

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

Exercícios sobre Probabilidades

Edição 2024

Breve revisão sobre cálculo combinatório

1. Os escritórios de uma empresa estão equipados com telefones funcionando internamente como extensões identificadas por uma sequência de 3 algarismos, dos quais o primeiro não é zero. Quantos telefones podem ser identificados?

Solução: 900

2. Lança-se um dado sucessivamente 10 vezes. Quantos são os resultados possíveis?

Solução: 6^{10}

3. Um centro comercial tem 8 portas. De quantas maneiras distintas se pode

- (a) entrar e sair do centro comercial?
- (b) entrar por uma porta e sair por outra?

Solução: a) 64 b) 56

4. De quantos modos diferentes é possível dispor numa fila para fotografia, 3 homens e 2 mulheres se:

- (a) os homens e as mulheres puderem ocupar indistintamente qualquer lugar?
- (b) se um dos homens, o mais alto por exemplo, ficar no meio e todos os restantes indistintamente em qualquer lugar?
- (c) se ficarem alternadamente homens e mulheres, nunca dois homens seguidos ou duas mulheres seguidas?

Solução: a) 120 b) 24 c) 12

5. Quatro livros de Matemática, seis de Física e dois de Química, todos diferentes, devem ser arrumados numa prateleira. Quantas arrumações diferentes são possíveis, se:

- (a) os livros de cada matéria ficarem todos juntos?
- (b) os livros de Matemática ficarem juntos e os outros em qualquer lugar?

Solução: a) 207360 b) 8709120

6. Vinte e cinco membros de uma sociedade devem eleger um presidente, um secretário e um tesoureiro. Supondo que qualquer um dos vinte e cinco membros é elegível para qualquer dos cargos e não são admitidas acumulações de cargos, quantas são as hipóteses distintas de eleição?

Solução: 13800

7. Quantos subconjuntos de 3 elementos do conjunto $\{a, b, c, d, e\}$, pode formar?

Solução: 10

8. De quantas maneiras distintas se poderá formar uma comissão, com três elementos escolhidos de entre os vinte e cinco membros de uma sociedade?

Solução: 2300

9. Entre 5 Matemáticos e 7 Físicos, deve formar-se uma comissão constituída por 2 Matemáticos e 3 Físicos. Quantas comissões distintas se podem formar, se:

- (a) qualquer Matemático e qualquer Físico puderem ser incluídos?
- (b) um determinado Físico dever ser obrigatoriamente incluído?
- (c) dois determinados Matemáticos nunca puderem ser incluídos?

Solução: a) 350 b) 150 c) 105

10. Numa repartição pública existem, além do director, 152 empregados. Destes empregados, 54 são contabilistas, 67 são secretários e 31 atendem ao balcão. O novo plano de segurança obriga a que a 10 destes empregados seja ministrado um breve curso de actuação em caso de incêndio.

De quantas maneiras diferentes pode o director formar o grupo de maneira a que ele contenha

- (a) exactamente um contabilista?
- (b) pelo menos um contabilista?
- (c) exactamente dois contabilistas?
- (d) pelo menos dois contabilistas?

Solução: a) $\binom{54}{1}\binom{98}{9}$ b) $\binom{152}{10} - \binom{98}{10}$ c) $\binom{54}{2}\binom{98}{8}$ d) $\binom{152}{10} - \binom{98}{10} - \binom{54}{1}\binom{98}{9}$

11. Para se conseguir entrar na área de trabalho do computador do Sr. Spock tem de se introduzir uma palavra-chave com 4 dígitos, dos quais 2 são algarismos a escolher no conjunto $\{0, 1, \dots, 9\}$, e os restantes são letras a escolher num conjunto de 23 letras. Quantas palavra-chave é possível experimentar, caso:

- (a) se possam repetir dígitos?
- (b) não existam dígitos repetidos.

Solução: a) $\binom{4}{2}10^223^2 = 317400$ b) $\binom{4}{2}10 \times 9 \times 23 \times 22 = 273240$

12. Mostre que:

- (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq n$.
- (b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq k \leq n$.

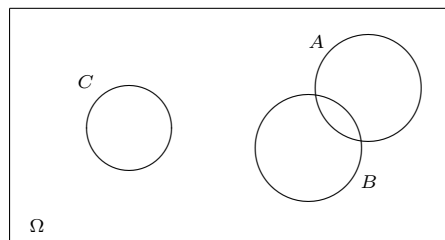
Resultados importantes a conhecer ou a recordar:

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$
 - $\sum_{k=0}^n \binom{M}{k} \binom{P}{n-k} = \binom{M+P}{n}$, $\forall M, P \in \mathbb{N}$, $0 \leq n \leq M+P$, $0 \leq n \leq \min(M, P)$
-

Espaço de resultados e álgebra de acontecimentos

13. Considere $\Omega = \{a, b, c, d\}$ o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e os acontecimentos $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$ e $C = \{d\}$.
 Escreva os acontecimentos \overline{A} , $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B - C$, $B \cap \overline{C}$, $\overline{B} \cap A$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$, $A \cup (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cap C$.

14. Três acontecimentos A , B e C estão representados no seguinte diagrama de Venn. Reproduza a figura



e marque a região correspondente a cada um dos seguintes acontecimentos: \bar{A} , $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, $(A \cap B) \cup C$, $\overline{B \cup C}$ e $\overline{A \cap B} \cup C$.

15. Numa experiência aleatória é medido o tempo de reacção a um determinado estímulo (em segundos). Considere o universo constituído pelos números reais positivos e os acontecimentos $A = \{x: x < 72.5\}$ e $B = \{x: x > 52.5\}$.

Descreva os seguintes acontecimentos: \bar{A} , $A \cap B$, $A \cup B$ e $A \cap \bar{B}$.

Solução: $\{x: x \geq 72.5\}$, $\{x: 52.5 < x < 72.5\}$, \mathbb{R}^+ , $\{x: x \leq 52.5\}$

16. Sejam A e B acontecimentos não vazios de um espaço de acontecimentos (Ω, \mathcal{F}) . Usando operações sobre conjuntos expresse os seguintes acontecimentos:

- Ocorrer A ou B ;
- Ocorrerem ambos os acontecimentos;
- Ocorrer pelo menos um dos acontecimentos;
- Não ocorrerem estes acontecimentos;
- Ocorrer unicamente A .

Solução: a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \cup B$ d) $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ e) $A \cap \bar{B}$

Propriedades importantes sobre álgebra de acontecimentos:

- Leis de De Morgan
 - $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
 - $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- Distributividade
 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Associatividade
 - $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
 - $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Comutatividade $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
- Absorção Se $A \subseteq B$, então $A \cup B = B$ e $A \cap B = A$

Cálculo de probabilidades

Lei de Laplace

17. 248 alunos realizaram uma prova que tinha dois problemas.

- 116 alunos erraram o 1º problema;
- 86 alunos erraram o 2º problema;
- 74 alunos erraram os dois problemas.

Se for escolhida ao acaso uma prova resolvida, considere os acontecimentos A - o 1º problema estar errado e B - o 2º problema estar errado. Determine a probabilidade de:

- (a) estar errado apenas um dos problemas?
- (b) pelo menos um problema estar errado?
- (c) nenhum problema estar errado?
- (d) só estar errado o 2º problema?

Solução: a) 54/248 b) 128/248 c) 120/248 d) 12/248

18. Uma caixa contém 20 bombons, dos quais 6 têm recheio de licor, 5 têm recheio de amêndoa e 5 têm recheio de avelã.

- (a) Ao retirar um bombom ao acaso, qual a probabilidade de se obter:
 - i. um bombom com recheio de amêndoa?
 - ii. um bombom que não tenha recheio de licor?
- (b) Ao retirar ao acaso 3 bombons, determine a probabilidade de se obterem bombons com recheios de licor, avelã e avelã (por esta ordem), caso:
 - i. a extracção seja feita com reposição.
 - ii. a extracção seja feita sem reposição.

Solução: a) i. 0.25 ii. 0.7 b) i. 0.01875 ii. 0.017544

19. Uma gaveta contém 10 meias verdes e 6 meias azuis (todas distintas à parte a sua cor).

- (a) Tiram-se 2 meias ao acaso e sem reposição. Qual a probabilidade de se obter:
 - i. um par de meias verdes?
 - ii. um par de meias da mesma cor?
 - iii. um par de meias de cores diferentes?
- (b) Tiram-se 2 meias ao acaso e com reposição. Qual a probabilidade de se obter:
 - i. um par de meias verdes?
 - ii. um par de meias da mesma cor?
 - iii. um par de meias de cores diferentes?

Solução: a) i. 0.375 ii. 0.5 iii. 0.5 b) i. 0.390625 ii. 0.53125 iii. 0.46875

20. Numa população de 50 votantes, existem 30 a favor da constituição europeia e 20 contra. Para uma sondagem de opinião, seleccionaram-se ao acaso e sem reposição, 3 votantes desta população. Qual a probabilidade de, na amostra de 3 votantes,

- (a) ninguém ser a favor da constituição europeia?
- (b) pelo menos um ser a favor da constituição europeia?
- (c) exactamente uma pessoa ser a favor da constituição europeia?
- (d) a maioria ser a favor da constituição europeia?

Solução: a) 0.058163 b) 0.941837 c) 0.290816 d) 0.651020

21. Selecciona-se ao acaso um algarismo de 0 a 9, dando-se a cada algarismo a mesma probabilidade de ser escolhido. Seja A o algarismo obtido. Em seguida, realiza-se o seguinte algoritmo:

```
IF  A < 2  THEN  B = 12  ELSE  B = 17
IF  B = 12  THEN  C = A - 1  ELSE  C = 0
```

- (a) Indique todas as configurações possíveis de valores do terno ordenado (A, B, C) .
- (b) As configurações possíveis são todas igualmente prováveis?
- (c) Calcule:
 - i. $P(A \text{ ser um n.º ímpar})$.
 - ii. $P(C < 0)$.
 - iii. $P(C = 0)$.
 - iv. $P(B < 17)$.

Solução: a) $\{(i, 12, i - 1), i = 0, 1\} \cup \{(i, 17, 0), i = 2, 3, \dots, 9\}$ b) Sim c) i. 0.5 ii. 0.1 iii. 0.9 iv. 0.2

Axiomática e consequências para o cálculo de probabilidades

22. Suponha que A e B são acontecimentos de um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , tais que: $P(A) = 0.6$, $P(\overline{B}) = 0.7$ e $P(A \cap B) = 0.1$. Determine $P(A \cup B)$, $P(B - A)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cup B)$ e $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Solução: 0.8, 0.2, 0.2, 0.5, 0.9

23. Considere de novo a informação e as perguntas do exercício 17. Resolva o exercício recorrendo à axiomática da probabilidade e às suas consequências.

24. Suponha que A , B e C são acontecimentos de um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , tais que: $P(A \cap (B \cup C)) = 0.3$, $P(A) = 0.6$ e $P(A \cup B \cup C) = 0.9$. Determine a $P(B \cup C)$ e a $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.

Solução: 0.6, 0.1

25. Alguns alunos de uma determinada escola praticam uma ou mais de 3 modalidades desportivas, nomeadamente, futebol, basquetebol e andebol.

Escolhido ao acaso um aluno, considere os acontecimentos:

- F - "praticante de futebol";
- B - "praticante de basquetebol";
- A - "praticante de andebol".

São conhecidas as seguintes proporções:

- | | |
|----------------------------------------|------------------------------|
| • 30% praticam futebol; | $P(F) =$ _____ |
| • 20% praticam basquetebol; | $P(B) =$ _____ |
| • 20% praticam andebol; | $P(A) =$ _____ |
| • 5% praticam futebol e basquetebol; | $P(F \cap B) =$ _____ |
| • 10% praticam futebol e andebol; | $P(F \cap A) =$ _____ |
| • 5% praticam basquetebol e andebol; | $P(B \cap A) =$ _____ |
| • 2% praticam todas estas modalidades. | $P(F \cap B \cap A) =$ _____ |

Se escolhermos um aluno ao acaso, qual a probabilidade de ser:

- (a) Um jogador de futebol ou de andebol?
- (b) Um atleta?
- (c) Apenas jogador de futebol?

Solução: a) $P(F \cup A) = 0.4$ b) $P(F \cup B \cup A) = 0.52$ c) $P(F \cap \overline{B} \cap \overline{A}) = 0.17$

26. Numa experiência aleatória é medido o tempo de reacção a um determinado estímulo (em segundos). Considere o universo constituído pelos números reais positivos e os acontecimentos $A = \{x: x < 72.5\}$ e $B = \{x: x > 52.5\}$.

Sabendo que $P(A) = 0.7$ e que $P(A \cap B) = 0.1$, indique o valor lógico das seguintes proposições:

- (a) ☐ V ☐ F $P(\overline{A}) = 0.9$
- (b) ☐ V ☐ F $P(A - B) = 0.8$
- (c) ☐ V ☐ F Se $P(A \cup B) = 0.95$, então $P(B) = 0.35$

Solução: a) F b) F c) V

27. Admita que A e B são acontecimentos de um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) tais que: $A \subseteq B$ e $P(B) = 0.4$. Determine $P(A \cup B)$.

Solução: 0.4

28. Considere A , B e C acontecimentos de um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) . Sabendo que A e B são acontecimentos mutuamente exclusivos, que $P(A) = 0.6$, que $P(A \cup B \cup C) = 0.7$ e que $P[(A \cup B) \cap C] = 0.1$, determine o valor de $P(B) + P(C)$.

Solução: 0.2

29. Sendo A , B e C acontecimentos de espaço de probabilidades (Ω, \mathcal{F}, P) , tais que $P(A - B) = 0.2$, $P(A \cap B) = 0.3$ e $P(A \cap B \cap C) = 0.25$, calcule $P(A - (B - C))$.

Solução: 0.45

30. Num certo processo de fabrico, 10% das falhas são devidas exclusivamente a falha do equipamento, 5% devidas a uma combinação de falha do equipamento e falha humana e, 40% envolvem falha humana.

Determine a probabilidade de que:

- (a) haja falha de equipamento;
- (b) haja falha do equipamento ou falha humana;
- (c) haja só falha humana;
- (d) não haja falha do equipamento nem falha humana;
- (e) haja falha humana, sabendo que há falha do equipamento;
- (f) haja falha humana, sabendo que não há falha do equipamento.

Solução: a) 0.15 b) 0.5 c) 0.35 d) 0.5 e) 1/3 f) 0.411764706

31. Um negociante tem 12 motores para vender, dos quais 2 estão defeituosos. Encontra um comprador que está interessado em adquirir a totalidade dos motores se, ao proceder a uma inspecção não encontrar qualquer motor defeituoso. Se o vendedor enviar os motores num único caixote, o comprador escolhe dois ao acaso para inspecção. Se o vendedor enviar os motores em dois caixotes (seis motores em cada), o comprador inspeciona um motor escolhido ao acaso de cada caixote. Diga qual é, do ponto de vista do vendedor, a melhor estratégia para conseguir vender todos os motores:

Estratégia 1 colocar os 12 motores num só caixote;

Estratégia 2 colocar os motores em dois caixotes (seis em cada) e pondo um motor defeituoso em cada;

Estratégia 3 colocar os motores em dois caixotes (seis em cada) e pondo os dois defeituosos num só caixote.

Solução: Estratégia 2

Probabilidade condicionada e independência de acontecimentos

32. Dados dois acontecimentos A e B de um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) tais que $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/3$ e $P(A \cup B) = 1/2$, calcule $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(\bar{A}|B)$ e $P(\bar{A}|\bar{B})$.

Solução: 0.25, 1/3, 0.75, 0.75

33. Uma das seguintes respostas está correcta. Determine-a e assinale-a com uma cruz sobre o quadrado correspondente.

Sejam A e B acontecimentos de um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) tais que:

$$0 < P(A) < 1, P(B) = 0.4, P(B|A) = 0.5 \text{ e } P(B|\bar{A}) = 0.3.$$

$P(A)$ tem valor:

☐ A 0.0

☐ B 0.5

☐ C 0.2

☐ D Nenhuma das anteriores

Solução: B

34. Uma linha de produção em série é formada por três máquinas A , B e C , colocadas nesta ordem. O produto final resulta do processamento destas três máquinas. O funcionamento das máquinas B e C está dependente do funcionamento da(s) máquina(s) que a(as) antecede(m). Sabemos que a probabilidade da máquina A sofrer uma avaria é de 0.1. Quando esta avaria, a máquina B pode sofrer uma avaria com probabilidade 0.3, e por sua vez, quando avariarem em simultâneo as máquinas A e B , a máquina C deixa de operar com 0.5 de probabilidade. Determine a probabilidade de num determinado momento, se encontrarem avariadas as três máquinas.

Solução: 0.015

35. As famílias da cidade A escolhem uma de três alternativas para fazer férias: praia, campo ou ficar em casa.
Durante a última década, verificou-se que escolhiam aquelas alternativas, respectivamente, 50%, 30% e 20% das famílias da referida cidade.
A probabilidade de descansarem durante as férias está ligada à alternativa escolhida: 0.4, 0.6 e 0.5, conforme se tenha ido para a praia, para o campo ou ficado em casa.

- (a) Qual a probabilidade de uma família da cidade A descansar durante as férias?
(b) Sabendo que determinada família descansou durante as férias, qual a alternativa mais provável de ter sido escolhida por esta família?

Solução: a) 0.48 b) praia

36. Os trabalhadores de uma fábrica foram, no acto de admissão, submetidos a um teste de aptidão. A experiência mostra que, dos 60% de indivíduos que no teste tiveram pontuação igual ou superior a x , 70% são considerados “bem adaptados” às tarefas que desempenham. Dos 40% que tiveram pontuação inferior a x , 50% são considerados “bem adaptados”. Ao ser escolhido ao acaso um trabalhador:

- (a) Qual a probabilidade de que seja um trabalhador “bem adaptado”?
(b) Qual a probabilidade de que, sendo um trabalhador “bem adaptado”, tenha tido pontuação inferior a x no seu teste de aptidão?

Solução: a) 0.62 b) ≈ 0.322581

37. Determine e assinale com uma cruz no quadrado correspondente a resposta correcta de cada alínea.

Os habitantes de Nicosia (capital de Chipre) são de origem grega ou turca. 75% é de origem grega. Apurou-se que 30% dos gregos falam inglês e que, de entre os turcos, 10% falam inglês.

- (a) A percentagem da população de Nicosia que fala inglês é:
☐ A 40% ☐ B 25% ☐ C 75% ☐ D 15% ☐ E Nenhuma das anteriores
 (b) Suponha que visita Nicosia e encontra um seu habitante que fala inglês. Qual a probabilidade de ele ser de origem grega?
☐ A 0.1 ☐ B 0.4 ☐ C 0.3 ☐ D 0.9 ☐ E Nenhuma das anteriores
 (c) ☒ V ☐ F A origem dos habitantes de Nicosia é independente do facto de falarem inglês ou não.

Solução: a) B b) D c) F

38. ¹ O presidente de câmara de uma autarquia resolveu apresentar o projecto de construção de um casino na sua autarquia. Relativamente aos habitantes nesta autarquia, acredita-se que 50% dos habitantes mais jovens são favoráveis ao projecto, 90% dos habitantes mais velhos não são favoráveis ao projecto e 30% dos habitantes das restantes faixas etárias são favoráveis ao projecto. Além disso, sabe-se que os habitantes mais jovens constituem 25% da população dessa cidade enquanto que os habitantes mais velhos constituem 40% da referida população. Para um habitante seleccionado ao acaso, determine:

- (a) A probabilidade de ser favorável à construção do casino.
(b) A probabilidade deste habitante, que se sabe não ser favorável à construção do casino, pertencer à faixa etária dos habitantes mais velhos.

Solução: a) 0.28 b) 0.5

¹Recurso PED 2018/19

39. ² Uma empresa que comercializa um certo software para computadores mantém uma linha directa telefónica de apoio aos seus clientes. A empresa constata que 48% das ligações envolvem perguntas sobre a aplicação do software (S), 38% envolvem questões de incompatibilidade com o hardware (H) e 14% envolvem a incapacidade de instalar o software na máquina do usuário (I). Estas três categorias de problemas podem ser resolvidas com probabilidades 0.90, 0.20 e 0.80, respectivamente. (Represente por R o acontecimento "o problema poder ser resolvido"). Para uma ligação, seleccionada ao acaso:

- (a) A probabilidade desta envolver perguntas sobre a aplicação do software e o problema poder ser resolvido, tem valor?
- (b) A probabilidade desta chamada envolver um problema que possa ser resolvido tem valor?
- (c) Se esta chamada envolver um problema que não pode ser resolvido, a probabilidade de que na respectiva ligação terem sido feitas perguntas sobre a incapacidade de instalar o software na máquina do usuário tem valor (arredondado com 4 casas decimais)?
- (d) Os acontecimentos R e I serão independentes se e só se $P(R|I)$ tiver valor?

Solução: a) 0.432 b) 0.62 c) ≈ 0.0737 d) 0.62

40. Durante a travessia do Canal da Mancha, a probabilidade de um velejador apanhar mau tempo é de $2/3$. Sabe-se ainda que, se estiver mau tempo, tem $1/4$ de probabilidade de ter uma colisão com um petroleiro, mas, não estando mau tempo, a probabilidade de atravessar o Canal da Mancha sem colidir com um petroleiro é de $5/6$. Face a uma futura viagem de um velejador, determine a probabilidade

- (a) de vir a atravessar o Canal da Mancha sem colidir com um petroleiro.
- (b) não apanhar mau tempo caso venha a colidir com um petroleiro.
- (c) O estado do tempo é independente da ocorrência de uma colisão com um petroleiro?

Solução: a) $7/9$ b) $1/4$ c) Não

41. A população da Britolândia (país distante do 4º Mundo) é constituída por duas etnias: os xilotos (que representam 60% da população total) e os bocemes. O Partido do Povo (PP) é há largos anos o partido do poder. Entre os xilotos, o PP é o preferido, recolhendo 70% de apoios. Já o mesmo não sucede entre os bocemes e, apenas 30% destes apoiam o PP.

- (a) Qual a percentagem nacional de apoiantes do PP?
- (b) Numa reunião de apoiantes do PP, qual a percentagem de bocemes?
- (c) Na opinião do Sr. Justo (um xiloto apoiante fervoroso do PP), apenas são patriotas os britolenses que pertencem à sua etnia ou os que apoiam o PP. A aceitar esta opinião, qual a percentagem de patriotas na Britolândia?

Solução: a) 54% b) 22.(2)% c) 72%

42. Numa área de serviço de uma auto-estrada, o nº de camiões relativamente ao nº de automóveis está na proporção de 3:2. Tratando-se de um camião, a probabilidade de se abastecer é de 0.1, e tratando-se de um automóvel, a probabilidade de se abastecer é de 0.2.

Chega uma viatura à área de serviço para se abastecer. Qual a probabilidade de ser um camião?

Solução: ≈ 0.428571

43. Qualquer cliente que visita uma certa loja de roupa para homem compra um fato com probabilidade 0.4, uma gravata com probabilidade 0.42 e uma camisa com probabilidade 0.5. Qualquer cliente compra:

- um fato e uma gravata com probabilidade 0.13;
- um fato e uma camisa com probabilidade p ;
- uma gravata e uma camisa com 0.25 de probabilidade;
- um fato, uma camisa e uma gravata com 0.08 de probabilidade.

Para um qualquer cliente que visite a loja, considere os acontecimentos:

F - Compra um fato G - Compra uma gravata C - Compra uma camisa

e responda às seguintes questões:

- (a) A probabilidade de não comprar uma gravata e comprar um fato é?

☐ A 0.27 ☐ B 0.232 ☐ C 0.2 ☐ D 0.4 ☐ E Nenhuma das anteriores

- (b) Se $p = 0.2$, a probabilidade de comprar um fato, ou uma gravata ou uma camisa é?

☐ A 0.08 ☐ B 1 ☐ C 0.9 ☐ D 0.82 ☐ E Nenhuma das anteriores

- (c) Sabendo que o cliente vai comprar uma camisa, a probabilidade de que também compre uma gravata e um fato, tem valor?

☐ A 0.16 ☐ B 0.13 ☐ C 0.08 ☐ D 0.26 ☐ E Nenhuma das anteriores

- (d) Os acontecimentos F e C são independentes se, e só se, p tem valor?

☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 0.2 ☐ D 0.4 ☐ E Nenhuma das anteriores

Solução: a) A b) D c) A d) C

44. Considere a informação e os resultados obtidos no exercício 25.
Se escolhermos ao acaso um aluno atleta, qual a probabilidade de ser:

- (a) Apenas jogador de futebol?
(b) Um jogador de futebol ou de andebol?

Solução: a) 17/52 b) 10/13

45. Considerem-se duas urnas, U_1 e U_2 , e um dado D com as seguintes características:

- U_1 contém 10 bolas numeradas de 1 a 10.
- U_2 contém 4 bolas amarelas, 5 bolas brancas e 3 bolas verdes.
- D tem 3 faces amarelas, 2 faces brancas e 1 face verde.

Processa-se a seguinte experiência aleatória: Retira-se ao acaso uma bola da urna U_1 e regista-se o seu número. Se este número for múltiplo de 3, faz-se um lançamento do dado; caso contrário extrai-se ao acaso uma bola da urna U_2 . No final regista-se a cor observada.

- (a) Calcule a probabilidade de se observar a cor amarela.
(b) Calcule a probabilidade de se ter lançado o dado, sabendo que no final se registou a cor amarela.

Solução: a) 23/60 b) 9/23

46. Dos três únicos fornecedores de ovos de um supermercado (F_1 , F_2 e F_3) sabe-se que F_1 e F_3 fornecem, respectivamente, 50% e 20% do total dos ovos adquiridos. Alguns dos ovos vêm estragados (E), tendo-se apurado que, dos ovos estragados, 60% são fornecidos por F_1 e 20% por F_2 . Apurou-se também que a percentagem de ovos estragados, de entre os fornecidos por F_3 é de 5%.

- (a) Escolhido ao acaso um ovo, qual a probabilidade de estar estragado?
- (b) Se for escolhido um ovo ao acaso de entre os fornecidos por F_1 , determine a probabilidade de estar estragado.

Solução: a) 0.05 b) 0.06

47. Um painel eléctrico de controlo tem três interruptores sucessivos I, II e III, cada um dos quais pode estar aberto (A) ou fechado (F) e que funcionam independentemente.

- (a) Faça uma listagem das configurações possíveis dos estados dos três interruptores.
- (b) Faça a listagem das configurações dos acontecimentos seguintes:
C="pelo menos um dos interruptores está aberto";
D="o interruptor I está aberto";
E="nenhum interruptor está aberto";
G="há três interruptores abertos".
- (c) Diga se são mutuamente exclusivos
 - i. os acontecimentos C e D;
 - ii. os acontecimentos C e E;
 - iii. os acontecimentos D e G.
- (d) Se num dado período, a probabilidade de qualquer interruptor estar aberto é $1/4$, quais são as probabilidades dos quatro acontecimentos indicados na alínea b)?

Solução: a) – b) – c) Não, Sim, Não d) $37/64$, $1/4$, $27/64$, $1/64$

48. Um certo tipo de motor eléctrico quando avariado pode apresentar quatro diferentes tipos de fallhas, denotadas por F_1 , F_2 , F_3 e F_4 , que ocorrem de modo mutuamente exclusivo e cujas probabilidades de ocorrência são iguais. Considerem-se os acontecimentos $A = \{F_1, F_2\}$, $B = \{F_1, F_3\}$ e $C = \{F_1, F_4\}$.

- (a) Mostre que os acontecimentos A , B e C são independentes aos pares.
- (b) Mostre que $P(C|A \cap B)$ é diferente de $P(C)$ e por isso, os acontecimentos A , B e C não são independentes.

49. A execução de um projecto de construção de um edifício no tempo programado está relacionada com os seguintes acontecimentos:

E - "escavação executada a tempo"

F - "fundações executadas a tempo"

S - "superestrutura executada a tempo"

supostos independentes e com probabilidades iguais a, respectivamente, 0.8, 0.7 e 0.9. Calcule a probabilidade de:

- (a) O edifício ser terminado no tempo previsto, devido ao cumprimento dos prazos nas três actividades referidas.
- (b) O prazo de execução ser cumprido para a escavação e não ser cumprido em nenhuma das outras actividades.

Solução: a) 0.504 b) 0.024

50. Os indivíduos, A , B e C , sofrem da mesma doença e têm probabilidades de se curarem, respectivamente, 0.25, 0.15 e 0.10. Admitindo que a cura ocorre independentemente do indivíduo, determine a probabilidade de:

- (a) nenhum se curar.
- (b) Curar-se um e só um destes indivíduos.
- (c) Curarem-se dois e só dois destes indivíduos.
- (d) pelo menos dois se curarem.

Solução: a) 0.57375 b) 0.35625 c) 0.06625 d) 0.07

51. Sejam A e B acontecimentos independentes. Mostre que A e \bar{B} são também acontecimentos independentes. Conclua também que \bar{A} e B são acontecimentos independentes e que \bar{A} e \bar{B} são acontecimentos independentes.

52. Suponha que em voo os motores de avião falham com probabilidade p , independentemente de motor para motor, e que um avião faz um voo com sucesso desde que pelo menos metade dos seus motores trabalhem. Para que valores de p se deve preferir um bimotor a um quadrimotor?

Solução: $p \in]1/3, 1[$

53. A probabilidade de um atirador acertar no alvo é 0.6, independentemente do tiro realizado. Calcule a probabilidade de:

- (a) em cinco tiros, acertar três.
- (b) acertar pela terceira vez ao quinto tiro.
- (c) serem necessários exactamente 10 tiros para acertar um.
- (d) necessitar de, pelo menos, 4 tiros para acertar 2.

Solução: a) 0.3456 b) 0.20736 c) 0.0001572864 d) 0.352

Variável aleatória discreta

54. De uma v.a. X , sabe-se que:

- Toma valores 0, 2 e 4.
- $P[(X = 0) \cup (X = 2)] = 0.8$.
- $P(X = 0) = \frac{3}{2}P(X = 4)$.

- (a) Deduza a função de probabilidade da v.a. X .
- (b) Calcule: $P(X \leq 2.3)$, $P(X > 1.98)$, $P(0 < X < 4)$, $P(0 < X \leq 4)$, $P(0 \leq X < 4)$, $P(0 \leq X \leq 4)$, $P(X \geq 100)$ e $P(X < -2)$.
- (c) Deduza a função de probabilidade da v.a. $Y = \min(X, 2)$.
- (d) Determine a função de distribuição da v.a. X e utilize-a para o cálculo das probabilidades pedidas na alínea b).
- (e) Calcule $E(X)$, $E(\sqrt{X})$, $E\left(\frac{2}{3+X}\right)$, $E(X^2)$ e $E[(X - 1.8)^2]$. Existe $E\left(\frac{1}{X}\right)$?
- (f) Determine $E(2X - 100)$, $E(2\sqrt{X} + X^2 + 1)$ e $E(X^2) - E^2(X)$
- (g) Diga qual o valor de $V(X)$, de $V(6 - 2X)$ e de $V(X^2)$.

Solução: a) - b) 0.8, 0.7, 0.5, 0.7, 0.8, 1, 0, 0 c) - d) - e) 1.8, 0.4 + $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{16}{35}$, 5.2, 1.96, Não f) -96.4, $\sqrt{2} + 7$, 1.96 g) 1.96, 7.84, 32.16

55. O Sr. Matias possui um café nas vizinhanças de um estádio de futebol. Da sua experiência, o Sr. Matias sabe que, em dias de futebol, costuma vender 50, ou 100, ou 150 ou 200 sandes, com probabilidades 0.2, 0.4, 0.3 e 0.1, respectivamente.

O Sr. Matias costuma fazer 100 sandes e quando estas se esgotam recorre a um fornecedor da terra que lhe garante o envio atempado de mais sandes.

- Qual a probabilidade de as sandes preparadas pelo Sr. Matias serem insuficientes para satisfazer a procura?
- Calcule a probabilidade de vender 200 sandes, num dia em que as sandes por ele feitas não satisfazerem a procura.
- Qual o número médio de sandes vendidas num dia de futebol? E o desvio padrão?
- Determine a função de distribuição para n^o de sandes vendidas pelo Sr. Matias num dia de futebol.

Todas as sandes são vendidas a 1 €. Cada sandes feita pelo Sr. Matias custa 0.25 € e as que são encomendadas ao fornecedor custam 0.65 €.

- Deduz a função de probabilidade do lucro diário obtido pelo Sr. Matias.
- Determine o lucro médio por dia. Expresse através do desvio padrão, a dispersão do lucro diário.

Solução: a) 0.4 b) 0.25 c) 115, 45 d) – e) – f) 73.75, ≈ 26.698549

56. Um vendedor ambulante tem 8 relógios para vender, dos quais 3 estão avariados. Um cliente resolve comprar-lhe 4 relógios.

- Determine a função de probabilidade da v.a. X - número de relógios avariados comprados.
- Qual a probabilidade do comprador adquirir relógios avariados e em número não superior a 2.
- Determine o valor médio e a variância de X .

Solução: a) – b) $6/7$ c) 1.5, ≈ 0.5357143

57. Considere o seguinte jogo aleatório:

Inicia-se o jogo extraíndo ao acaso uma bola de uma caixa contendo 2 bolas brancas, 2 vermelhas e 3 azuis.

- Se a bola for branca, o jogador recebe 1 euro e o jogo termina;
- Se a bola for vermelha, o jogador paga 1 euro e o jogo termina;
- Se a bola for azul, é introduzida na caixa uma bola vermelha e reposta a bola azul. O jogador extrai uma bola ao acaso, recebendo 1 euro se a bola for branca, 0.5 euros se a bola for azul e perdendo 1 euro se a bola for vermelha. O jogo termina.

Seja X a v.a. associada ao ganho do jogador em cada jogo.

- Deduz a função de probabilidade da v.a. X
- Joguei e perdi um euro. Qual a probabilidade de ter começado por tirar uma bola vermelha?
- Qual o ganho esperado num jogo? Determine o desvio padrão do ganho por jogo. Existe o coeficiente de variação, $cv(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)}$?

Solução: a) $X \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & 0.5 & 1 \\ 25/56 & 9/56 & 22/56 \end{array} \right.$ b) $16/25$ c) $E(X) = 1.5/56$, $\sigma(X) = \sqrt{2755.75}/56$, Sim e $cv(X) = \sqrt{2755.75}/1.5$

58. Em cada alínea assinale o valor lógico da afirmação (**V** para verdadeira e **F** para falsa).

Seja X uma v.a. discreta com a seguinte função de probabilidade:

$$X \begin{cases} -2 & a & 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & & 0.2 & 0.2 & \end{cases}, \quad a \in]-2, 0[$$

- (a) ☐ **V** ☐ **F** Se $P(X = a) = 0.1$, então $P(X = 2) = 0.3$
 (b) ☐ **V** ☐ **F** Se $P(X = 2) = 0.1$, então $P(X = 0 | X \geq 0) = 0.4$
 (c) ☐ **V** ☐ **F** Se $P(X = a) = P(X = 2) = 0.2$ e $E(X) = 0$, então $a = -1/2$
 (d) ☐ **V** ☐ **F** Se $a = -3/2$ e $P(X = a) = P(X = 2) = 0.2$, existe $E\left(\frac{1}{X}\right)$ e tem valor $\frac{0.2}{3}$

Solução: a) V b) V c) F d) F

59. A função de probabilidade do número X de memórias de computador danificadas numa remessa de 3 memórias, é:

$$X \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.75 & 0.02 & & 0.15 \end{cases}$$

- (a) Preencha os campos em branco da função de distribuição da v.a. X que se segue:

$$F_X(x) = \begin{cases} , & x < 0 \\ 0.75, & 0 \leq x < \\ , & 1 \leq x < 2 \\ , & \leq x < \\ 1, & x \end{cases}.$$

- (b) Determine a probabilidade de:
 i. Alguma ou algumas, mas não todas as memórias da remessa, estarem danificadas.
 ii. Não mais de duas memórias da remessa estarem danificadas.
 (c) Determine:
 i. $P(X = 3 | X > 0)$.
 ii. $P(1 \leq X \leq 3 | X \leq 2)$.
 (d) Determine o valor médio, a variância e o desvio padrão de X .
 (e) Se X memórias danificadas numa remessa originam um prejuízo de $C = -100X - 50$ euros, determine o prejuízo médio por remessa e também o desvio padrão.

Solução: a) - b) 0.1, 0.85 c) 0.6, 2/17 d) 0.63, 1.2931, ≈ 1.137146 e) -113, ≈ 113.714555

60. Admita que X é uma v.a. discreta com função distribuição

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 0.1, & -3 \leq x < -1 \\ 0.3, & -1 \leq x < 0 \\ 0.4, & 0 \leq x < 1 \\ 0.7, & 1 \leq x < 4 \\ 0.8, & 4 \leq x < 6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$

- (a) Determine $P(X \leq 0)$, $P(X \leq 1.5)$, $P(X < -1)$, $P(X \geq 4)$, $P(X = 0)$, $P(-0.5 \leq X \leq 2.6)$, $P(-1 \leq X \leq 1)$, $P(-1 < X < 1)$, $P(-1 \leq X < 1)$ e $P(-1 < X \leq 1)$.
- (b) Determine $E(X)$ e, sabendo que $\sigma(X) \approx 2.87$, calcule $P(E(X) - \sigma(X) \leq X \leq E(X) + \sigma(X))$

Solução: a) 0.4, 0.7, 0.1, 0.3, 0.1, 0.4, 0.6, 0.1, 0.3, 0.4 b) 1.4, 0.7

61. Num jogo de apostas é extraída ao acaso uma carta de um baralho convencional com 52 cartas. Um jogador deverá pagar c euros para fazer uma jogada. Receberá 10 € se tirar um ás ou um rei, 5 € se tirar uma dama ou um valete e nada receberá caso contrário. Considere G - o ganho em qualquer jogada, entendendo-se por ganho a diferença entre o valor a receber e o valor a pagar em cada jogada.

- (a) Deduza a função de probabilidade da v.a. G .
- (b) Para ter um jogo equilibrado em termos de ganho médio, quanto é que deverá ser pago para se fazer uma jogada?

Solução: a) $G \begin{cases} -c & 5-c & 10-c \\ 36/52 & 8/52 & 8/52 \end{cases}$ b) 30/13 €

Exercícios teóricos

62. Considere X uma variável aleatória discreta, para a qual existe $V(X)$.

- (a) Mostre que $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.
- (b) Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^+$ são constantes, mostre que $V(a + bX) = b^2 V(X)$.
- (c) Mostre que, se X é uma v.a. degenerada então $V(X) = 0$. Entenda-se por v.a. degenerada, uma v.a. X cujo suporte é $S_X = \{c\}$ e por isso $P(X = c) = 1$, com $c \in \mathbb{R}$.

Par aleatório discreto

63. Numa empresa de aluguer de aviões, informam-nos de que a procura diária de aviões de passageiros X , e a procura diária de aviões de transporte rápido de correio Y , constitui um par aleatório (X, Y) , cuja função de probabilidade conjunta é dada por:

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	0			0.25
1			0.05	0.35
2	0.1		0.1	$p + 0.2$
3	0	0.1		p
	0.2	0.5		

- Complete a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y) e indique as funções de probabilidade marginais.
- Qual a probabilidade de, num dia, a procura de aviões de passageiros ser inferior à procura de aviões de transporte rápido de correio?
- Para um dia em que foi pedido um avião de transporte rápido de correio, qual a probabilidade de terem sido procurados 1 ou 2 aviões de transporte de passageiros?
- Existe independência entre a procura diária de aviões de cada tipo?
- Determine a procura média diária de aviões de passageiros e a procura média diária de aviões de transporte rápido de correio.
Determine também o desvio padrão da procura diária de aviões de transporte rápido de correio.
- Sabendo que $V(X) = 0.8875$, determine a covariância e o coeficiente de correlação deste par aleatório.
Comente o valor deste último coeficiente.
Determine agora a procura diária média do total de aviões de aluguer.
- Calcule a variância da média $\frac{X+Y}{2}$ de aviões procurados diariamente.
- Qual o valor esperado e a variância de $Y - X$?
- Deduza a função de probabilidade da procura diária total de aviões de aluguer.

Solução: a) – b) 0.3 c) 0.6 d) Não e) 1.25, 1.1, 0.7 f) -0.175, -0.265372, 2.35 g) 0.256875 h) -0.15, 1.7275

i) $X + Y \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.2 & 0.45 & 0.15 & 0.2 \end{cases}$

64. Seja (X, Y) um par aleatório discreto com a seguinte função de probabilidade conjunta:

$X \setminus Y$	0	2	3	
0	1/12	1/6		1/4
1				
2	1/12	1/6	0	
		1/3	1/3	

- (a) Complete a função de probabilidade conjunta e as funções de probabilidade marginais.
 (b) Determine $P(X \geq 2; Y < 3)$ e $P(X = 0 | X + Y = 2)$.
 (c) X e Y são v.a.'s independentes? Justifique a sua resposta.
 (d) Sabendo que $E(Y) = 5/3$ e que $V(X) = 1/2$, calcule:
 i. $E(X + 4Y - 6)$;
 ii. $V(Y)$;
 iii. $cov(X, Y)$ e $\rho(X, Y)$.
 (e) Deduza a função de probabilidade da v.a. $T = \max(X, Y)$.

Solução: a) – b) 1/4, 2/3 c) Não d) 5/3, 14/9, 0, 0 e) $T \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/12 & 1/6 & 5/12 & 1/3 \end{Bmatrix}$

65. O número de comprimidos para o estômago que um determinado indivíduo toma por dia, é uma v.a. C , com suporte $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, tal que:

$$P(C = 3) = 0.3; P(C = 4) = 0.4; P(C = 2) = P(C = 5) = P(C = 6).$$

O número de refeições que esse indivíduo ingere por dia é também uma v.a. R , com suporte $\{2, 3, 4\}$, tal que:

$$P(R = 2) = 0.25 \text{ e } P(R = 3) = 0.42.$$

Sabe-se ainda que:

- Só toma 6 comprimidos quando faz 4 refeições;
- Quando faz 4 refeições toma sempre mais de 3 comprimidos;
- Quando faz 2 refeições toma sempre menos de 5 comprimidos;
- $P(C = 2; R = 2) = P(C = 2; R = 3)$;
- $P(C = 3; R = 2) = P(C = 4; R = 2) = P(C = 4; R = 3)$.

- (a) Determine a função de probabilidade conjunta do par aleatório (C, R) .
 (b) O número de comprimidos ingeridos é independente do número de refeições?
 (c) Calcule a $P(R \geq 3 | C \leq 3)$ e a $P(C \geq 4; R = 3)$.
 (d) Para um dia em que comeu 2 refeições, determine a função de probabilidade do número de comprimidos ingeridos.

Solução: a) – b) Não c) 0.625, 0.17 d) $(C | R = 2) \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{Bmatrix}$

66. No pequeno supermercado SuperCompras, existem 3 caixas para pagamento e 2 funcionários capacitados para as operarem. Às 10 horas de qualquer dia de abertura do SuperCompras, considere as v.a.'s:

- X -n.º de caixas que é necessário abrir;
- Y -n.º de funcionários disponíveis para operarem nas caixas de pagamento.

(a) Complete a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y) .

X/Y	0	1	2	
1	0.01		0	
2	0		0.7	0.8
3	0			0.01
	0.29			

(b) Determine a probabilidade de haver funcionários disponíveis para operarem nas caixas que é necessário abrir.

(c) X e Y são v.a.'s independentes?

(d) Indique o valor lógico das seguintes proposições:

- ☐ V ☐ F $E(Y) = 1$
- ☐ V ☐ F Sabendo que $E(X) = 1.82$, então $V(X) = 0.1676$
- ☐ V ☐ F $E(XY) = P(X = 1, Y = 1) + 2P(X = 2, Y = 1) + 3P(X = 3, Y = 1)$
- ☐ V ☐ F Sabendo que $V(Y) = 0.2339$, o coeficiente de correlação do p.a. (X, Y) tem valor $\rho(X, Y) = 0.6777981479$

(e) i. Deduza a função de probabilidade da v.a. $Y - X$.

ii. Determine o valor médio da v.a. $Y - X$

iii. Calcule o desvio padrão da v.a. $Y - X$

(f) Deduza a função de probabilidade da v.a. $N = \min(X, Y)$, determine o seu valor médio e a variância da v.a. $2N - 1$.

Solução: a) – b) 0.88 c) Não d) F, V, F, V e) $Y - X \left\{ \begin{matrix} -2 & -1 & 0 \\ 0.01 & 0.11 & 0.88 \end{matrix} \right\}$, -0.13 , $\sqrt{0.1331} \approx 0.365$

f) $N \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.01 & 0.29 & 0.7 \end{matrix} \right\}$, 1.69, 0.9356

67. Suponhamos que M_1 e M_2 são duas máquinas que funcionam independentemente e sejam X e Y variáveis aleatórias que representam, respectivamente, n.º diário de avarias de M_1 e o n.º diário de avarias de M_2 . Sabendo que:

- A máquina M_1 nunca avaria mais do que uma vez por dia e, que a máquina M_2 avaria, no máximo, duas vezes por dia;
- A probabilidade de M_1 não avariar é de 0.7;
- A probabilidade de M_2 não avariar é 0.5 e a de avariar duas vezes é 0.3,

construa a tabela das funções de probabilidade conjunta e marginais associadas ao par aleatório (X, Y) .

68. As variáveis aleatórias X_1, X_2, X_3 são independentes, todas com a mesma variância σ^2 .

(a) Verifique que as variáveis aleatórias $Y_1 = X_1 - 6X_2 + 9X_3$ e $Y_2 = 3X_1 + 10X_2 + 3X_3$ têm a mesma variância.

(b) Mostre que o coeficiente de correlação entre Y_1 e Y_2 é $-30/118$.

(c) Construa uma v.a. da forma $Y_1 - aY_2$ tal que a sua covariância com a v.a. $Y_1 + Y_2$ seja nula.

Solução: a) $V(Y_1) = 118\sigma^2$ b) – c) $a = 1$

Exercício de dificuldade acrescida

69. Num departamento existem duas linhas de atendimento de chamadas, que aqui designamos por A e B, e que funcionam de modo *independente*. A probabilidade de serem atendidas 0, 1 ou 2 chamadas, em cada linha, é apresentada na tabela que se segue:

Nº chamadas atendidas	Linha A	Linha B
0	0.2	0.2
1	0.4	0.5
2	0.4	0.3

Considere o par aleatório (X, Y) em que:

- X é a diferença, em valor absoluto, entre o número de chamadas atendidas nas duas linhas;
- Y é a soma do número de chamadas atendidas nas duas linhas.

- Deduza as funções de probabilidade conjunta e marginais do par (X, Y) .
- Determine a $P(X \geq Y)$.
- Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y e interprete-o.
- Calcule $E(X + Y | X \leq 1)$.
- Considere as seguintes aproximações

$$E(XY) \approx E(X)E(Y) + \text{cov}(X, Y)$$

$$V(XY) \approx V(X)E^2(Y) + V(Y)E^2(X) + 2\text{cov}(X, Y)E(X)E(Y)$$

Obtenha um valor aproximado de $E(XY)$ e $V(XY)$. Compare os resultados obtidos com os valores exactos.

- Deduza a função de probabilidade do maior número de chamadas para as duas linhas se o menor desses números for 1. Calcule o valor esperado e variância da variável aleatória em causa.

Solução: a) – b) 0.32 c) -0.136507413 d) 252/86 e) Valores aproximados: $E(XY) \approx 1.794$, $V(XY) \approx 2.690512$ Valores exactos: $E(XY) = 1.7$, $V(XY) = 2.41$, $(E(X^2Y^2) = 5.3)$ f) –, $84/52$, $640/52^2$

Exercícios teóricos

- Demonstre a seguinte proposição:
Se (X, Y) é um par aleatório discreto e as v.a.'s X e Y são independentes, então $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- Considere (X, Y) um par aleatório. Demonstre que:
 - $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
 - Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são constantes, $\text{cov}(a + bX, c + dY) = b d \text{cov}(X, Y)$ e $\rho(a + bX, c + dY) = \rho(X, Y)$

Distribuições discretas notáveis

72. Um fabricante de computadores inspecciona, habitualmente, os chips de memória antes de os instalar. Assim, testou uma amostra de 5 retirados ao acaso de um lote de 20 chips que continha 4 defeituosos. Seja X o número de chips defeituosos detectados nessa amostra. Determine:
- (a) A função de probabilidade de X e indique os parâmetros desta distribuição.
 - (b) O número esperado de memórias defeituosas, na amostra de 5 chips.
 - (c) A variância de X .

Solução: a) – b) 1 c) ≈ 0.631579

73. A Rádio Electrão quer vender rapidamente os 30 computadores portáteis que tem em armazém, pelo que realizou uma promoção com descontos atractivos e oferecendo a pré-instalação do sistema operativo. Infelizmente, o processo de instalação do sistema operativo não é completamente fiável e 10 dos portáteis necessitarão de assistência complementar. Suponha que uma empresa comprou 20 computadores portáteis e considere X , o número de portáteis com problemas, de entre os comprados.
- (a) Qual é a distribuição de X ?
 - (b) Determine a probabilidade de menos de 3 portáteis necessitarem de assistência complementar.
 - (c) Determine a probabilidade de mais de 6 portáteis necessitarem de assistência complementar.
 - (d) Indique o valor médio e o desvio padrão de X .

Solução: a) – b) 0.000291 c) 0.560339 d) $20/3, \approx 1.237969$

74. O senhor S tem uma empresa que compra e vende selos, moedas e outros artigos para colecionistas. Este senhor guarda 20 selos dentro de uma bolsa preta, estando ainda cada selo metido num envelope opaco. 6 destes selos valem 100€ cada um e os restantes nada valem. Para promover a venda, o senhor S cobra 20€ por cada selo, mas não permitindo que o cliente veja o conteúdo do envelope. Suponha que um cliente compra 5 selos:
- (a) Qual a probabilidade de os cinco selos nada valerem?
 - (b) Determine a probabilidade de o cliente não perder nem ganhar dinheiro com a compra.
 - (c) Qual o lucro esperado deste cliente? E o desvio padrão?

Solução: a) 0.129128 b) 0.387384 c) 50, ≈ 91.0465468

75. Uma determinada praga atacou uma unidade agrícola tendo contaminado três quartos da sua produção de maçãs. Considere 4 maçãs escolhidas ao acaso desta produção.
- (a) Indique, justificando, qual é a distribuição e os respectivos parâmetros da v.a. X - n.º de maçãs contaminadas na amostra de 4 maçãs.
 - (b) Determine:
 - i. A probabilidade de todas terem sido contaminadas.
 - ii. A probabilidade de nenhuma ter sido contaminada.
 - iii. A probabilidade de não terem sido todas contaminadas.
 - (c) Determine o valor médio e a variância de X .
 - (d) Na mesma unidade agrícola, são produzidas peras e 100 $p\%$ estão contaminadas, *independentemente* da produção de maçãs.
 - i. Indique a distribuição do total, Y , de peras contaminadas numa amostra de n peras seleccionadas ao acaso da sua produção.
 - ii. Se $p = 0.5$, numa amostra de 4 maçãs e de 3 peras, qual é a probabilidade de se obter um total de 2 frutas contaminadas?
 - iii. Se $p = 0.75$, numa amostra de 4 maçãs e de 3 peras, qual é a probabilidade de se obter um total de 2 frutas contaminadas?

Solução: a) – b) 0.316406, 0.003906, 0.683594 c) 3, 0.75 d) –, 0.04541016, 0.011535677

76. Numa fábrica existem três máquinas da mesma marca, que trabalham independentemente. A probabilidade de cada máquina avariar num dado espaço de tempo é 0.2. Seja X a variável aleatória que representa o número de máquinas que findo esse período de tempo estão a trabalhar. Determine:
- (a) A função de probabilidade da v.a. X .
 - (b) O valor esperado, a variância e o desvio padrão de X .
 - (c) A moda e a mediana da v.a. X .
 - (d) A probabilidade de mais de 1 máquina se avariar no período de tempo estabelecido.

Solução: a) – b) 2.4, 0.48, ≈ 0.69282 c) 3, 3 d) 0.104

77. No supermercado SuperCompras, e num grupo específico de 20 clientes, sabe-se que 3 adquirem produtos de higiene pessoal.
- (a) Se escolhermos ao acaso e sem reposição, 2 clientes deste grupo, considere Y o n.º de clientes que, de entre os escolhidos, adquirem produtos de higiene pessoal.
 - i. Indique a distribuição e os respectivos parâmetros da v.a. Y .
 - ii. Determine a $P(Y = 1)$.
 - iii. Calcule o valor esperado e a variância de Y .
 - (b) Se escolhermos ao acaso e com reposição, 2 clientes deste grupo, considere W o n.º de clientes que, de entre os escolhidos, adquirem produtos de higiene pessoal.
 - i. Apresente a distribuição e os respectivos parâmetros da v.a. W .
 - ii. Calcule a $P(W \leq 1)$.
 - iii. Determine o valor médio e o desvio padrão de W .
 - iv. Compare a amplitude dos intervalos:
 $[E(Y) - 1.5\sigma(Y), E(Y) + 1.5\sigma(Y)]$ e $[E(W) - 1.5\sigma(W), E(W) + 1.5\sigma(W)]$
 Comente a amplitude destes intervalos, tendo em conta o método de amostragem adoptado.
 - (c) No supermercado SuperCompras, qualquer cliente faz uma despesa superior a 50 € com probabilidade 0.1 (independentemente do cliente).
 - i. Numa amostra aleatória de 10 clientes, determine a probabilidade de se registarem clientes que fazem uma despesa superior a 50 €.
 - ii. Se numa amostra aleatória de n clientes se espera que 45 venham a fazer uma despesa não superior a 50 €, então n terá valor ?

Solução: a) -, $\frac{51}{190}$, 0.3, $\frac{459}{1900}$ b) -, 0.9775, 0.3, $\sqrt{0.255} \approx 0.504975$, $A(Y) \approx 1.4745$, $A(W) \approx 1.5149$ c) 0.65132156, 50

78. A probabilidade de um automóvel efectuar uma lavagem automática, quando se vai abastecer de combustível numa bomba de gasolina, é $p = 0.1$ (independentemente do automóvel). Considere a v.a. X - n.º de automóveis que entram na bomba de gasolina para se abastecerem, até ao primeiro (inclusive este) que efectua uma lavagem automática.

- (a) Identifique a distribuição da v.a. X .
 (b) Verifique que, para qualquer valor $p \in]0, 1[$,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - (1 - p)^{[x]}, \quad x \in [1, +\infty[\quad ([x] \text{ representa a parte inteira de } x)$$

completando as entradas nas expressões que se seguem:

$$P(X \leq x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} p(1 - p)^{k-1} = p \frac{1 - (1 - p)^{\lfloor x \rfloor}}{1 - (1 - p)} = 1 - (1 - p)^{\lfloor x \rfloor}$$

Sugestão: Tenha em conta o seguinte resultado: Para $r \in]0, 1[$ e $m \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{i=0}^m r^i = \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r}$.

- (c) Tendo em conta o resultado obtido na alínea anterior, e para $p = 0.1$, determine $P(6 \leq X \leq 10)$.

$$P(6 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X < 6) = P(X \leq 10) - P(X \leq 5) =$$

- (d) Mostre que, para qualquer valor $p \in]0, 1[$,

$$P(X > x + h | X > x) = P(X > h), \quad \forall x, h \in \mathbb{N},$$

completando as entradas nas expressões que se seguem:

$$\begin{aligned} P(X > x + h | X > x) &= \frac{P[(X > x + h) \cap (X > x)]}{P(X > x)} = \frac{P(X > x + h)}{P(X > x)} \\ &= \frac{1 - P(X \leq x + h)}{1 - P(X \leq x)} = \frac{(1 - p)^{x+h}}{(1 - p)^x} = (1 - p)^h \\ &= P(X > h) \end{aligned}$$

- (e) Sabendo que entraram mais de 6 automóveis até o primeiro efectuar uma lavagem automática, qual a probabilidade de terem entrado pelo menos 9 (considere $p = 0.1$)?

$$P(X \geq 9 | X > 6) = P(X > 9 | X > 6) = P(X > 3) =$$

Solução: a) $G(0.1)$ b) - c) ≈ 0.24181156 d) - e) 0.81

79. Os registos de uma oficina de automóveis, onde se realizam inspecções, mostram que $100 \times p$ % dos automóveis são aprovados em cada inspecção. Considere X o número de inspecções de um automóvel até ser aprovado. Sabendo que cada automóvel faz em média 1.25 inspecções até ser aprovado:

- (a) Determine $P(X \leq 3)$
- (b) Qual o valor mínimo de $m \in \mathbb{N}$, que assegura que, a probabilidade de serem necessárias m ou menos inspecções para um automóvel ser aprovado, é superior a 0.99.
- (c) Se um determinado automóvel já fez mais de 2 inspecções, qual a probabilidade de virem a serem necessárias mais 4?
- (d) Determine a probabilidade de $X \in]E(X) - 1.5\sigma(X), E(X) + 1.5\sigma(X)[$

Solução: a) 0.992 b) 3 c) 0.0016 d) 0.96

80. A probabilidade de um automóvel efectuar uma verificação da pressão dos pneus, quando entra numa qualquer estação de abastecimento de combustível, tem valor constante $p = 0.06$ (independentemente do automóvel).

- (a) Se tiverem entrado n , $n \in \mathbb{N}$, automóveis numa estação de abastecimento de combustível, identifique a distribuição do número X de automóveis que efectuem uma verificação da pressão dos pneus.
- (b) Numa estação de abastecimento de combustível, determine:
 - i. A probabilidade de nenhum dos próximos 6 automóveis vir a efectuar uma verificação da pressão dos pneus.
 - ii. A probabilidade de, pelo menos um dos próximos 10 automóveis, efectuar uma verificação da pressão dos pneus.
 - iii. A probabilidade de, pelo menos dois dos próximos 10 automóveis, efectuarem verificações da pressão dos pneus.
 - iv. Nos próximos 10 automóveis, o número médio dos que não farão a verificação da pressão dos pneus.
 - v. O desvio padrão do número de verificações da pressão dos pneus efectuadas em cada grupo de 25 automóveis.
 - vi. No máximo, quantos automóveis deverão ter entrado na estação de abastecimento de combustível e garantindo ser superior a 0.3, a probabilidade de nenhum deles ter efectuado uma verificação da pressão dos pneus?
- (c) Considere a v.a. Y - n.º de automóveis que entram numa estação de abastecimento de combustível, até que o primeiro (inclusive este) efectue uma verificação da pressão dos pneus.
 - i. Identifique a distribuição de Y
 - ii. Determine $P(Y = 6)$.
 - iii. Determine $P(6 \leq Y \leq 10)$
 - iv. Sabendo que entraram mais de 6 automóveis até ao primeiro efectuar uma verificação da pressão dos pneus, qual a probabilidade de terem entrado menos de 9.

Solução: a) $B(n, 0.06)$ b) 0.68986978, 0.461384885, 0.117588004, 9.4, $\sqrt{1.41} \approx 1.187434209$, 5, 19
 c) $G(0.06)$, 0.044034241, 0.195288908, 0.21925104

81. O número de chamadas/dia que chegam à secção de atendimento ao público de uma associação de defesa do consumidor é uma v.a. com distribuição de Poisson. Sabe-se que as chamadas ocorrem a uma taxa de 1.5 chamadas em cada 10 minutos.
- (a) Considere o período entre as 9:00 e as 9:10. Determine a probabilidade desta secção da associação:
 - i. Não receber qualquer chamada.
 - ii. Receber mais de duas chamadas.
 - iii. O número médio e a variância do número de chamadas recebidas neste período.
 - (b) Considere o período entre as 11:00 e as 11:30. Determine a probabilidade desta secção da associação:
 - i. Não receber qualquer chamada.
 - ii. Receber menos de 2 chamadas.
 - iii. O número médio e o desvio padrão do número de chamadas recebidas neste período.
 - (c) O director desta associação recebe chamadas telefónicas/dia a uma taxa de 4 por hora e o número de chamadas tem uma distribuição de Poisson, independentemente do número de chamadas/dia para a secção de atendimento.
 Considere o período de tempo entre as 11:00 e as 11:30.
 - i. Determine a probabilidade de num dia e neste período temporal, serem recebidas menos de 2 chamadas para a secção de atendimento e nenhuma chamada para o director.
 - ii. Indique a distribuição do total de chamadas recebidas na secção de atendimento e para o director, neste período de tempo.
 - iii. Num dia e neste período de tempo, foram recebidas um total de 2 chamadas na secção de atendimento e para o director. Determine a probabilidade de terem sido recebidas menos de 2 chamadas para a secção de atendimento e uma chamada para o director.

Solução: a) 0.223130, 0.191153, 1.5, 1.5 b) 0.011109, 0.061099, 4.5, 2.121320 c) 0.008268916, $P(6.5)$, 0.426035503

82. Seja X uma variável aleatória de Poisson que representa o número de golos marcados num desafio de futebol de uma Liga profissional, onde, em média, se marcam 2.5 golos por desafio. Determine a probabilidade de:
- (a) Num jogo se marcarem pelo menos 2 golos.
 - (b) Em dois jogos não se marcarem golos.
 - (c) Em cada um de dois jogos se marcarem pelo menos 2 golos.

Solução: a) 0.712703 b) 0.006738 c) 0.507945

83. Na tabacaria A são vendidas raspadinhas. O $n.^o$ diário de raspadinhas vendidas tem distribuição de Poisson com uma taxa média de λ raspadinhas/dia, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

- (a) Se num dia não foram vendidas raspadinhas, com probabilidade $p \in]0, 1[$, então λ tem valor?

Nas alíneas seguintes, considere $\lambda = 2$

- (b) Calcule a probabilidade de num dia terem sido vendidas mais de 2 raspadinhas.
- (c) Na tabacaria B são vendidas raspadinhas e o $n.^o$ diário de raspadinhas vendidas tem distribuição de Poisson a uma taxa média de 3 raspadinhas/dia. Admita que o $n.^o$ de vendas de raspadinhas são independentes das tabacarias em causa.
 - i. Determine a probabilidade de num mesmo dia serem vendidas 3 raspadinhas na tabacaria A e 2 ou mais raspadinhas na tabacaria B.
 - ii. Determine a probabilidade de num mesmo dia e nestas tabacarias, se venderem um total de raspadinhas entre 4 e 6 (inclusive estes valores).

Solução: a) $-\ln p$ b) ≈ 0.323323583 , c) ≈ 0.144511327 , ≈ 0.497157548

84. O número de automóveis, X , que chegam por dia a uma pequena oficina para serem reparados é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro igual a 2. Devido à reduzida dimensão da oficina, só podem ser atendidos, no máximo, 3 automóveis por dia. Se chegarem mais de 3 automóveis, os excedentes são encaminhados para outras oficinas.
- (a) Determine a probabilidade de, num dia qualquer, serem encaminhados automóveis para outras oficinas.
 - (b) Qual deverá ser a capacidade de atendimento da oficina, de modo a que a oficina possa reparar, em aproximadamente 95% dos dias, todos os automóveis que chegam?
 - (c) Qual o número esperado de automóveis que chegam por dia?
 - (d) Determine a função de probabilidade para o número de automóveis atendidos diariamente.
 - (e) Qual o número médio de automóveis atendidos diariamente?
 - (f) Qual é o número médio de automóveis que são diariamente encaminhados para outras oficinas?
 - (g) Determine a probabilidade de, em cinco dias, chegarem 9 automóveis.

Solução: a) 0.142877 b) mais 1 lugar c) 2 d) – e) 1.782 f) 0.218 g) 0.125110

85. Um grande armazém de venda de artigos para o lar, emprega 100 funcionários. A probabilidade de, diariamente qualquer um quebrar uma ou mais peças de vidro, é de 0.005. Determine a probabilidade aproximada de, num determinado dia, pelo menos 2 dos funcionários terem sido responsáveis pela quebra de peças de vidro.

Solução: 0.09020401043

86. Uma companhia de seguros está informada de que apenas 0.1% da população está sujeita a um certo tipo de acidentes, ao longo de um ano. Sabendo que a companhia tem 1 000 segurados desta população, qual a probabilidade aproximada de que, quando muito, 3 dos seus clientes venham a sofrer este tipo de acidentes durante o próximo ano?

Solução: 0.981011843

87. O fabricante de um refrigerante comercializado em garrafas, resolveu lançar uma campanha publicitária, oferecendo prémios impressos no interior das cápsulas das garrafas. Durante a campanha, 5% das garrafas distribuídas para venda tinham prémio.
- Ao adquirirmos 6 garrafas aleatoriamente escolhidas de entre 40 distribuídas para venda, seja X o n.º de prémios que podemos obter.
 - Apresente a distribuição da v.a. X .
 - Determine $P(X \geq 1)$.
 - Qual é o n.º esperado de prémios que podemos obter? Qual é o desvio padrão do n.º de prémios que podemos obter?
 - Numa amostra de 3 garrafas escolhidas ao acaso e com reposição de entre as distribuídas para venda, a probabilidade de todas terem prémio tem valor?
 - Numa amostra de 80 garrafas escolhidas ao acaso e com reposição de entre as distribuídas para venda, determine o valor aproximado de, no máximo, 2 terem prémio.
 - O mesmo fabricante também comercializa o mesmo refrigerante em latas. Na mesma campanha publicitária oferece um prémio oculto em cada lata. Admita que $100 \times p\%$ das latas têm prémio. Numa amostra de 10 garrafas e numa amostra de 5 latas (ambas seleccionadas ao acaso e com reposição):
 - Se $p = 0.1$, Determine a probabilidade de 2 garrafas e uma lata terem prémio.
 - Se $p = 0.05$, determine a probabilidade de obter um total de 2 prémios.
 - Se $p = 0.05$, determine a probabilidade de se obter um prémio numa garrafa, sabendo que no total se obtiveram 2 prémios.

Solução: a) $H(40, 2, 6)$, ≈ 0.280769 , 0.3 , ≈ 0.498459 b) 0.000125 c) ≈ 0.238103306 d) 0.024483946 , 0.134752297 , $10/21$

88. O Manuel vive em Évora e quer ir passar as férias em Agosto e em Vilamoura. Decide partir à boleia. Para tal coloca-se numa saída rodoviária de Évora e sabe que o n.º de veículos que saem desse local, com destino a Vilamoura se comporta segundo um Processo de Poisson com uma intensidade de $\beta = 12$ veículos por dia. Sabe também que, independentemente do veículo e da hora, a probabilidade de algum parar para lhe dar eventualmente boleia é $p = 0.05$.
- Qual a probabilidade de, em quatro horas, passarem 3 veículos com destino a Vilamoura?
 - Das 12:00 às 18:00, em média quantos veículos passarão com destino a Vilamoura?
 - Determine a probabilidade de, com destino a Vilamoura, passarem 2 veículos entre as 11:30 e as 12:30 e passarem 3 veículos entre as 14:00 e as 15:30.
 - Diga qual é a distribuição do total de veículos com destino a Vilamoura, que saem da saída mencionada, nos períodos horários das 10:00-12:00 e das 14:00-17:00.
 - Determine a probabilidade de, entre as 8:00 e as 12:00, saírem 6 veículos com destino a Vilamoura e nenhum parar para o Manuel tentar conseguir uma eventual boleia.
 - Num dia, saíram 84 veículos com destino a Vilamoura. Qual é a probabilidade aproximada de, pelo menos 2, pararem para dar eventualmente boleia ao Manuel?

Solução: a) 0.180447044 b) 3 c) 0.002518109 , d) $P(2.5)$ e) 0.008843011 f) 0.922023001

89. No serviço de urgências do hospital A e diariamente, entre as 4:00 e as 6:00, o n.º de utentes que aí comparecem em t minutos, N_t , distribui-se de acordo com um processo de Poisson à taxa de 0.25 utentes/minuto. Num determinado dia:

- (a) Determine a probabilidade de entre as 4:00 e as 4:15 horas, comparecerem (inclusive) entre 2 a 4 utentes.
- (b) Determine a probabilidade do total de utentes que chegam ao serviço de urgências, entre a 4:00 e as 4:05 e entre as 5:30 e as 5:40, não exceder os 3.
- (c) Diariamente, entre as 4:00 e as 6:00, o n.º de utentes que comparecem a consultas internas em t horas, M_t , distribui-se de acordo com um processo de Poisson de intensidade 6 utentes/hora e independentemente do n.º de utentes que comparecem no serviço de urgências,
 - i. Indique a distribuição do n.º total de utentes que chegam ao serviço de urgências e que comparecem às consultas internas, entre as 5:00 e as 5:30.
 - ii. Determine a probabilidade de num dia, chegarem 5 utentes às urgências entre as 4:30 e as 4:45 e comparecerem às consultas internas no mesmo período de tempo, 4 utentes.

Solução: a) 0.565838343 b) 0.483767382 c) $P(10.5)$, 0.006840421

90. Após a implementação do acordo ortográfico mais recente, o número de erros de ortografia que um indivíduo comete por página (A4 e completamente preenchida), comporta-se segundo um processo de Poisson a uma taxa média de 1.5 erros/página. Considere $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ o número de erros cometidos em t páginas. Para um determinado indivíduo:

- (a) Que escreveu 2 páginas, qual a probabilidade de vir a cometer no máximo 2 erros.
- (b) Num conjunto de 6 páginas escritas onde foram cometidos 10 erros, qual a probabilidade de metade terem ocorrido nas 2 primeiras páginas?
- (c) Que escreveu 10 páginas, determine a probabilidade do total de erros cometidos nas 2 primeiras e nas 3 últimas ser igual a 8.
- (d) Qual o número máximo de páginas que terão sido escritas de modo a que, com probabilidade superior ou igual a 0.01, não tenham sido cometidos erros?

Solução: a) 0.423190081 b) 0.136564548 c) 0.137328593 d) 3

Exercícios teóricos

91. Considere Y_1, Y_2, \dots uma sucessão de v.a.'s independentes e identicamente distribuídas com distribuição $B(1, p)$, $p \in]0, 1[$.

(a) Por resolução das alíneas que se seguem, mostre por indução em $n \in \mathbb{N}$ que $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i \sim B(n, p)$.

- i. Para $n = 1$, $X_1 \sim B(1, p)$
- ii. Sendo válido que para n , isto é, $X_n \sim B(n, p)$, então $X_{n+1} \sim B(n+1, p)$.

Sugestão: Complete as entradas que se seguem

$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1} = k) &= P(X_n + Y_{n+1} = k) \\
 &= P(X_n = k; Y_{n+1} = \quad) + P(X_n = k-1; Y_{n+1} = \quad) \\
 &= P(X_n = k) P(Y_{n+1} = \quad) + P(X_n = k-1) P(Y_{n+1} = \quad) \\
 &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times \quad + \binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1} \times \quad \\
 &= \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] p^{\quad} (1-p)^{\quad} \\
 &= \binom{n+1}{k} p^{\quad} (1-p)^{\quad}
 \end{aligned}$$

(b) Verifique que $E(Y_i) = p$ e que $V(Y_i) = p(1-p)$

(c) Demonstre que, se X é uma v.a. com distribuição $B(n, p)$, então $E(X) = np$ e $V(X) = np(1-p)$

92. Sejam X e Y v.a.'s independentes tais que $X \sim P(\lambda)$ e $Y \sim P(\beta)$. Completando as expressões que se seguem, mostre que $X + Y \sim P(\lambda + \beta)$.

Para $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
 P(X + Y = k) &= \sum_{i=0}^k P(X = i, Y = \quad) = \\
 &= \sum_{i=0}^k P(X = i) P(Y = \quad) \quad \text{Porque } \underline{\hspace{10cm}} \\
 &= \sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\beta} \frac{\beta^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda+\beta)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^i \beta^{k-i} \\
 &= e^{-(\lambda+\beta)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^i \beta^{k-i} \quad \text{Pelo desenvolvimento do binómio de Newton} \\
 &= \quad
 \end{aligned}$$

Variável aleatória contínua

93. Em determinada estação de metropolitano, o tempo de espera (em minutos) até à chegada do primeiro comboio é uma v.a. X , com função densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} a, & 0 < x \leq 1 \\ 1/4, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$$

- (a) Determine o valor da constante a .
- (b) Qual a probabilidade de ser necessário esperar mais de 1 minuto e não mais de 3 minutos, pelo primeiro comboio?
- (c) Determine a função de distribuição da v.a. X . Volte a determinar o valor da probabilidade pedida na alínea anterior recorrendo a esta função.
- (d) Determine o tempo médio de espera pelo primeiro comboio. Determine também o desvio padrão.

Solução: a) 0.5 b) 0.25 c) – d) 1.75, ≈ 0.981011843

94. Em cada alínea assinale o valor lógico da afirmação (**V** para verdadeira e **F** para falsa).

Seja X uma v.a. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} a - x, & x \in]0, a] \\ 1/2, & x \in]1, 2[\\ 0, & x \notin]0, a] \cup]1, 2[\end{cases} \quad a \in \mathbb{R}^+$$

- (a) ☐ V ☐ F A constante a deverá ter valor $1/2$
- (b) ☐ V ☐ F Se $P(X \leq x) = 3/4$, então $x = 3/2$
- (c) ☐ V ☐ F Sabendo que $E(12X - 11) = 0$ e que $E(X^2) = 15/12$, então $V(X) = 59/(144)$

Solução: a) F b) V c) V

95. A duração do tratamento (em dias) de pessoas com um determinado tipo de problemas pulmonares é uma v.a. contínua X com a seguinte função densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 24x^{-4}, & x \geq a \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$$

- Determine a probabilidade de uma pessoa ter tido um tratamento com duração:
 - superior a 10 dias.
 - entre 4 e 5 dias.
- Determine a função de distribuição da v.a. X e aprecie a vantagem da sua utilização no cálculo das probabilidades pedidas na alínea anterior.
- Calcule a duração média do tratamento.
- Calcule o desvio padrão da duração do tratamento.
- Se 100 pessoas fizeram este tratamento, independentemente uma das outras, e as v.a.'s X_1, X_2, \dots, X_{100} , expressam as respectivas durações, considere $\bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$ a média das durações dos respectivos tratamentos.
Determine o valor médio, a variância e o desvio padrão da média das durações do tratamento destas pessoas.

Solução: $a = 2$, a) 0.008, 0.061 b) – c) 3 d) $\sqrt{3}$ e) 3, 3/100, $\sqrt{3}/10$

96. Uma máquina de enchimento automático de garrafas de cerveja de 33 cl comete, em cada garrafa, um erro aleatório X (em cl) com função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} x/4 + 1/2, & -2 \leq x \leq 0 \\ -x/4 + 1/2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

- A função densidade de probabilidade é simétrica? Justifique.
- Sendo $F_X(x)$ a função distribuição da v.a. X , verifique que $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.
- Divida o suporte $S_X =]-2, 2[$ em dois sub-intervalos exaustivos e disjuntos, de modo a que sejam iguais as probabilidades de X pertencer a um ou a outro.
- Qual o erro médio que se comete no enchimento de cada garrafa?
- Suponha fixado o seguinte critério de controle de qualidade: das garrafas cheias durante uma hora, escolhe-se uma ao acaso, e mede-se o seu conteúdo; se tiver um erro, em valor absoluto, superior a dois desvios padrões, pára-se a máquina para revisão. Qual a probabilidade de se mandar parar a máquina?

Solução: a) Sim e em torno de 0 b) – c) Por exemplo, $]-2, 0]$ e $]0, 2[$ d) 0 e) ≈ 0.033674

97. O director de compras de certa empresa pretende definir uma política de aquisição de matéria prima. As necessidades de matéria prima por dia (em toneladas) são representadas por uma v.a. X contínua com função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{c}, & x \in]0, c[\\ 0, & x \notin]0, c[\end{cases}, \quad c > 0$$

- Determine o valor de c .
- Deduza a função distribuição da v.a. X .
- Calcule a probabilidade de num dia, serem necessários entre 0.5 e 1 tonelada de matéria prima.
- Se se quiser que a probabilidade de ruptura de matéria prima não ultrapasse 10%, qual o nível mínimo de abastecimento que deve ser assegurado diariamente?
- Qual a necessidade diária esperada de matéria prima?
- Suponha que o director resolveu estabelecer um nível de ruptura de matéria prima de 1.5 toneladas. A administração propôs dar-lhe um prémio de 20 u.m. por cada dia em que não houvesse ruptura, mas cobrar-lhe uma multa de 100 u.m. caso houvesse ruptura. Acha que, em termos médios, o director deveria aceitar esta proposta?
- Se o director estabelecer um nível de ruptura de matéria prima de 1.5 toneladas,
 - qual a probabilidade de decorrerem 5 dias consecutivos até que ocorra pela primeira vez uma ruptura de matéria prima?
 - determine a probabilidade de ocorrer ruptura de matéria prima em dois dias de uma qualquer semana (5 dias).
 - numa selecção casual de 60 dias, qual a probabilidade aproximada de em 55 ou menos dias, não se registar ruptura de matéria prima?

Solução: a) $c = 2$ b) $-$ c) $5/16$ d) ≈ 1.3675 e) $2/3$ f) Sim (12.5) g) 0.048279762, 0.032186508, 0.322452364

98. A Cervejeira Pilsdorff gere uma frota de camiões que circulam nos 100 km de estrada entre Hangtown e Dry Gulch. Os camiões estão velhos e podem sofrer avarias em qualquer local, X , da estrada. Onde deverá a Cervejeira colocar uma garagem nesta estrada de modo a minimizar a distância esperada entre a garagem e o local da avaria? Por outras palavras, se X é a v.a. que indica o local onde se regista a avaria e b é o local onde será instalada a garagem, medidos a partir de Hangtown, qual o valor de b que minimiza $E(|X - b|)$?

Suponha que a v.a. X tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{10\,000}, & x \in [0, 100] \\ 0, & x \notin [0, 100] \end{cases}$$

Qual o valor de b que minimiza $E(|X - b|)$?

Solução: $100/\sqrt{2} \approx 70.71068$

Exercícios teóricos

99. Seja X uma v.a. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade f_X , e que se garante a existência de $E(X)$. Sendo $a, b \in \mathbb{R}$ constantes, mostre que $E(a + bX) = a + bE(X)$.

100. Seja X uma v.a. absolutamente contínua com função distribuição F_X . Para $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, demonstre que:
- (a) $P(X \leq a) = P(X < a) = F_X(a)$
 - (b) $P(X > b) = P(X \geq b) = 1 - F_X(b)$
 - (c) $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$
101. Considere X uma v.a. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade f_X , e que se garanta a existência de $E(X)$. Se f_X é uma função simétrica em torno de $a \in \mathbb{R}$, mostre que $E(X) = a$.
-

Distribuições contínuas importantes

Uniforme

102. Um fabricante de determinada marca de óleo sabe que a procura semanal X (em milhares de litros) dessa marca de óleo é uma v.a. com a seguinte função densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} a, & x \in [0, 5] \\ 0, & x \notin [0, 5] \end{cases}$$

- (a) Determine o valor da constante a .
- (b) Determine a procura média.
- (c) Determine a variância e o desvio padrão de X .
- (d) A capacidade da fábrica é de 5 unidades (milhares de litros) semanais e o fabricante tem um lucro de 2000€ por cada unidade vendida e um prejuízo de 500€ por cada unidade não vendida. Seja y a quantidade (não excedendo as 5 unidades) que o fabricante decidiu produzir e $L \equiv L(X, y)$ o lucro obtido.
 - i. Determine a função lucro, $L \equiv L(X, y)$.
 - ii. Determine o lucro esperado.
 - iii. Qual o valor de y que permite obter um lucro esperado máximo?

Solução: a) 0.2 b) 2.5 c) $25/12 \approx 2.0833333, \approx 1.443376$ d) $L \begin{cases} 2500X - 500y, & X < y \\ 2000y, & X \geq y \end{cases}, 2000y - 250y^2, 4$

103. Uma máquina de cortar barras de margarina com uma altura e largura constantes mas um comprimento X (em cm) aleatório, processa o corte de tal modo que a acumulação de probabilidade do comprimento final das barras, é constante no intervalo $[20, 22]$.
- (a) Obtenha a função densidade para o comprimento final das barras.
 - (b) A fábrica pretende saber qual o valor de x para o comprimento final das barras, de modo a garantir que 90% das barras têm comprimento superior a x . Que valor proporia?
 - (c) Qual o comprimento médio final das barras de margarina? E o desvio padrão?

Solução: a) – b) 20.2 c) 21, $\sqrt{1/3} \approx 0.57735$

104. A Cervejeira Pilsdorff gere uma frota de camiões que circulam nos 100 km de estrada entre Hangtown e Dry Gulch. Os camiões estão velhos, podem sofrer avarias em qualquer local, X , da estrada e com igual probabilidade. Onde deverá a Cervejeira colocar uma garagem nesta estrada de modo a minimizar a distância esperada entre a garagem e o local da avaria? Por outras palavras, se X é a v.a. que indica o local onde se regista a avaria e b é o local onde será instalada a garagem, medidos a partir de Hangtown, qual o valor de b que minimiza $E(|X - b|)$? Suponha que X tem distribuição Uniforme com parâmetros $(0, 100)$.

Solução: 50 km

Exercícios teóricos

105. Se X é uma v.a. com distribuição $U(a, b)$.

(a) Verifique que a sua função de distribuição é:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x - a) / (b - a), & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

(b) Demonstre que a v.a. $U = \frac{X - b}{b - a}$ tem distribuição $U(0, 1)$.

106. Mostre que se $X \sim U(a, b)$, então $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $E(X^2) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$ e $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

107. Sejam U e V v.a.'s independentes e ambas com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$

(a) Deduza a função distribuição da v.a. $X = \max(U, V)$.

(b) Determine $P(U^2 \leq 1/4)$ e $P(U/(1-U) < 1/2)$.

Solução: a) – b) $1/2, 1/3$

Exponencial

108. Seja X uma v.a. que representa a duração (em horas) de um componente electrónico. O preço de venda do referido componente é de 6€ e o custo do seu fabrico é de 2€, mas o fabricante garante o reembolso total se a sua duração for inferior a 1000 horas. A função densidade de X é:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < \lambda \\ \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x-\lambda}{\delta}}, & x \geq \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}^+$$

(a) Deduza a função de distribuição de X , ou seja a função definida por $F_X(x) = P(X \leq x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Para $\lambda = 0$ e $\delta = 1000$.

(b) Determine a probabilidade do fabricante vir a reembolsar um cliente que comprou um componente.

(c) Calcule a probabilidade de um qualquer componente vir a durar entre 1500 e 2000 horas.

(d) Se um componente durar mais de 1500 horas, a probabilidade de vir a durar mais 500 horas tem valor $e^{-0.5}$?

(e) Determine a duração média do componente electrónico e a variância da duração.

(f) Determine o lucro esperado/componente e o desvio padrão do lucro/componente.

Solução: a) – b) ≈ 0.632121 c) ≈ 0.087795 d) Sim e) 1000, 1000000 f) ≈ 0.207277 , ≈ 2.893370

109. O tempo de espera até ao começo do atendimento de um aluno na loja de fotocópias da FCT/UNL, no ano lectivo de 2008/9, é uma v.a. T com distribuição exponencial de valor médio igual a 20 minutos e desvio padrão de 5 minutos. Para um qualquer aluno que recorreu à loja neste ano lectivo:

(a) Qual a probabilidade de ter aguardado menos de 20 minutos para começar a ser atendido?

(b) Sabendo que já se encontrava à 15 minutos aguardando a sua vez de ser atendido, qual a probabilidade de ter esperado mais 10 minutos?

Solução: a) ≈ 0.632121 b) ≈ 0.135335

Exercícios teóricos

110. Considere a função $\Gamma : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

e que goza das seguintes propriedades:

- $\Gamma(1) = 1$;
- $\Gamma(m+1) = m!$, $m \in \mathbb{N}$.

(a) Se Y é uma v.a. com distribuição $E(0, 1)$, mostre que

- i. $E(Y) = 1$.
- ii. $E(Y^2) = 2$ e $V(Y) = 1$.

(b) Para $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, mostre que $X = \lambda + \delta Y$ é uma v.a. com distribuição $E(\lambda, \delta)$.

Justifique porque se afirma que: $E(X) = \lambda + \delta$ e $V(X) = \delta^2$

111. Se X é uma v.a. com distribuição $E(\lambda, \delta)$, lembre que a sua função de distribuição é:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < \lambda \\ 1 - e^{-\frac{x-\lambda}{\delta}}, & x \geq \lambda \end{cases}$$

Considere X_1, X_2, \dots, X_n v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com distribuição $E(\lambda, \delta)$.

Seja $N_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. O acontecimento $N_n > x$ ocorre se e só se $(X_1 > x; X_2 > x; \dots; X_n > x)$.

Mostre que N_n é uma v.a. com distribuição Exponencial de parâmetros $\left(\lambda, \frac{\delta}{n}\right)$.

Processo de Poisson e Distribuição Exponencial

112. Um estudante de Engenharia que vai passar férias ao Algarve, decidiu deslocar-se à boleia num automóvel. Para esse efeito, colocou-se à entrada da auto-estrada.

Sabe-se que o número de automóveis que entram na auto-estrada num intervalo de tempo de duração t minutos, se processa de acordo com um Processo de Poisson de taxa $\beta = 0.25/\text{minuto}$.

- (a) Qual a probabilidade deste estudante ter de esperar mais de 1 minuto pela passagem do primeiro automóvel?
- (b) Qual é a distribuição do tempo T (em minutos) entre entradas consecutivas de automóveis na auto-estrada?
- (c) Qual é a probabilidade deste estudante ter de esperar mais de 3 minutos pela entrada do primeiro automóvel, dado que já espera à mais de 1 minuto?
- (d) Determine a probabilidade de, durante 2 minutos, entrarem na auto-estrada mais de 2 automóveis.

Solução: a) ≈ 0.778800783 b) $T \sim E(0, 4)$ c) ≈ 0.60653066 d) ≈ 0.014387678

113. No serviço de urgências do hospital A e diariamente, entre as 4:00 e as 6:00, o n.º de utentes que aí comparecem em t minutos, N_t , distribui-se de acordo com um processo de Poisson à taxa de 20 utentes/hora. Num determinado dia:

- (a) Indique a distribuição do tempo (em minutos) decorrido entre chegadas consecutivas de utentes ao serviço de urgências.
- (b) Determine a probabilidade do tempo decorrido entre as chegadas consecutivas de dois utentes ao serviço de urgências, ser inferior a 3 minutos.
- (c) Sabendo que no serviço de urgências o 4.º utente chegou às 5:00, calcule a probabilidade do utente seguinte chegar passado mais 1/4 de hora.
- (d) O 4.º utente chegou às 5:00. Passados mais de 15 minutos não chegou qualquer utente. Qual é a probabilidade do 5.º utente chegar antes das 5:20?

Solução: a) $E(0, 1.5)$ b) $1 - e^{-2}$ c) e^{-10} d) $e^{-10/3}$

Normal

114. Seja Z uma v.a. com distribuição $N(0, 1)$ (Normal Reduzida). Determine:

- (a) $P(Z \leq 0.24)$
- (b) $P(Z \geq 2.46)$
- (c) $P(Z \leq -0.24)$
- (d) $P(0.24 < Z \leq 2.46)$
- (e) $P(-0.24 \leq Z < 2.46)$
- (f) Determine o valor das constantes reais a , b e c que satisfazem, respectivamente, $P(Z \leq a) = 0.75$, $P(Z \leq b) = 0.95$, e $P(Z \leq c) = 0.15$.

Solução: a) 0.5948 b) 0.0069 c) 0.4052 d) 0.3983 e) 0.5879 f) 0.67, 1.65, -1.04

115. Seja X uma v.a. com distribuição $N(100, 400)$. Calcule:

- (a) $P(X \leq 125)$
- (b) $P(X > 85)$
- (c) $P(60 < X < 140)$
- (d) Determine o valor das constantes reais x_1 e x_2 que verificam as igualdades $P(X \leq x_1) = 0.95$ e $P(X \leq x_2) = 0.15$.

Solução: a) 0.8944 b) 0.7734 c) 0.9544 d) 133, 79.2

116. Uma máquina de encher garrafas de água mineral foi calibrada para deitar uma média de 1.5 litros em garrafas com uma capacidade nominal de 1.55 litros. Sabe-se ainda que o volume de água despejado é normalmente distribuído com um desvio padrão de 30 ml. Determine:

- (a) A percentagem de garrafas que contêm menos de 1.52 litros.
- (b) A probabilidade de uma garrafa conter entre 1.48 e 1.52 litros.
- (c) O valor de c tal que a percentagem de garrafas com um volume de água entre $1.5 - c$ e $1.5 + c$ litros, seja de 95%.
- (d) O número esperado de garrafas, das próximas 100 a serem enchidas, em que a máquina vai tentar meter uma quantidade de água superior à capacidade.
- (e) O volume de água abaixo do qual se encontra a fracção de 25% das garrafas menos cheias.

Solução: a) 74.86% b) 0.4972 c) 0.0588 d) 4.75 e) 1.4799

117. Uma empresa fabrica computadores. O tempo que leva a produzir um lote é uma v.a. normal com valor médio de 50 dias e desvio padrão de 5 dias.

- (a) Qual a probabilidade de que o tempo de produção de um lote seja inferior a 44 dias?
- (b) É necessário estabelecer um prazo de entrega para um lote cuja produção vai ser agora iniciada. Que prazo deveremos indicar ao cliente, se a probabilidade de não o vir a cumprir for de 0.05?
- (c) Foram encomendados 10 lotes de computadores. Qual a probabilidade do tempo total de produção desses lotes exceder 520 dias?

Solução: a) 0.1151 b) 58.25 c) 0.1038

118. Um professor desloca-se todos os dias de manhã na sua viatura para ir para a escola. A duração da viagem é uma v.a. normal com valor médio de 20 minutos e desvio padrão de 4 minutos.

- (a) Determine a probabilidade da viagem demorar mais de 25 minutos.
- (b) Determine a percentagem de vezes em que chega atrasado à aula das 9:00 quando sai de casa às 8:45.
- (c) O professor gosta de chegar à escola entre as 8:50 e às 9:00. Se sair de casa às 8:35, qual é a probabilidade de não o conseguir?
- (d) Calcule o tempo a partir do qual se encontram as 20% das viagens mais lentas.
- (e) Calcule a probabilidade de duas das próximas três viagens demorarem mais de 25 minutos.

Solução: a) 0.1056 b) 89.44% c) 0.2112 d) 23.36 e) ≈ 0.029921

119. Um avião para poder descolar só pode levar, no máximo, 8 toneladas. O avião transporta 20 passageiros, podendo cada um levar a sua bagagem. O avião transporta ainda outro tipo de carga. Admita que o peso (em kg)

- de cada passageiro é uma v.a. com distribuição $N(75, c)$;
- da bagagem de cada passageiro é uma v.a. com distribuição $N(15, 4)$;
- de “outro tipo de carga” é uma v.a. com distribuição $N(6000, 1000000)$.

- (a) Se um passageiro for admoestado por levar mais do que 20 kg de bagagem, qual a probabilidade de tal vir a acontecer?
- (b) Determine a probabilidade de um passageiro levar entre 14 e 20 kg de bagagem.
- (c) Determine o valor de c , de modo a que um passageiro pese menos de 72 kg, com probabilidade 0.1587.
- (d) Admita que $c = 16$. Não havendo qualquer espécie de controlo, qual a probabilidade do avião poder descolar? (Considere que todas as v.a.’s que vai usar são independentes).

Solução: a) 0.0062 b) 0.6853 c) 9 d) 0.5793

120. Um fabricante tem uma máquina A que pode produzir esferas para rolamentos cujo diâmetro (em cm) é uma v.a. com distribuição normal de parâmetros $(5\text{cm}, 0.01\text{cm}^2)$. No entanto, os seus clientes, exigem que o diâmetro esteja compreendido entre 4.9 e 5.1cm, pelo que as esferas que não satisfaçam este requisito vão para a sucata. Estas representam um prejuízo unitário de 1 unidade monetária, enquanto que as esferas de boa qualidade dão um lucro unitário de 2 unidades monetárias.
- Determine a percentagem da produção que é vendida e a percentagem que vai para a sucata.
 - Suponha uma encomenda de n , $n \in \mathbb{N}$ esferas. Quantas esferas terão em média de ser produzidas para satisfazer esta encomenda?
 - Determine o valor esperado do lucro obtido com a encomenda de n esferas.
 - Determine o aumento relativo do lucro unitário esperado se o processo melhorasse de forma que o desvio padrão do diâmetro das esferas, fosse reduzido para metade.
 - Se, para conseguir essa melhoria do processo de fabrico, fosse necessário comprar uma máquina B que custa 10 milhões de unidades monetárias (incluindo todos os encargos financeiros), determine o número esperado de esferas que seria necessário produzir para pagar este investimento.

Solução: a) 68.26% b) $m = n/0.6826$ c) $1.535013n$ d) 77.82% e) no mínimo 5367111

121. Diariamente, um jardineiro corta a relva e poda as árvores num certo jardim. Independentemente do dia, o tempo X que dispense a cortar a relva é uma v.a. com distribuição Normal de valor médio 90 *min* e desvio padrão 10 *min*, enquanto que o tempo gasto a podar as árvores é uma v.a. $Y \sim N(100, 225)$ (em minutos). Assuma que as v.a.'s X e Y são independentes.
- Calcule a probabilidade de num dia dispender mais tempo a cortar a relva do que a podar as árvores.
 - O contrato de trabalho, prevê trabalhar um total de 17 horas em cinco dias/semana. Para uma determinada semana:
 - Indique a distribuição da diferença entre o n.º de horas de trabalho contratadas e o n.º de horas de trabalho efectuado.
 - Determine a probabilidade de nesta semana, trabalhar menos do que as horas contratadas.

Solução: a) 0.2912 b) $N(70, 1625)$ (em minutos), 0.9591

122. Numa prova de corrida de 100 metros, apresentam-se os atletas A e B . O tempo médio gasto pelos atletas A e B é, respectivamente, 10.6 segundos e 10.8 segundos. Admita que os tempos gastos (em segundos) por estes atletas são v.a.'s independentes com distribuição Normal e desvio padrão, respectivamente, 0.2 e 0.5.
- Determine a probabilidade do atleta A ser o vencedor da corrida.
 - Determine a probabilidade do atleta B terminar a corrida num tempo superior a 11.3 segundos.
 - Querendo garantir que o atleta A , consegue terminar a corrida em menos de s segundos com probabilidade 0.9, qual será o valor de s ?

Solução: a) 0.6443 b) 0.1587 c) 10.856

Exercícios teóricos

123. Considere as v.a.'s $Z \sim N(0, 1)$ e $X = a + bZ$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^+$. Mostre que $X \sim N(a, b^2)$.
124. Considere a v.a. $Z \sim N(0, 1)$.
- Mostre que $E(Z) = 0$, que $E(Z^2) = 1$ e que $V(Z) = 1$
 - Se X é uma v.a. com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, comprove que $E(X) = \mu$ e que $V(X) = \sigma^2$.

Pareto

125. O tempo que uma viatura de uma luxuosa marca leva a atingir a velocidade de 100 km/h (em segundos) é uma variável aleatória X com distribuição Pareto de parâmetros $(4.5, 2)$. A função densidade de probabilidade, f_X , e a função distribuição, F_X , são:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 4.5 \\ 40.5 x^{-3}, & x \geq 4.5 \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 4.5 \\ 1 - 20.25 x^{-2}, & x \geq 4.5 \end{cases}$$

- Determine a probabilidade de uma viatura seleccionada ao acaso atingir 100 Km/h em mais de 20 segundos e como tal necessitar de uma afinação.
- Os clientes A e B estão interessados em comprar uma viatura desta marca. Para esse efeito, cada um testou uma viatura em idênticas circunstâncias (e com viaturas distintas). O cliente A, não conseguiu atingir a velocidade de 100 km/h ao final de 6 segundos e por isso queremos saber qual a probabilidade de o conseguir antes de 8 segundos. O cliente B, não tendo conseguido atingir a velocidade de 100 km/h nos primeiros 12 segundos quer saber qual a probabilidade de o conseguir antes do 16º segundo. Em função dos valores das probabilidades obtidas, o cliente A tem razões para reclamar?
- Os clientes A e B estão interessados em comprar uma viatura desta marca. Para esse efeito, cada um testou uma viatura em idênticas circunstâncias (e com viaturas distintas). O cliente A não conseguiu atingir a velocidade de 100 km/h ao final de 5 segundos. O cliente B não conseguiu atingir a velocidade de 100 km/h ao final de 8 segundos. Determine para cada cliente, a probabilidade de passado mais 1/2 segundo circularem a 95 km/h. Comente os valores das probabilidades obtidas.
- Calcule $P[X > E(X)]$ e comente. Poderá apresentar o valor do desvio padrão de X ?
- Qual a probabilidade de pelo menos duas viaturas necessitarem de afinação, de entre um conjunto de 10 seleccionadas ao acaso da produção diária?
- Resolva de novo as alíneas anteriores, considerando agora que a v.a. X tem distribuição Exponencial de parâmetros $(4.5, 4.5)$ e compare os valores actuais com os anteriores.

Nota: Pode ser útil saber que se $X \sim E(4.5, 4.5)$, então $Y = X - 4.5 \sim E(0, 4.5)$.

Solução: a) 0.050625 b) 0.4375, 0.4375, Não c) 0.826446281, 0.885813148 d) 0.25, Não e) 0.088010944 f) a) 0.031922492 b) 0.358819612, 0.588887709 c) 0.894839317, 0.894839317 d) 9, 0.367879441, 4.5 e) 0.038671631

126. Três grupos de desenvolvimento de soluções IT com volumes de vendas idênticos, têm abordagens ao risco muito distintas. O grupo A tem um controlo de qualidade implementado através de uma abordagem Enterprise Risk Management e usa uma framework de detecção e correcção de erros de última geração. O grupo B, para conseguir reduzir os custos e o time-to-market, aceita uma margem de risco maior, reduzindo o controlo de qualidade. Já o grupo C não tem qualquer preocupação com o controlo de qualidade, com um modelo de negócio que lhe permite chegar ao mercado antes dos concorrentes, aceitando os custos inerentes a todos os erros que tem que corrigir. Um aluno de PEE fez uma análise aos custos que cada grupo incorre anualmente na correcção de erros e chegou à conclusão que esses custos (em milhares de euros) para o grupo A, B e C são $C_A \sim N(10^4, 10^8)$, $C_B \sim E(0, 10^4)$ e $C_C \sim Par((2 - \sqrt{2})10^4, 1 + \sqrt{2})$, respectivamente.

- Verifique que todos os grupos têm o mesmo valor esperado (10^4) e variância (10^8) para os custos.
- Para cada um dos grupos, determine a probabilidade de os custos excederem o dobro do valor esperado.
- Para cada um dos grupos, determine a probabilidade de nos anos em que os custos são superiores ao valor esperado estes excederem o valor esperado em mais do dobro.
- Para cada um dos grupos, determine a probabilidade de nos anos muito maus, isto é, anos em que os custos são superiores ao dobro do esperado, estes excederem o valor esperado em mais do triplo.

Solução: a) – b) $\approx 15.87\%$, $\approx 13.53\%$, $\approx 27.51\%$ c) $\approx 31.74\%$, $\approx 36.79\%$, $\approx 18.76\%$ d) $\approx 14.37\%$, $\approx 36.79\%$, $\approx 37.57\%$

Teorema Limite Central

127. Ao adicionar números, um computador arredonda cada número para o inteiro mais próximo. Admita que os erros cometidos são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com valor médio igual a 0 e variância igual a $1/12$. Se 1200 números forem adicionados, qual a probabilidade aproximada de que o erro total cometido não ultrapasse 15.4?

Solução: 0.9382

128. O saldo médio das contas de cartões de crédito dos clientes de um banco, no dia 1 de cada mês, é de -250 € e o desvio padrão é de 100 €. Considere uma amostra aleatória de 40 contas. Determine a probabilidade do saldo médio da amostra ser:
- (a) Inferior a -230 €.
 - (b) Superior a -270 €.
 - (c) Estar compreendido entre -250 € e -200 €.

Solução: a) 0.8962 b) 0.8962 c) 0.4993

129. Um estudante decidiu amealhar diariamente uma pequena quantia para comprar uma bicicleta. As probabilidades do estudante amealhar 50, 100 e 250 centimos em cada dia são 0.3, 0.6 e 0.1, respectivamente. Calcule o valor aproximado da probabilidade do estudante amealhar mais de 350 euros durante um ano (365 dias).

Solução: 0.9236

130. Os envelopes destinados a transporte de avião são empacotados em grupos de 100, sendo depois pesados. Supondo que o peso de cada envelope é uma v.a. com valor médio igual a 1 grama e desvio padrão de 0.05g, independentemente de envelope para envelope, determine:
- (a) A probabilidade de que um pacote, com exactamente 100 envelopes, pese mais de 100.5g.
 - (b) A probabilidade aproximada de que a média dos pesos dos 100 envelopes de um pacote diste do seu valor médio por uma quantidade superior ao seu desvio padrão.

Solução: a) 0.1587 b) 0.3174

131. Uma das seguintes respostas está correcta. Determine-a e assinale-a com uma cruz no quadrado correspondente. Numa localidade, o preço por cada parcela de $1 m^2$ de construção nova é uma v.a. com valor esperado de 1000 € e um desvio padrão de 50 €. Admita que o preço é independente das parcelas com $1 m^2$. Para 100 parcelas com $1 m^2$, o respectivo preço total de construção nova, situar-se-á entre os 99.000 € e os 101.000 €, com probabilidade aproximada de:

☐ A 0.0320

☐ B 0.1586

☐ C 0.9544

☐ D Nenhuma das anteriores

Solução: C

132. Num certo complexo industrial, inspeccionaram-se 100 componentes de um sistema eléctrico. Considere, para cada componente, uma v.a. X_i ($i = 1, 2, \dots, 100$) que toma valor 1 se o componente está operável e 0 se não está operável. De registos anteriores, sabe-se que a probabilidade de um qualquer componente estar operável é de 80%.

- (a) Considere a v.a. $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$.
- Diga qual o significado da v.a. Y ?
 - Qual a distribuição de Y ?
- (b) Determine o valor aproximado da probabilidade de, no máximo, 80 desses componentes estarem operáveis.
- (c) Qual a probabilidade aproximada de que exactamente 80 desses componentes estejam operáveis?

Solução: a) –, $B(100, 0.8)$ b) 0.5 c) 0.0987

133. Uma empresa comercializa garrafas de vinho do Porto de 1 litro, vendendo-as em caixotes de 5 garrafas. Supõe-se que 4% das garrafas contêm realmente uma quantidade de líquido inferior à indicada no rótulo. Calcule a probabilidade aproximada de, num lote de 100 caixotes,

- se encontrarem entre 16 e 25 garrafas (inclusive ambos) com menos de 1 litro.
- se encontrarem 26 garrafas com menos de 1 litro.

Solução: a) 0.7458 b) 0.0418

134. Um sistema é formado por 100 componentes, cada um dos quais com confiabilidade de 0.95 (probabilidade de funcionamento durante um certo período de tempo). Se esses componentes funcionarem independentemente uns dos outros e, se o sistema completo funcionar adequadamente quando, pelo menos 90 componentes funcionarem, qual a confiabilidade do sistema?

Solução: 0.9970

135. O n.º de faltas cometidas pela equipa A num jogo de futebol, comporta-se segundo um Processo de Poisson com uma taxa média de 4 faltas por hora.

- Qual a probabilidade da equipa A cometer menos de 3 faltas no primeiro quarto de hora de uma partida?
- Sabendo que a equipa A numa partida, cometeu 2 faltas do primeiro quarto de hora, qual a probabilidade de vir a cometer mais de 5 até ao final dos 45 minutos da primeira parte?
- Admita que o n.º de faltas é independente do jogo a disputar. Num ano em que a equipa A vai realizar 18 jogos, escreva a expressão que permite calcular a probabilidade do total de faltas que venha a cometer exceda o limite máximo de 100 faltas (considere que cada jogo a disputar tem um tempo fixo de 90 minutos).
- Realize o cálculo do valor aproximado da probabilidade pedida na alínea anterior, invocando o Teorema Limite Central.

Solução: a) 0.919698603 b) 0.14287654 c) – d) 0.7794

136. Uma companhia aérea vende diariamente bilhetes a baixo custo para Berlim e Amesterdão. O número diário de passageiros que perdem o voo para Berlim tem distribuição de Poisson com valor médio 0.5. Já no voo com destino a Amesterdão, o número de passageiros que o perdem tem distribuição $P(1)$.

- Determine o valor aproximado de, em 32 voos para Berlim, entre 9 e 24 (inclusive) passageiros virem a perder o voo.
- Calcule o valor aproximado da probabilidade de, em 32 voos para Berlim e 10 voos para Amesterdão, o total de passageiros que perdem o voo ser de pelo menos 35. (Considere que o n.º passageiros para os 32 voos para Berlim e para os 10 voos para Amesterdão são v.a.'s independentes).

Solução: a) 0.9544 b) 0.0582

Simulação

Resultados prévios

Inversa de uma função distribuição

- Seja X uma v.a. com função distribuição $F(x) = P(X \leq x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- Representa-se e define-se a sua função inversa por

$$\overleftarrow{F}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, \quad \forall u \in [0, 1]$$

– Exemplo 1

Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade e função distribuição:

$$X \begin{cases} 0 & 2 & 4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.3, & 0 \leq x < 2 \\ 0.8, & 2 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

A função inversa de F é:

$$\overleftarrow{F}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\} = \begin{cases} 0, & u \leq 0.3 \\ 2, & 0.3 < u \leq 0.8 \\ 4, & u > 0.8 \end{cases}, \quad u \in [0, 1]$$

– Exemplo 2

Seja X uma v.a. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade e função distribuição:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 < x \leq 1 \\ 1/4, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x/2, & 0 < x \leq 1 \\ 1/2, & 1 < x \leq 2 \\ x/4, & 2 < x \leq 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

A função inversa de F é:

$$\overleftarrow{F}(u) = \begin{cases} 2u, & u < 0.5 \\ 2, & u = 0.5 \\ 4u, & u > 0.5 \end{cases}, \quad u \in [0, 1]$$

A Transformação Uniformizante

- **Teorema da Transformação Uniformizante:** Seja X uma v.a. com função distribuição F . Então a v.a. $F(X)$ tem distribuição Uniforme no intervalo real de extremos 0 e 1. Abreviadamente,

$$F(X) \sim U(0, 1)$$

- **Corolário:** Seja U uma v.a. com distribuição $U(0, 1)$ e X uma v.a. com função distribuição F . Então $X = \overleftarrow{F}(U)$.

Números pseudo-aleatórios

Método congruencial misto

Permite gerar uma sequência r_1, r_2, r_3, \dots de números inteiros no intervalo $[0, \mathbf{m} - 1]$ recorrendo ao seguinte processo recursivo:

- $r_0 = \text{semente}$;
- $r_i = (\mathbf{a} r_{i-1} + \mathbf{c}) \pmod{\mathbf{m}}$

onde \mathbf{a} , \mathbf{c} e \mathbf{m} são números inteiros ($a, c < m$) e $r \pmod{\mathbf{m}}$ representa o resto da divisão inteira de r por \mathbf{m} .

Observações:

- Este método garante a geração de ciclos de números com comprimento menor ou igual a \mathbf{m} .
- A escolha apropriada dos valores de a , c e m , garante a eficácia da computação, a obtenção de um ciclo de comprimento máximo \mathbf{m} , e independente da semente r_0 .

Geração de números pseudo-aleatórios no intervalo $]0, 1[$

Para se obter uma sequência u_1, u_2, \dots de números reais no intervalo $]0, 1[$, basta usar a transformação:

$$u_i = (r_i + 0.5) / \mathbf{m}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Exemplo

Para $r_0 = 1$, $a = 5$, $c = 7$ e $m = 8$, os primeiros 20 números são:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
r_i	1	4	3	6	5	0	7	2	1	4	3	6	5	0	7	2	1	4	3	6	5

O ciclo tem comprimento 8.

137. Considere a seguinte sequência u_1, u_2, \dots, u_5 de NPA's Uniformes no intervalo $]0, 1[$. Determine a correspondente sequência x_1, x_2, \dots, x_5 de NPA's para uma v.a. X com distribuição de Bernoulli de parâmetro $p = 0.4$ ($B(1, 0.4)$).

i	1	2	3	4	5
u_i	0.38	0.61	0.90	0.10	0.88
x_i					

Notas adicionais:

- $F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.6, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$
- $\overleftarrow{F}_X(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\} = \begin{cases} 0, & u \leq 0.6 \\ 1, & u > 0.6 \end{cases}, \quad u \in [0, 1]$

138. Considere a seguinte sequência u_1, u_2, \dots, u_5 de NPA's Uniformes no intervalo $]0, 1[$. Determine a correspondente sequência x_1, x_2, \dots, x_5 de NPA's para uma v.a. X discreta com função de probabilidade:

$$X \begin{cases} 0 & 2 & 4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{cases}$$

e função distribuição

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.3, & 0 \leq x < 2 \\ 0.8, & 2 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

i	1	2	3	4	5
u_i	0.38	0.10	0.60	0.90	0.88
x_i					

Nota adicional:

$$\bullet \quad \overleftarrow{F}_X(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\} = \begin{cases} 0, & u \leq 0.3 \\ 2, & 0.3 < u \leq 0.8 \\ 4, & u > 0.8 \end{cases}, \quad u \in [0, 1]$$

139. Considere X uma v.a. com distribuição Binomial de parâmetros (n, p) .

Sabemos que X pode ser explicitada por $X = \sum_{i=1}^n Y_i$, sendo Y_1, Y_2, \dots, Y_n v.a.'s independentes e identicamente distribuídas com distribuição de Bernoulli de parâmetro p ($B(1, p)$).

Pretende-se agora gerar NPA's de uma v.a. X com distribuição $B(3, 0.4)$.

Tendo em conta o exercício 137, e a seguinte sequência u_1, u_2, \dots, u_{12} de NPA's Uniformes no intervalo $]0, 1[$, a correspondente sequência x_1, x_2, x_3, x_4 de NPA's para a distribuição $B(3, 0.4)$ é:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_i	0.28	0.74	0.12	0.81	0.93	0.81	0.71	0.64	0.06	0.21	0.39	0.72
y_i	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
x_j		?			?			?			?	

140. Considere a seguinte sequência u_1, u_2, \dots, u_5 de NPA's Uniformes no intervalo $]0, 1[$. Determine a correspondente sequência x_1, x_2, \dots, x_5 de NPA's para uma v.a. X com distribuição Geométrica de parâmetro $p = 0.4$.

i	1	2	3	4	5
u_i	0.38	0.70	0.10	0.90	0.98
x_i					

Notas adicionais:

$$\bullet \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - (1 - p)^{[x]}, & x \geq 1 \end{cases}, \quad p \in]0, 1[\quad [x] \text{ representa a parte inteira de } x$$

$$\bullet \quad \overleftarrow{F}_X(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\} = \left\lceil \frac{\ln(1 - u)}{\ln(1 - p)} \right\rceil + 1, \quad u \in [0, 1]$$

141. Considere a seguinte sequência u_1, u_2, \dots, u_5 de NPA's Uniformes no intervalo $]0, 1[$. Determine a correspondente sequência x_1, x_2, \dots, x_5 de NPA's para uma v.a. X absolutamente contínua com função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 < x \leq 1 \\ 1/4, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

e função distribuição

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x/2, & 0 < x \leq 1 \\ 0.5, & 1 < x \leq 2 \\ x/4, & 2 < x \leq 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

i	1	2	3	4	5
u_i	0.38	0.10	0.60	0.50	0.88
x_i					

Nota adicional:

$$\bullet \quad \overleftarrow{F}_X(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\} = \begin{cases} 2u, & u < 0.5 \\ 2, & u = 0.5 \\ 4u, & u > 0.5 \end{cases}, \quad u \in [0, 1]$$

142. Considere a seguinte sequência u_1, u_2, \dots, u_5 de NPA's Uniformes no intervalo $]0, 1[$. Determine a correspondente sequência x_1, x_2, \dots, x_5 de NPA's para v.a. X com distribuição de Pareto de parâmetros $(2, 3)$ (valores arredondados com 3 casas decimais).

i	1	2	3	4	5
u_i	0.38	0.80	0.10	0.99	0.90
$x_i \approx$					

Notas adicionais:

$$\bullet \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1 - 8x^{-3}, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \overleftarrow{F}_X(u) = 2(1 - u)^{-1/3}, \quad u \in [0, 1]$$