FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Probabilidades e Estatística
Conteúdos de Estatística

2019

Nota introdutória

Este é um documento de apoio ao estudo da componente de Estatística para as diversas U.C.'s de Probabilidades e Estatística, servidas pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (DM/FCT/UNL).

O documento tem por base apontamentos elaborados pela Professora Doutora Fátima Miguens nos anos lectivos 2007/2008. Foi revisto pelo Professor Doutor Rui Cardoso nos anos de 2008 a 2010 e objecto das necessárias correções. Entretanto tem vindo a ser actualizado e até a ser revisto pelos Professores Doutores Ayana Furtado Mateus e Gracinda Rita Guerreiro nos anos de 2011 a 2015. A versão que agora se divulga (2019) apresenta reformulações e novidades nos conteúdos agora expostos. A todos os outros Professores Doutores que venham a contribuir para uma edição final, agradeço a sua colaboração e interesse.

Todos os Professores Doutores mencionados são docentes do DM/FCT/UNL.

A leitura deste texto não dispensa a leitura atenta das obras indicadas como referências bibliográficas nas U.C.'s a que se destina.

Conteúdo

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Capítulo 1

Inferência Estatística

1.1 Introdução

A área de estudo sobre inferência estatística consiste no conjunto de métodos utilizados para que seja possível tomarmos decisões ou retirarmos conclusões acerca de uma *população*. Este métodos utilizam a informação contida numa *amostra* seleccionada da população.

A inferência estatística pode ser dividida em duas grandes áreas: *estimação de parâmetros* e *testes de hipóteses*. Como exemplo de um problema sobre estimação de parâmetros, suponhamos que um engenheiro pretende analisar a resistência de uma componente usada no chassis de um automóvel. Uma vez que é natural que a resistência seja variável de componente para componente, isto devido a diferenças que podem ocorrer nos materiais e no processo de fabrico de cada componente assim, como nos métodos de leitura da respectiva resistência, o engenheiro está apenas interessado em estimar a resistência média deste tipo de componentes. Na prática, o engenheiro irá utilizar os dados de uma amostra de resistências para calcular um número que de algum modo será um valor razoável (ou uma predição) da verdadeira resistência média. Este número é denominado *estimativa pontual*. Veremos mais tarde que é possível estabelecer a precisão desta estimativa.

Consideremos a situação em que duas diferentes temperaturas de reacção, digamos t_1 e t_2, podem ser utilizadas num processo químico. Um engenheiro conjectura que com t_1 produzirá maiores resultados que com t_2. O teste de hipóteses estatísticas é uma ferramenta que permite resolver questões deste tipo. Neste caso, a hipótese será que o resultado médio quando usada a temperatura t_1 é maior que o resultado médio quando usada a temperatura t_2. Repare que não é dado ênfase à estimação dos resultados; em vez disso, a atenção é dirigida para a conclusão que se pode retirar acerca da hipótese formulada sobre os resultados médios.

Comecemos por definir *amostra aleatória*, conceito fundamental na inferência estatística. Mais tarde veremos o conceito de *estimador* e *estimativa* de um parâmetro, e finalmente iremos calcular a precisão da estimativa de um parâmetro usando um *intervalo de confiança*.

1.2 População e amostra aleatória

1.2.1 População

Exemplo 1.1 *Consideremos o conjunto de alunos da FCT/UNL e a informação acerca do ano de licenciatura em que encontram. Admitamos que 40% dos alunos estão no 1º ano, 30% estão no 2º ano, 20% no 3º ano e 10% no 4º ano. Se formos escolher um aluno ao caso e registarmos o seu ano de licenciatura, então poderá ocorrer um valor X =ano de licenciatura, com a seguinte função de probabilidade*

$$X\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{array}\right.$$

Se o objectivo for estudar o ano de licenciatura em que se encontram os alunos da FCT/UNL, esse objectivo consiste em estudar a v.a. X.

Esse estudo poderá consistir na estimação da função de probabilidade de X ou, por exemplo, na estimação do ano esperado de licenciatura de um aluno, ou na estimação do desvio padrão de X, ou na estimação do ano de licenciatura em que se encontram pelo menos 80% dos alunos, etc.

No fundo o estudo incide sobre a v.a. X ou seja sobre a população X de ano de licenciatura dos alunos da FCT/UNL.

Definição 1.1 *Uma **população** consiste na totalidade das observações do fenómeno em estudo.*

Em cada problema, a população pode ser pequena, grande ou infinita. O número de observações na população é designado por *dimensão da população*. Por exemplo, o número de garrafas não completamente cheias produzidas por dia numa companhia de refrigerantes é uma população finita. As observações obtidas por medição do nível diário de monóxido de carbono é uma população infinita.

A estatística dedica-se ao estudo da população, ou seja ao estudo da repartição de probabilidades dos seus valores. Se representarmos por X o conjunto dos valores da população, estudar X será estudar a sua repartição de probabilidades, portanto será estudar as características probabilísticas de uma v.a. X, ou melhor dizendo será estudar a distribuição de uma v.a. X.

Esse estudo poderá passar pela estimação da própria função de distribuição de X, ou pelo estudo do valor do parâmetro de uma certa função de distribuição que se admite ser a mais correcta para X.

Por exemplo, um engenheiro pode considerar que a população das resistências de um elemento do chassis tem distribuição normal com valor médio μ e variância σ^2. (Quando consideramos este pressuposto, dizemos que temos uma *população normal* ou uma população normalmente distribuída.) O seu objectivo é agora estimar a resistência média μ desse elemento do chassis.

1.2.2 Amostra

Na maioria da situações, é impossível ou impraticável observar a totalidade da população. Por exemplo, não poderíamos estudar a resistência do elemento do chassis, considerando toda a população, porque isso seria demasiado demorado e dispendioso. Além do mais, alguns (por ventura todos) desses elementos não existiriam ainda, no momento em que queremos tirar uma conclusão acerca da sua resistência média.

Portanto, vamos apenas seleccionar alguns elementos da população, e com o estudo das características destas observações, tirar ilacções sobre as características de toda a população.

Ficamos dependentes de um conjunto de observações da população, para podermos tomar decisões acerca dessa mesma população.

Definição 1.2 *Uma* ***amostra*** *é um conjunto de observações seleccionadas ao acaso de uma população.*

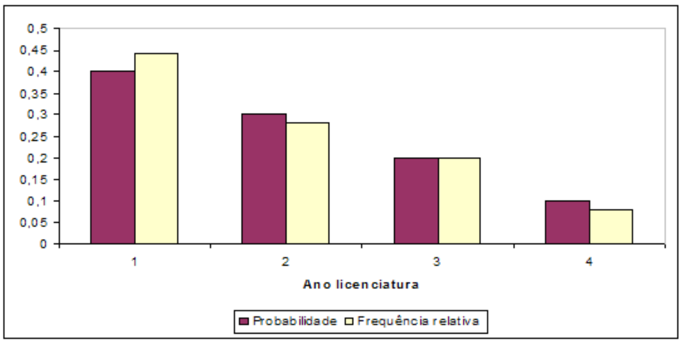
Exemplo 1.2 *Admitamos que para estudar* X =*ano de licenciatura dos alunos da FCT/UNL, se recolheu uma amostra de anos de licenciatura de 50 alunos. Destes, 22 estão no 1º ano, 14 no 2º ano, 10 no 3º ano e 4 no 4º ano. O conjunto de frequências relativas desta amostra constitui uma estimativa da função de probabilidade de* X.

Valores amostrais	1	2	3	4	*Total*
Frequência absoluta	22	14	10	4	50
Frequência relativa	0.44	0.28	0.20	0.08	1.00

Se fôssemos analisar a totalidade dos alunos da FCT/UNL, obteríamos

$$X \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{array} \right.$$

Figura 1.1: Função de probabilidade da população e da amostra



Para que as nossas inferências sejam válidas, a amostra deve ser representativa da população. É por vezes tentador, seleccionar as observações de um modo que seja cómodo ou aplicar critérios na sua escolha. Estas atitudes podem introduzir uma tendência na amostra provocando estimativas sub-avaliadas ou sobre-avaliadas. Para evitar estes problemas, é desejável seleccionar uma *amostra aleatória* de acordo com um mecanismo de escolha ao acaso. Assim sendo, a selecção de uma amostra deve ser resultado de uma experiência aleatória e cada observação dessa amostra é então um valor observado de uma variável aleatória. O modo como se distribuem as observações na população determina a função de distribuição desta variável aleatória.

Exemplo 1.3 *Se de facto a função de probabilidade de X é*

$$X \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{cases}$$

então será escolhido um aluno de 1º ano com probabilidade 0.4, um aluno do 2º ano com probabilidade 0.3, etc.

Importa agora falarmos do conceito de *amostra aleatória*. Para definirmos uma amostra aleatória, seja X uma variável aleatória que representa o resultado da selecção de uma observação da população. Seja F a função de distribuição de X. Suponhamos que cada observação da amostra é obtida de modo independente, e nas mesmas condições. Isto é, as observações da amostra são obtidas como se observássemos X, independentemente e sob as mesmas condições, por n vezes. Seja X_i a variável aleatória que representa a i-ésima réplica. Então $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constituem uma amostra aleatória e os valores que se obtêm por concretização desta amostra aleatória são representados por $x_1, x_2, \ldots, x_n$. As variáveis aleatórias que constituem a amostra aleatória são independentes e têm todas a mesma função de distribuição F, uma vez que se admite que cada observação da amostra é obtida nas mesmas condições.

Exemplo 1.4 *Se no estudo de X = ano de licenciatura dos alunos da FCT/UNL, optássemos por seleccionar uma amostra de 3 alunos, então X_1 representa o ano de licenciatura do 1º aluno que viermos a seleccionar. Claro que, se a função de probabilidade de X for*

$$X \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{cases}$$

então este o ano de licenciatura deste 1º aluno terá função de probabilidade

$$X_1 \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{cases}$$

O ano de licenciatura do 2º aluno que viermos a seleccionar terá função de probabilidade

$$X_2 \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{cases}$$

e o ano de licenciatura do 3º aluno que viermos a escolher terá função de probabilidade

$$X_3 \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{cases}$$

Se a escolha destes 3 alunos for perfeitamente casual, então X_1, X_2 e X_3 são v.a.'s independentes e todas igualmente distribuídas.

Admitamos que, após a escolha dos alunos, se observaram os valores $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 1$. Isto significa que a amostra aleatória (X_1, X_2, X_3) foi concretizada na amostra observada $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 1)$.

Definição 1.3 *As variáveis aleatórias* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *constituem uma* ***amostra aleatória*** *de dimensão* n*, se*

(a) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *são variáveis aleatórias independentes;*

(b) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *são variáveis aleatórias com a mesma função de distribuição.*

Capítulo 2

Estimação Pontual

2.1 Estatísticas

Muitas vezes o propósito da recolha da amostra consiste em obtermos informação acerca do valor dos parâmetros da distribuição da população, caso tenham valor desconhecido. Essa informação é obtida por estimação dos parâmetros, ou seja pela utilização de estatísticas adequadas ao tipo de parâmetros em causa.

Por exemplo, o engenheiro ao considerar que a população das resistências de um elemento do chassis tem distribuição normal, só pretende saber algo acerca da resistência média do elemento do chassis, por isso só pretende estimar o valor médio μ desta distribuição normal. Precisa neste caso de uma estatística para estimar μ.

Suponhamos, por exemplo, que pretendemos chegar a uma conclusão acerca da proporção de pessoas em Portugal que preferem, uma marca de refrigerante, em particular. Representemos por p o valor desconhecido desta proporção. Sendo impraticável interrogar todos os portugueses para determinarmos o verdadeiro valor de p, vamos inferir o seu valor à custa de uma amostra (de tamanho conveniente) e usando a proporção observada $\hat{p}$, de pessoas que nesta amostra preferem aquela marca de refrigerante.

A proporção amostral, $\hat{p}$, é calculada dividindo o número total de indivíduos da amostra que preferem a marca de refrigerante, pelo total de indivíduos na amostra (*dimensão da amostra*). Assim sendo, $\hat{p}$ é uma função dos valores observados na amostra. Mas como é possível seleccionar muitas e variadas amostras de uma população, o valor de $\hat{p}$ poderá variar de amostra para amostra. Isto é, $\hat{p}$ é uma variável aleatória a que se dá o nome de estatística.

Definição 2.1 *Uma **estatística** é uma função das variáveis de uma amostra aleatória.*

Veremos mais tarde, outros exemplos importantes de estatísticas. Uma vez que uma estatística é uma variável aleatória, necessariamente terá uma função de distribuição. A essa função de distribuição é dado o nome de *distribuição de amostragem da estatística*. A noção de distribuição de amostragem é muito importante e será abordada em todos os capítulos e secções futuras.

Uma aplicação muito importante da estatística consiste na *estimação pontual* de parâmetros tais como o valor médio de uma população ou como a variância de uma população. Quando se discutem problemas de inferência estatística sobre parâmetros de uma população é conveniente representar de um modo especial esses mesmos parâmetros. Como tal é usual representá-los por uma letra grega. Por exemplo, μ para o valor médio de uma população, σ para o desvio padrão de uma população. O objectivo da estimação pontual de um parâmetro θ, consiste na atribuição de um valor numérico, baseado na informação da amostra, que seja um valor plausível para o parâmetro θ. Esse valor numérico será usado como estimativa pontual do parâmetro.

Em geral, se X é uma população com função de distribuição F, caracterizada por um parâmetro θ de valor desconhecido, e se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de dimensão n da população X, então a estatística $\hat{\Theta} = h\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ é denominada *estimador pontual* de θ. Repare que $\hat{\Theta}$ é uma variável aleatória, porque é função de variáveis aleatórias. Após uma amostra ter sido seleccionada, $\hat{\Theta}$ toma um valor numérico particular $\hat{\theta}$ chamado *estimativa pontual* de θ.

Definição 2.2 *Uma **estimativa pontual** do parâmetro θ de uma população é um único valor numérico $\hat{\theta}$ de uma estatística $\hat{\Theta}$.*

Exemplo 2.1 *Regressemos ao exemplo do ano de licenciatura dos alunos da FCT/UNL.*

Suponhamos que queríamos saber qual o ano médio de licenciatura em que se encontram estes alunos.

Se analisássemos toda a população, saberíamos que X tem função de probabilidade

$$X \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{array} \right.$$

e portanto saberíamos que

$$\mu = E\left(X\right) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.1 = 2\ ^{o}\ ano$$

Mas de facto, o que conhecemos é a amostra

Valores amostrais	1	2	3	4	*Total*
Frequência absoluta	22	14	10	4	50

Como tal podemos, quando muito apresentar uma estimativa pontual de μ, usando a estatística $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

$$\overline{x} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i = \frac{1}{50}\left(1 \times 22 + 2 \times 14 + 3 \times 10 + 4 \times 4\right) = \frac{96}{50} = 1.92\ ano$$

2.2 Exemplo de estatísticas

De entre os muitos parâmetros que caracterizam uma população, ou dito de outra forma, que caracterizam a função de distribuição da variável aleatória X que representa uma população, os mais comuns são os parâmetros que correspondem ao valor médio e à variância da população (ou de X). Por esta razão, apresentamos os estimadores mais comuns (e melhores de acordo com certos critérios estatísticos fora do nosso âmbito de estudo) para o valor médio e para a variância de uma população. Consideremos $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de X.

Estimador do valor médio μ de uma população X

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Estimador da variância σ^2 de uma população X

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 + \left(X_2 - \overline{X}\right)^2 + \ldots + \left(X_n - \overline{X}\right)^2}{n-1}$$

que também pode ser escrito e calculado por

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - n\overline{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\left(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2\right) - n\overline{X}^2\right)$$

Estimador do desvio padrão σ de uma população X

$$S = +\sqrt{S^2}$$

As estimativas pontuais destes parâmetros, representar-se-ão por $\overline{x}$, s^2 e s, respectivamente.

Estimador da proporção (ou probabilidade) p de realização de um acontecimento A

Se numa amostra de dimensão n, se observa K vezes o acontecimento A, o estimador de p é

$$\hat{P} = \frac{K}{n}$$

2.3 Estimação pontual do valor médio $\mu = E(X)$ da população X

Admitamos que a população X tem um valor médio $\mu = E(X)$ (desconhecido) e uma variância $\sigma^2 = V(X)$. Face a uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ da população X, podemos estimar o valor médio μ através do estimador

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

Contudo os valores de $\overline{X}$ dependem directamente da amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Assim $\overline{X}$ é uma variável aleatória e portanto sofrerá de uma certa variabilidade. É desejável que essa variabilidade seja pequena de modo a que tenhamos algumas garantias de que os valores das estimativas de μ, $\overline{X}$, não se afastem muito do verdadeiro valor de μ.

Para medirmos a variabilidade de uma qualquer variável aleatória já sabemos que podemos usar a variância dessa mesma variável aleatória. Assim para medirmos a variabilidade de $\overline{X}$, podemos considerar a sua variância, $V\left(\overline{X}\right)$, que passamos a determinar.

Se $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é a amostra aleatória que nos dará a informação para o cálculo de $\overline{X}$, então sabemos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e todas com a mesma distribuição, distribuição essa que será a distribuição da população X em estudo.

Assim sendo, sabemos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e todas com o mesmo valor médio $E(X_i) = E(X) = \mu$ e a mesma variância $V(X_i) = V(X) = \sigma^2$. Como tal

$$V\left(\overline{X}\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Consequentemente, a variabilidade de $\overline{X}$ é dada por σ^2/n.

Quando pretendemos dar a conhecer a precisão associada a um determinado estimador, devemos indicar a variabilidade desse estimador, mas essa variabilidade deve ser expressa na mesma escala de medição que a associada ao estimador. Por exemplo, se estamos a estimar a altura média dos habitantes de um país e a escala de medição escolhida são centímetros, então a indicação sobre a variabilidade das estimativas da altura média também deve ser fornecida em centímetros. Em resumo, a variabilidade de um estimador deve ser expressa através do desvio padrão desse estimador, e a que se dá o nome de *erro padrão* do estimador e se representa por SE.

No caso do estimador $\overline{X}$ do valor médio μ da população X, a precisão deste estimador é dada pelo respectivo erro padrão, ou seja por

$$SE\left(\overline{X}\right) = \sqrt{V\left(\overline{X}\right)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Se a variância da população $\sigma^2 = V(X)$ tiver um valor desconhecido, não podemos conhecer o valor do erro padrão. Neste caso, podemos aceder a um valor estimado do erro padrão, substituindo σ^2 pelo seu estimador S^2, e obter desta maneira o *erro padrão estimado*, SE^*

$$SE^*\left(\overline{X}\right) = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Sobre o estimador $\overline{X}$ do valor médio μ, terá ainda interesse saber algo sobre o seu valor médio. Determinemos então o valor médio de $\overline{X}$.

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{n\mu}{n} = \mu.$$

Este resultado permite-nos dizer que se considerássemos todas as amostras de dimensão n que é possível seleccionar de uma população, e para cada uma delas determinássemos a respectiva média, o conjunto formado pelos valores de todas essas médias tem um ponto de equilíbrio que coincide com o ponto de equilíbrio da população (e que sabemos ser $\mu = E(X)$).

Exemplo 2.2 *O número de defeitos num painel metálico usado na construção de automóveis tem distribuição de Poisson. Seleccionada uma amostra do nº de defeitos em 10 paineis, obteve-se os seguintes valores:* $(2, 7, 15, 8, 7, 6, 3, 7, 3, 4)$.

Se pretendermos estimar o parâmetro da distribuição da população, como sabemos que esta é Poisson e o parâmetro da distribuição de Poisson coincide com o valor médio desta distribuição, então o problema resume-se à estimação do valor médio da população.

Assim, para a amostra obtida, a estimativa do parâmetro será:

$$\overline{x} = \frac{2+7+15+8+7+6+3+7+3+4}{10} = \frac{62}{10} = 6.2$$

ou seja, estimamos que seja de 6.2 o nº médio de defeitos por painel.

Quanto ao erro padrão da nossa estimativa, como a variância da população é desconhecida, quando muito podemos adiantar um erro padrão estimado.

A variância amostral, é calculável por

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 2^2 + 7^2 + 15^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 3^2 + 4^2 = 510$$

$$s^2 = \frac{1}{10-1}\left(510 - 10 \times 6.2^2\right) = \frac{125.6}{9} = 13.95555(5)$$

pelo que o erro padrão estimado é de

$$SE^*(\overline{x}) = +\sqrt{\frac{s^2}{10}} = 1.181336343.$$

Podemos interpretar estes resultados, dizendo que o nº médio de defeitos por painel é estimado em 6.2 com uma margem de erro de mais ou menos 1 defeito por painel.

2.4 Métodos para determinação de estimadores

2.4.1 Método dos momentos

Momentos centrados

Definição 2.3 *Seja* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *uma amostra aleatória de uma população* X*. Considere* $\mu \equiv E(X)$ *e* $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$*. Define-se:*

- *momento centrado de ordem* r *por*

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)\right]^r, \quad r \in \mathbb{N}.$$

- *momento amostral centrado de ordem* r *por*

$$M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^r, \quad r \in \mathbb{N}$$

Observações:

- $\mu_1 = 0$ porque $\mu_1 = E\left[(X-\mu)\right]^1 = \mu - \mu = 0$;
- $\mu_2 = V(X)$ porque $\mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$

Método dos momentos

Se X é uma população cuja distribuição depende de k parâmetros, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, o seu valor médio $E(X)$ e os seus momentos centrados são função destes k parâmetros:

$$E(X) = \psi_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k), \quad \mu_r = \psi_r(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k), \quad r = 2, 3, \ldots.$$

O método dos momentos consiste em:

A Construírmos um sistema de k equações onde igualamos aqueles momentos da população aos respectivos estimadores,

$$\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ \mu_2 = M_2 \\ \mu_3 = M_3 \\ \vdots \\ \mu_k = M_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \bar{X} \\ \psi_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = M_2 \\ \psi_3(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = M_3 \\ \vdots \\ \psi_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = M_k \end{cases}$$

B Resolvermos o sistema de equações em ordem ás incógnitas $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$.

Admitindo que o sistema tem uma única solução, então $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_k^*$ são os *estimadores dos momentos* dos parâmetros $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, respectivamente.

Propriedade de invariância dos estimadores dos momentos: Se θ^* é um estimador dos momentos de θ e $h(\theta)$ é uma função biunívoca de θ, então $h(\theta^*)$ é um estimador dos momentos de $h(\theta)$.

Exemplo 2.3 *Seja* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *uma amostra aleatória de uma população* X *com distribuição* $U(a,b)$. *Determinemos os estimadores de momentos* a^* *e* b^*, *dos parâmetros* a *e* b.

Como sabemos, se $X \sim U(a,b)$, *então* $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ *e* $\mu_2 = V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$. *Assim*

$$\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ V(X) = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{2} = \bar{X} \\ \frac{(b-a)^2}{12} = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \bar{X} - \sqrt{3\,M_2} \\ b = \bar{X} + \sqrt{3\,M_2} \end{cases}$$

Repare que $M_2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \dfrac{n-1}{n}S^2.$

Os estimadores de momentos para a *e* b *são, respectivamente* $\begin{cases} a^* = \bar{X} - \sqrt{\dfrac{3(n-1)}{n}}\,S \\ b^* = \bar{X} + \sqrt{\dfrac{3(n-1)}{n}}\,S \end{cases}.$

2.4.2 Método da máxima verosimilhança

O método da máxima verosimilhança dá origem a estimadores com mais qualidade do que os estimadores dos momentos. Contudo é frequente os dois métodos possibilitarem os mesmos estimadores.

Para a explanação deste método é obrigatório conhecer a função de verosimilhança e entender o seu significado. É também necessário entender o príncipio associado a este método. Neste sentido, começamos por explorar um exemplo.

Exemplo 2.4 *Considere* X *é uma população com distribuição Binomial de parâmetros* $(2, 1/4)$. *A sua função de probabilidade é:*

$$X \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{9}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} \end{cases}$$

Assim podemos dizer que ao seleccionarmos uma observação de X, *o valor mais provável de ser obtido é* $x = 0$.

Suponhamos agora que a probabilidade de sucesso, θ, *pode assumir valores* $\theta = 1/4$ *ou* $\theta = 1/2$. *No quadro seguinte apresentamos a função de probabilidade de* X *para os dois valores de* θ:

x	0	1	2
$P(X = x\,\vert\theta = 1/4)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$
$P(X = x\,\vert\theta = 1/2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Quando se selecciona uma observação de X *e o resultado é* $x = 1$, *partindo do princípio de que se obtem este valor porque é o mais provável de ser observado, então* θ *deverá ser igual a* $1/2$ *porque*

$$P(X = 1\,|\theta = 1/2) > P(X = 1\,|\theta = 1/4).$$

Admitamos por fim que a probabilidade de sucesso é θ e que não se conhece o seu valor. X terá distribuição Binomial de parâmetros $(2,\theta)$ e a sua função de probabilidade é

$$f(x\,|\theta) = P(X = x\,|\theta) = \binom{2}{x}\theta^x(1-\theta)^{2-x}, \quad x = 0,1,2, \qquad 0<\theta<1.$$

Se novamente obtivermos $x = 1$ na selecção de uma observação de X, e repetindo o princípio de que se obtem este valor porque é o mais provável de ser observado, então θ deverá ser o valor que torna máxima a

$$P(X = 1\,|\theta) = 2\theta(1-\theta), \quad 0<\theta<1.$$

Como $\dfrac{d}{d\theta}2\theta(1-\theta) = 0 \Leftrightarrow 2(1-2\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 1/2$ e $\dfrac{d^2}{d\theta^2}2\theta(1-\theta) = -4 < 0$, então $P(X = 1\,|\theta)$ tem valor máximo para $\theta = 1/2$.

Continuemos a considerar o caso da probabilidade de sucesso θ ter um valor desconhecido e admitamos que se selecciona uma amostra de duas observações de X. Sendo (X_1,X_2) a amostra aleatória associada e se a amostra observada foi $(2,1)$, então a sua probabilidade de realização é

$$\begin{aligned}
L(\theta;(2,1)) &= P(X_1 = 2; X_2 = 1\,|\theta) = \underbrace{P(X_1 = 2\,|\theta)\,P(X_2 = 1\,|\theta)}_{\text{porque } X_1 \text{ e } X_2 \text{ são independentes}} = \\
&= \underbrace{P(X = 2\,|\theta)\,P(X = 1\,|\theta)}_{\text{porque } X_1 \text{ e } X_2 \text{ têm a mesma diistribuição que } X} = f(2\,|\theta)\,f(1\,|\theta) = \\
&= \underbrace{\theta^2}_{P(X=2|\theta)}\ \underbrace{2\theta(1-\theta)}_{P(X=1|\theta)} = 2\theta^3(1-\theta)
\end{aligned}$$

A função $L(\theta;(2,1))$ é designada por função de verosimilhança da amostra $(2,1)$.

Mantendo o príncipio de que a amostra $(2,1)$ foi seleccionada por ser a mais provável, então o valor de θ será o valor que corresponde ao máximo da função de verosimilhança da amostra $(2,1)$. Teremos então de determinar o valor de θ correspondente ao:

$$\max_{0<\theta<1} L(\theta;(2,1)) = \max_{0<\theta<1} 2\theta^3(1-\theta).$$

Uma vez que $\dfrac{d}{d\theta}L(\theta;(2,1)) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{d\theta}2\theta^3(1-\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\theta^2(3-4\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 3/4$ e que $\dfrac{d^2}{d\theta^2}L(\theta;(2,1))\,\big|_{\theta=3/4} < 0$, então $\theta = 3/4$.

Generalizemos agora este exemplo e consideremos que se seleccionam ao acaso e com reposição n observações da população $X \sim B(2,\theta)$. Sendo $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ a amostra aleatória associada a essas *selecções, a probabilidade de ser observada a amostra* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *é:*

$$\begin{aligned}
L(\theta; (x_1, x_2, \ldots, x_n)) &= P(X_1 = x_1; X_2 = x_2; \ldots; X_n = x_n \,|\theta) = \\
&= \underbrace{P(X_1 = x_1 \,|\theta) \times P(X_2 = x_2 \,|\theta) \times \ldots \times P(X_n = x_n \,|\theta)}_{\textit{porque } X_1,\ldots X_n \textit{ são independentes}} = \\
&= \underbrace{P(X = x_1 \,|\theta) \times P(X = x_2 \,|\theta) \times \ldots \times P(X = x_n \,|\theta)}_{\textit{porque } X_1,\ldots X_n \textit{ têm a mesma diistribuição que } X} = \\
&= \prod_{i=1}^{n} f(x_i \,|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \binom{2}{x_i} \theta^{x_i} (1-\theta)^{2-x_i} = \\
&= \prod_{i=1}^{n} \binom{2}{x_i} \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i} \prod_{i=1}^{n} (1-\theta)^{2-x_i} = \prod_{i=1}^{n} \binom{2}{x_i} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} 2-x_i} = \\
& \textit{considerando } \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \\
&= \prod_{i=1}^{n} \binom{2}{x_i} \theta^{n\overline{x}} (1-\theta)^{n(2-\overline{x})}
\end{aligned}$$

Assim, a função de verosimilhança de uma amostra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *da população* $X \sim B(2, \theta)$ *é:*

$$\begin{aligned}
L(\theta; (x_1, \ldots, x_n)) &= \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \binom{2}{x_i}}_{A \equiv A((x_1,\ldots,x_n))} \theta^{n\overline{x}} (1-\theta)^{n(2-\overline{x})}, \quad 0 < \theta < 1, \quad x_i \in \{0, 1, 2\}, \, i = 1, \ldots, n \\
&= A\theta^{n\overline{x}} (1-\theta)^{n(2-\overline{x})}, \quad 0 < \theta < 1, \quad x_i \in \{0, 1, 2\}, \, i = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Pelo príncipio da máxima verosimilhança, a amostra $(x_1, \ldots, x_n)$ *foi observada por ser a mais provável. O valor de* θ *que permitiu que ela fosse a mais provável é, o valor de* θ *que maximiza a função de verosimilhança de uma amostra* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*. Assim,* θ *terá um valor* θ_0 *tal que:*

$$L(\theta_0; (x_1, \ldots, x_n)) = \max_{0<\theta<1} L(\theta; (x_1, \ldots, x_n))$$

Recorrendo aos conhecimentos de Análise Matemática, θ_0 *será o valor de* θ *que satisfaz:*

$$\frac{d}{d\theta} L(\theta; (x_1, \ldots, x_n)) \,|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad 0 < \theta < 1 \quad e \quad \frac{d^2}{d\theta^2} L(\theta_0; (x_1, \ldots, x_n)) < 0$$

Contudo, a função de verosimilhança da amostra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *não é mais do que um produto de termos não negativos, pelo que*

$$L(\theta; (x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{1=1}^{n} P(X = x_i \,|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \,|\theta) > 0, \quad 0 < \theta < 1, \quad x_i \in \{0, 1, 2\}, \, i = 1, \ldots, n$$

Pela monotonia da função logaritmo neperiano e por o logaritmo do produto ser igual à soma dos logaritmos, encontrar o valor de θ que maximiza $L(\theta;(x_1,\ldots,x_n))$ é equivalente a determinar o valor de θ que maximiza a função log-verosimilhnça da amostra $(x_1,\ldots,x_n)$,

$$\begin{aligned} l(\theta;(x_1,\ldots,x_n)) &= \ln L(\theta;(x_1,\ldots,x_n)) = \ln\left(\prod_{1=1}^{n} P(X=x_i\,|\theta)\right) = \ln\left(\prod_{1=1}^{n} f(x_i\,|\theta)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i\,|\theta), \end{aligned}$$

isto é, o valor θ_0 tal que:

$$\frac{d}{d\theta} l(\theta;(x_1,\ldots,x_n))\,|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad 0<\theta<1 \quad e \quad \frac{d^2}{d\theta^2} l(\theta_0;(x_1,\ldots,x_n)) < 0$$

Seguem-se os cálculos para este exemplo:

$$\begin{aligned} L(\theta;(x_1,\ldots,x_n)) &= \underbrace{\prod_{i=1}^{n}\binom{2}{x_i}}_{A\equiv A((x_1,\ldots,x_n))} \theta^{n\overline{x}}(1-\theta)^{n(2-\overline{x})}, \quad 0<\theta<1, \quad x_i\in\{0,1,2\}, \; i=1,\ldots,n \\ &= A\theta^{n\overline{x}}(1-\theta)^{n(2-\overline{x})}, \quad 0<\theta<1, \quad x_i\in\{0,1,2\}, \; i=1,\ldots,n \\ l(\theta;(x_1,\ldots,x_n)) &= \ln L(\theta;(x_1,\ldots,x_n)) = \ln A + n\overline{x}\ln\theta + n(2-\overline{x})\ln(1-\theta) \\ \frac{d}{d\theta} l(\theta;(x_1,\ldots,x_n)) = 0 &\Leftrightarrow \frac{n\overline{x}}{\theta} - \frac{n(2-\overline{x})}{1-\theta} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\overline{x}}{2} \\ \frac{d^2}{d\theta^2} l(\theta_0;(x_1,\ldots,x_n)) &= -n\left(\frac{\overline{x}}{\theta^2} + \frac{2-\overline{x}}{(1-\theta)^2}\right)\Big|_{\theta=\frac{\overline{x}}{2}} < 0 \end{aligned}$$

Para uma amostra $(x_1,\ldots,x_n)$, o valor θ que maximiza a função de verosimilhança é $\theta_0 = \dfrac{\overline{x}}{2}$.

Para uma amostra aleatória $(X_1,\ldots,X_n)$ da população $X \sim B(2,\theta)$ o estimador de máxima verosimilhança de θ é $\hat{\theta} = \dfrac{\overline{X}}{2}$, com $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Função de verosimilhança

Passamos agora a apresentar a definição de função de verosimilhança.

Definição 2.4 (Função de verosimilhança)
Seja X uma população cuja distribuiçao depende do conhecimento do valor de um parâmetro θ. Para

uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *da população* X*, a função de verosimilhança de uma amostra observada* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *é:*

$$L(\theta; (x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta)$$

sendo:

1. $f(x|\theta) = P(X = x|\theta)$*, a função de probabilidade de* X *quando* X *é uma população discreta;*
2. $f(x|\theta)$ *a função densidade de probabilidade de* X*, quando* X *é uma população absolutamente contínua.*

Exemplo 2.5 *Considere* X *uma população com distribuição* $N(\mu, 4)$*. Relembre que a função densidade associada à distribuição de* X *é:*

$$f(x|\mu) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}(x-\mu)^2}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para uma amostra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de* X*,*

$$\begin{aligned} L(\mu) &\equiv L(\mu; (x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}(x_i-\mu)^2} = \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Vimos também no exemplo 2.4, a importância da função log-verosimilhança. Assim,

Definição 2.5 (Função de log-verosimilhança)
Seja X *uma população cuja distribuiçao depende do conhecimento do valor de um parâmetro* θ*. Para uma amostra aleatória* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *da população* X*, a função de log-verosimilhança de uma amostra observada* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *é:*

$$l(\theta; (x_1, \ldots, x_n)) = \ln L(\theta; (x_1, \ldots, x_n)),$$

definida para os valores $L(\theta; (x_1, \ldots, x_n)) > 0$*.*

Exemplo 2.6 *Na continuação do exemplo 2.5,*

$$\begin{aligned} l(\mu) &\equiv l(\mu; (x_1, \ldots, x_n)) = \ln \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n \\ &= -n \ln\left(2\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Estimador de máxima verosimilhança

Seja X uma população cuja distribuição depende de um parâmetro θ com valor desconhecido.

Ao seleccionarmos n observacões (ao acaso e com reposição) de X, com resultados $(x_1, \ldots, x_n)$, a função de verosimilhança desta amostra é:

$$L(\theta; (x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \,|\theta)$$

e corresponde à:

1. probabilidade da amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ da população X se concretizar na amostra $(x_1, \ldots, x_n)$;
2. função densidade conjunta da amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ da população X para a amostra observada $(x_1, \ldots, x_n)$.

O príncipio da máxima verosimilhança estabelece que a amostra $(x_1, \ldots, x_n)$ é a mais provável de ser observada pelo que θ deverá ter um valor que corresponda ao máximo de $L(\theta; (x_1, \ldots, x_n))$.

Assim, encontrar o estimador de máxima verosimilhança de θ será determinar o valor $\hat{\theta}$ de θ que torna máxima a função de verosimilhança, para qualquer amostra $(X_1, \ldots, X_n)$.

A função de verosimilhança, $L(\theta; (x_1, \ldots, x_n))$, deverá ser encarada como função de θ e, caso admita derivada para todos os valores de θ, encontrar o seu máximo corresponde a determinar o valor θ_0 que satisfaz:

$$\frac{d}{d\theta} L(\theta; (x_1, \ldots, x_n)) \,|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{d\theta^2} L(\theta; (x_1, \ldots, x_n)) \,|_{\theta=\theta_0} < 0 \tag{2.4.1}$$

No final deste processo, θ_0 será função da amostra $(x_1, \ldots, x_n)$, isto é $\theta_0 = T(x_1, \ldots, x_n)$.

O estimador de máxima verosimilhança de θ é então $\hat{\theta} = T(X_1, \ldots, X_n)$.

Para efeitos práticos, e uma vez que a função logaritmo é uma aplicação monótona crescente, o processo 2.4.1 de determinação do máximo da função de verosimilhança é equivalente ao processo de determinação do máximo da função log-verosimilhança. Assim, poderemos calcular $\theta_0 = T(x_1, \ldots, x_n)$, resolvendo:

$$\frac{d}{d\theta} l(\theta; (x_1, \ldots, x_n)) \,|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{d\theta^2} l(\theta; (x_1, \ldots, x_n)) \,|_{\theta=\theta_0} < 0 \tag{2.4.2}$$

após o que, $\hat{\theta} = T(X_1, \ldots, X_n)$ é estimador de máxima verosimilhança de θ.

Exemplo 2.7 *Na continuação dos exemplos 2.5 e 2.6, se μ tiver valor desconhecido e quisermos* *encontrar o seu estimador de máxima verosimilhança, seguem-se os cálculos necessários:*

$$\begin{aligned} l(\mu) &= -n\ln\left(2\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2, \quad \mu\in\mathbb{R}, \quad x_i\in\mathbb{R}, \quad i=1,\ldots,n. \\ \frac{d}{d\mu}l(\mu) &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = \frac{n}{4}(\overline{x}-\mu), \quad com\ \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \\ \frac{d}{d\mu}l(\mu)=0 &\Leftrightarrow \frac{n}{4}(\overline{x}-\mu)=0 \Leftrightarrow \mu=\overline{x} \\ \frac{d^2}{d\mu^2}l(\mu) &= -\frac{n}{4}<0 \end{aligned}$$

O estimador de máxima verosimilhança de μ é $\hat{\mu}=\overline{X}$, sendo $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

Observações:

1. Caso a função de verosimilhança, $L(\theta;(x_1,\ldots,x_n))$ (ou a função de log-verosimilhança, $l(\theta;(x_1,\ldots,x_n))$) não tenha derivada para todos os valores de θ, o seu máximo terá de ser determinado por uma análise que não envolva a sua derivada.

2. *Propriedade de invariância dos estimadores de máxima verosimilhança*: Se $\hat{\theta}$ é o estimador de máxima verosimilhança de θ e $h(\theta)$ é uma função biunívoca de θ, então $h\left(\hat{\theta}\right)$ é o estimador de máxima verosimilhança de $h(\theta)$.

2.5 Propriedades dos estimadores

Já atrás foi dito que, se X é uma população com função de distribuição F, caracterizada por um parâmetro θ de valor desconhecido, e se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de dimensão n desta população X, então a estatística $\hat{\Theta}=h(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ é denominada *estimador pontual* de θ. Repare que $\hat{\Theta}$ é uma variável aleatória, porque é função de variáveis aleatórias. Após uma amostra ter sido seleccionada, $\hat{\Theta}$ toma um valor particular $\hat{\theta}$ chamado *estimativa pontual* de θ.

Sendo $\hat{\Theta}$ uma variável aleatória, terá uma distribuição.

2.5.1 Distribuição de amostragem de um estimador

Definição 2.6 *A distribuição de um estimador pontual $\hat{\Theta}$ é designada por distribuição de amostragem.*

Exemplo 2.8 *Admita que a população X descreve o número diário de contas a prazo contratualizadas num determinado Banco. Se admitirmos que $X\sim P(\lambda)$ e se quisermos estimar o número médio*

$E(X)=\lambda$ de contas contratualizadas diariamente, ao propormos $\widehat{\Lambda}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ como estatística de avaliação do valor de $E(X)=\lambda$, a distribuição de amostragem de $\widehat{\Lambda}$ é:

$$\begin{aligned} P\left(\widehat{\Lambda}=y\right) &= P\left(\overline{X}=y\right)=P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=y\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=ny\right)= \\ &= e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^{ny}}{ny!}, \quad ny\in\mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

porque $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P(n\lambda)$.

Exemplo 2.9 *Admita que a população X descreve a largura (em mm) de uma tablete de chocolate produzida na fábrica ´´Cho". Se admitirmos que $X\sim N(\mu,4)$ e se quisermos estimar a largura média $E(X)=\mu$ das tabletes de chocolates produzidas na fábrica ´´Cho", ao propormos $\widehat{\mu}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ como estimador de $E(X)=\mu$, a distribuição de amostragem de $\widehat{\mu}$ é expressa pela sua distribuição. Sendo $(X_1,\ldots,X_n)$ uma amostra aleatória de $X\sim N(\mu,4)$, então $\widehat{\mu}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(\mu,\frac{4}{n}\right)$.*

Resumindo, a distribuição de amostragem de $\widehat{\mu}$ é: $\widehat{\mu}\sim N\left(\mu,\frac{4}{n}\right)$.

Como $\hat{\Theta}$ tem uma distribuição, podemos falar do $E\left(\hat{\Theta}\right)$, medida que indica a localização do ponto de equilíbrio da distribuição, da $V\left(\hat{\Theta}\right)$ e do desvio padrão $\sigma\left(\hat{\Theta}\right)$, quantidades estas que expressam a dispersão de $\hat{\Theta}$.

Estas medidas permitem estabelecer propriedades importantes para o estimador $\hat{\Theta}$.

2.5.2 Enviesamento

O estimador $\hat{\Theta}$ para o parâmetro θ é considerado um ´´bom"estimador se o valor que se espera que ele produza coincidir com o verdadeiro valor de θ. Dito de outro modo, $\hat{\Theta}$ é ´´bom"estimador de *theta* se $E\left(\hat{\Theta}\right)=\theta$.

Definição 2.7 *Um estimador $\hat{\Theta}$ para o parâmetro θ diz-se centrado (ou não enviesado) se $E\left(\hat{\Theta}\right)=\theta$.*

Definição 2.8 *O enviesamento de um estimador $\hat{\Theta}$ para o parâmetro θ é bias $\left(\hat{\Theta}\right)=E\left(\hat{\Theta}\right)-\theta$.*

Exemplo 2.10 *Suponhamos que X é uma população com distribuição exponencial de parâmetros $(\lambda,1)$ em que λ tem valor desconhecido.*

Dada uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *desta população, considerem-se os dois estimadores para* λ*:*

$$\hat{\lambda} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \quad e \quad \lambda^* = \bar{X} - 1$$

e analisemos o respectivo enviesamento. Como $\hat{\lambda} \sim E\left(\lambda, \frac{1}{n}\right)$*:*

$$E\left(\hat{\lambda}\right) = E\left(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = \lambda + \frac{1}{n}$$

$$E(\lambda^*) = E\left(\bar{X} - 1\right) = E(X) - 1 = \lambda + 1 - 1 = \lambda$$

Relativamente ao enviesamento, λ^* *é um ´´bom"estimador porque é centrado.*

O enviesamento de $\hat{\lambda}$ *é bias* $\left(\hat{\lambda}\right) = \lambda + \frac{1}{n} - \lambda = \frac{1}{n}$.

2.5.3 Eficiência e erro quadrático médio

O estimador $\hat{\Theta}$ para o parâmetro θ, será tanto ´´melhor"quanto menor for a sua dispersão em torno do verdadeiro valor de θ, isto é quanto menor for $E\left[\left(\hat{\Theta} - \theta\right)^2\right]$.

Defina-se então,

Definição 2.9 *O erro quadrático médio do estimador pontual* $\hat{\Theta}$ *do parâmetro* θ*, é*

$$EQM\left(\hat{\Theta}\right) = E\left[\left(\hat{\Theta} - \theta\right)^2\right].$$

Teorema 2.1 *Se* $\hat{\Theta}$ *é um estimador do parâmetro* θ*,*

$$EQM\left(\hat{\Theta}\right) = V\left(\hat{\Theta}\right) + \left(E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right)^2 = V\left(\hat{\Theta}\right) + \left(bias\left(\hat{\Theta}\right)\right)^2.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
EQM\left(\hat{\Theta}\right) &= E\left[\left(\hat{\Theta} - \theta\right)^2\right] = E\left[\left(\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right) + E\left(\hat{\Theta}\right)\theta\right)^2\right] = \\
&= \underbrace{E\left[\left(\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right)\right)^2\right]}_{V(\hat{\Theta})} + \left[\underbrace{E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta}_{bias(\hat{\Theta})}\right]^2 + 2E\left[\left(\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right)\right)\underbrace{\left(E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right)}_{bias(\hat{\Theta})}\right] = \\
&= V\left(\hat{\Theta}\right) + \left(bias\left(\hat{\Theta}\right)\right)^2 + 2\left[\underbrace{E\left(\hat{\Theta}\right) - E\left(\hat{\Theta}\right)}_{=0}\right] bias\left(\hat{\Theta}\right) = \\
&= V\left(\hat{\Theta}\right) + \left(bias\left(\hat{\Theta}\right)\right)^2 = V\left(\hat{\Theta}\right) + \left[E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right]^2
\end{aligned}$$

Se o estimador $\hat{\Theta}$ do parâmetro θ for um estimador centrado, isto é se $E\left(\hat{\Theta}\right) = \theta$, então

$$EQM\left(\hat{\Theta}\right) = E\left[\left(\hat{\Theta} - \theta\right)^2\right] = E\left[\left(\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right)\right)^2\right] = V\left(\hat{\Theta}\right).$$

pelo que, ele será tanto ´´melhor"quanto menor for a sua variância.

Se o estimador $\hat{\Theta}$ é estimador enviesado do parâmetro θ , isto é se $E\left(\hat{\Theta}\right) \neq \theta$, então

$$EQM\left(\hat{\Theta}\right) = E\left[\left(\hat{\Theta} - \theta\right)^2\right] = V\left(\hat{\Theta}\right) + \left[E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right]^2.$$

pelo que, ele será tanto ´´melhor"quanto menor for o seu erro quadrático médio.

Face a dois estimadores, não necessáriamente centrados, devemos optar pelo que apresenta menor erro quadrático médio.

Definição 2.10 *Dados dois estimadores $\hat{\Theta}$ e Θ^* para o mesmo parâmetro θ, dizemos que $\hat{\Theta}$ é melhor que Θ^* se,*

$$EQM\left(\hat{\Theta}\right) < EQM\left(\Theta^*\right).$$

Quando temos dois estimadores são centrados, o seu enviesamento é nulo, e então a comparação do seu erro quadrático médio acaba por ser a comparação da sua variância.

Definição 2.11 *Dados dois estimadores centrados $\hat{\Theta}$ e Θ^* para o mesmo parâmetro θ, dizemos que $\hat{\Theta}$ é mais eficiente que Θ^* se,*

$$V\left(\hat{\Theta}\right) < V\left(\Theta^*\right).$$

Definição 2.12 *Se $\hat{\Theta}$ é estimador de θ, o seu erro padrão é*

$$SE\left(\hat{\Theta}\right) = \sqrt{V\left(\hat{\Theta}\right)}.$$

Exemplo 2.11 *Na continuação do exemplo 2.10,*

$$\begin{aligned} EQM\left(\lambda^*\right) &= V\left(\lambda^*\right) = V\left(\overline{X} - 1\right) = V\left(\overline{X}\right) = \frac{V(X)}{n} = \frac{1}{n} \\ EQM\left(\hat{\lambda}\right) &= V\left(\hat{\lambda}\right) + bias^2\left(\hat{\lambda}\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2} \end{aligned}$$

Para $n \geq 3$, o estimador $\hat{\lambda}$ é ´´melhor"do que o estimador λ^* porque $EQM\left(\hat{\lambda}\right) < EQM\left(\lambda^*\right)$.

2.5.4 Consistência

Quando se procura um estimador $\widehat{\Theta}$ consistente para um parâmetro θ, a condição ´´mínima "que se deseja é a de que, ao aumentarmos a dimensão n da amostra o erro (ou seja, a precisão) do estimador diminua (isto é a sua precisão aumente). Definindo o erro (precisão) do estimador $\widehat{\Theta}$ por $\left|\widehat{\Theta}-\theta\right|$, ele será consistente se, para qualquer um erro $\delta \in \mathbb{R}^+$ fixo à priori:

$$\exists n_o \in \mathbb{N} \text{ tal que para } n \geq n_o: \quad P\left(\left|\widehat{\Theta}-\theta\right| < \delta\right) = 1.$$

Definição 2.13 *Um estimador $\widehat{\Theta}$ de um parâmetro θ é um estimador consistente de θ se e só se, qualquer que seja o valor real $\delta > 0$,*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\widehat{\Theta}-\theta\right| < \delta\right) = 1.$$

Vejamos um exemplo

Exemplo 2.12 *Admitamos que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é uma amostra aleatória de uma população X com distribuição $N(\mu, 4)$. Sendo desconhecido o valor de μ e adoptando para o estimador de μ, o estimador $\overline{X} = \frac{1}{n}X_i$, então:*

$$\overline{X} \text{ tem distribuição } N\left(\mu, \frac{4}{n}\right), \text{ ou seja } Z = \frac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

Para um valor real $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\overline{X}-\mu\right| < \delta\right) &= P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{n}}\right| < \frac{\delta}{2/\sqrt{n}}\right) = P\left(|Z| < \frac{\delta}{2/\sqrt{n}}\right) = P\left(-\frac{\delta}{2/\sqrt{n}} < Z < \frac{\delta}{2/\sqrt{n}}\right) = \\ &= P\left(Z \leq \frac{\delta}{2/\sqrt{n}}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\delta}{2/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{2/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{2/\sqrt{n}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\delta}{2/\sqrt{n}}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{\delta}{2/\sqrt{n}}\right)\right] = 1 - 2\Phi\left(\frac{\delta}{2/\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Quando $n \to +\infty$, $\frac{\delta}{2/\sqrt{n}} \to 0$ e como Φ é uma função monótona crescente, então

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi\left(\frac{\delta}{2/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\delta}{2/\sqrt{n}}\right) = \Phi(0).$$

Concluindo

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\overline{X}-\mu\right| < \delta\right) = 1, \quad \forall \delta \in \mathbb{R}^+,$$

e portanto $\overline{X} = \frac{1}{n}X_i$ é estimador consistente de μ.

Vamos agora ilustrar a aplicação prática desta propriedade. Admitamos que queremos estimar o valor médio μ da população com um erro que não exceda de $\delta = 0.05$, com probabilidade 0.95. A questão resume-se a determinar a dimensão mínima n da amostra que satisfaz

$$P\left(\left|\overline{X}-\mu\right|<0.05\right)=0.95 \Leftrightarrow 1-2\Phi\left(\frac{0.05}{2/\sqrt{n}}\right)=0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0.05}{2/\sqrt{n}}\right)=0.975 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{0.05}{2/\sqrt{n}}=\Phi^{-1}(0.975) \Leftrightarrow \frac{0.05}{2/\sqrt{n}}=1.96 \Leftrightarrow n \geq 6146.56$$

Quando pretendemos estimar um parâmetro θ, normalmente temos à nossa disposição muitos estimadores que são consistentes. Portanto, aquilo que devemos evitar é a utilização de estimadores que não são consistentes.

Segue-se uma regra prática de verificação da consistência de um estimador.

Teorema 2.2 *Seja $\widehat{\Theta}$ um estimador de um parâmetro θ. Se:*

1. $\lim_{n\to+\infty} E\left(\widehat{\Theta}\right)=\theta$;
2. $\lim_{n\to+\infty} V\left(\widehat{\Theta}\right)=0$

(isto é, se $\lim_{n\to+\infty} EQM\left(\widehat{\Theta}\right)=0$), então $\widehat{\Theta}$ é um estimador consistente de θ.

Exemplo 2.13 *Retomemos os exemplos 2.10 e 2.11. Como*

$$\begin{aligned} E(\lambda^*) &= \lambda \\ V(\lambda^*) &= \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$\lambda^* = \overline{X}-1$ é um estimador consistente de λ.

Como

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\lambda}\right) &= \lambda+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \\ V\left(\hat{\lambda}\right) &= \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$\hat{\lambda} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é um estimador consistente de λ.

2.5.5 Propriedades de $\bar{X}$, S^2 e $\hat{P}$

Apresentamos na tabela abaixo, os estimadores mais usados para o valor médio, variância e proporção, indicando também os respectivos valores médios e variâncias.

Tabela 2.1: Tabela de estimadores para o valor médio, variância, desvio padrão e proporção

Parâmetro θ	Estimador $\hat{\Theta}$	Valor médio do estimador $E\left(\hat{\Theta}\right)$	Variância do estimador $V\left(\hat{\Theta}\right)$
$\mu = E(X)$	$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	μ	$\frac{\sigma^2}{n}$
$\sigma^2 = V(X)$	$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$	σ^2	$\frac{\sigma^4}{n}\left(\alpha_4 - \frac{n-3}{n-1}\right)$
$p = P(A)$	$\hat{P} = \frac{K}{n}$	p	$\frac{p(1-p)}{n}$

α_4 é o coeficiente de curtose que tem o valor 3 para a distribuição normal.

Capítulo 3

Estimação por Intervalo de Confiança

3.1 Introdução

Em muitas situações, uma estimação pontual de um parâmetro não fornece informação suficiente sobre esse parâmetro. Vejamos o caso do exemplo 2.2. A estimativa pontual de μ, nº médio de defeitos por painel, foi $\overline{x} = 6.2$. Mas, é pouco provável que o verdadeiro nº médio de defeitos seja exactamente 6.2. Portanto é lógico que nos interroguemos acerca da proximidade desta estimativa relativamente ao verdadeiro nº médio, μ. Como se frisou na secção anterior, o erro padrão (ou o erro quadrático médio, quando o estimador não é centrado) já nos dará uma ideia da precisão da nossa estimativa. Outro tipo de abordagem passa por pretendermos garantir que, para uma grande "percentagem"de todas as amostras que possamos recolher, a diferença em valor absoluto entre a média amostral $\bar{X}$ e o valor médio μ, não ultrapassa um certo valor a (que corresponde ao erro máximo que desejamos para a estimação de μ). Se interpretarmos essa percentagem como a probabilidade de se recolher uma amostra que cumpra o anterior requisito e a representarmos por $1-\alpha$, então podemos equacionar o problema escrevendo:

$$P\left(\left|\bar{X}-\mu\right| \leq a\right) = 1-\alpha\,.$$

Como $\left|\bar{X}-\mu\right| \leq a \;\Leftrightarrow\; \bar{X}-a \leq \mu \leq \bar{X}+a$, então o que queremos encontrar é um intervalo $\left[\bar{X}-a, \bar{X}+a\right]$ que, com probabilidade $1-\alpha$ elevada, contenha o valor médio μ.

Designamos esse intervalo por intervalo de confiança $1-\alpha$ para μ e realizamos assim uma estimação de μ por intervalo de confiança (ou estimação intervalar de μ).

3.1.1 Intervalo de confiança $(1-\alpha)$

Definição 3.1 *Um intervalo de confiança $1-\alpha$ para um parâmetro θ (de valor desconhecido), é um intervalo da forma*

$$\left[L\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right), U\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right]$$

onde $L(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ são estatísticas (e variáveis aleatórias) que não dependem do valor de θ, e que satisfazem

$$P(L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq U(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 1 - \alpha.$$

O intervalo (aleatório) $[L(X_1, X_2, \ldots, X_n), U(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$ é chamado estimador intervalar para o parâmetro θ.

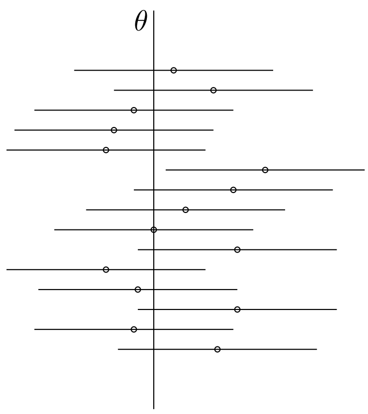
$L(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ são denominados limites de confiança *inferior e superior, respectivamente, e $(1-\alpha)$ é chamado* coeficiente *(ou nível)* de confiança *do intervalo.*

Representamos o intervalo de confiança $1-\alpha$ *para um parâmetro θ por*

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\theta) \equiv [L(X_1, X_2, \ldots, X_n), U(X_1, X_2, \ldots, X_n)].$$

Podemos interpretar um intervalo de confiança pensando que, se infinitas amostras forem seleccionadas e um intervalo de confiança $(1-\alpha)$ for calculado para cada uma delas, então $100(1-\alpha)$ desses intervalos contêm o verdadeiro valor de θ.

Esta situação é ilustrada na figura que se segue, que mostra diversos intervalos de confiança $(1-\alpha)$ para o parâmetro θ de uma população. Os pontos no centro dos intervalos indicam a estimativa pontual de θ (isto é, $\hat{\theta}$). Repare que um dos 15 intervalos falha em conter o verdadeiro valor de θ. Se estes fossem intervalos de 95% de confiança, de entre infinitos intervalos que calculássemos (com base em infinitas amostras) apenas 5% deles não iriam conter o verdadeiro valor de θ.



Na prática, nós só temos uma amostra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para a qual determinamos um intervalo de confiança $[l(x_1, x_2, \ldots, x_n), u(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$. Como este intervalo vai conter ou não o verdadeiro valor do parâmetro θ, não é razoável associar uma probabilidade a este acontecimento específico. O que devemos afirmar é que o intervalo observado $[l(x_1, x_2, \ldots, x_n), u(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ abrange o verdadeiro valor de θ com uma confiança de $(1-\alpha)$. Esta afirmação tem uma interpretação frequencista; isto é, nós não sabemos se, para uma amostra específica, a afirmação é verdadeira, mas o método usado para obter o intervalo $[l(x_1, x_2, \ldots, x_n), u(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ permite afirmações correctas $100(1-\alpha)$ das vezes.

A amplitude observada, $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) - l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de um intervalo de confiança observado é uma importante medida da qualidade da estimação do parâmetro. Em particular, a metade da amplitude do intervalo, designada por *precisão* da estimação por intervalo de confiança, é um indicador da dispersão da estimativa do parâmetro θ. Quanto maior for um intervalo de confiança, mais confiança temos de que esse intervalo contem de facto o verdadeiro valor de θ. Por outro lado, quanto maior for o intervalo de confiança, (menor precisão da estimação) menos informação temos acerca do verdadeiro valor de θ, uma vez que temos uma maior gama de valores possíveis para θ. A situação ideal reside num intervalo de pequena amplitude e com elevado coeficiente de confiança.

3.1.2 Método Pivotal

De seguida, apresentamos um método de construção de intervalos de confiança, designado por *método pivotal*. Para o pormos em prática é necessário encontrarmos ou conhecermos uma *variável pivot*.

Variável Pivot

Definição 3.2 *Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população cuja distribuição depende de um parâmetro θ. Consideremos a variável aleatória $W \equiv W(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta)$, função da amostra aleatória e de θ (e eventualmente de outros parâmetros de valor conhecido). Se a distribuição de W não depende de θ, então W é uma* variável pivot *para θ.*

Exemplo 3.1 *Se $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ for uma amostra aleatória de uma população $X \sim N(\mu, 5^2)$, então*

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{5^2/n}} \sim N(0,1)$$

Deste modo podemos afirmar que Z é uma variável pivot para μ, porque a distribuição de Z é sempre $N(0,1)$, qualquer que seja o valor de μ.

Exemplo 3.2 *Retomemos o exemplo 2.10. O estimador $\hat{\lambda} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de λ da população $X \sim E(\lambda, 1)$, tem distribuição $E\left(\lambda, \frac{1}{n}\right)$.*

Como $W = \hat{\lambda} - \lambda$ tem distribuição $E\left(0, \frac{1}{n}\right)$, então W é variável pivot porque, qualquer que seja o valor de λ, W tem sempre distribuição $E\left(0, \frac{1}{n}\right)$.

Exemplo 3.3 *Admita que X é uma população com distribuição de Poisson com parâmetro λ. Se λ tiver um valor desconhecido e o quisermos estimar, podemos considerar o seu estimador dos momentos $\lambda^* = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.*

Apelando o Teorema Limite Central, para $n \geq 30$,

$$W = \frac{\overline{X} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

Assim, W é uma variável pivot para λ porque qualquer que seja o valor de λ, W tem distribuição assintótica $N(0,1)$.

Método Pivotal

O *método pivotal* para determinação de um intervalo de confiança $1-\alpha$ para θ, consiste em:

I. Conhecer (ou encontrar) uma *variável pivot* $W \equiv W(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta)$ para θ;

II. A partir da distribuição de W, *determinar* valores a_1 e a_2, que satisfaçam $a_1 < a_2$ e

$$P(a_1 \leq W \leq a_2) = 1 - \alpha;$$

III. *Resolver* as desigualdades

$$a_1 \leq W(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta) \leq a_2$$

em ordem a θ, de modo a que

$$a_1 \leq W(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta) \leq a_2 \Leftrightarrow L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq U(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

sendo $L(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ estatísticas não dependentes de θ;

IV.

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\theta) \equiv [L(X_1, X_2, \ldots, X_n), U(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$$

é um *intervalo de confiança* $1-\alpha$ para θ.

Observação: *Normalmente* são usados coeficientes de confiança de 90%, 95% e 99%.

NOTA: Para um coeficiente de confiança $1-\alpha$ fixo, existem diferentes escolhas possíveis para as constantes a_1 e a_2. Sempre que possível devemos optar por usar aquelas que permitam que o intervalo de confiança tenha amplitude mínima.

- Quando a variável pivot $W \equiv W(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta)$ tem uma distribuição simétrica em torno de zero, obtemos um intervalo de amplitude mínima ao considerarmos: $a_1 < a_2$ e:

$$a_1 = -a_2 \quad \text{com } a_2 \quad \text{satisfazendo} \quad P(W > a_2) = \alpha/2. \tag{3.1.1}$$

- Se a variável pivot $W \equiv W(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta)$ não tem uma distribuição simétrica, não é simples determinar as constantes a_1 e a_2 que correspondam ao intervalo de confiança com amplitude mínima. Na prática, abdica-se deste objectivo, e opta-se por uma solução aproximada escolhendo as constantes a_1 e a_2 que satisfazem: $a_1 < a_2$ e

$$P(W \leq a_1) = \alpha/2 \quad \text{e} \quad P(W > a_2) = \alpha/2. \tag{3.1.2}$$

Nas secções que se seguem, vamos aplicar o método pivotal para a construção de intervalos de confiança para os casos mais comuns de aplicação, ou seja para a estimação intervalar de:

- Valor médio da população, $E(X) = \mu$;
- Variância da população, $V(X) = \sigma^2$;
- Proporção populacional de ocorrência de um acontecimento A, $p = P(A)$.

3.2 Estimação por intervalo de confiança do valor médio $\mu = E(X)$ da população X

Apliquemos os conceitos sobre intervalo de confiança expostos na secção anterior.

Agora o parâmetro θ será o valor médio $\mu = E(X)$, e adoptemos para estimador deste parâmetro, a média amostral,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

Determinar um intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para μ, consiste em determinar os limites de confiança $L \equiv L(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $U \equiv U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ que verificam a igualdade

$$P(L \leq \mu \leq U) = 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Também de acordo com o que foi dito, será a partir de $\overline{X}$ e da sua distribuição de amostragem, que poderemos deduzir os valores de L e de U.

Nas diversas situações que se seguem, vamos deduzir diversos intervalos de confiança para μ, pondo em prática o método pivotal.

Situação A Admitamos que se sabe que a população $\boldsymbol{X}$ tem distribuição **Normal** de valor médio μ (que se pretende estimar) e **variância σ^2 conhecida**.

I. Variável pivot

Se $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é uma amostra aleatória da população X, então $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com distribuição igual à da população X. Assim $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes e $X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right),\ \ i = 1, \ldots, n$.

Podemos então concluir que $\overline{X} \sim N\left(E\left(\overline{X}\right), V\left(\overline{X}\right)\right) \equiv N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$, e portanto que

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim N\left(0, 1\right).$$

Como σ^2 tem um valor conhecido,

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \quad \text{é uma variável pivot}$$

e tem distribuição Normal reduzida.

II. Determinação das constantes a_1 e a_2

Definição 3.3 *Seja $Z \sim N\left(0, 1\right)$. O quantil de probabilidade $1 - q$ da v.a. Z é o valor real z_q que satisfaz:*

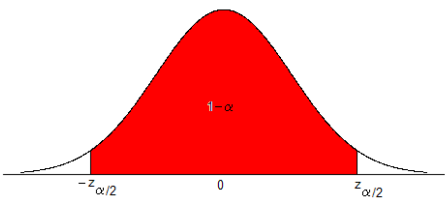
$$P\left(Z \leq z_q\right) = 1 - q, \quad 0 < q < 1.$$

Devido à distribuição da variável pivot Z ser simétrica em torno de zero e tendo em conta a nota 3.1.1, consideremos as constantes a_1 e a_2 que satisfazem $a_1 < a_2$ e

$$a_1 = -a_2 \quad \text{com } a_2 \quad \text{tal que} \quad P\left(Z > a_2\right) = \alpha/2.$$

De acordo com a anterior definição, $a_2 = z_{\alpha/2}$ e $a_1 = -z_{\alpha/2}$ (ver a figura 3.1).

Figura 3.1: Intervalos de confiança para o valor médio: Situações A, C e D



III. Resolução das desigualdades $a_1 \leq Z \leq a_2$ em ordem a μ

$$\begin{aligned} a_1 \leq Z \leq a_2 \quad &\Leftrightarrow \quad -z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \leq z_{\alpha/2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

IV. Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para μ

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) \equiv \left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para o valor médio μ
População normal com variância σ^2 conhecida

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) \equiv \left[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right]$$

Exemplo 3.4 *O tempo que uma máquina leva a executar a sua tarefa em cada peça produzida segue uma distribuição normal de desvio padrão igual a 3 segundos.*

Pretendendo-se estimar por intervalo de 95% de confiança, o tempo médio de execução das peças, recolheu-se uma amostra de tempos de execução de 25 peças, cuja média foi de 12 segundos.

Assim,

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975$$

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$$

$$\overline{x} = 12, \quad \sigma = 3, \quad n = 25$$

Intervalo de confiança 0.95 para μ

$$IC_{95\%}(\mu) = \left[12 - \frac{3}{\sqrt{25}}1.96, 12 + \frac{3}{\sqrt{25}}1.96\right] = [10.824, 13.176]$$

Podemos dizer com 95% de confiança , que o intervalo anterior inclui o verdadeiro tempo médio de execução das peças produzidas pela máquina.

Situação C Admitamos que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é uma amostra aleatória de dimensão $n \geq 30$, de uma população X cuja distribuição é desconhecida ou, sendo conhecida, não é normal, mas com variância σ^2 conhecida. Seja μ o valor médio da população X, que queremos estimar.

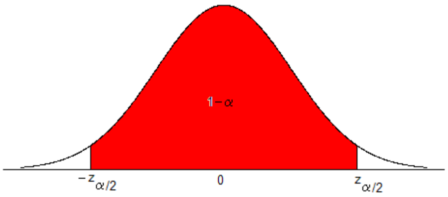
Apesar de se conhecer o valor da variância σ^2 isso por si só não permite o conhecimento da distribuição de $\overline{X}$. Contudo se a amostra for grande, isto é se tiver uma dimensão $n \geq 30$, por aplicação do Teorema Limite Central, podemos afirmar que

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

(tem uma distribuição aproximadamente normal reduzida).

Portanto, repetindo os raciocínios efectuados na dedução do intervalo da Situação A, obtemos um intervalo (assintótico) de confiança $(1-\alpha)$ para μ.

Figura 3.2: Intervalos de confiança para o valor médio: Situações A, C e D



Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para o valor médio μ
População com distribuição desconhecida ou conhecida mas não normal,
com variância σ^2 conhecida e $n \geq 30$

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) \equiv \left[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right]$$

Situação B Consideremos $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população X com distribuição normal de valor médio μ (que se pretende estimar) e variância σ^2 desconhecida.

Relativamente á Situação A, o que agora se altera é o facto da variância σ^2 ser desconhecida.

Se a variância σ^2 é desconhecida, podemos de imediato pensar em a substituir pela variância amostral, ou seja, por

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - n\overline{X}^2\right).$$

Como resultado desta substituição o intervalo que se obteve na Situação A passará a ter por expressão

$$\left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right].$$

Contudo, como S^2 é um estimador de σ^2, o seu valor pode não ser igual ao verdadeiro valor de σ^2. Dito de outro modo, a substituição de σ por S, no intervalo da Situação A, pode introduzir erro no intervalo, e como consequência, não temos garantias de que este novo intervalo permita a estimação de μ com a mesma confiança $(1-\alpha)$.

De facto o que está em causa é que $P\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$ é inferior a $(1-\alpha)$.

Para que esta probabilidade (confiança) continue a ser $(1-\alpha)$, devemos aumentar a amplitude do intervalo. O aumento do intervalo que garante que ele tenha uma confiança $(1-\alpha)$ é conseguido substituindo, no intervalo acima apresentado, $z_{\alpha/2}$ pelo quantil de probabilidade $(1-\alpha/2)$ da distribuição t (Student) com $(n-1)$ graus de liberdade, que representamos por $t_{n-1:\alpha/2}$.

Recorrendo ao método pivotal e tendo em conta a distribuição de amostragem de $\overline{X}$ apresentada na Situação B da secção 3.5.1 (resultado 3.5.5),

I. Variável pivot

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1}.$$

II. Determinação das constantes a_1 e a_2

Definição 3.4 *Seja W uma v.a. com distribuição t (t-Student) com m graus de liberdade, $W \sim t_m$. O quantil de probabilidade $1-q$ da v.a. W é o valor real $t_{m:q}$ que satisfaz:*

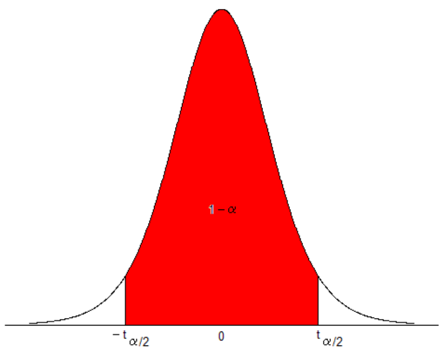
$$P\left(W \leq t_{m:q}\right) = 1 - q, \quad 0 < q < 1.$$

Devido à distribuição da estatística pivot T ser simétrica em torno de zero e tendo em conta a nota 3.1.1, consideremos as constantes a_1 e a_2 que satisfazem $a_1 < a_2$ e

$$a_1 = -a_2 \quad \text{com } a_2 \quad \text{tal que} \quad P\left(T > a_2\right) = \alpha/2.$$

De acordo com a anterior definição, $a_2 = t_{n-1:\alpha/2}$ e $a_1 = -t_{n-1:\alpha/2}$ (ver a figura 3.3).

Figura 3.3: Intervalos de confiança para o valor médio: Situação B



III. Resolução das desigualdades $a_1 \leq T \leq a_2$ em ordem a μ

$$\begin{aligned} a_1 \leq T \leq a_2 \quad &\Leftrightarrow \quad -t_{n-1:\alpha/2} \leq \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \leq t_{n-1:\alpha/2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{X} - t_{n-1:\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{n-1:\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

IV. Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para μ

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}\left(\mu\right) \equiv \left[\overline{X} - t_{n-1:\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1:\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para o valor médio μ
População normal com variância σ^2 desconhecida

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) \equiv \left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1:\alpha/2}, \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1:\alpha/2}\right]$$

Exemplo 3.5 *Uma amostra do peso de 8 animais alimentados com um determinado tipo de ração, forneceu os seguintes valores (em kg):*

4 6 4.5 4 5.6 6.2 5.8 6

Admitindo que o peso dos animais se comporta de acordo com uma distribuição normal, apresente uma estimativa por intervalo de 90% de confiança para o peso médio dos animais alimentados com este tipo de ração.

$$n = 8 \qquad \sum_{i=1}^{8} x_i = 42.1 \qquad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 227.69$$

$$\overline{x} = \frac{42.1}{8} = 5.2625 \qquad s^2 = \frac{1}{7}\left(227.69 - 8 \times 5.2625^2\right) = 0.8769657$$

$$s = +\sqrt{s^2} = 0.9364644$$

$$1 - \alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow \alpha/2 = 0.05 \quad t_{7:0.05} = 1.895$$

Intervalo de confiança 0.9 para o peso médio dos animais

$$IC_{90\%}(\mu) = \left[5.2625 - \frac{0.9364644}{\sqrt{8}} \times 1.895, 5.2625 + \frac{0.9364644}{\sqrt{8}} \times 1.895\right] = [4.63508414, 5.88991586]$$

Situação D Consideremos $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de dimensão $n \geq 30$, de uma população X cuja distribuição é desconhecida ou, sendo conhecida, não é normal e cuja variância σ^2 não é conhecida.

Relativamente á Situação C, o que agora se altera é o facto da variância σ^2 ser desconhecida. Se a variância σ^2 é desconhecida, podemos de imediato pensar em a substituir pela variância amostral, ou seja, por

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - n\overline{X}^2\right).$$

Como resultado desta substituição o intervalo que se obteve na Situação B passará a ter por expressão

$$\left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right].$$

Naturalmente que é introduzido um erro no intervalo, devido à substituição realizada. Contudo, como a estimação de σ^2 é feita a partir de uma amostra grande, a sua precisão é razoável, ou seja, não se introduz um erro apreciável neste intervalo ao substituir σ^2 pelo seu estimador S^2.

Por aplicação do método pivotal e tendo em conta a distribuição de amostragem de $\overline{X}$ apresentada na Situação D da secção 3.5.1 (resultado 3.5.6)vejamos quais as deduções envolvidas: Recorrendo ao método pivotal e tendo em conta a distribuição de amostragem de $\overline{X}$ apresentada na Situação C da secção 3.5.1 (resultado 3.5.7),

I. Variável pivot

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

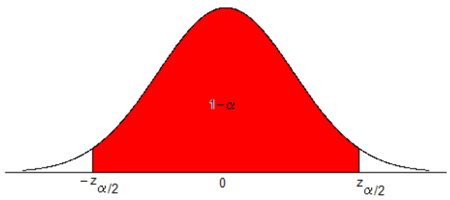
II. Determinação das constantes a_1 e a_2

Devido à distribuição da estatística pivot Z ser simétrica em torno de zero e tendo em conta a nota 3.1.1, consideremos as constantes a_1 e a_2 que satisfazem $a_1 < a_2$ e

$$a_1 = -a_2 \quad \text{com } a_2 \quad \text{tal que} \quad P(Z > a_2) = \alpha/2.$$

De acordo com a definição 3.3, $a_2 = z_{\alpha/2}$ e $a_1 = -z_{\alpha/2}$.

Figura 3.4: Intervalos de confiança para o valor médio: Situações A, B e D



III. Resolução das desigualdades $a_1 \le Z \le a_2$ em ordem a μ

$$\begin{aligned} a_1 \le Z \le a_2 \quad &\Leftrightarrow \quad -z_{\alpha/2} \le \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \le z_{\alpha/2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

IV. Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para μ

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) \equiv \left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para o valor médio μ
População com distribuição desconhecida ou conhecida mas não normal,
com variância σ^2 desconhecida e $n \ge 30$

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) \equiv \left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right]$$

3.3 Estimação por intervalo de confiança da variância $\sigma^2 = V(X)$ e do desvio padrão $\sigma = \sigma(X)$, da população X

Agora o parâmetro a estimar é a variância da população X, $\sigma^2 = V(X)$, e consideramos o seu estimador

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2.$$

Determinar um intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para σ^2, consiste em determinar os extremos L e U que verificam a igualdade

$$P\left(L \leq \sigma^2 \leq U\right) = 1-\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Será a partir de S^2 e da sua distribuição de amostragem, que poderemos deduzir os valores de L e de U.

I. Variável pivot

Consideremos uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ da população X. Quando a população *X tem distribuição $N(\mu, \sigma^2)$*, a estatística.

$$X^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}$$

tem distribuição do qui-quadrado com $(n-1)$ graus de liberdade (e escrevemos de modo abreviado, $X^2 = \dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$).

X^2 é uma variável pivot para σ^2.

II. Determinação das constantes a_1 e a_2

Observação: A distribuição do qui-quadrado não é simétrica.

Consideremos um coeficiente de confiança $(1-\alpha)$ e determinemos as constantes a_1 e a_2 que verificam

$$P\left(a_1 \leq X^2 \leq a_2\right) = 1 - \alpha.$$

Devido à não simetria da distribuição do qui-quadrado e de acordo com a nota 3.1.2, podemos considerar as constantes que satisfazem as condições:

$$P\left(X^2 \leq a_1\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad P\left(X^2 \geq a_2\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Definição 3.5 *Seja W uma v.a. com distribuição do qui-quadrado com m graus de liberdade, $W \sim \chi^2_m$. O quantil de probabilidade $1-q$ da v.a. W é o valor real $\chi^2_{m:q}$ que satisfaz:*

$$P\left(W \leq \chi^2_{m:q}\right) = 1 - q, \quad 0 < q < 1.$$

Os valores de a_1 e de a_2 podem ser lidos numa tabela da distribuição do qui-quadrado e, de acordo com a definição 3.5, serão:

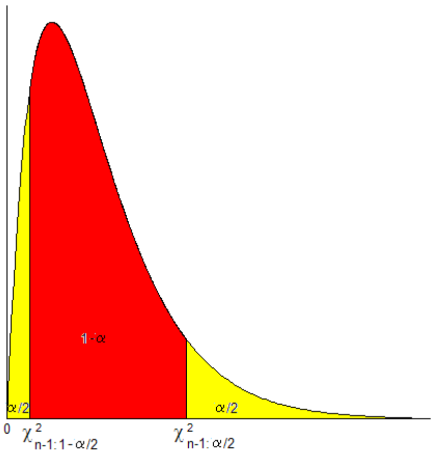
$$a_1 = \chi^2_{n-1:1-\alpha/2} \quad \text{e} \quad a_2 = \chi^2_{n-1:\alpha/2}.$$

(ver a figura 3.5)

III. Resolução das desigualdades $a_1 \leq X^2 \leq a_2$ em ordem a σ^2

$$a_1 \leq X^2 \leq a_2 \Leftrightarrow \chi^2_{n-1:1-\alpha/2} \leq \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1:\alpha/2} \Leftrightarrow \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1:\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1:1-\alpha/2}}$$

Figura 3.5: Intervalo de confiança para a variância



IV. Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para σ^2

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}\left(\sigma^2\right) \equiv \left[\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1:\alpha/2}}, \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1:1-\alpha/2}}\right]$$

IV. Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para σ

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}\left(\sigma\right) \equiv \left[\sqrt{\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1:\alpha/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1:1-\alpha/2}}}\right]$$

Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para a variância σ^2
População normal com valor médio μ, desconhecido

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}\left(\sigma^2\right) \equiv \left[\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1:\alpha/2}}, \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1:1-\alpha/2}}\right]$$

Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para o desvio padrão σ
População normal com valor médio μ, desconhecido

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}\left(\sigma\right) \equiv \left[\sqrt{\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1:\alpha/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{n-1:1-\alpha/2}}}\right]$$

Exemplo 3.6 *Considere uma amostra de alturas de 25 pessoas, que apresenta uma média e um desvio padrão de, respectivamente, 172 e 5 centímetros. Admitindo que a altura de qualquer pessoa X, é uma variável com distribuição normal, estimemos por intervalo de 90% de confiança, a variância e o desvio padrão da altura de todas as pessoas.*

Sabemos que $s = 5$ e portanto que $s^2 = 25$. Para $n = 25$ e $\alpha = 10\%$,

$$\chi^2_{24:0.95} = 13.85 \quad e \quad \chi^2_{24:0.05} = 36.42.$$

A estimativa por intervalo de 90% de confiança para a variância populacional é

$$IC_{90\%}\left(\sigma^2\right) \equiv \left[\frac{24\times 25}{36.42}, \frac{24\times 25}{13.85}\right] = [16.47446458, 43.32129964]$$

A estimativa por intervalo de 90% de confiança para o desvio padrão da população é

$$IC_{90\%}\left(\sigma\right) \equiv \left[\sqrt{16.47446458}, \sqrt{43.32129964}\right] = [4.058874792, 6.581891798]$$

3.4 Estimação por intervalo de confiança da proporção p de observação do acontecimento A

Suponhamos que, como resultado de uma experiência aleatória, queremos observar se ocorre ou não um acontecimento A. Para n realizações independentes da experiência, associemos n variáveis aleatórias $X_i, \quad i = 1, \ldots, n$ tais que

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{se não ocorre } A \\ 1 & \text{se ocorre } A \end{cases}$$

A v.a. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ regista o total de ocorrências de A nas n experiências. X tem distribuição Binomial de parâmetros (n, p).

Consideremos o estimador de p :

$$\hat{P} = \frac{X}{n}.$$

Para deduzirmos o intervalo de confiança para p, precisamos da distribuição de amostragem de $\hat{P}$. Esta distribuição de amostragem só possibilitará intervalos de confiança de aplicação "cómoda"quando as amostras são "grandes".

I. Variável pivot

Ora para "grandes" amostras, isto é aquelas em $n \geq 30$, podemos aplicar o Teorema Limite Central e ter acesso à distribuição assintótica de $\hat{P}$. Ou seja, para $n \geq 30$,

$$W = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \sqrt{n}\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p\,(1-p)}} \overset{a}{\sim} N\,(0,1)$$

Saliente-se que W é uma variável pivot.

II. Determinação das constantes a_1 e a_2

Devido à distribuição aproximada da variável pivot ser simétrica em torno de zero e tendo em conta a nota 3.1.1, consideremos as constantes a_1 e a_2 que satisfazem $a_1 < a_2$ e

$$a_1 = -a_2 \quad \text{com } a_2 \quad \text{tal que} \quad P\,(W > a_2) = \alpha/2.$$

De acordo com a definição 3.3, $a_2 \approx z_{\alpha/2}$ e $a_1 \approx -z_{\alpha/2}$.

III. Resolução das desigualdades $a_1 \leq W \leq a_2$ em ordem a p

$$\begin{aligned} a_1 \leq W \leq a_2 \quad &\Leftrightarrow \quad -z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p\,(1-p)}} \leq z_{\alpha/2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \hat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \end{aligned} \qquad (3.4.3)$$

Na resolução acima, verificamos que os limites do intervalo dependem do valor de p que não conhecemos. Para resolver este problema sugerimos duas alternativas:

a) A solução exacta

$$a_1 \leq W \leq a_2 \Leftrightarrow -z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p\,(1-p)}} \leq z_{\alpha/2} \Leftrightarrow n\frac{\left(\hat{P} - p\right)^2}{p\,(1-p)} \leq z_{\alpha/2}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\hat{P} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right) + \frac{z_{\alpha/2}^2}{4n}}}{\left(1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right)} \leq p \leq \frac{\hat{P} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right) + \frac{z_{\alpha/2}^2}{4n}}}{\left(1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}\right)}$$

b) A solução aproximada

Para uma solução aproximada, substituímos na expressão 3.4.3, as ocorrências de p no desvio padrão de $\hat{P}$, isto é, em $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, pelo seu estimador $\hat{P}$. Assim

$$\hat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{n}}$$

IV. Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para p

a) Para uma estimação mais precisa

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}\left(p\right) \equiv \left[\frac{\hat{P}+\frac{z^2_{\alpha/2}}{2n}-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)+\frac{z^2_{\alpha/2}}{4n}}}{\left(1+\frac{z^2_{\alpha/2}}{n}\right)}, \frac{\hat{P}+\frac{z^2_{\alpha/2}}{2n}+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)+\frac{z^2_{\alpha/2}}{4n}}}{\left(1+\frac{z^2_{\alpha/2}}{n}\right)}\right]$$

b) Para uma estimação menos precisa

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}\left(p\right) \equiv \left[\hat{P}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{n}}, \hat{P}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{n}}\right]$$

Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para a proporção p
Amostras grandes, $n \geq 30$

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}\left(p\right) \equiv \left[\frac{\hat{P}+\frac{z^2_{\alpha/2}}{2n}-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)+\frac{z^2_{\alpha/2}}{4n}}}{\left(1+\frac{z^2_{\alpha/2}}{n}\right)}, \frac{\hat{P}+\frac{z^2_{\alpha/2}}{2n}+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)+\frac{z^2_{\alpha/2}}{4n}}}{\left(1+\frac{z^2_{\alpha/2}}{n}\right)}\right]$$

Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para a proporção p
Amostras grandes, $n \geq 30$

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}\left(p\right) \equiv \left[\hat{P}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{n}}, \hat{P}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{n}}\right]$$

Exemplo 3.7 *Num inquérito telefónico destinado a estimar a proporção da população que tem acesso à internet em casa, foram inquiridas 50 pessoas, das quais 32 afirmaram ter este serviço.*

A estimativa por intervalo de 95% de confiança para a proporção da população é

$$IC_{95\%}\left(p\right) = \left[0.64 - 1.96\sqrt{\frac{0.64\left(1-0.64\right)}{50}}, 0.64 + 1.96\sqrt{\frac{0.64\left(1-0.64\right)}{50}}\right] = \left[0.507, 0.773\right]$$

pois $\hat{p} = 32/50 = 0.64$, $z_{0.05/2} = z_{0.025} = 1.96$ *e* $n = 50$.

Como o extremo inferior deste intervalo está muito perto de 50% (o que implica estar em causa ou não uma maioria de utilizadores da internet em casa), poderemos determinar o intervalo de confiança de forma mais rigorosa, pondo em prática o resultado a).

$$\begin{aligned} IC_{95\%}(p) &= \left[\frac{0.64 + \frac{1.96^2}{2\times 50} - \frac{1.96}{\sqrt{50}}\sqrt{0.64\,(1-0.64) + \frac{1.96^2}{4\times 50}}}{1 + \frac{1.96^2}{50}}, \frac{0.64 + \frac{1.96^2}{2\times 50} + \frac{1.96}{\sqrt{50}}\sqrt{0.64\,(1-0.64) + \frac{1.96^2}{4\times 50}}}{1 + \frac{1.96^2}{50}} \right] = \\ &= [0.50140762, 0.75861437] \end{aligned}$$

Como se pode ver, não foi muito compensador usar a solução mais precisa.

Outros intervalos de confiança podem ser deduzidos por aplicação do método pivotal e das distribuições de amostragem constantes na lista que se apresenta da secção seguinte. De acordo com essa lista, poderemos estimar por intervalo de confiança:

- A diferença de valores médios de duas populações X e Y, $\mu_X - \mu_Y$;
- O quociente de variância de duas populações X e Y, σ_X^2/σ_Y^2;
- A diferença de proporções em duas populações X e Y, $p_X - p_Y$.

3.5 Distribuições de amostragem

3.5.1 Média amostral, $\bar{X}$

Os diferentes intervalos de confiança para o valor médio $E(X) = \mu$ de uma população X, são consequência da distribuição que podemos associar ao estimador de μ, ou seja a $\overline{X}$. Por sua vez, a distribuição de $\overline{X}$ depende do conhecimento que temos acerca da população e da amostra. De forma resumida, o que foi dito na secção anterior acerca da distribuição de amostragem de $\overline{X}$, é que

Situação A Se a *população* X tem distribuição Normal com variância $\sigma^2 \equiv V(X)$ conhecida, então

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ ou de modo equivalente } Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \tag{3.5.4}$$

Situação B Se a *população* X tem distribuição Normal com variância $\sigma^2 \equiv V(X)$ desconhecida, então a estatística (v.a.)

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1} \tag{3.5.5}$$

dito de outro modo, a estatística (v.a.) T tem distribuição t com $n-1$ graus de liberdade.

Situação C Se a população X tem distribuição *desconhecida ou conhecida mas não normal*, com $\sigma^2 \equiv V(X)$ conhecida, e para uma amostra de dimensão $n \geq 30$, o T.L.C garante que,

$$W = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \overset{a}{\sim} N(0,1) \tag{3.5.6}$$

Situação D Se a população X tem distribuição *desconhecida ou conhecida mas não normal*, com $\sigma^2 \equiv V(X)$ desconhecida, e para uma amostra de dimensão $n \geq 30$, o T.L.C garante que,

$$W = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{S} \overset{a}{\sim} N(0,1) \tag{3.5.7}$$

Tabela 3.1: Distribuição de amostragem da média amostral, $\overline{X}$

Situação	Conhecimento de X e da amostra	Distribuição de $\overline{X}$
A	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com σ^2 conhecida	$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
B	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com σ^2 desconhecida	$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1}$
C	$X \sim ?$ com σ^2 conhecida e $n \geq 30$	$W = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
D	$X \sim ?$ com σ^2 desconhecida e $n \geq 30$	$W = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

3.5.2 Variância amostral, S^2

Para o estimador S^2 da variância da população $\sigma^2 = V(X)$, tem-se

Tabela 3.2: Distribuição de amostragem da variância amostral, S^2

Conhecimento de X e da amostra	Distribuição de S^2
$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ com μ desconhecido	$X^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

3.5.3 Proporção amostral, $\hat{P}$

Tabela 3.3: Distribuição de amostragem da proporção amostral, $\hat{P}$

Conhecimento amostra	Distribuição de $\hat{P}$
$n \geq 30$	$W = \sqrt{n}\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p\,(1-p)}} \overset{a}{\sim} N\,(0,1)$
$n \geq 30$	$W = \sqrt{n}\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}} \overset{a}{\sim} N\,(0,1)$

3.5.4 Diferença de médias de amostras de duas populações, $\overline{X} - \overline{Y}$

Tabela 3.4: Distribuição de amostragem para a diferença de médias amostrais de duas populações

Situação	Condições de aplicação	Distribuição de $\overline{X} - \overline{Y}$
A	$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), Y \sim N\left(\mu_X, \sigma_Y^2\right)$ σ_X^2, σ_Y^2 conhecidas	$Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \sim N(0,1)$
B	$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), Y \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ e desconhecidas	$T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \sim t_{n_X+n_Y-2}$
C	$X \sim ?, Y \sim ?$ σ_X^2, σ_Y^2 conhecidas, n_X e $n_Y \geq 30$	$W = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
D	$X \sim ?, Y \sim ?$ σ_X^2, σ_Y^2 desconhecidas, n_X e $n_Y \geq 30$	$W = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
$S_p^2 = \dfrac{(n_X - 1) S_X^2 + (n_Y - 1) S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$		

3.5.5 Quociente de variâncias de amostras de duas populações, S_1^2/S_2^2

Tabela 3.5: Distribuição de amostragem para o quociente de variâncias amostrais de duas populações

Condições de aplicação	Distribuição de S_X^2/S_Y^2
$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), Y \sim N\left(\mu_X, \sigma_Y^2\right)$ μ_X, μ_Y desconhecidos	$F = \dfrac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F_{(n_X-1, n_Y-1)}$

3.5.6 Diferença de proporções amostrais de duas populações, $\hat{P}_X - \hat{P}_Y$

Tabela 3.6: Distribuição de amostragem para a diferença de proporções amostrais de duas populações

Condições de aplicação	Distribuição de $\hat{P}_X - \hat{P}_Y$
$n_X \geq 30$ e $n_Y \geq 30$	$W = \dfrac{\left(\hat{P}_X - \hat{P}_Y\right) - (p_X - p_Y)}{\sqrt{\dfrac{p_X\,(1-p_X)}{n_X} + \dfrac{p_Y\,(1-p_Y)}{n_Y}}} \overset{a}{\sim} N\,(0,1)$

Capítulo 4

Teste de Hipóteses

4.1 Introdução

No capítulo 2 vimos como estimar pontualmente alguns parâmetros de uma população e apresentámos algumas propriedades que permitem analisar a sua precisão (enviesamento, eficiência e consistência). No capítulo 3 ilustrámos como podemos estimar por intervalo de confiança, o parâmetro de uma população, dando especial atenção aos parâmetros populacionais: valor médio, variância, desvio padrão e proporção.

Outro procedimento muito comum em estatística consiste na realização de um teste sobre uma determinada conjectura que se faça sobre a população.

Exemplo 4.1

- *Num determinado departamento pretende-se estudar o n.º X de faltas ao trabalho (de cada funcionário) durante os 5 dias úteis de uma semana. Trata-se de estudar uma população X com distribuição binomial de parâmetros $(5, p)$ e portanto o que falta conhecer acerca desta população será o valor de p. Podemos então tecer as conjecturas: Será que $p = P\,(\textit{falta num dia}) \leq 0.3$ ou será que $p = P\,(\textit{falta num dia}) > 0.3$?*
- *Num processo de engarrafamento de refrigerante em latas de 33cl, que queremos controlar, podemos conjecturar: Será que o volume médio de refrigerante por garrafa é igual a 33cl, $\mu = 33$ (boas condições de engarrafamento) ou será que o volume médio de refrigerante por garrafa é diferente de 33cl, $\mu \neq 33$ (más condições de engarrafamento).*
- *Será que a duração de um pneu de uma determinada marca e tipo, tem distribuição exponencial?*

Nos dois primeiros exemplos as conjecturas são feitas sobre o valor dos parâmetros da população, ou melhor dizendo sobre o valor dos parâmetros da distribuição da população X. No terceiro exemplo a conjectura é feita sobre a própria distribuição da população X.

As conjecturas que se fazem sobre a população (quer seja sobre os seus parâmetros, quer seja sobre a própria distribuição) designam-se por hipóteses.

Implicitamente e em cada situação, temos sempre duas hipóteses (conjecturas): A *hipótese nula* representada por H_0 e a *hipótese alternativa* representada por H_1.

Exemplo 4.2 *Para os exemplos atrás apresentados as hipóteses (conjecturas) são:*

- $H_0: p \leq 0.3 \quad vs \quad H_1: p > 0.3$
- $H_0: \mu = 33 \quad vs \quad H_1: \mu \neq 33$
- $H_0: X \sim E(0, \delta) \quad vs \quad H_1: X \nsim E(0, \delta)$

Nota importante: A hipótese nula H_0 deverá corresponder a uma situação de *status quo* na população, ou seja uma situação que não corresponda a alterações que sejam necessárias realizar nessa população.

Vejamos os dois primeiros exemplos atrás apresentados:

- Se $p = P\,(\text{falta num dia}) \leq 0.3$, a proporção diária de falta ao trabalho não é gravosa, só o sendo se $p > 0.3$;
- Se o volume médio μ de refrigerante for diferente de 33cl, deverão ser implementadas alterações no processo de engarrafamento, pois a situação *status quo* de engarrafamento normal exige que $\mu = 33cl$.

4.2 Decisão, regra de decisão e estatística de teste

Um teste das hipóteses H_0 vs H_1, consiste:

- Na avaliação da ´´consistência" da informação amostral com a conjectura estabelecida na hipótese H_0;
- Decidirmo-nos pela rejeição ou pela não rejeição da hipótese H_0 de acordo com a ´´consistência" observada;
- Controlarmos a probabilidade de tomarmos uma decisão errada, já que esta é sustentada pelos valores amostrais observados.

Como existem sempre duas hipóteses num teste, quando se rejeita H_0, sabemos imediatamente que se aceita H_1 e quando se não rejeita H_0 sabemos que se rejeita H_1.

Considere-se A o conjunto de todas a amostras de dimensão n que é possível seleccionar numa população X.

Um teste das hipóteses H_0 vs H_1, consiste numa regra (ou critério) que permita determinar um subconjunto de $\mathsf{R} \subset \mathsf{A}$ tal que:

- se $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathsf{R}$, rejeitamos H_0;
- se $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin \mathsf{R}$, não rejeitamos H_0;

Contudo, na maioria das vezes, realizamos um teste de hipóteses recorrendo a uma estatística de teste $W \equiv W(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ que avalia a ´´discrepância"(ou a ´´consistência") da amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ com as conjecturas estabelecidas nas hipóteses H_0 e H_1.

Se considerarmos E o conjunto de todos os valores da estatística T quando aplicada a todas as possíveis amostras de dimensão n (isto é sobre o conjunto A), então

Definição 4.1 *Um teste das hipóteses $H_0\, vs\, H_1$, consiste numa regra (ou critério) que permite determinar um subconjunto $\mathsf{R} \subset \mathsf{E}$ tal que, sendo $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o valor da estatística T para a amostra observada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:*

- *se $w(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathsf{R}$, rejeitamos H_0;*
- *se $w(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin \mathsf{R}$, não rejeitamos H_0;*

O subconjunto R é designado por região de rejeição ou região crítica.

Pelo que até agora foi dito, para a realização de um teste de hipóteses precisamos de:

- uma hipótese nula, H_0, que se deverá manter válida até haver evidência estatística que o contradiga;
- uma hipótese alternativa, H_1, que deverá ser adoptada caso se rejeite H_0;
- uma estatística de teste, $W \equiv W(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ que avalie a discrepância entre a informação amostral e a conjectura expressa na hipótese H_0;
- uma região de rejeição R.

4.3 Erros de decisão e sua probabilidade

A decisão acerca da rejeição ou não rejeição da hipótese nula, H_0 assenta na informação contida numa amostra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Contudo esta amostra é uma das muitas realizações possíveis da amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ da população X. Assim a nossa decisão está condicionada pelo acaso da amostragem e como tal pode conduzir a decisões erradas. Num teste de hipóteses as decisões erradas são:

Definição 4.2 *Num teste das hipóteses H_0 vs H_1 podemos cometer os seguintes erros de decisão:*

o erro de tipo I *(ou erro de 1ª espécie): Rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira;*

o erro de tipo II *(ou erro de 2ª espécie): Não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa.*

No quadro que se segue, esquematizam-se as decisões (correctas e erradas) de um teste de hipóteses.

Tabela 4.1: Decisões e erros num teste de hipóteses

Decisão	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Rejeitar H_0	Erro de tipo I	Decisão correcta
Não rejeitar H_0	Decisão correcta	Erro de tipo II

Existindo sempre uma possibilidade de cometermos estes erros de decisão, podemos associar-lhes a probabilidade de ocorrerem.

Essa probabilidades são:

$$\gamma = P\,(\text{erro de tipo I}) = P\,(\text{Rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ é verdadeira})$$

Ao valor máximo desta probabilidade dá-se o nome de *nível de significância*, habitualmente é representado por α,

$$\alpha = \max P\,(\text{Rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ é verdadeira})$$

e

$$\beta = P\,(\text{erro de tipo II}) = P\,(\text{Não rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ é falsa})$$

A

$$Q = 1-\beta = 1-P\,(\text{erro de tipo II}) = 1-P\,(\text{Não rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ é falsa}) = P\,(\text{Rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ é falsa})$$

dá-se o nome de *potência* (função potência) do teste.

O teste óptimo será aquele em as probabilidades associadas aos dois tipos de erro têm um valor mínimo. Contudo, é matematicamente impossível minimizá-las simultaneamente. De facto, quando a $P\,(\text{erro de tipo I})$ diminui, a $P\,(\text{erro de tipo II})$ aumenta e vice-versa.

No que se segue, os testes que realizamos incluem-se nos denominados *testes de significância*, ou seja os testes em que o nível de significância α,

$$\alpha = \max P\,(\text{Rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ é verdadeira})$$

é estabelecido por nós (e portanto tem um valor fixo e conhecido) e para os quais a função potência $Q = 1 - \beta$ tem valor máximo (ou equivalentemente, β tem valor mínimo).

Para melhor exposição dos conceitos , vamos começar por abordar os intitulados testes paramétricos isto é, aqueles em que as hipóteses incidem sobre o valor θ de um parâmetro que caracteriza a distribuição da população X e tem valor desconhecido.

Formalizando o problema, consideremos que θ pode assumir valores num conjunto Θ (chamado espaço parâmetro). Sejam Θ_0 e Θ_1 dois subconjuntos de Θ tais que:

$$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta \quad \text{e} \quad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset.$$

As hipóteses sobre os valores do parâmetro θ podem ser apresentadas por:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1,$$

ou

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \notin \Theta_0.$$

Exemplo 4.3 *Continuando com o exemplo 4.2,*

- *O parâmetro p tem por espaço parâmetro $\Theta =]0, 1[$. Na hipótese H_0, $\Theta_0 =]0, 0.3]$ e na hipótese H_1, $\Theta_1 =]0.3, 1[$:*
- *Um valor médio μ tem por espaço parâmetro a recta real $\mathbb{R}$. Assim as hipóteses podem ser escritas $H_0 : \mu \in \{33\}$ vs $H_1 : \mu \in \mathbb{R} \setminus \{33\}$. Neste caso $\Theta = \mathbb{R}$, $\Theta_0 = \{33\}$ e $\Theta_1 = \mathbb{R} \setminus \{33\}$*

4.4 Metodologia para realização de um teste de hipóteses paramétricas

Para testarmos as hipóteses:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \ vs \ H_1 : \theta \notin \Theta_0.$$

com um nível de significância α, aconselhamos a seguinte metodologia:

- Escolher um estimador $\widehat{\Theta}$ para θ.
- Conhecer ou propor uma estatística de teste $W \equiv W(X_1, \ldots, X_n)$ que meça a ´´discrepância”entre o valor de $\widehat{\Theta}$ e o valor de θ. Essa estatística W é designada por estatística de teste.

  Deduzir ou conhecer a distribuição da estatística de teste.

- Para o nível α de significância escolhido, determinar uma região de rejeição da hipótese H_0, R_α.
- Face a uma amostra observada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, calcular o valor observado da estatística de teste $w_{obs} = W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e decidir:
  - Rejeitar H_0 se $w_{obs} = W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_\alpha$;
  - Não rejeitar H_0 se $w_{obs} = W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin R_\alpha$.

Para cada teste paramétrico que a seguir expomos, iremos propor um estimador para o parâmetro, escolher a estatística de teste $W \equiv W(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e indicar a respectiva distribuição de amostragem, determinar a região de rejeição R_α, para um nível de significância α fixo, após o que será possível tomar uma decisão face a uma amostra observada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

4.5 p-value ou valor-p

Com a evolução das ferramentas de cálculo, é hoje possível determinar probabilidades de modo expedito e cómodo. Por isso, é agora usual associar e tomar decisões sobre um teste de hipóteses através do conceito de *p-value*.

Definição 4.3 *Seja $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a concretização de uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e*

$$w_{obs} = W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

o valor observado da estatística de teste. Designa-se por p-value (ou valor-p), a probabilidade de se observarem valores da estatística de teste tão ou mais favoráveis à rejeição de H_0 do que o observado w_{obs}, admitindo que H_0 é verdadeira.

DECISÃO EM FUNÇÃO DO $p - value$: O $p - value$ é uma medida da concordância entre a hipótese H_0 e as amostras que possamos recolher e que sejam tão ou mais favoráveis à rejeição de H_0. Quanto menor for o $p - value$, menor é a consistência da validade de H_0.

Assim, se $p - value < \alpha$, devemos rejeitar H_0 ao nível de significância α.

4.6 Erros de decisão e sua probabilidade

Em particular para um teste paramétrico das hipóteses $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \notin \Theta_0$,

- $\gamma(\theta) = P(\text{erro de tipo I}) = P(\text{Rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ é verdadeira}) = P(W \in R \,|\theta \in \Theta_0)$
- $\alpha = \max_{\theta \in \Theta_0} \gamma(\theta)$
- $\beta(\theta) = P(\text{erro de tipo II}) = P(\text{Não rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ é falsa}) = P(W \notin R \,|\theta \notin \Theta_0)$

- Potência do teste: $Q(\theta) = P(\text{Rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ é falsa}) = 1 - \beta(\theta) = P(W \in R\,|\theta \notin \Theta_0)$

4.7 Teste de hipóteses para o valor médio

Nesta secção vamos dar atenção a hipóteses que estabelecem conjecturas sobre o valor médio $E(X) = \mu$ de uma população X.

4.7.1 Teste de hipóteses bilateral para o valor médio

Exemplo 4.4 *Estudos sobre o custo de vida, realizados no mês de Janeiro de 2003, permitiram concluir que o gasto semanal em alimentação de famílias com dois filhos, apresentava um valor médio de 100 euros com um desvio padrão de 15 euros. No mês de Agosto do mesmo ano, pretendíamos saber se tinham ocorrido alterações no gasto semanal médio em alimentação das mesmas famílias. Para tal seleccionou-se uma amostra de gastos semanais em alimentação de 25 famílias (com 2 filhos), que revelou uma média* $\overline{x} = 108$ *euros.*
Que conclusões podemos retirar acerca da alteração *do gasto médio semanal em alimentação deste tipo de famílias?*

A população em estudo é X-gasto semanal em alimentação das famílias com 2 filhos, mas o interesse primordial diz respeito a $\mu = E(X)$-gasto médio semanal em alimentação das famílias com 2 filhos. A nossa questão reside em saber se μ permanece igual a 100 euros, $\mu = 100$, ou, se em Agosto, μ é diferente de 100 euros, $\mu \neq 100$.

Queremos então testar a validade das hipóteses

$$H_0 : \mu = 100 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 100$$

Ao teste de hipóteses do tipo

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

dá-se o nome de teste de hipóteses bilateral *para o valor médio, μ.*

Neste exemplo, $\mu_0 = 100$.

A decisão acerca da validade de alguma destas hipóteses deverá ser feita à custa da informação que a amostra fornecer. Uma vez que as hipóteses dizem respeito ao valor médio da população, devemos considerar a informação que a amostra fornecer sobre μ. Mas já sabemos que a informação amostral sobre μ, pode ser obtida através de um estimador de μ. Se adoptarmos para estimador de μ, a média amostral,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

O valor de $\overline{X}$ *vai-nos permitir decidir se* $\mu \neq 100$ *ou se* $\mu = 100$*, isto é, vai-nos permitir decidir se* rejeitamos H_0 *ou se* não rejeitamos H_0. *Como tal, só nos resta saber, quais os valores de* $\overline{X}$ *que nos levam a rejeitar* H_0 *ou a não rejeitar* H_0. *Em resumo, precisamos de uma* regra de decisão.

Regra de decisão

Se $\overline{X}$ *tiver um valor muito diferente (ou distante) de 100, é natural que se decida que* $\mu \neq 100$. *Podemos dizer que* $\overline{X}$ *é muito diferente de* 100, *se* $|\overline{X} - 100|$ *for muito grande, ou seja se o valor de* $|\overline{X} - 100|$ *ultrapassar uma certa quantidade* $\underline{a}$ $\quad (a > 0)$. *Então*

Rejeitamos $\mu = 100$ *se* $|\overline{X} - 100| > a \quad (a > 0)$

ou de modo equivalente

Rejeitamos H_0 *se* $|\overline{X} - 100| > a \quad (a > 0)$

No caso geral do teste de hipóteses bilateral
$H_0: \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1: \mu \neq \mu_0$
Rejeitamos H_0 *se* $\lvert\overline{X} - \mu_0\rvert > a \quad (a > 0)$

Neste exemplo, o que são os erros de decisão?

Admitamos as seguintes situações:

1. *Em Agosto, o gasto médio semanal em alimentação permanece igual a 100 euros,* $\mu = 100$. *Isto é o que acontece na população, mas nós não o sabemos porque não analisamos a população na totalidade.*

   Suponhamos que o acaso da amostragem, levava a que se obtivessem valores amostrais sobre o gasto semanal em alimentação, muito elevados (muito pequenos). Então $\overline{X}$ *teria um valor elevado (pequeno), e de tal modo elevado (pequeno) que* $|\overline{X} - 100| > a$. *Como consequência, iríamos decidir rejeitar* H_0*, ou seja, decidir que* $\mu \neq 100$.

   A nossa decisão seria errada, porque (baseados na amostra) decidíamos que $\mu \neq 100$ *e de facto* $\mu = 100$. *Estaríamos a cometer um* erro de tipo I, *nomeadamente a rejeitar* $H_0 : \mu = 100$*, quando* H_0 *é verdadeira.*

2. *Em Agosto, o gasto médio semanal em alimentação sofreu uma alteração e passou a ter um valor* $\mu \neq 100$. *Isto é o que acontece na população, mas nós não o sabemos porque não analisamos a população na totalidade.*

   Suponhamos que a média amostral $\overline{X}$ *exibia um valor não muito diferente de 100, de tal modo que* $|\overline{X} - 100| \leq a$. *Como consequência, iríamos decidir não rejeitar* $H_0 : \mu = 100$*, ou seja, decidir que o gasto médio semanal continuava igual a 100.*

Esta decisão seria errada, porque (baseados na amostra) decidíamos que $\mu = 100$ *e de facto* $\mu \neq 100$*. O erro cometido era um* erro de tipo II*, nomeadamente não rejeitar* H_0*, quando* H_0 *é falsa.*

Probabilidade dos erros de decisão

As probabilidades dos erros de decisão são, neste caso

$$\alpha = P\left(\textit{Rejeitar } H_0 \,|H_0 \textit{ verdadeira}\right) = P\left(\left|\overline{X} - 100\right| > a \,|\mu = 100\right) \quad (\textit{nível de significância})$$

$$\beta\left(\mu\right) = P\left(\textit{Não rejeitar } H_0 \,|H_0 \textit{ falsa}\right) = P\left(\left|\overline{X} - 100\right| \leq a \,|\mu \neq 100\right)$$

NOTA: O teste que agora expomos, é um teste que minimiza $\beta(\mu)$, para cada α (nível de significância) que escolhermos.

Os níveis de significância mais usados são $\alpha = 0.1 = 10\%$ para uma decisão *pouco significante*, $\alpha = 0.05 = 5\%$ para uma decisão *significante* e $\alpha = 0.01 = 1\%$ para uma decisão *altamente significante*.

Região de rejeição ou região crítica

Consideremos as hipóteses genéricas para um teste bilateral sobre o valor médio,

$$H_0 : \ \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \ \mu \neq \mu_0$$

Já vimos que podemos

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \left|\overline{X} - \mu_0\right| > a \quad (a > 0)$$

Mas qual o valor de <u>a</u>?

Admitamos que escolhíamos um nível de significância α para o nosso teste. Então

$$\alpha = P\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| > a \,|\mu = \mu_0\right)$$

Trata-se de uma probabilidade cujo valor conhecemos. O que desconhecemos é o valor de <u>a</u>. Mas se soubermos qual a distribuição da v.a. $\overline{X}$, podemos trabalhar esta igualdade sobre probabilidades e portanto deduzir o valor de <u>a</u>.

Suponhamos que a população goza das seguintes características:

X tem distribuição normal de valor médio μ e variância conhecida, $\sigma^2 = V(X)$, $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

Então a nossa amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ é constituída por v.a.'s i.i.d. com distribuição $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ e portanto $\overline{X}$ tem distribuição normal de valor médio μ e variância σ^2/n, $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$, isto é $Z = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Quando $H_0: \mu = \mu_0$ é verdadeira, $Z = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \underset{\mu=\mu_0}{\sim} N(0,1)$

Agora já podemos determinar o valor de $\underline{a}$.

$$\begin{aligned}
\alpha &= P\left(\left|\overline{X} - \mu_0\right| > a \,|\mu = \mu_0\right) = P\left(\left|\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\right| > \sqrt{n}\frac{a}{\sigma}\right) = P\left(|Z| > \sqrt{n}\frac{a}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= P\left(Z < -\sqrt{n}\frac{a}{\sigma}\right) + P\left(Z > \sqrt{n}\frac{a}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\sqrt{n}\frac{a}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\frac{a}{\sigma}\right) = \\
&= 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\frac{a}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\frac{a}{\sigma}\right) = 2 - 2\Phi\left(\sqrt{n}\frac{a}{\sigma}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\sqrt{n}\frac{a}{\sigma}\right)\right)
\end{aligned}$$

ou seja

$$\Phi\left(\sqrt{n}\frac{a}{\sigma}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \sqrt{n}\frac{a}{\sigma} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = z_{\alpha/2} \Leftrightarrow a = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Regra de decisão para um nível de significância α

$$\boxed{\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \left|\overline{X} - \mu_0\right| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}}$$

ou de modo equivalente

$$\boxed{\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \left|\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\right| > z_{\alpha/2}}$$

NOTAS:

- Repare que conseguimos deduzir o valor de $\underline{a}$ porque soubemos as características da população e portanto conseguimos saber qual a distribuição de $\overline{X}$. Repare também que este conhecimento das características da população X corresponde à **situação A** descrita na secção 3.5.1.
- $Z = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$ é a estatística de teste.
- A região de rejeição, para um nível de significância α, é $R_\alpha \equiv \left]-\infty, -z_{\alpha/2}\right[\cup \left]z_{\alpha/2}, +\infty\right[$.
- A regra de decisão, para um nível de significância α será:
  - Rejeitar H_0 caso $z_{obs} = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \in R_\alpha$;
  - Não rejeitar H_0 caso $z_{obs} = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \notin R_\alpha$
- Quanto ao $p - value$, ter-se-á

$$p - value = P\left(|Z| > |z_{obs}| \,|\mu = \mu_0\right) = 2P\left(Z > |z_{obs}|\right),$$

com $Z = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \underset{\mu=\mu_0}{\sim} N(0,1)$.

Regra de decisão para um nível de significância α

$$\boxed{\text{Estatística de teste: } Z=\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\underset{\mu=\mu_0}{\sim}N(0,1)}$$

$$\boxed{\text{Região de rejeição: } R_\alpha=\left]-\infty,-z_{\alpha/2}\right[\cup\left]z_{\alpha/2},+\infty\right[}$$

$$\boxed{\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } z_{obs}=\sqrt{n}\,\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma}\in R_\alpha}$$

$$\boxed{\text{p-value}=2\left(P\left(Z>|z_{obs}|\right)\right)}$$

Exemplo 4.5 *Continuação do exemplo 4.4*

As hipóteses são

$$H_0:\ \mu=100 \quad vs \quad H_1:\ \mu\neq 100$$

Sabemos que $\sigma=15$ e que a amostra de $n=25$ observações forneceu $\overline{x}=108$. Admitindo que o gasto semanal em alimentação das famílias com 2 filhos tem distribuição normal,

$$\text{Rejeitamos } H_0 \textit{ se } \left|\sqrt{25}\,\frac{108-100}{15}\right|=2.667>z_{\alpha/2}$$

Se escolhermos um nível de significância $\alpha=5\%$ (para uma decisão significante),

$$z_{0.05/2}=z_{0.025}=\Phi^{-1}(0.975)=1.96$$

e como

$$\left|\sqrt{25}\,\frac{108-100}{15}\right|=2.667>1.96=z_{0.025}$$

decidimos rejeitar $H_0:\ \mu=100$*, ao nível de 5% de significância, ou seja, com 5% de significância, concluímos que ocorreram alterações no gasto médio semanal em alimentação das famílias com 2 filhos.*

Cálculo e decisão pelo $p-value$

Sendo $z_{obs}=\sqrt{25}\frac{108-100}{15}=2.667$,

$$p-value=P\left(|Z|>|2.667|\right)=2P\left(Z>2.667\right)=2\left(1-P\left(Z\leq 2.667\right)\right)=2\left(1-0.9962\right)=0.0076$$

Dado que $p-value<0.05$, *decidimos* rejeitar $H_0:\ \mu=100$, *ao nível de 5% de significância.*

Outros testes de hipóteses bilateral para o valor médio

Como foi dito na nota importante, a regra de decisão atrás deduzida dependeu do conhecimento das características da população X, nesse caso de $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Quando esse conhecimento é diferente, a regra de decisão altera-se, mas a alteração depende essencialmente da distribuição que resulta para $\overline{X}$. Recaímos então nas situações expostas na secção 3.5.1 e portanto as regras de decisão para um teste bilateral para o valor médio μ, com um nível de significância α, vão ser:

Figura 4.1: Teste bilateral para o valor médio: Situações A, C e D

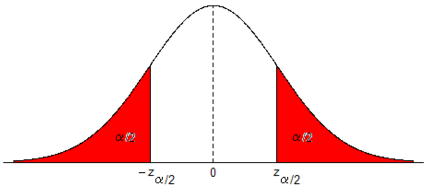
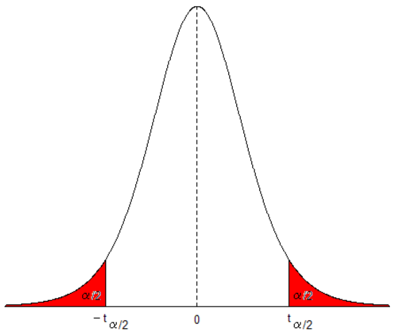


Figura 4.2: Teste bilateral para o valor médio: Situação B



Exemplo 4.6 *Medições de acidez (pH) de amostras de chuva foram registadas em 12 locais de uma região industrial:*

5.1	5.0	3.8	4.8	3.6	4.7
4.3	4.4	4.5	4.9	4.7	4.8

Por estudos anteriores sabe-se que os registos de acidez da chuva nesta região têm distribuição normal.
Poderemos concluir, com 5% de significância, que os níveis actuais de acidez média da chuva saem fora do valor de controlo de 4.5 de acidez média na região?

Pretendemos testar, com $\alpha = 5\%$*, as hipóteses*

$$H_0 : \mu = 4.5 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 4.5$$

sendo μ *o nível de acidez média da chuva na região.*

A amostra possibilita a seguinte informação:

$$n = 12 \quad \overline{x} = \tfrac{54.6}{12} = 4.55 \quad s^2 = \tfrac{2.35}{11} = 0.213637$$

O conhecimento da população corresponde à situação C descrita na secção 3.5.1, pelo que a estatística de teste

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - 4.5}{S} \underset{\mu=4.5}{\sim} t_{12-1}$$

Assim a regra de decisão será:

$$\textit{Rejeitar } H_0 \textit{ se } \left|\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\right| > t_{n-1:\alpha/2}$$

Ora $\mu_0 = 4.5$ *e para* $\alpha = 5\%$*,* $t_{n-1:\alpha/2} = t_{11:0.025} = 2.201$.

Como $\left|\sqrt{12}\frac{4.55 - 4.5}{\sqrt{0.213637}}\right| = 0.3747 < 2.201$*, concluímos que a acidez média da chuva nesta região permanece igual ao valor de controlo de 4.5, com uma significância de 5% nesta decisão.*

Cálculo e decisão pelo $p-value$

Sendo $T = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - 4.5}{S} \underset{\mu=4.5}{\sim} t_{11}$ *a estatística de teste e* $t_{obs} = \sqrt{12}\frac{4.55 - 4.5}{\sqrt{0.213637}} = 0.3747$,

$$p-value = P\left(|T| > |0.3747|\right) = 2P\left(T > 0.3747\right) = 2 \times 0.3575 = 0.715$$

Dado que $p-value > 0.05$*, decidimos* não rejeitar $H_0 : \mu = 4.5$*, ao nível de 5% de significância.*

Regra de decisão para um nível de significância α

$$\boxed{\textit{Hipóteses: } H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq \mu_0}$$

$$\boxed{\textit{Estatística de teste: } T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \underset{\mu=\mu_0}{\sim} t_{n-1}}$$

$$\boxed{\textit{Região de rejeição: } R_\alpha = \left[-\infty, -t_{n-1:\alpha/2}\right[\cup \left]t_{n-1:\alpha/2}, +\infty\right[}$$

$$\boxed{\textit{Rejeitar } H_0 \textit{ se } t_{obs} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x} - \mu_0}{s} \in R_\alpha}$$

$$\boxed{\textit{p-value}{=}2\min\left(P\left(T > |t_{obs}|\right)\right)}$$

4.7.2 Teste de hipóteses unilateral direito para o valor médio

As hipóteses dum teste bilateral sobre o valor médio μ conjecturam se o valor médio de uma população X tem um valor μ_0 ou se ocorreram alterações e o seu valor actual é diferente de μ_0. Mas, por vezes tem mais interesse saber se essas alterações ocorreram no sentido do valor de μ ser agora maior que μ_0.

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

Veja-se o seguinte exemplo:

Exemplo 4.7 *Anuncia-se que um novo tratamento é mais eficaz que o tratamento tradicional para prolongar a vida de doentes em estado terminal sofrendo de cancro. O tratamento tradicional já é usado à algum tempo e sabe-se que a sua aplicação provoca um tempo médio de 4.2 anos de sobrevivência com um desvio padrão de 1.1 anos.*
O novo tratamento foi administrado a 80 pacientes e os tempos registados de sobrevivência à doença desde o começo do tratamento exibiram uma média amostral de 4.5 anos.
Será que esta informação corrobora o anúncio feito ao novo tratamento?

As conjecturas em causa são

$$H_0 : \mu \leq 4.2 \quad vs \quad H_1 : \mu > 4.2$$

sendo μ o tempo médio de sobrevivência desde o início de um tratamento.

Naturalmente a regra de decisão passa por rejeitarmos a hipótese $H_0 : \mu \leq 4.2$ se $\left(\overline{X} - 4.2\right)$ for muito grande, isto é se $\left(\overline{X} - 4.2\right) > b$ com $b > 0$.

Mas qual a distribuição de $\overline{X}$? Se considerarmos que o desvio padrão se mantém com o valor de $\sigma = 1.1$ anos, estamos no caso da situação C descrita na secção 3.5.1, porque não se conhece a distribuição da população X-tempo de sobrevivência desde o início de um tratamento, mas se conhece a sua variância e se tem uma amostra de dimensão $n = 80 \geq 30$. Portanto, podemos dizer que a estatística de teste,

$$W = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \text{ tem distribuição aproximada } N\left(0, 1\right)$$

ou seja, que

$$W = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Então

$$\begin{aligned}
\gamma(\mu) &= P(\text{Rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ verdadeira}) = P\left(\overline{X} - 4.2 > b\,|\mu \leq 4.2\right) = \\
&= P\left(\sqrt{n}\frac{\overline{X} - 4.2}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,b\,|\mu \leq 4.2\right) = \\
&= P\left(\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu + \mu - 4.2}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,b\,|\mu \leq 4.2\right) = \\
&= P\left(W + \sqrt{n}\frac{\mu - 4.2}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,b\,|\mu \leq 4.2\right) = \\
&= P\left(W > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(b - \mu + 4.2)\,|\mu \leq 4.2\right) \approx \\
&\approx P\left(Z > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(b - \mu + 4.2)\,|\mu \leq 4.2\right)
\end{aligned}$$

$\gamma(\mu)$ é uma função crescente para $\mu \in \left]-\infty, 4.2\right]$

O nível de significância α, corresponderá a

$$\begin{aligned}
\alpha &= \max_{\mu \leq 4.2} P(\text{Rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ verdadeira}) = \max_{\mu \leq 4.2} \gamma(\mu) = \gamma(4.2) \approx \\
&\approx P\left(Z > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,b\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,b\right)
\end{aligned}$$

Se estabelecermos um valor para α, então

$$\alpha \approx 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,b\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,b \approx \Phi^{-1}(1-\alpha) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,b \approx z_\alpha$$

Regra de decisão para um nível de significância α

$$\boxed{\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \overline{X} - 4.2 > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha}$$

ou de modo equivalente

$$\boxed{\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - 4.2}{\sigma} > z_\alpha}$$

Para a amostra observada e para os valores populacionais conhecidos: $n = 80$, $\overline{x} = 4.5$, $\sigma = 1.1$.

Se considerarmos um nível de significância $\alpha = 10\%$, $z_{0.1} = \Phi^{-1}(0.9) = 1.28$,

$$w_{obs} = \sqrt{80}\frac{\overline{X} - 4.2}{1.1} = 2.4393 > 1.28 = z_{0.1}$$

pelo que, decidimos que a amostra corrobora o anúncio de que o novo tratamento prolonga a vida dos doentes, com uma significância de 10% na decisão.

- $W = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \underset{\mu=\mu_0}{\overset{a}{\sim}} N(0, 1)$ *é a estatística de teste.*
- *A região de rejeição, para um nível de significância* α, *é* $R_\alpha \equiv]z_\alpha, +\infty[$.
- *A regra de decisão, para um nível de significância* $\alpha = 10\%$ *será a de rejeitar* H_0 *caso* $w_{obs} = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{x} - 4.2}{\sigma} \in R_{0.1} \equiv]1.28, +\infty[$.
- *Como* $w_{obs} = 2.4393 \in R_{0.1}$, *decidimos rejeitar* H_0.
- *Quanto ao* $p - value$, *ter-se-á*

  $$p - value = P(W > w_{obs}) \approx P(Z > 2.44) = 1 - 0.9927 = 0.0073,$$

  com $W \underset{\mu=4.2}{\overset{a}{\sim}} N(0, 1)$. *Assim* $p - value < 0.1\ (\alpha)$ *permite-nos decidir pela rejeição de* H_0 *ao nível de 10% de significância.*

NOTA IMPORTANTE: Repare que conseguimos deduzir o valor de $\underline{b}$ porque soubemos as características da população e portanto conseguimos saber qual a distribuição de $\overline{X}$. Repare também que este conhecimento das características da população X corresponde à **situação C** descrita na secção 3.5.1.

Para esta e outras situações referentes ao conhecimento da população e da amostra tem-se a título de resumo:

Figura 4.3: Teste unilateral direito para o valor médio: Situações A, C e D

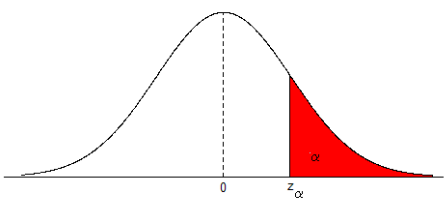
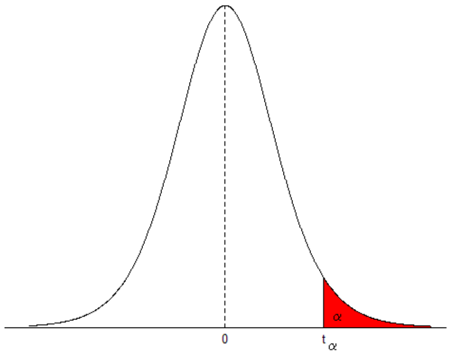


Figura 4.4: Teste unilateral direito para o valor médio: Situação B



4.7.3 Teste de hipóteses unilateral esquerdo para o valor médio

Mas também pode ter interesse saber se as alterações de μ ocorrem no sentido do seu valor ser menor que μ_0, quando antes era $\geq \mu_0$.

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.8 *Num processo de fabrico de placas de vidro, produzem-se bolhas que se distribuem aleatoriamente pelas placas. Com base na abundante informação recolhida pelo departamento de qualidade, a densidade média das bolhas estimava-se, até há pouco tempo, em 0.4 bolhas/m^2.*
Recentemente fez-se uma tentativa de melhorar o processo produtivo, em particular no tocante ao aparecimento deste tipo de defeito. Depois de serem introduzidas alguma alterações no processo de fabrico, recolheu-se uma amostra constituída por 15 placas de 4.5 m^2, e registou-se o número de bolhas em cada uma delas. A média da amostra foi de $\overline{x} = 0.317$ bolhas/m^2 e o desvio padrão amostral foi de $s = 0.2254$ bolhas/m^2.
Verifiquemos, ao nível de significância de 5%, se a densidade esperada de bolhas por m^2 diminuiu.

Se μ representar a densidade média de bolhas/m^2, as hipóteses que estão em causa são:

$$H_0 : \mu \geq 0.4 \quad vs \quad H_1 : \mu < 0.4$$

Face à presente hipótese nula $H_0 : \mu \geq 0.4$, a regra de decisão mais natural passa por rejeitarmos a hipótese $H_0 : \mu \geq 0.4$ se $\left(\overline{X} - 0.4\right)$ for muito menor que 0, isto é se $\left(\overline{X} - 0.4\right) < -c$ com $c > 0$.

Mas qual a distribuição de $\overline{X}$? Se considerarmos que a distribuição da população X-nº de bolhas/m^2 tem distribuição normal, desconhecemos a sua variância e portanto estamos no caso da situação C descrita na secção 3.5.1. Assim, a nossa estatística de teste e a sua distribuição (quando $\mu = 0.4$) são:

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \underset{\mu=\mu_0}{\sim} t_{15-1}$$

Para um nível de significância α,

$$\begin{aligned}\alpha &= \max P\left(Rejeitar\ H_0\,|H_0\ verdadeira\right) = \max_{\mu\geq 0.4} P\left(\overline{X}-0.4<-c\,|\mu\geq 0.4\right) = \\ &= P\left(\overline{X}-0.4<-c\,|\mu=0.4\right) = P\left(\sqrt{n}\frac{\overline{X}-0.4}{S}<-\sqrt{n}\frac{c}{S}\right) = P\left(T<-\sqrt{n}\frac{c}{S}\right)\end{aligned}$$

Logo $\alpha = P\left(T<-\sqrt{n}\frac{c}{S}\right) \Leftrightarrow \alpha = P\left(T\geq\sqrt{n}\frac{c}{S}\right) \Rightarrow \sqrt{n}\frac{c}{S} = t_{n-1:\alpha}$

Regra de decisão para um nível de significância α

$$\boxed{Rejeitar\ H_0\ se\ \overline{X}-0.4<-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1:\alpha}}$$

ou de modo equivalente

$$\boxed{Rejeitar\ H_0\ se\ \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-0.4}{S}<-t_{n-1:\alpha}}$$

Como $n=15$, $\overline{x}=0.317$, $s=0.2254$ *e, para* $\alpha=5\%$, $t_{n-1:\alpha}=t_{14:0.05}=1.76$

$$t_{obs}=\sqrt{n}\frac{\overline{x}-0.4}{s}=\sqrt{15}\frac{0.317-0.4}{0.2254}=-1.42617>-1.76=-t_{14:0.05}$$

decidimos não rejeitar H_0 ao nível de significância de 5%, ou melhor dizendo, decidimos que a densidade esperada de bolhas/m^2 não parece diminuir, sendo de 5% a significância desta conclusão.

Em resumo, e aplicando a metodologia proposta para a realização de um teste de hipóteses paramétrico, tem-se

- *Estimador da média μ: a média amostral, $\overline{X}$.*
- $T=\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-0.4}{S}\underset{\mu=0.4}{\sim}t_{14}$ *é a estatística de teste e a sua distribuição quando* $\mu=0.4$.
- *A região de rejeição, para um nível de significância* $\alpha=5\%$, *é* $R_\alpha\equiv\,]-\infty,-t_{14:\alpha}[\,=\,]-\infty,-1.76[$.
- *A regra de decisão, para um nível de significância* $\alpha=5\%$ *será a de rejeitar* H_0 *caso* $t_{obs}=\sqrt{n}\,\frac{\overline{x}-0.4}{s}\in R_{0.05}\equiv\,]-\infty,-1.76[$.
- *Como* $t_{obs}=-1.42617\notin R_{0.05}$, *decidimos não rejeitar* H_0.
- *Quanto ao* $p-value$, *ter-se-á*

  $$p-value=P\left(T<t_{obs}\right)=P\left(T<-1.42617\right)=P\left(T>1.42617\right)=0.0879,$$

  Assim $p-value>0.05\ (\alpha)$ *permite-nos decidir pela não rejeição de* H_0 *ao nível de 5% de significância.*

NOTA IMPORTANTE: Repare que conseguimos deduzir o valor de $\underline{c}$ porque soubemos as características da população e portanto conseguimos saber qual a distribuição de $\overline{X}$. Repare também que este conhecimento das características da população X corresponde à **situação B** descrita na secção 3.5.1.

Para esta e outras situações referentes ao conhecimento da população e da amostra tem-se a título de resumo:

Figura 4.5: Teste unilateral esquerdo para o valor médio: Situações A, C e D

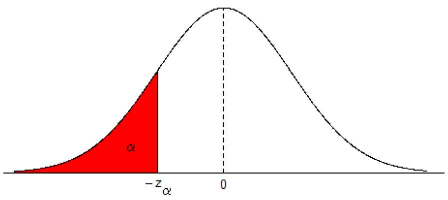
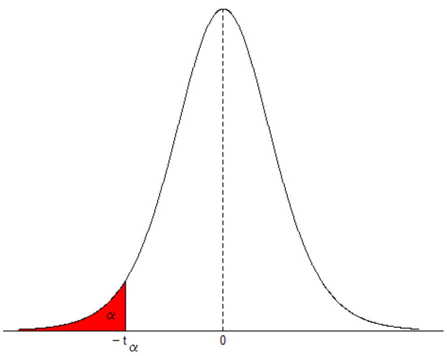


Figura 4.6: Teste unilateral esquerdo para o valor médio: Situação B



4.8 Teste de hipóteses para a variância

Nesta secção vamos dedicar a atenção exclusivamente a hipóteses que estabelecem conjecturas sobre a variância $\sigma^2 = V(X)$ de uma população X.

Os procedimentos e os conceitos são similares aos utilizados nas deduções dos testes para o valor médio.

Os pressupostos a estabelecer sobre a amostra aleatória são:

1. Considerar uma amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ de dimensão n da população X;
2. A população X ter uma distribuição Normal com valor médio μ (de valor desconhecido e estimado por $\overline{X}$) e variância σ^2 que se pretende estimar.

Vamos adoptar o estimador centrado da varância σ^2,

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

que, a ser satisfeita a condição 2. sobre a normalidade da população, a estatística

$$X^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

X^2 tem distribuição do Qui-Quadrado com $n-1$ graus de liberdade.

4.8.1 Teste de hipóteses bilateral para a variância

Consideremos as hipóteses

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Naturalmente que devemos rejeitar a hipótese $\sigma^2 = \sigma_0^2$ se a amostra nos fornecer uma estimativa S^2 muito "diferente"de σ_0^2. Dito de outro modo, se o quociente $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$ for muito pequeno ou se for muito grande. Mas se isto acontecer, também o quociente $\dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$ deverá ser "demasiado"pequeno ou "demasiado"grande. Numa formulação matemática, deveremos rejeitar a hipótese de $\sigma^2 = \sigma_0^2$ se,

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} < a \quad \text{ou} \quad \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} > b.$$

Mas qual o valor de a e de b? Ora, quando $\sigma^2 = \sigma_0^2$, a estatística de teste e respectiva distribuição de amostragem são:

$$X^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} \underset{\sigma^2=\sigma_0^2}{\sim} \chi^2_{n-1}$$

(tem distribuição do qui-quadrado com $(n-1)$ graus de liberdade). Então, para um nível de significância α,

$$\alpha \;=\; P\,(\text{Rejeitar } H_0\,|H_0 \text{ verdadeira}) = P\left(\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} < a\right) + P\left(\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} > b\right)$$

Repartindo a probabilidade α em partes iguais pela cauda esquerda e direita da distribuição χ^2_{n-1}, tem-se

$$a = \chi^2_{n-1:1-\alpha/2} \quad \text{e} \quad b = \chi^2_{n-1:\alpha/2}.$$

Então, para um nível de significância α, a região de rejeição fica definida por:

$$R_\alpha \equiv \left[0, \chi^2_{n-1:1-\alpha/2}\right[\cup \left]\chi^2_{n-1:\alpha/2}, +\infty\right[$$

e rejeitaremos H_0 se

$$x^2_{obs} = \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2} \in R_\alpha.$$

Regra de decisão para um nível de significância α

$$\boxed{\text{Região de rejeição: } R_\alpha = \left[0, \chi^2_{n-1:1-\alpha/2}\right[\cup \left]\chi^2_{n-1:\alpha/2}, +\infty\right[}$$

$$\boxed{\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } x^2_{obs} = \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2} \in R_\alpha}$$

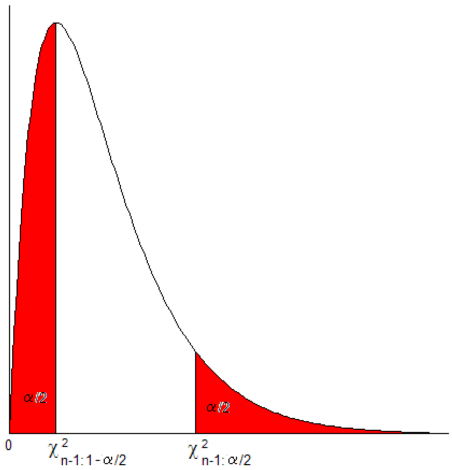
$$\boxed{\text{p-value}=2\min\left(P\left(X^2 < x^2_{obs}\right), P\left(X^2 > x^2_{obs}\right)\right)}$$

4.8.2 Teste de hipóteses unilateral direito para a variância

Consideremos as hipóteses

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Figura 4.7: Teste bilateral para a variância



Naturalmente que devemos rejeitar a hipótese $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ se a amostra nos fornecer uma estimativa S^2 para a qual o quociente $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$ é muito grande. Mas se isto acontecer, também o quociente $\dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$ deverá ser "demasiado" grande. Resumindo, deveremos rejeitar a hipótese de $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ se,

$$X^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} > a.$$

Mas qual o valor de a? Ora, quando $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$, a estatística de teste $X^2 = \dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$ tem distribuição

$$X^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} \underset{\sigma^2=\sigma_0^2}{\sim} \chi^2_{n-1}$$

(X^2 tem distribuição do qui-quadrado com $(n-1)$ graus de liberdade)

Para um nível de significância α,

$$\alpha = \max_{\sigma \leq \sigma_0^2} P\left(\text{Rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ verdadeira}\right) = P\left(\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} > a\right) = P\left(X^2 > a\right)$$

o que implica,

$$a = \chi^2_{n-1:\alpha}.$$

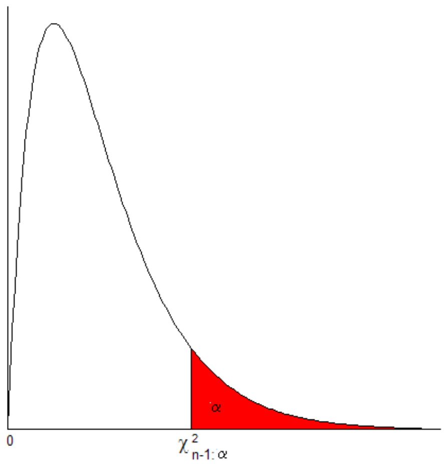
Regra de decisão para um nível de significância α

$$\boxed{\text{Região de rejeição: } R_\alpha = \left]\chi^2_{n-1:\alpha}, +\infty\right[}$$

$$\boxed{\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } x^2_{obs} \in R_\alpha}$$

$$\boxed{\text{p-value}=P\left(X^2 > x_{obs}^2\right)}$$

Figura 4.8: Teste unilateral direito para a variância



4.8.3 Teste de hipóteses unilateral esquerdo para a variância

Consideremos as hipóteses

$H_0: \ \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad H_1: \ \sigma^2 < \sigma_0^2$

Neste caso devemos rejeitar a hipótese $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ se a amostra nos fornecer uma estimativa S^2 para a qual o quociente $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$ é muito pequeno. Mas se isto acontecer, também o quociente $\dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$ deverá ser "demasiado"pequeno. Deveremos então rejeitar a hipótese de $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$ se,

$$X^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} < a.$$

Mas qual o valor de a? Ora, quando $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$, a estatística de teste passará a ser

$$X^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} \underset{\sigma^2=\sigma_0^2}{\sim} \chi_{n-1}^2$$

(X^2 tem distribuição χ_{n-1}^2). Então, para um nível de significância α,

$$\alpha \ = \ \max_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} P\left(\text{Rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ verdadeira}\right) = P\left(\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} < a\right) = P\left(X^2 < a\right)$$

Isto implica que

$$a = \chi_{n-1:1-\alpha}^2.$$

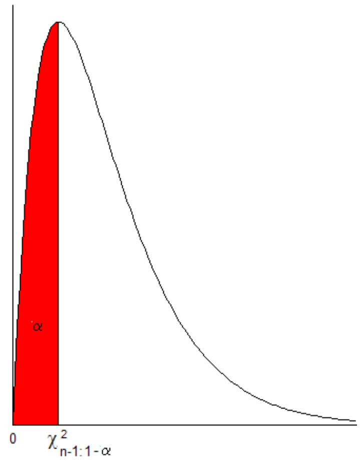
Regra de decisão para um nível de significância α

$$\boxed{\text{Região de rejeição: } R_\alpha = \left[0, \chi^2_{n-1:1-\alpha}\right[}$$

$$\boxed{\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } x^2_{obs} = \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2} \in R_\alpha}$$

$$\boxed{\text{p-value}=P\left(X^2 < x^2_{obs}\right)}$$

Figura 4.9: Teste unilateral esquerdo para a variância



Exemplo 4.9 *A admnistração de uma SAD reclama que o investimento nas suas acções é seguro e que o desvio padrão do preço das acções é inferior a 2 euros. Suponha que está interessado numa eventual compra de acções desta SAD mas, antes de fazer a compra decide testar a veracidade das afirmações da administração. Para tal escolheu aleatoriamente 30 dias dos últimos 3 anos e registou o preço das acções. A amostra facultou um desvio padrão amostral de $s = 1.70$ euros.*

Será que esta estimativa indica, ao nível de 5% de significância, que a administração da SAD está a dar informação verdadeiras?

Queremos testar

$$H_0 : \sigma \geq 2 \quad vs \quad H_1 : \sigma < 2$$

que é equivalente a testar

$$H_0 : \sigma^2 \geq 4 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 < 4.$$

A informação amostral disponível é:

$$n = 30 \quad \alpha = 0.05 \quad s^2 = 1.70^2 = 2.89$$

De acordo com a metodologia proposta para a realização do teste, tem-se

Hipóteses: $H_0 : \sigma^2 \geq 4 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 < 4$

Estimador de σ^2: $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$

Estatística de teste: $X^2 = \dfrac{(n-1)\, S^2}{\sigma_0^2} \underset{\sigma^2=\sigma_0^2}{\sim} \chi^2_{n-1} \Leftrightarrow X^2 = \dfrac{29S^2}{4} \underset{\sigma^2=4}{\sim} \chi^2_{29}$

Região de rejeição para um nível de significância $\alpha = 5\%$:

$R_{0.05} = [0, c[$, *sendo c o valor que satisfaz:*

$$\begin{aligned} \alpha = 5\% \quad &= \quad P\left(X^2 \in R_{0.05}\right) \Leftrightarrow 0.05 = P\left(X^2 < c\right) \Leftrightarrow P\left(X^2 \geq c\right) = 0.95 \\ &\Leftrightarrow \quad c = \chi^2_{29:0.95} = 17.708 \end{aligned}$$

$R_{0.05} = [0, 17.708[$

Decisão: *Como* $x^2_{obs} = \dfrac{29 \times 2.89}{4} = 20.953$ *e* $x^2_{obs} \notin R_{0.05}$, *não devemos duvidar das afirmações da admnistração da SAD, com uma significância de 5%.*

Para uma decisão fundamentada no $p - value$, *tem-se*

$$p - value = P\left(X^2 < x^2_{obs}\right) = P\left(X^2 < 20.953\right) = 0.1391 > \alpha \ (\alpha = 5\%)$$

pelo que, não devemos duvidar das afirmações da admnistração da SAD, com uma significância de 5%.

4.9 Outros testes de hipóteses

Para outros testes de hipóteses usuais, limitamo-nos a apresentar os quadros resumos das estatísticas de teste a utilizar e respectivas regras de decisão.

4.9.1 Teste de hipóteses para a proporção

Exemplo 4.10 *Um comerciante admite que a possibilidade de um cliente adquirir pelo menos um produto na sua loja é constante e de valor superior a 0.4. Durante um mês, contou o números de clientes que entraram na loja assim como os que fizeram alguma compra, tendo registado os valores 878 e 495, respectivamente. A informação recolhida permite corroborar as suas suspeitas?*

As hipóteses a teste deverão ser

$$H_0 : p \leq 0.4 \ \ vs \ \ H_1 : p > 0.4$$

que vamos testar com um nível de significância $\alpha = 10\%$.

A informação disponível é:

$$p_0 = 0.4 \quad \hat{p} = 495/878 = 0.56 \quad n = 878 \quad z_\alpha = z_{0.10} = 1.28$$

A regra de rejeição é: Rejeitar H_0 *se* $Z = \sqrt{n}\dfrac{\hat{P} - 0.4}{\sqrt{0.4\,(1 - 0.4)}} > z_{0.1}$

Ora

$$z_{obs} = \sqrt{878}\frac{0.56 - 0.4}{\sqrt{0.4\,(1 - 0.4)}} = 9.68 > 1.28$$

Decisão: O comerciante não deve duvidar das suas suspeitas, com uma significância de 10%.

$$p - value = P\left(Z > z_{obs}\right) = P\left(Z > 9.68\right) \approx 0 < 0.10 \ (\alpha)$$

4.9.2 Teste de hipóteses para a diferença dos valores médios de duas populações

Exemplo 4.11 *A FNN decidiu comprar fatos novos para os atletas. Adquiriu 6 fatos da marca mais cara (Tipo A) e 7 da marca mais barata (TIPO B) e enviou-os para um laboratório, onde se registaram os tempos de duração até romperem. Os registos, em horas, aparecem na tabela que se segue:*

Tipo A:	1400	1725	1610	1605	1950	1575	
Tipo B:	1615	1665	1730	1755	1632	1606	1790

Admitindo que o tempo de duração dos fatos para cada marca têm uma lei normal com a mesma variância, poderá dizer, com uma significância de 5%, que as durações médias dos fatos das duas marcas são idênticas?
Estime por intervalo de 95% de confiança a diferença entre as durações médias dos fatos de cada marca.

As hipóteses a testar deverão ser

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \ vs \ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

que vamos testar com um nível de significância $\alpha = 5\%$.

Supondo que o tempo de duração dos fatos têm distribuição normal e que são iguais, temos:

$$n_1 = 6 \quad \bar{x} = 1644.17 \quad s_1^2 = 182.85^2 \quad n_2 = 7 \quad \bar{y} = 1684.71 \quad s_2^2 = 73.37^2 \quad s_p^2 = 199469.5539$$

$$t_{n_1+n_2-2:\alpha/2} = t_{11:0.025} = 2.201$$

A regra de rejeição é: Rejeitar H_0 *se* $\left| \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| > t_{n_1+n_2-2:\alpha/2}$

Ora

$$\left| \frac{1644.17 - 1684.71}{446.62\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{7}}} \right| = 0.163 < 2.201 = t_{11:0.025}$$

Decisão: Com uma significância de 5%, não existe evidência para dizer que os tempos médios de duração são distintos.

O intervalo de confiança $(1 - \alpha) = 1 - 0.05 = 0.95$ *para* $\mu_1 - \mu_2$ *é a região de não rejeição do teste das hipóteses*

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \ vs \ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

O intervalo de $(1 - \alpha)$ *de confiança para* $\mu_1 - \mu_2$ *é*

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{n_1+n_2-2:\alpha/2}\, S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{n_1+n_2-2:\alpha/2}\, S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]$$

e a estimativa para a diferença médias das durações dos fatos é

$$\left[1644.17 - 1684.71 - 2.201 \times 446.62\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{7}}, 1644.17 - 1684.71 + 2.201 \times 446.62\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{7}}\right] =$$

$$= [-587.437, 506.357]$$

,,,,,,,,,,,,,,,

,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,

Capítulo 5

Teste de ajustamento do Qui-Quadrado

Por vezes as conjecturas (hipóteses) sobre uma certa população em estudo, não incidem sobre os parâmetros da distribuição dessa população, mas sim sobre a própria distribuição da população. Os testes destas hipóteses dizem-se testes não paramétricos.

Neste capítulo vamos apresentar um teste não paramétrico específico para averiguar se uma dada população (ou v.a.) tem uma distribuição F preconizada, isto é um teste para as hipóteses:

$$H_0 : X \sim F(\cdot) \;\; vs \;\; H_1 : X \nsim F(\cdot)$$

O teste que aqui apresentamos intitula-se teste de ajustamento do qui-quadrado e apresenta a vantagem de se poder aplicar a qualquer distribuição preconizada para uma população, mas a desvantagem de exigir que as amostras sejam grandes.

Consideremos uma amostra $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de uma população X, com dimensão $n \geq 30$.

- Agrupada em m classes $A_1, \ldots, A_m$ disjuntas e verificando $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = S_X$, com S_X o suporte de $X \sim F(\cdot)$;
- Sejam $p_i = P(X \in A_i)\,,\;\; i = 1, \ldots, m$

$$0 < p_i < 1,\;\; i = 1, \ldots, m \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

- Seja O_i o n.º observado de valores amostrais que pertencem à classe A_i, $i = 1, \ldots, m$.

$$0 < O_i < n,\;\; i = 1, \ldots, m \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{m} O_i = n$$

  Os valores O_i, $i = 1, \ldots, m$ são designados por frequências observadas.

- Admitindo verdadeira a hipótese H_0, sejam

$$p_{0i} = P(X \in A_i \,|H_0 \text{ verdadeira})\,,\;\; i = 1, \ldots, m$$

e

$$E_i = n \times P\,(X \in A_i\,|H_0 \text{ verdadeira}) = n \times p_{0i}, \;\; i = 1, \ldots, m$$

$$0 < E_i < n, \;\; i = 1, \ldots, m \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{m} E_i = n$$

E_i é designado por frequência esperada da classe A_i, caso H_0 seja verdadeira.

- A estatística do teste do qui-quadrado é

$$X^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Nota: Essencialmente, a estatística X^2 é uma medida ponderada das discrepâncias entre as frequências observadas O_i e a frequências que se esperam observar E_i, quando H_0 é verdadeira.

- Quando H_0 é verdadeira,

$$X^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \underset{\text{sob } H_o}{\overset{a}{\sim}} \chi^2_{m-p-1}$$

sendo m o número de classes e p o número de parâmetros estimados da distribuição considerada na hipótese nula.

- Sendo necessário estimar parâmetros da distribuição preconizada na hipótese nula, devem ser utilizados os respectivos estimadores de máxima verosimilhança.

- A hipótese H_0 deverá ser rejeitada para grandes valores da estatística de teste. Como tal, a região de rejeição é um intervalo $]a, +\infty[\,, \quad a > 0$.

  Para um nível de significância α,

$$\alpha = P\left(X^2 > a\,|H_0 \text{ verdadeira}\right),$$

  pelo que $a = \chi^2_{m-p+1:\alpha}$ e a região de rejeição é:

$$R_\alpha = \left]\chi^2_{m-p-1:\alpha}, +\infty\right[$$

- Dado o valor observado da estatística de teste, x^2_{obs}, e para um nível α de significância, decidimos rejeitar H_0 se:

$$x^2_{obs} \in R_\alpha, \quad \text{ou seja, se} \quad x^2_{obs} > \chi^2_{m-p-1:\alpha}.$$

- Nota: Quando uma classe tem frequência esperada $E_i < 5$, devemos fundi-la com a classe (ou as classes adjacentes) até que a nova frequência esperada tenha um valor que não inferior a 5. O valor da frequência observada O_i deve ser reajustado, assim como o número m final de classes.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.1 *Uma máquina de café de utilização doméstica é vendida em 4 cores: preta (A_1), branca (A_2), vermelha (A_3) e castanha (A_4). Pretende-se saber se os consumidores manifestam a mesma preferência por qualquer cor, isto é, se a v.a. X-cor escolhida por um cliente, tem função de probabilidade:*

$$X\left\{\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right.$$

As hipóteses a testar são:

$$H_0 : p_i = P(A_i) = 1/4, \;\; i = 1, \ldots, 4 \quad vs \quad H_1 : p_i = P(A_i) \neq 1/4, \text{para algum } i$$

Para tal, numa sondagem a 300 compradores deste equipamento, foi reunida a seguinte informação acerca da cor da máquina que adquiriram:

X	A_1	A_2	A_3	A_4
O_i	90	88	62	60

Para $i = 1, \ldots, 4$, $E_i = n \times p_{0i} = 300 \times 1/4 = 75$ *e*

$$x^2_{obs} = \frac{(90-75)^2}{75} + \frac{(88-75)^2}{75} + \frac{(62-75)^2}{75} + \frac{(60-75)^2}{75} = 10.5067$$

Para um nível de 5% de significância, $\chi^2_{4-1:0.05} = 7.815$, *pelo que* $R_{0.05} =]7.815, +\infty[$.

Como $x^2_{obs} = 10.5067 \in R_{0.05}$, *rejeitamos a hipótese* H_0, *ou seja, com 5% de significância concluímos que existe evidência estatística para afirmar que os consumidores manifestam diferentes preferências pela cor da máquina.*

Valor-p associado à nossa decisão:

$$p - value = P\left(X^2 > x^2_{obs} \,|H_0 \text{ verdadeira}\right) = P\left(\chi^2_3 > 10.5067\right) = 0.0147,$$

que sendo inferior a $\alpha = 0.05$, *confirma a decisão de rejeitar* H_0.

Exemplo 5.2 (Teste de ajustamento para uma distribuição de Poisson)

O número de avarias registadas diariamente numa máquina, suspeita-se ter distribuição de Poisson. Recolhida informação diária sobre o número de avarias corridas durante 260 dias de laboração, obtiveram-se os seguintes valores:

N.º de avarias	*0*	*1*	*2*	*3*
N.º de dias, O_i	*102*	*96*	*48*	*14*

Sendo X-n.º de avarias diárias, queremos testar as hipóteses

$$H_0 : X \sim P(\lambda) \quad vs \quad H_1 : X \nsim P(\lambda)$$

Como λ *tem valor desconhecido, teremos de o estimar usando o estimador de máxima verosimilhança* $\hat{\lambda} = \overline{X}$. *Para a presenta amostra, obtemos uma estimativa* $\hat{\lambda} = 234/260 = 0.9$.

Consideremos as classes $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{2\}$, $A_1 = \{3, 4, \ldots\}$. *Na tabela seguinte, apresentamos os valores de:* $\hat{p}_{0i} = P\left(X \in A_i \middle| X \sim P\left(\hat{\lambda}\right)\right), i = 1, \ldots, 4$ *e as frequências esperadas* $\hat{E}_i = 300 \times p_{0i}, i = 1, \ldots, 4$.

Classe	*0*	*1*	*2*	*3 ou mais*
$\hat{p}_{0i}$	*0.4066*	*0.3659*	*0.1647*	*0.0628*
$\hat{E}_i$	*105.716*	*95.134*	*42.822*	*16.328*

O valor observado da estatística do qui-quadrado é:

$$x^2_{obs} = \frac{(102 - 105.716)^2}{105.716} + \frac{(96 - 95.134)^2}{95.134} + \frac{(48 - 42.822)^2}{42.822} + \frac{(14 - 16.328)^2}{16.328} = 1.096542483$$

A estatística de teste é

$$X^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(O_i - \hat{E}_i\right)^2}{\hat{E}_i} \underset{sob\ H_o}{\overset{a}{\sim}} \chi^2_{4-1-1}$$

Para um nível de 10% de significância, a região de rejeição é $R_{0.1} = \left]\chi^2_{4-1-1:0.1}, +\infty\right[=]4.605, +\infty[$.

Uma vez que $x^2_{obs} = 1.096542483 \notin R_{0.1}$, *não rejeitamos a hipótese de o n.º de avarias diárias ter distribuição de Poisson.*

Valor-p associado à nossa decisão:

$$p - value = P\left(X^2 > x^2_{obs} \,|H_0 \text{ verdadeira}\right) = P\left(\chi^2_2 > 1.096542483\right) = 0.5779,$$

que sendo superior a $\alpha = 0.10$, *confirma a decisão de não rejeitar* H_0.

5.1 Teste ao pressuposto da normalidade de uma população

O teste á normalidade da distribuição de uma população tem particular interesse porque nos permitirá saber qual a distribuição de amostragem a usar para a média amostral $\overline{X}$ (discussão sobre qual das situações, nomeadamente as que temos vindo a identificar como A, B, C ou D, aplicar) ou para a variância amostral S^2.

Passamos a exemplificar como se utiliza o teste de ajustamento do qui-quadrado para testar as hipóteses

$$H_0\colon X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \quad vs \quad H_1\colon X \nsim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

Exemplo 5.3 *Consideremos a amostra de medições da acidez (pH) da água da chuva apresentada no exemplo 4.6 acrescida de mais 18 observações. Nesse exemplo, admitimos que a população X-"Acidez (pH) da água da chuva"tinha distribuição normal.*

Vamos agora testar se este pressuposto se verifica ou não, ou seja vamos testar as hipóteses:

$$H_0 : X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \quad vs \quad H_1 : X \nsim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

A nossa amostra era

5.1	5.0	4.6	3.8	4.8	3.6	4.7	3.8	4.1	4.2	4.4	4.5	3.6	3.9	4.2
4.3	4.4	4.5	4.9	4.7	4.8	4.1	4.2	4.5	4.5	4.6	4.4	4.1	4.6	4.5

correspondendo-lhe uma média $\overline{x} = 4.55$ *e um desvio padrão amostral* $s = 0.462208139$.

Comecemos por agrupar os dados da amostra. Para tal consideremos os seguintes intervalos (denominados classes) para agrupamento dos dados: $]-\infty, 3.7]$, $]3.7, 4.0]$, $]4.0, 4.3]$, $]4.3, 4.6]$, $]4.6, 4.9]$ *e* $]4.9, +\infty[$.

As frequências absolutas observados de observações em cada classe são:

Tabela de frequências

i	*Classe* A_i	*Frequência observada* O_i
1	$]-\infty, 3.7]$	2
2	$]3.7, 4.0]$	3
3	$]4.0, 4.3]$	7
4	$]4.3, 4.6]$	11
5	$]4.6, 4.9]$	5
6	$]4.9, +\infty[$	2
	Totais	30

Ora, se a hipótese $H_0 : X$ *tem distribuição normal, for verdadeira, isto é, se* $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$,

$$\begin{aligned} p_2 = P\left(A_2\right) &= P\left(3.7 < X \leq 4.0\right) = P\left(X \leq 4.0\right) - P\left(X \leq 3.7\right) = \\ &= P\left(Z \leq \frac{4.0 - \mu}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq \frac{3.7 - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{4.0 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{3.7 - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

que não podemos calcular porque desconhecemos o valor de μ *e de* σ.

Contudo, sabemos que os estimadores $\overline{X}$ *e* S^2 *(estimadores de máxima verosimilhança de* μ *e* σ^2*, respectivamente) fornecem boas estimativas para* μ *e para* σ^2*. Portanto, podemos estimar a anterior probabilidade, substituindo* μ *por* $\overline{x} = 4.38$ *e* σ^2 *por* $s^2 = 0.152$.

Assim

$$\begin{aligned} \hat{p}_2 = P\left(A_2\right) &\approx \Phi\left(\frac{4.0 - \overline{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{3.7 - \overline{x}}{s}\right) = \\ &= \Phi\left(-0.97\right) - \Phi\left(-1.74\right) = 0.1251 \end{aligned}$$

Nota: *Repare que, para o cálculo da probabilidade, fomos obrigados a usar as estimativas de 2 parâmetros.*

Se repetirmos este raciocínio para as restantes classes, obtemos as estimativas da probabilidade de clada classe (se H_0 é verdadeira):

$$\begin{aligned}
\hat{p}_1 = P(A_1) &= P(X \leq 3.7) \approx \Phi\left(\frac{3.7 - \overline{x}}{s}\right) = \Phi(-1.74) = 0.0409 \\
\hat{p}_3 = P(A_3) &= P(4.0 < X \leq 4.3) \approx \Phi\left(\frac{4.3 - \overline{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{4.0 - \overline{x}}{s}\right) = \\
&= \Phi(-0.21) - \Phi(-0.97) = 0.2508 \\
\hat{p}_4 = P(A_4) &= P(4.3 < X \leq 4.6) \approx \Phi\left(\frac{4.6 - \overline{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{4.3 - \overline{x}}{s}\right) = \\
&= \Phi(0.56) - \Phi(-0.21) = 0.2955 \\
\hat{p}_5 = P(A_5) &= P(4.6 < X \leq 4.9) \approx \Phi\left(\frac{4.9 - \overline{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{4.6 - \overline{x}}{s}\right) = \\
&= \Phi(1.33) - \Phi(0.56) = 0.1959 \\
\hat{p}_6 = P(A_6) &= P(X > 4.9) \approx 1 - \Phi\left(\frac{4.9 - \overline{x}}{s}\right) = 1 - \Phi(1.33) = 0.0918
\end{aligned}$$

Vamos agora concluir o nosso exemplo. Começamos por construir uma tabela onde apresentamos as frequências observadas, as frequências esperadas e as parcelas $\frac{\left(O_i - \hat{E}_i\right)^2}{\hat{E}_i}$ de cada classe, assim como o valor observado de X^2.

i	*Classe* A_i	*Frequência absoluta* O_i	*Frequência esperada* $\hat{E}_i$	$\left(O_i - \hat{E}_i\right)^2 / \hat{E}_i$
1	$]-\infty, 3.7]$	*2*	*1.227*	*0.4870*
2	$]3.7, 4.0]$	*3*	*3.753*	*0.1511*
3	$]4.0, 4.3]$	*7*	*7.524*	*0.0365*
4	$]4.3, 4.6]$	*11*	*8.865*	*0.5142*
5	$]4.6, 4.9]$	*5*	*5.877*	*0.1309*
6	$]4.9, +\infty[$	*2*	*2.754*	*0.2064*
	Totais	*30*	*30*	*1.5261*$=x^2_{obs}$

Repare que as classes A_1, A_2 e A_6 têm uma frequência esperada inferior a 5. Devemos então fundir as classes A_1 e A_2 assim como as classes A_5 e A_6, dando origem à nova informação:

i	Classe A_i	Frequência absoluta O_i	Frequência esperada $\hat{E}_i$	$\left(O_i - \hat{E}_i\right)^2 / \hat{E}_i$
1	$]-\infty, 4.0]$	5	4.980	0.0001
2	$]4.0, 4.3]$	7	7.524	0.0365
3	$]4.3, 4.6]$	11	8.865	0.5142
4	$]4.6, +\infty[$	7	8.631	0.3082
	Totais	30	30	0.8590=x^2_{obs}

A estatística de teste é

$$X^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(O_i - \hat{E}_i\right)^2}{\hat{E}_i} \underset{sob\ H_o}{\overset{a}{\sim}} \chi^2_{4-2-1} \equiv \chi^2_1$$

Se considerarmos um nível de significância $\alpha = 0.05$*, temos* $\chi^2_{1:0.05} = 3.841$ *e como*

$$x^2_{obs} = 0.8590 < 3.841 = \chi^2_{1:0.05}$$

não existem razões para duvidar de que a população X*-"acidez (pH) da água da chuva", tem distribuição normal.*

Valor-p associado à nossa decisão:

$$p - value = P\left(X^2 > x^2_{obs} \,|H_0 \ verdadeira\right) = P\left(\chi^2_1 > 0.8590\right) = 0.354,$$

que sendo superior a $\alpha = 0.05$*, confirma a decisão de não rejeitar* H_0*.*

Vejamos outro exemplo, em que o número de parâmetros a estimar para o cálculo das frequências esperadas, é diferente.

Exemplo 5.4 *Para o exemplo 4.4, precisaríamos de verificar previamente se a população* X*-"gasto semanal em alimentação (para famílias com dois filhos) em Agosto de 2003"tem distribuição normal com desvio padrão conhecido e de valor* $\sigma = 15$ *euros.*

As nossas hipóteses são

$$H_0: \ X \sim N\left(\mu, 15^2\right) \quad vs \quad H_1 : X \nsim N\left(\mu, 15^2\right)$$

Consideremos o agrupamento da amostra de gastos em alimentação das $n = 25$ *famílias, nas classes* $A_1 =]-\infty, 90]$*,* $A_2 =]90, 95]$*,* $A_3 =]95, 100]$*,* $A_4 =]100, 105]$*,* $A_5 =]105, 110]$*,* $A_6 =]110, 115]$ *e* $A_7 =]115, +\infty[$*.*

Comecemos por exemplificar o cálculo da frequência esperada da classe A_3.

$$\begin{aligned} E_3 &= n \times p_3 = 25 \times P(95 < X \leq 100) = \\ &= 25 \times (P(X \leq 100) - P(X \leq 95)) = \\ &= 25 \times \left(P\left(Z \leq \frac{100-\mu}{15} \right) - P\left(Z \leq \frac{95-\mu}{15} \right) \right) = \\ &= 25 \times \left(\Phi\left(\frac{100-\mu}{15} \right) - \Phi\left(\frac{95-\mu}{15} \right) \right) \end{aligned}$$

Mas, como desconhecemos o valor de μ, teremos de o substituir pela respectiva estimativa de máxima verosimilhança, $\overline{x} = 108$.

Nota: *Repare que para o cálculo das frequências esperadas, somos obrigados a usar a estimativa de 1 parâmetro.*

Então

$$\begin{aligned} \hat{E}_3 &= n \times \hat{p}_3 \approx 25 \times \left(\Phi\left(\frac{100-\overline{x}}{15} \right) - \Phi\left(\frac{95-\overline{x}}{15} \right) \right) = \\ &= 25 \times (\Phi(-0.53) - \Phi(-0.87)) = 25 \times 0.1059 = 2.6475 \end{aligned}$$

Completando o cálculo das restantes frequências esperadas, obtemos o quadro resumo da informação amostral:

i	*Classe* A_i	*Frequência observada* O_i	*Frequência esperada* $\hat{E}_i$	$\left(O_i - \hat{E}_i\right)^2 / \hat{E}_i$
1	$]-\infty, 90]$	*2*	*2.8775*	*0.2676*
2	$]90, 95]$	*2*	*1.9275*	*0.0027*
3	$]95, 100]$	*2*	*2.6475*	*0.1584*
4	$]100, 105]$	*5*	*3.0650*	*1.2216*
5	$]105, 110]$	*7*	*3.2750*	*4.2368*
6	$]110, 115]$	*4*	*3.2275*	*0.1849*
7	$]115, +\infty[$	*3*	*7.9800*	*3.1078*
	Totais	*25*	*25*	*9.1798*

Desde logo verificamos que é necessário aglutinar classes de modo a que todas tenham valor esperada não inferior a 5. Este processo pode conduzir ao seguinte agrupamento final:

i	Classe A_i	Frequência observada O_i	Frequência esperada $\hat{E}_i$	$\left(O_i - \hat{E}_i\right)^2 / \hat{E}_i$
1	$]-\infty, 95]$	4	4,8050	0.1349
2	$]95, 105]$	7	5.7125	0.2902
3	$]105, 115]$	11	6.5025	3.1107
4	$]115, +\infty[$	3	7.9800	3.0992
	Totais	25	25	6.6350

Estipulando um nível de significância $\alpha = 0.10$, *temos* $\chi^2_{4-1-1:0.10} = 4.605$ *e como*

$$x^2_{obs} = 6.6350 > 4.605 = \chi^2_{2:0.10}$$

existem razões para duvidar de que a população X*-"gasto semanal em alimentação (para famílias com dois filhos) em Agosto de 2003", tenha distribuição normal com desvio padrão conhecido e de valor* $\sigma = 15$ *euros.*

Valor-p associado à nossa decisão:

$$p - value = P\left(X^2 > x^2_{obs}\,|H_0 \text{ verdadeira}\right) = P\left(\chi^2_2 > 6.6350\right) = 0.0362,$$

que sendo inferior a $\alpha = 0.1$, *confirma a decisão de rejeitar* H_0.

***Observações**: Neste exemplo, é discutível a utilização do teste de ajustamento do qui-quadrado porque a amostra pode não ser suficientemente grande.*
Também se optou por não fundir as três primeiras classes de modo a atingir uma frequência esperada superior ou igual a 5, com o objectivo de não diminuir excessivamente o número final de classes. Esta prática é bastante comum, porque pode ser mais danoso usar classes em número muito reduzido do que cumprir estritamente a condição sobre o valor das frequências esperadas.

Nota: 5.1 *Existem outros testes para testar a distribuição assumida para uma população (ou v.a.). Só a título de informação, não podemos deixar de referir o* teste de Kolmogorov-Smirnov, *particularmente conveniente para testar a distribuição de uma população* contínua *e o teste de* Shapiro-Wilk *exclusivamente para testar a normalidade de uma população.*

Capítulo 6

Teste ao pressuposto de aleatoriedade das observações amostrais

Sistematicamente, em todos os tratamentos estatísticos referidos, viemos a assumir que a amostra $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é uma amostra de v.a.'s. Face a uma amostra observada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ podemos contestar se efectivamente ela resulta de observações obtidas de modo aleatório.

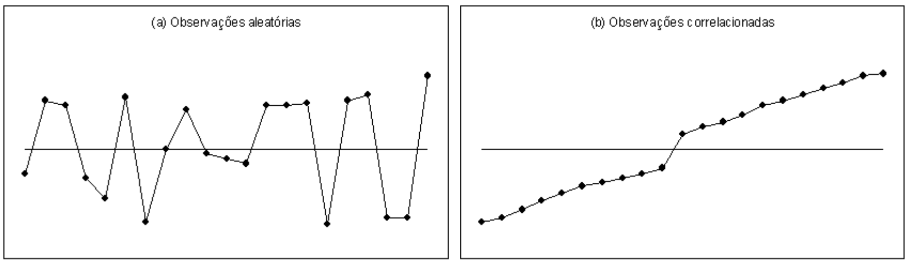
No fundo estamos a interrogar-nos sobre a validade de uma de duas hipóteses:

$$H_0: \; X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ são v.a.'s } \; vs \; H_1: \; X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ não são v.a.'s}$$

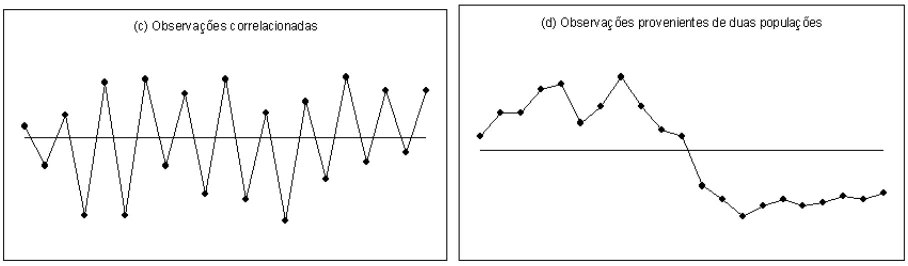
e que muitas vezes são apresentadas de modo mais simples (ainda que não totalmente correcto)

$$H_0: \text{ A amostra é aleatória } \; vs \; H_1: \text{ A amostra não é aleatória}$$

Figura 6.1: Amostras aleatórias e não aleatórias



A não aleatoriedade pode verificar-se de muitas maneiras: Nas figuras acima ilustram-se algumas destas situações. Quando a a amostra é aleatória, a linha que une as sucessivas observações cruza frequentemente a mediana amostral (Figura (a)). Contudo, se o número de cruzamentos é demasiado elevado (Figura (c), isto significa que uma observação acima da linha mediana se segue uma abaixo dessa linha, a que se seguirá outra de novo acima da linha mediana, e assim sucessivamente para a maioria das observações amostrais. Ora isto não é consentâneo com uma situação de aleatoriedade. Também as situações expostas nas figuras (b) e (d), correspondem a um número diminuído de cruzamentos e ilustram outras formas de não aleatoriedade da amostra.



Existem inúmeros testes estatísticos que permitem testar estas hipóteses. Vamos aqui referir apenas um, habitualmente denominado teste das sequências ascendentes e descendentes.

Define-se por sequência um conjunto de observações consecutivas e idênticas. Consideremos a amostra resultante da classificação de 10 objectos em G-grande e P-pequeno,

G G P P G P G G P G

Nesta amostra aparecem 7 sequências, nomeadamente, GG, PP, G, P, GG, P e G.

De acordo com as observações feitas sobre as características de aleatoriedade de uma amostra, concluímos que uma amostra com um número de sequências demasiado elevado ou demasiado pequeno, não deve ser aleatória.

O teste das sequências ascendentes e descendentes aplica-se a amostras em que os dados são expressos, pelo menos, numa escala ordinal (ou seja, podem ser ordenados).

Uma sequência ascendente é uma sequência de observações crescentes e uma sequência descendente é uma sequência de observações decrescentes. Sempre que a ordenação altera o seu sentido, começa uma nova sequência.

Por exemplo, se na amostra

$$(9.4, 3.2, 3.5, 4.4, 4.3, 5.2, 5.4, 6.8, 3.3)$$

substituirmos pelo símbolo $+$ cada observação que é precedida por uma de valor inferior, e pelo símbolo $-$ cada observação que é precedida por outra de valor superior, obtemos

$$(\cdot, -, +, +, -, +, +, +, -)$$

onde se registam 5 sequências.

O teste baseia-se no número V de sequências observadas numa amostra de N símbolos.

Neste exemplo, $N = 8$, e V tem um valor observado $v = 5$.

Passemos a discutir a regra de rejeição da aleatoriedade. Quando a amostra não é aleatória, o número V de sequências é muito elevado ou muito pequeno. Assim, devemos

Rejeitar "H_0 : A amostra é aleatória", se $V \leq a$ **ou** se $V \geq b$.

Mas qual o valor de $\underline{a}$ e de $\underline{b}$?

A questão da determinação destas constantes vai ser contornada. Na aplicação prática deste teste, o procedimento será o seguinte:

- Determinamos o valor da estatística de teste V, que representamos por v_o;
- Determinamos o valor $t_o = \min(v_o, N + 1 - v_o)$
- Na tabela estatística do teste das sequências ascendentes e descendentes, fazemos a leitura da probabilidade

$$P_{value} = P(V \leq t_o) + P(V \geq t_o)$$

Regra de decisão para um nível de significância α

$$\boxed{\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } P_{value} < \alpha}$$

Na tabela estatística do teste das sequências ascendentes e descendentes, só encontramos valores de P_{value} para $N \leq 24$. Quando $N \geq 25$, podemos realizar um teste assintótico, usando a estatística de teste

$$Z = \frac{V - \frac{2N-1}{3}}{\sqrt{\frac{16N-29}{90}}} \xrightarrow{L} Z \sim N(0,1)$$

e

Regra de decisão para um nível de significância α

$$\boxed{\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } |z_{obs}| \geq z_{\alpha/2}}$$

Exemplo 6.1 *Consideremos a amostra apresentada no exemplo 4.6 de medições de acidez (pH) de amostras de chuva registadas em 12 locais de uma região industrial:*

5.1	5.0	3.8	4.8	3.6	4.7
4.3	4.4	4.5	4.9	4.7	4.8

e testemos se estas observações constituem uma amostra aleatória.

A amostra de símbolos é

·	−	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+

com $N = 11$ *símbolos e* $v_o = 8$ *sequências.*

Então $t_o = \min(8, 11 + 1 - 8) = 4$ *e* $P_{value} = 0.5629$.

Decisão para um nível de significância $\alpha = 5\%$*: Como* $P_{value} = 0.5629 > 0.05 = \alpha$*, não rejeitamos a hipótese de aleatoriedade das observações amostrais.*

Exemplo 6.2 *Consideremos a amostra apresentada no exemplo 5.3 (teste de ajustamento do qui-quadrado) de medições de acidez (pH) de amostras de chuva registadas em 30 locais de uma região industrial:*

5.1	5.0	4.6	3.8	4.8	3.6	4.7	3.8	4.1	4.2	4.4	4.5	3.6	3.9	4.2
4.3	4.4	4.5	4.9	4.7	4.8	4.1	4.2	4.5	4.5	4.6	4.4	4.1	4.6	4.5

e testemos se estas observações constituem uma amostra aleatória.

A amostra de símbolos é

$\cdot$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$\cdot$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

com $N = 28$ *símbolos e* $v_o = 15$ *sequências.*

Como $N \geq 25$*, podemos usar o teste assintótico, para o qual*

$$z_{obs} = \frac{15 - \frac{2\times 28-1}{3}}{\sqrt{\frac{16\times 28-29}{90}}} = -1.82$$

Decisão para um nível de significância $\alpha = 5\%$*: Como* $|z_{obs}| = 1.82 < z_{0.025} = 1.96$*, não rejeitamos a hipótese de aleatoriedade das observações amostrais.*

O p-value associado à nossa decisão é:
$p_{value} = P\left(|Z| > |z_{obs}|\right) = P\left(|Z| > 1.82\right) = 2P\left(Z > 1.82\right) = 2\left(1 - 0.9656\right) = 0.0688 > 0.05 = \alpha$, *confirmando-se a decisão de não rejeição da hipótese de aleatoriedade das observações amostrais.*

Capítulo 7

Regressão Linear Simples

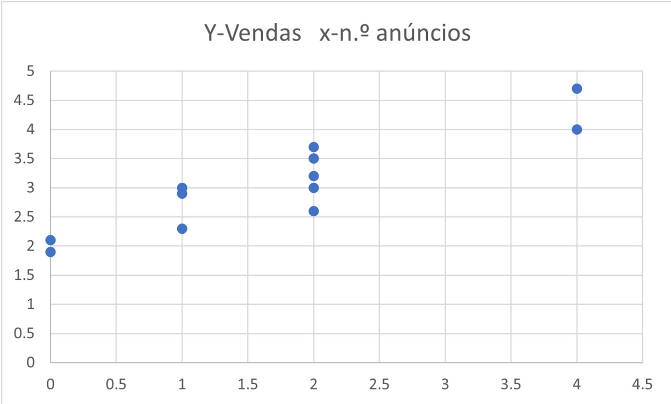
7.1 Relação entre variáveis

A regressão linear é uma técnica estatística que permite estudar a relação funcional entre uma variável aleatória, Y, (chamada *variável dependente*) é uma ou mais variáveis $x, w, \ldots$ (chamadas *variáveis independentes*). Pretendemos estabelecer uma relação funcional que possibilite explicar o valor da variável Y, uma vez conhecidos os valores das variáveis independentes $x, w, \ldots$.

A relação funcional a estudar entre a variável Y e as variáveis independentes é uma relação casuística (ou imprecisa), porque Y é uma variável aleatória. Ou seja, trata-se de uma relação em que, para os mesmos valores das variáveis independentes, não é possível dizer exactamente qual o valor de Y. Por isso é necessário um tratamento estatístico para a sua análise.

Exemplo 7.1 *Consideremos o seguinte conjunto de dados relativos ao volume mensal de vendas, Y (em milhares de unidades), de uma marca de computadores, e ao número de anúncios, x, que passaram diariamente na televisão em cada mês de um certo ano.*

Mês	*Jan*	*Fev*	*Mar*	*Abr*	*Mai*	*Jun*	*Jul*	*Ago*	*Set*	*Out*	*Nov*	*Dez*
x_i	*4*	*1*	*2*	*0*	*2*	*4*	*2*	*1*	*1*	*2*	*0*	*2*
y_i	*4.0*	*2.3*	*3.7*	*2.1*	*3.0*	*4.7*	*3.5*	*3.0*	*2.9*	*3.2*	*1.9*	*2.6*



O diagrama de dispersão destes dados sugere a existência de uma relação linear que justifica o volume de vendas num mês, em função do n.º de anúncios passados na televisão no mesmo mês.

7.2 Modelo de regressão linear simples

Quando existe apenas uma variável independente x e a sua relação funcional de natureza probabilística (ou aleatória) com a variável dependente Y é uma relação linear, o modelo matemático implícito é expresso por

$$Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + E, \tag{7.2.1}$$

e dizemos que temos um *modelo de regressão linear simples*. E é uma v.a. que expressa a natureza aleatória da variável $Y(x)$.

Dizemos que um modelo de regressão é linear, quando este for linear nos parâmetros que estabelecem a relação entre Y e as variáveis independentes $x, w, \ldots$. Por exemplo, o modelo estocástico

$$Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x^2 + E$$

é um modelo linear. Mas o modelo matemático

$$Y(x) = \beta_0 + x^{\beta_1} + E$$

já não é um modelo linear porque, apesar de ser linear relativamente a β_0, já não o é relativamente a β_1.

Por outro lado, o modelo 7.2.1 é um modelo de regressão *simples* porque nele consta apenas uma variável independente. Em contrapartida, o modelo de regressão linear

$$Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 w + E,$$

é dito um modelo de *regressão linear múltipla*.

Analisemos com mais detalhe o modelo de regressão linear simples

$$Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + E$$

A componente $\beta_0 + \beta_1 x$ é a componente determinística do modelo. A componente E expressa a natureza aleatória da varíavel dependente Y.

Assim, um modelo estatístico de regressão linear simples fica completo se considerarmos que:

- β_0 e β_1 são os parâmetros do modelo (chamados *coeficientes da regressão*);
- x é a *variável independente* (ou *variável controlada*);
- $Y(x)$ é a *variável dependente* (ou *variável resposta*) e trata-se de uma variável aleatória;
- E é o *erro* e trata-se de uma variável aleatória que se
  - pressupõe ter distribuição normal de valor médio nulo e variância σ^2

$$E \sim N\left(0, \sigma^2\right).$$

β_0 é a ordenada na origem da recta de regressão e β_1 é o declive desta recta.

Nota: 7.1 *$Y(x)$ acaba por ser uma variável aleatória porque, sendo o erro E a componente aleatória, então $Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + E$ é também variável aleatória.*

Evidentemente que, se $E \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ e, como $Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + E$, também Y tem distribuição normal com parâmetros:

$$\begin{aligned} E[Y(x)] &= E(\beta_0 + \beta_1 x + E) = \beta_0 + \beta_1 x + E(E) = \beta_0 + \beta_1 x \\ V[Y(x)] &= V(\beta_0 + \beta_1 x + E) = V(E) = \sigma^2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$Y(x) \sim N\left(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2\right).$$

Devemos também salientar que σ^2 é um parâmetro adicional do modelo que necessita ser estimado, caso não se conheça o seu valor.

7.3 Método dos mínimos quadrados para estimar β_0 e β_1

Aceitando um modelo de regressão linear simples

$$Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + E,$$

importa agora estimar a recta de regressão, ou seja encontrar estimadores para os parâmetros β_0 e β_1.

Consideremos $((x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \ldots, (x_n, Y_n))$ uma amostra aleatória de dimensão n, entendendo-se que

$$Y_i \equiv Y(x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i$$

Evidentemente que procuramos encontrar a recta que "melhor" se ajuste à amostra de n pares de observações $((x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \ldots, (x_n, Y_n))$.

Assim deveremos encontrar estimadores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$, para os coeficientes da recta de regressão, para obtermos a recta estimada (ou ajustada)

$$\hat{Y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

De entre diversos métodos que existem para a dedução dos estimadores dos coeficientes da recta de regressão, vamos aqui abordar o intitulado *método dos míninos quadrados*.

Neste método, os desvios (ou resíduos)

$$\hat{E}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$$

são a diferença na vertical entre o valor da observação Y_i e a sua estimativa pela recta de regressão $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$.

A soma do quadrado de todos os desvios representar-se-á por SQE e, encontrar os estimadores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$, ditos *estimadores de mínimos quadrados* de β_0 e β_1, respectivamente, consiste em resolver o problema

$$\text{minimizar } SQE = \sum_{i=1}^{n} \hat{E}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2,$$

em ordem a $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$.

Demonstra-se que esta minimização é conseguida resolvendo, em ordem a $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$, o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \hat{\beta}_0} SQE = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1} SQE = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right) = 0 \\ -2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right) = 0 \end{cases}$$

As soluções deste sistema são:

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{\beta}_1 = \dfrac{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ \hat{\beta}_0 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i - \hat{\beta}_1 \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\hat{\beta}_1 = \dfrac{S_{xY}}{S_{xx}} \\ \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}\end{array}\right.$$

considerando

- $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ média das observações de x
- $\bar{Y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$ média da amostra aleatória de Y
- $S_{xx} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$ soma de quadrados para x
- $S_{YY} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\bar{Y}^2$ soma de quadrados para Y
- $S_{xY} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})\left(Y_i - \bar{Y}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y}$ soma de produtos cruzados para (x, Y)

A soma dos quadrados dos desvios pode ainda ser escrita

$$SQE = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_1\right)^2 = S_{YY} - \frac{S_{xY}^2}{S_{xx}} = S_{YY} - \hat{\beta}_1^2 S_{xx}.$$

Dá-se o nome de *recta de regressão de mínimos quadrados* ao estimador da recta de regressão

$$\hat{Y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x = \overline{Y} + \hat{\beta}_1 (x - \overline{x}).$$

As estimativas desta recta para as observações $x_1, x_2, \ldots, x_n$ da variável independente x serão

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

em que, sem perda de generalidade, $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_0$ são as estimativas de mínimos quadrados de β_0 e β_1, respectivamente.

NOTA IMPORTANTE: Só devemos usar esta recta para fazer previsão dos valores da variável resposta para valores de x que estejam dentro do intervalo das observações obtidas para x.

Aos desvios

$$\hat{E}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$$

dá-se o nome de *resíduos* e

$$\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$$

serão os *resíduos observados*.

7.4 Estimação da variância do erro σ^2 e qualidade do ajustamento

Uma vez obtida a recta de regressão de mínimos quadrados e com os valores que ela fornece para cada observação x_i da variável controlada, podemos utilizar os resíduos

$$\hat{E}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

para analisar a qualidade do ajustamento da recta.

O que a recta não consegue explicar sobre os valores de Y, é expresso pelos resíduos, e por isso $\left(\hat{E}_1, \hat{E}_2, \ldots, \hat{E}_n\right)$ é uma amostra aleatória do erro E que se admite ter distribuição $N\left(0, \sigma^2\right)$.

Esta amostra aleatória permite a estimação da variância, σ^2, do erro E.

7.4.1 Estimador para σ^2

Um estimador de σ^2 é

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SQE}{n-2} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{E}_i^2 = \frac{S_{YY} - \hat{\beta}_1^2 S_{xx}}{n-2}$$

Como o erro E tem distribuição $N\left(0, \sigma^2\right)$, então

- $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{SQE}{n-2}$ é um estimador centrado para σ^2
- $(n-2)\dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ tem distribuição do qui-quadrado com $(n-2)$ graus de liberdade, $(n-2)\dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$

7.4.2 Qualidade do ajustamento

Quanto menores forem os valores dos resíduos

$$\hat{E}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

melhor é o ajustamento da recta de regressão (e de mínimos quadrados). Por esta razão podemos dizer que, quanto menor for o valor da soma do quadrado dos resíduos, SQE, melhor é o ajustamento.

Com o propósito de aferirmos numéricamente a qualidade do ajustamento da recta de regressão, apresentamos o *coeficiente de determinação*, R^2.

Definição 7.1 *Dá-se o nome de coeficiente de determinação a*

$$R^2 = 1 - \frac{SQE}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2} = 1 - \frac{S_{YY} - \hat{\beta}_1^2 S_{xx}}{S_{YY}} = \hat{\beta}_1^2 \frac{S_{xx}}{S_{YY}} = \frac{S_{xY}^2}{S_{xx} S_{YY}}$$

que assume valores $0 \leq R^2 \leq 1$.

Nota: 7.2 *A soma de quadrados* $S_{YY} = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$ *reflecte a variabilidade de* $Y(x)$ *quando não se entra em linha de conta com a sua eventual relação com a variável* x. *Por outro lado,* SQE *reflecte a variabilidade de* $Y(x)$ *quando é usado o modelo de regressão para explicar os valores de* $Y(x)$ *como* *resposta a x. Por fim, $S_{YY} - SQE$ mede a redução na variabilidade total de $Y(x)$ ao usar x para explicar a resposta $Y(x)$. Então, ao dividirmos $S_{YY} - SQE$ por S_{YY}, obtemos um estimador da redução relativa da variabilidade ao usarmos o modelo para explicarmos $Y(x)$ como função linear de x.*

$$\begin{aligned}
S_{YY} &= \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(Y_i - \hat{Y}_i\right) + \left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)\right]^2 + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)\right]^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right) \\
&= SQE + \sum_{i=1}^{n}\left[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i - \overline{Y}\right]^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i - \overline{Y}\right) \\
&= SQE + \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{x} + \hat{\beta}_1 x_i - \overline{Y}\right]^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)\left(\overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{x} + \hat{\beta}_1 x_i - \overline{Y}\right) \\
&= SQE + \hat{\beta}_1^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2
\end{aligned}$$

Nota: 7.3 *O coeficiente de determinação R^2, assume valores compreendidos entre zero e um. Vejamos a interpretação que pode ser dada ao seu valor.*

- $$\begin{aligned}
\text{Se } R^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad SQE = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad Y_i = \hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i, \quad i = 1, \ldots, n \\
&\Leftrightarrow \quad \text{ajuste perfeito}
\end{aligned}$$

  Conclusão: $R^2 = 1$ *quando todas as observações estão sobre a recta de mínimos quadrados (ajustamento perfeito).*

- $$\begin{aligned}
\text{Se } R^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad SQE = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 \Leftrightarrow SQE = S_{YY} \Leftrightarrow S_{YY} - \hat{\beta}_1^2 S_{xx} = S_{YY} \\
&\Leftrightarrow \quad \hat{\beta}_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{a variável } x \text{ não serve para explicar } Y(x)
\end{aligned}$$

  Conclusão: $R^2 = 0$ *quando o modelo de regressão linear em x não tem utilidade ou seja, a variável x não consegue explicar os valores de $Y(x)$.*

Em resumo: Quanto mais próximo R^2 estiver de 1, maior o grau de importância de x na determinação da variável resposta $Y(x)$.

Na prática, consideramos que o ajustamento é razoável se $R^2 \geq 0.8$

7.5 Distribuição de amostragem dos estimadores $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$

7.5.1 Distribuição de amostragem de $\hat{\beta}_1$

Para a dedução da distribuição do estimador $\hat{\beta}_1$ para o coeficiente de regressão β_1, começamos por o expressar de outro modo. Ora

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xY}}{S_{xx}}$$

mas como

$$S_{xY} = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) Y_i,$$

então

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) Y_i}{S_{xx}}.$$

Como as observações x_i, $i = 1, \ldots, n$ são constantes, também S_{xx} o é, e portanto $\hat{\beta}_1$ não é mais do que uma combinação linear de v.a.'s (Y_i, $i = 1, \ldots, n$) independentes e com distribuição normal. Consequentemente $\hat{\beta}_1$ tem distribuição normal, restando saber qual o correspondente valor médio e variância.

$$\begin{aligned}
E\left(\hat{\beta}_1\right) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) Y_i}{S_{xx}}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) E(Y_i)}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) (\beta_0 + \beta_1 x_i)}{S_{xx}} = \\
&= \frac{\beta_0 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) x_i}{S_{xx}} = \\
&= \frac{\beta_0 (n\bar{x} - n\bar{x}) + \beta_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x} n \bar{x}\right)}{S_{xx}} = \beta_1 \frac{S_{xx}}{S_{xx}} = \beta_1
\end{aligned}$$

Logo $\hat{\beta}_1$ é estimador centrado para β_1.

$$\begin{aligned}
V\left(\hat{\beta}_1\right) &= V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) Y_i}{S_{xx}}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 V(Y_i)}{S_{xx}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \sigma^2}{S_{xx}^2} = \\
&= \sigma^2 \frac{S_{xx}}{S_{xx}^2} = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}
\end{aligned}$$

Em resumo:

$$\boxed{\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right)}$$

Contudo, na maioria das aplicações, a variância σ^2 dos erros não é conhecida. Nestes casos, podemos estimá-la por $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{SQE}{n-2}$. A substituição de σ^2 pelo seu estimador $\hat{\sigma}^2$ obriga-nos a considerar a seguinte distribuição para $\hat{\beta}_1$:

$$\boxed{T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} = \sqrt{S_{xx}}\,\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}} \sim t_{n-2}}$$

(T tem distribuição t com $(n-2)$ graus de liberdade).

7.5.2 Distribuição de amostragem de $\hat{\beta}_0$

Para a dedução da distribuição do estimador $\hat{\beta}_0$ para o coeficiente de regressão β_0, recordemos que

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{x}$$

Como $\hat{\beta}_1$ tem distribuição normal e $\bar{Y}$ também tem distribuição normal (é uma média aritmética de v.a.'s com distribuição normal), então $\hat{\beta}_0$ tem distribuição normal. Resta saber qual o correspondente valor médio e variância.

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\beta}_0\right) &= E\left(\bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{x}\right) = E\left(\bar{Y}\right) - \bar{x}E\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(Y_i\right) - \beta_1\bar{x} = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\beta_0 + \beta_1 x_i\right) - \beta_1\bar{x} = \beta_0 + \beta_1\bar{x} - \beta_1\bar{x} = \beta_0 \end{aligned}$$

Logo $\hat{\beta}_0$ é estimador centrado para β_0.

$$\begin{aligned}
V\left(\hat{\beta}_0\right) &= V\left(\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{x}\right) = V\left(\bar{Y}\right)+\bar{x}^2V\left(\hat{\beta}_1\right)-2\bar{x}cov\left(\bar{Y},\hat{\beta}_1\right) = \\
&= \frac{\sigma^2}{n}+\bar{x}^2\frac{\sigma^2}{S_{xx}}-2\bar{x}cov\left(\bar{Y},\hat{\beta}_1\right) = \frac{\sigma^2}{n}+\bar{x}^2\frac{\sigma^2}{S_{xx}} = \frac{\sigma^2}{n}\left(1+\frac{n\bar{x}^2}{S_{xx}}\right) = \\
&= \frac{\sigma^2}{nS_{xx}}\left(S_{xx}+n\bar{x}^2\right) = \frac{\sigma^2}{nS_{xx}}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)-n\bar{x}^2+n\bar{x}^2\right) = \frac{\sigma^2}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^n x_i^2 \\
\text{porque} \qquad & cov\left(\bar{Y},\hat{\beta}_1\right) = cov\left(\bar{Y},\frac{S_{xY}}{S_{xx}}\right) = \frac{1}{S_{xx}}cov\left(\bar{Y},S_{xY}\right) = \\
&= \frac{1}{S_{xx}}cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i,\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right)Y_i\right) = \quad \text{pela independência de } Y_i \\
&= \frac{1}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^n cov\left(Y_i,\left(x_i-\bar{x}\right)Y_i\right) = \frac{1}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right)cov\left(Y_i,Y_i\right) \\
&= \frac{1}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right)V\left(Y_i\right) = \frac{1}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right)\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\bar{x}\right) = \frac{\sigma^2}{nS_{xx}}\left(n\bar{x}-n\bar{x}\right) = 0
\end{aligned}$$

Em resumo:

$$\boxed{\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0,\frac{\sigma^2}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)}$$

Sendo desconhecida a variância σ^2 dos erros, podemos estimá-la por $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{SQE}{n-2}$. A substituição de σ^2 pelo seu estimador $\hat{\sigma}^2$ obriga-nos a considerar a seguinte distribuição para $\hat{\beta}_0$:

$$\boxed{T = \frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2\sum_{i=1}^n x_i^2}{nS_{xx}}}} = \sqrt{\frac{nS_{xx}}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}\,\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\hat{\sigma}} \sim t_{n-2}}$$

(T tem distribuição t com $(n-2)$ graus de liberdade)

7.6 Inferência sobre os parâmetros do modelo

7.6.1 Inferência sobre β_1

Estimação de β_1 por intervalo de confiança

β_1 é o declive da recta de regressão e, como tal expressa o tipo de crescimento de $Y(x)$ relativamente aos valores de x. Assim pode ser importante fazer a sua estimação pelos dois processos que conhecemos.

- Estimação Pontual: Considere-se o estimador de mínimos quadrados

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xY}}{S_{xx}}$$

- Estimação por intervalo de confiança $(1-\alpha)$.

Para o estimador $\hat{\beta}_1$ de β_1:

A variável pivot que devemos usar é: $T = \sqrt{S_{xx}}\,\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}} \sim t_{n-2}$.

Dada a simetria em zero da distribuição t, podemos desde logo afirmar que:

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(-t_{n-2:\alpha/2} \leq T \leq t_{n-2:\alpha/2}\right) \Leftrightarrow 1-\alpha = P\left(-t_{n-2:\alpha/2} \leq \sqrt{S_{xx}}\,\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}} \leq t_{n-2:\alpha/2}\right) \\ &\Leftrightarrow 1-\alpha = P\left(\hat{\beta}_1 - t_{n-2:\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + t_{n-2:\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}\right) \end{aligned}$$

Assim

Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para o declive β_1

$$IC_{1-\alpha}(\beta_1) \equiv \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2:\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}, \hat{\beta}_1 + t_{n-2:\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}\right]$$

Teste de hipóteses sobre β_1

Já atrás dissemos que β_1 é o declive da recta de regressão e, como tal expressa o tipo de crescimento de Y relativamente aos valores de x.

De particular importância é o caso em que $\beta_1 = 0$. Quando tal acontece, a variável x não tem papel na justificação dos valores de Y. Assim o teste das hipóteses

$$H_0 : \beta_1 = 0 \;\; vs \;\; H_1 : \beta_1 \neq 0$$

permite testar esta situação.

Mas o teste destas hipóteses incluí-se no teste mais genérico das hipóteses

$$H_0 : \beta_1 = a \;\; vs \;\; H_1 : \beta_1 \neq a$$

que passamos a deduzir.

A estatística de teste é: $T = \sqrt{S_{xx}}\,\dfrac{\hat{\beta}_1 - a}{\hat{\sigma}} \underset{\beta_1 = a}{\sim} t_{n-2}$

A regra de rejeição, para um nível de significância α é: Rejeitar H_0 se $|T| > c, \quad c > 0$

Determinemos o valor de c:

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left(\text{Rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ é verdadeira}\right) = P\left(|T| > c\right) = P\left(T < -c\right) + P\left(T > c\right) = \\ &= P\left(T > c\right) + P\left(T > c\right) = 2P\left(T > c\right) \Leftrightarrow P\left(T > c\right) = \alpha/2 \Leftrightarrow c = t_{n-2:\alpha/2} \end{aligned}$$

Regra de decisão para um nível de significância α

$$\boxed{\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } |T| = \left|\sqrt{S_{xx}}\,\frac{\hat{\beta}_1 - a}{\hat{\sigma}}\right| > t_{n-2:\alpha/2}}$$

Nota: 7.4 *Também se podem deduzir testes de hipóteses unilaterais sobre β_1, se bem que não têm tanto interesse nas aplicações dos modelos de regressão linear simples.*

7.6.2 Inferência sobre β_0

Estimação de β_0 por intervalo de confiança

β_0 é o ponto de intersecção da recta de regressão com o eixo das abcissas. A inferência sobre este parâmetro não tem a mesma importância que tem a inferência sobre o declive β_1 da recta de regressão. Mas ainda assim, pode ser necessário estimar β_0 por intervalo de confiança e realizar testes de hipóteses sobre valores que forneçam respostas a questões de utilidade prática.

Consideremos o estimador de mínimos quadrados,

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Passemos à estimação de β_0, por intervalo de confiança $(1-\alpha)$.

A variável pivot que devemos usar é: $T = \dfrac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{nS_{xx}}}} = \sqrt{\dfrac{nS_{xx}}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \dfrac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}} \sim t_{n-2}.$

Dada a simetria em zero da distribuição t, podemos desde logo afirmar que:

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(-t_{n-2:\alpha/2} \leq T \leq t_{n-1:\alpha/2}\right) \Leftrightarrow 1-\alpha = P\left(-t_{n-2:\alpha/2} \leq \sqrt{\frac{nS_{xx}}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}} \leq t_{n-2:\alpha/2}\right) \\ &\Leftrightarrow 1-\alpha = P\left(\hat{\beta}_0 - t_{n-2:\alpha/2}\sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{nS_{xx}}} \leq \beta_0 \leq \hat{\beta}_0 + t_{n-2:\alpha/2}\sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{nS_{xx}}}\right) \end{aligned}$$

Assim

Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para o declive β_0

$$IC_{1-\alpha}(\beta_0) \equiv \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-2:\alpha/2}\sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{nS_{xx}}}, \hat{\beta}_0 + t_{n-2:\alpha/2}\sqrt{\hat{\sigma}^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{nS_{xx}}}\right]$$

Teste de hipóteses sobre β_0

Consideremos as hipóteses

$H_0: \ \beta_0 = a \ \ vs \ \ H_1: \ \beta_0 \neq a$

que passamos a deduzir.

A estatística de teste é: $T = \sqrt{\frac{nS_{xx}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} \frac{\hat{\beta}_0 - a}{\hat{\sigma}} \underset{\beta_0 = a}{\sim} t_{n-2}$

A regra de rejeição, para um nível de significância α é: Rejeitar H_0 se $|T| > c, \quad c > 0$

Determinemos o valor de c:

$$\begin{aligned}
\alpha &= P\left(\text{Rejeitar } H_0 \,|H_0 \text{ é verdadeira}\right) = P\left(|T| > c\right) = P\left(T < -c\right) + P\left(T > c\right) = \\
&= P\left(T > c\right) + P\left(T > c\right) = 2P\left(T > c\right) \Leftrightarrow P\left(T > c\right) = \alpha/2 \Leftrightarrow c = t_{n-2:\alpha/2}
\end{aligned}$$

Regra de decisão para um nível de significância α

$$\boxed{\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } |T| = \left| \sqrt{\frac{nS_{xx}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} \frac{\hat{\beta}_0 - a}{\hat{\sigma}} \right| > t_{n-2:\alpha/2}}$$

Nota: 7.5 *Também se podem deduzir testes de hipóteses unilaterais sobre β_0.*

7.6.3 Inferência sobre σ^2

Estimação de σ^2 por intervalo de confiança

Num modelo de regressão linear simples

$Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + E,$

o erro E é a componente aleatória que justifica $Y(x)$ ser uma v.a.

Os pressupostos estocásticos do modelo de regressão linear estabelecem que

$$E \sim N\left(0, \sigma^2\right).$$

O estimador para σ^2 já foi apresentado na secção 7.4.1. Aí foi dito que,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SQE}{n-2} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2 = \frac{S_{YY} - \hat{\beta}_1^2 S_{xx}}{n-2}$$

- é um estimador centrado de σ^2.
- $(n-2)\,\dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ tem distribuição do qui-quadrado com $(n-2)$ graus de liberdade, $\quad (n-2)\,\dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$

Podemos deduzir um intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para a variância σ^2 e para o desvio padrão σ. Usando argumentos idênticos aos apresentados na secção 3.3,

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(\chi^2_{n-2:1-\alpha/2} \le (n-2)\,\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{n-2:\alpha/2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \; 1-\alpha = P\left(\frac{(n-2)\,\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-2:\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-2)\,\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-2:1-\alpha/2}}\right) \end{aligned}$$

Assim

Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para σ^2

$$IC_{1-\alpha}\left(\sigma^2\right) \equiv \left[\frac{(n-2)\,\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-2:\alpha/2}}, \frac{(n-2)\,\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-2:1-\alpha/2}}\right]$$

7.7 Estimação do valor esperado de Y para uma observação x_0 da variável controlada

O valor esperado de Y para uma observação x_0 da variável controlada é

$$E\left[Y\left(x_0\right)\right] = \beta_0 + \beta_1 x_0.$$

que podemos querer estimar.

O estimador pontual para $E\left(Y\,|x_0\right)$ é naturalmente

$$\hat{E}\left[Y\left(x_0\right)\right] = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0.$$

e trata-se de um estimador centrado com distribuição

$$\hat{E}\left[Y\left(x_0\right)\right] \sim N\left(E\left[Y\left(x_0\right)\right], \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\left(x_0-\bar{x}\right)^2}{S_{xx}}\right)\right)$$

Caso a variância σ^2 do erro E não seja conhecida (como é usual nas aplicações), a distribuição de amostragem de $\hat{E}\left[Y\left(x_0\right)\right]$ é

$$\boxed{T = \frac{\hat{E}\left[Y\left(x_0\right)\right] - E\left[Y\left(x_0\right)\right]}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{\left(x_0-\bar{x}\right)^2}{S_{xx}}\right)}} \sim t_{n-2}}$$

que permite deduzir um intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para $E\left[Y\left(x_0\right)\right]$.

Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ **para** $E\left(Y\left|x_0\right.\right)$

$$IC_{1-\alpha}\left[E\left(Y\left(x_0\right)\right)\right] \equiv \left[\hat{E}\left[Y\left(x_0\right)\right] - t_{n-2:\alpha/2}\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\left(x_0-\bar{x}\right)^2}{S_{xx}}\right)}, \hat{E}\left[Y\left(x_0\right)\right] + t_{n-2:\alpha/2}\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\left(x_0-\bar{x}\right)^2}{S_{xx}}\right)}\right]$$

MUITO IMPORTANTE: Só devemos fazer estimação de $E\left[Y\left(x_0\right)\right]$ para valores x_0 que estejam dentro do intervalo das observações obtidas para x.

7.8 Previsão do valor da variável resposta Y para um novo valor de x_0 da variável controlada

Dada um valor x_0 da variável controlada x, a variável resposta será

$$Y\left(x_0\right) = \beta_0 + \beta_1 x_0 + E,$$

onde $E \sim N\left(0, \sigma^2\right)$.

O estimador de $Y\left(x\right)$, para um valor x_0, será

$$\hat{Y}\left(x_0\right) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$$

Trata-se de um estimador centrado, com variância $V\left[\hat{Y}\left(x_0\right)\right] = \sigma^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x_0-\bar{x}\right)^2}{S_{xx}}\right)$. Quando não se conhece o valor de σ^2, podemos estimar a variância de $\hat{Y}$ por

$$\hat{V}\left[\hat{Y}\left(x_0\right)\right] = \hat{\sigma}^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x_0-\bar{x}\right)^2}{S_{xx}}\right)$$

Nestas circunstâncias, a distribuição de amostragem de $\hat{Y}\left(x_0\right)$ é

$$\boxed{T = \frac{\hat{Y}\left(x_0\right) - Y\left(x_0\right)}{\sqrt{\hat{V}\left(\hat{Y}\left(x_0\right)\right)}} = \frac{\hat{Y}\left(x_0\right) - Y\left(x_0\right)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x_0-\bar{x}\right)^2}{S_{xx}}\right)}} \sim t_{n-2}}$$

que permite deduzir um intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para $Y\left(x_0\right)$.

Intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para $Y(x_0)$

$$IC_{1-\alpha}(Y(x_0)) \equiv \left[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 - t_{n-2:\alpha/2}\sqrt{\hat{V}\left(\hat{Y}(x_0)\right)}, \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 + t_{n-2:\alpha/2}\sqrt{\hat{V}\left(\hat{Y}(x_0)\right)}\right]$$

MUITO IMPORTANTE: Só devemos fazer estimação de $Y(x_0)$ para valores x_0 que estejam dentro do intervalo das observações obtidas para x.

Exemplo 7.2 *Retomemos o exemplo 7.1 e o conjunto de dados relativos ao volume de vendas mensal (em milhares de unidades) de uma marca de computadores, Y e ao número de anúncios que passaram diariamente na televisão em cada mês, x.*

Mês	*Jan*	*Fev*	*Mar*	*Abr*	*Mai*	*Jun*	*Jul*	*Ago*	*Set*	*Out*	*Nov*	*Dez*
x_i	*4*	*1*	*2*	*0*	*2*	*4*	*2*	*1*	*1*	*2*	*0*	*2*
y_i	*4.0*	*2.3*	*3.7*	*2.1*	*3.0*	*4.7*	*3.5*	*3.0*	*2.9*	*3.2*	*1.9*	*2.6*

Comecemos por estimar a recta de mínimos quadrados. Para tal, vamos usar um método de cálculo bastante rudimentar (que seria o que usaríamos caso a nossa ferramenta de cálculo fosse pouco evoluída).

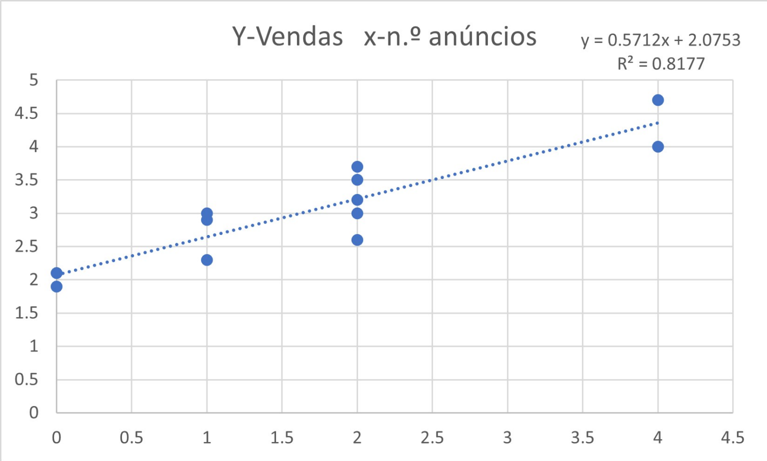
$\sum_{i=1}^{12} x_i = 21$ $\quad \sum_{i=1}^{12} y_i = 36.9$ $\quad \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 55$ $\quad \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 120.75$ $\quad \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 75$

$\bar{x} = 1.75$ $\quad \bar{y} = 3.075$ $\quad S_{xx} = 18.25$ $\quad S_{YY} = 7.2825$ $\quad S_{xY} = 10.425$

$\hat{\beta}_0 = 2.075342466$ $\quad \hat{\beta}_1 = 0.571232877$ $\quad \hat{\sigma}^2 = 0.132739726$

Assim a recta estimada é

$$\hat{y}(x) = 2.075342466 + 0.571232877\, x$$



Se estivermos interessados em estimar o volume mensal de vendas num mês em que fossem exibidos 3 anúncios teríamos uma estimativa pontual

$$\hat{y}\,(3) = 3.789041096 \ \textit{milhares de unidades}$$

Verifiquemos agora a qualidade do ajuste, calculando o coeficiente de determinação, R^2:

$$R^2 = \hat{\beta}_1^2 \frac{S_{xx}}{S_{YY}} = 0.817727805$$

revela um bom ajustamento do modelo de regressão linear ao conjunto de dados.

Podemos ainda testar se o número de anúncios que passam por mês, x, explicam significativamente o volume de vendas. Trata-se de testar, ao nível de 5% de significância, as hipóteses

- $$H_0: \ \beta_1 = 0 \ \ vs \ \ H_1: \ \beta_1 \neq 0$$
- *Estatística de teste:* $T = \sqrt{S_{xx}}\,\dfrac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}} \underset{\beta_1=0}{\sim} t_{12-2} \equiv t_{10}$
- *Para* $\alpha = 5\%$, $t_{10:0.025} = 2.2281$ *e* $R_{0.05} =]-\infty, -2.23[\cup]2.23, +\infty[$.
- *Valor observado da estatística de teste:* $t_{obs} = \sqrt{S_{xx}}\,\dfrac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}} = 6.697985003$.
- *Decisão: Como* $t_{obs} = 6.697985003 \in R_{0.05}$ *decidimos rejeitar* H_0*, com 5% de significância. Dito de outro modo, com 5% de significância, não existe evidência para afirmar que* $\beta_1 = 0$ *e portanto podemos inferir que o número de anúncios que passam mensalmente é uma variável que explica o volume de vendas para esse mês.*

Estimemos por intervalo de 90% de confiança:

1. *o volume esperado de vendas num mês em que fossem exibidos diariamente 3 anúncios,* $E[Y(3)]$*;*
2. *o volume de vendas num mês em que fossem exibidos diariamente 3 anúncios,* $Y(3)$.

Nas duas situações devemos considerar $x_0 = 3$ *e* $t_{10:0.05} = 1.81$.

1. *Com* $\hat{E}[Y(3)] = 2.075342466 + 0.571232877 \times 3 = 3.789041096$*, obteríamos uma banda de valores compreendidos entre o limite inferior*

$$3.789041096 - 1.81\sqrt{0.132739726\left(\frac{1}{12} + \frac{(3-1.75)^2}{18.25}\right)} = 3.517985837$$

   e o limite superior

$$3.789041096 + 1.81\sqrt{0.132739726\left(\frac{1}{12} + \frac{(3-1.75)^2}{18.25}\right)} = 4.060096355$$

   ou seja o intervalo $IC_{90\%}[E(Y(3))] \equiv [3.517985837, 4.060096355]$ *milhares de unidades de vendas esperadas.*

2. *Com* $\hat{Y}(3) = 2.075342466 + 0.571232877 \times 3 = 3.789041096$*, obteríamos uma banda de valores compreendidos entre o limite inferior*

$$3.789041096 - 1.81\sqrt{0.132739726\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{(3-1.75)^2}{18.25}\right)} = 3.076061734$$

   e o limite superior

$$3.789041096 + 1.81\sqrt{0.132739726\left(1 + \frac{1}{12} + \frac{(3-1.75)^2}{18.25}\right)} = 4.502020457$$

   ou seja o intervalo $IC_{90\%}(Y(1.5)) \equiv [2.406893791, 3.43812613]$ *milhares de unidades de vendas.*

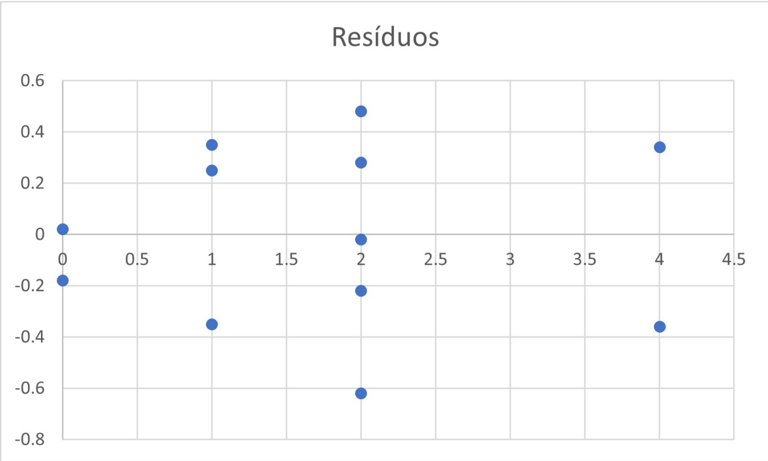
Por fim podemos ainda calcular os resíduos observados (com 2 casas decimais)

Tabela de resíduos

Mês	*Jan*	*Fev*	*Mar*	*Abr*	*Mai*	*Jun*	*Jul*	*Ago*	*Set*	*Out*	*Nov*	*Dez*
x_i	*4*	*1*	*2*	*0*	*2*	*4*	*2*	*1*	*1*	*2*	*0*	*2*
$\hat{e}_i$	*-0.36*	*-0.35*	*0.48*	*0.02*	*-0.22*	*0.34*	*0.28*	*0.35*	*0.25*	*-0.02*	*-0.18*	*-0.62*

A esta amostra de resíduos podíamos aplicar um teste de ajustamento para uma distribuição normal, de modo a testar a validade do pressuposto estocástico do modelo, segundo o qual, estes resíduos deverão ser observações do erro, ou seja, observações de uma v.a. $E \sim N(0, \sigma^2)$.

Neste caso em concreto, o teste de ajustamento do Qui-Quadrado não poderia ser utilizado, porque a amostra tem dimensão inferior a 30.



7.9 Alguns modelos linearizáveis

Quando o gráfico dos pares (x_i, y_i) da amostra apresenta um padrão não linear, podemos pensar no ajustamento de outra função

7.9.1 O modelo Power e a relação log-log

$$z(w) = \gamma\, w^{\theta} \;\Leftrightarrow \ln z(w) = \ln\gamma + \theta\, \ln w, \quad \text{se } z(w) > 0$$

Considerando $x = \ln w$, $y(x) = \ln z(w)$, $\beta_0 = \ln\gamma$ e $\beta_1 = \theta$, podemos estabelecer o modelo de regressão linear simples

$$Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + E$$

sendo E uma v.a. com distribuição $N(0, 1)$.

7.9.2 O modelo "Exponencial"e a relação log-lin

$$z(w) = \gamma\, \theta^{w} \;\Leftrightarrow \ln z(w) = \ln\gamma + \ln\theta\, w, \quad \text{se } \gamma > 0 \text{ e } \theta > 0$$

Considerando $x = w$, $y(x) = \ln z(w)$, $\beta_0 = \ln\gamma$ e $\beta_1 = \ln\theta$, podemos estabelecer o modelo de regressão linear simples

$$Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + E$$

sendo E uma v.a. com distribuição $N(0,1)$.

7.9.3 A relação lin-log

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1 \ln x$$

7.9.4 A relação polinomial

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1\, x + \beta^2\, x^2 + \ldots + \beta_p\, x^p$$