 1.65\sqrt{\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}\right]$

C $\left[\theta^* - 1.96\sqrt{\dfrac{n\,\pi}{4-\pi}}, \theta^* + 1.96\sqrt{\dfrac{n\,\pi}{4-\pi}}\right]$ D $\left[\dfrac{\theta^*}{1 - 1.96\sqrt{\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}, \dfrac{\theta^*}{1 + 1.96\sqrt{\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}\right]$

E $\left[\dfrac{\theta^*}{1 + 1.96\sqrt{\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}, \dfrac{\theta^*}{1 - 1.96\sqrt{\dfrac{4-\pi}{n\pi}}}\right]$ F n.o.

(1.5) (b) Considere o parâmetro β e o seu estimador $\hat{\beta}$. Sabemos que $W = 2n\dfrac{\hat{\beta}}{\beta} \sim \chi^2_{2n}$. Para uma amostra de dimensão $n = 5$, o intervalo de confiança $100\,(1-\alpha)\,\%$ para β tem expressão:

A $\left[0, \dfrac{10\hat{\beta}}{\chi^2_{10:1-\alpha}}\right]$ B $\left[\hat{\beta} - z_{\alpha/2}\sqrt{10}, \hat{\beta} + z_{\alpha/2}\sqrt{10}\right]$

C $\left[\dfrac{5\hat{\beta}}{\chi^2_{10:1-\alpha/2}}, \dfrac{5\hat{\beta}}{\chi^2_{10:\alpha/2}}\right]$ D $\left[\dfrac{10\hat{\beta}}{\chi^2_{10:\alpha/2}}, \dfrac{10\hat{\beta}}{\chi^2_{10:1-\alpha/2}}\right]$ E n.o.