Nome completo: ____________________

N.º aluno: __________ Curso: __________

Em cada pergunta apenas uma das respostas está correcta. Assinale a sua resposta com um **X** no quadrado correspondente. Se pretender anular uma resposta já assinalada, rasure por completo o respectivo quadrado. Uma resposta correcta tem a cotação indicada na prova. Uma resposta incorrecta desconta 0.2 valores e uma não resposta nada vale nem desconta. n.o. significa nenhuma das outras opções de resposta.

---

1. O número de clientes que chegam a uma loja de informática em t minutos, $N(t)$, é um Processo de Poisson de taxa $\beta = 0.05$/minuto. Diariamente, a loja de informática abre às 9:00 horas. Num determinado dia,

(1.7) (a) A probabilidade de chegar no máximo 1 utente à loja, entre as 10:00 e as 10:30 horas, é:

A $1.5e^{-1.5}$ B $1 - e^{-1.5}$ C $2.5e^{-1.5}$ D n.o.

(1.7) (b) Sabendo que o 10º cliente chegou à loja de informática às 12:00 e que não chegaram mais clientes até às 12:10, a probabilidade do 11º cliente chegar após as 12:30 é:

A e^{-1} B e^{-200} C e^{-400} D n.o.

(1.6) (c) O valor esperado do tempo, em minutos, que decorre entre as chegadas dos 10º e 12º clientes é:

A 10 B 40 C 20 D n.o.

(1.6) (d) Sabendo que, o número de clientes que chegam à loja de informática nas primeiras três horas, $N(180)$, tem distribuição de Poisson, a probabilidade aproximada de que cheguem mais de 12 clientes nestas primeiras três horas é:

A 0.8413 B 0.1587 C 0.3707 D 0.6293 E n.o.

2. Seja X uma v.a. com distribuição Normal sendo $E(X) = \delta - 1$ e $V(X) = \delta^2$, $(\delta \in \mathbb{R}^+)$.

(1.6) (a) Se $P(X \leq \delta) = 0.9772$, então o valor de δ é:

A 2 B 1 C 1/2 D 1/4 E n.o.

(1.7) (b) Admita que $\delta = 1$ e considere a v.a. $Z \sim N(0,1)$ independente da v.a. X. Determine a $P\left(X > Z + \sqrt{2}\right)$.

A 0.1587 B 0.7611 C 0.8413 D 0.9772 E n.o.

(1.7) (c) Considerando as v.a.'s independentes Z e W tais que $Z \sim N(0,1)$ e W com distribuição uniforme no intervalo $]0,2[$, a $P[(Z \leq 1.96) \cap (W \leq 1)]$ é (valores arredondados com 4 casas decimais):

A 0.4875 B 0.9750 C 0.4750 D 0.8315 E n.o.

(1.7) (d) Dado as v.a.'s $X_1, X_2, \ldots X_{35}$ independentes com $X_i \sim N\left(\delta - 1, \delta^2\right)$, $i = 1, \cdots 35$, então:

A $\bar{X} \sim N\left(\delta - 1, \dfrac{\delta^2}{\sqrt{35}}\right)$ B $\bar{X} \overset{a}{\sim} N\left(\delta - 1, \dfrac{\delta^2}{\sqrt{35}}\right)$

C $\dfrac{\bar{X} - \delta + 1}{\delta/\sqrt{35}} \sim N(0,1)$ D $\sqrt{35}\dfrac{\bar{X} - \delta + 1}{\delta} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ E n.o.

3. Seja X uma população cuja distribuição depende do conhecimento dos parâmetros, $\theta \in]-\infty, 0[$ e $\beta \in]0, +\infty[$.

Para uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, e $n \geq 2$, considere as seguintes estatísticas:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \quad \text{e} \quad M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

Tenha em conta a seguinte informação:

$$E(X) = \frac{\theta}{2}, \quad V(X) = \frac{\theta^2}{4(2\beta+1)}$$

(1.6) (a) Os estimadores dos momentos para os parâmetros θ e β, respectivamente, θ^* e β^* têm expressões:

A $\theta^* = 2\overline{X}$, $\beta^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{X}^2}{S^2} - 1\right)$ B $\theta^* = 2\overline{X}$, $\beta^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{X}^2}{M_2} - 1\right)$

C $\theta^* = \overline{X}$, $\beta^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{X}^2}{M_2} - 1\right)$ D $\theta^* = \overline{X}$, $\beta^* = M_2$ E n.o.

(b) Admita que $\beta = 1$. Considere a seguinte estatística e a informação sobre a mesma:

$$N_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n), \quad E(N_n) = \theta\frac{n}{n+1}, \quad V(N_n) = \theta^2\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

(1.7) i. Duas das seguintes estatísticas são centradas para o parâmetro θ. Seleccione-as marcando com um **X** no quadrado correspondente. **Em caso de resposta, terá a cotação da alínea se indicar as duas opções corretas, caso contrário terá uma penalização de 0.2 valores.**

A $2\overline{X}$ B $\frac{n+1}{n}\overline{X}$ C $\frac{n+1}{n}N_n$ D S^2 E $\overline{X}/2$

(1.7) ii. Considere $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ e $\tilde{\theta} = \frac{n+1}{n}N_n$ dois estimadores do parâmetro θ.

A $\hat{\theta}$ é o mais eficiente B $\tilde{\theta}$ é o mais eficiente C $\hat{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ são igualmente eficientes

(1.7) iii. Usando o estimador $\hat{\theta} = 2\overline{X}$, para uma amostra de dimensão $n = 1200$ e admitindo que $\theta = -1$, o valor aproximado de $P\left(\left|\hat{\theta} + 1\right| > 0.02\right)$ é:

A 0.8849 B 0.2302 C 0.9044 D 0.2739 E n.o.

Nome completo: ______________________________

N.º aluno: __________ Curso: __________

Em cada pergunta apenas uma das respostas está correcta. Assinale a sua resposta com um **X** no quadrado correspondente. Se pretender anular uma resposta já assinalada, rasure por completo o respectivo quadrado. Uma resposta correcta tem a cotação indicada na prova. Uma resposta incorrecta desconta 0.2 valores e uma não resposta nada vale nem desconta. n.o. significa nenhuma das outras opções de resposta.

---

1. O número de clientes que chegam a uma loja de informática em t minutos, $N(t)$, é um Processo de Poisson de taxa $\beta = 0.05$/minuto. Diariamente, a loja de informática abre às 9:00 horas. Num determinado dia,

(1.7) (a) A probabilidade de chegar no máximo 1 utente à loja, entre as 10:00 e as 10:30 horas, é:

A $2.5e^{-1.5}$ B $1.5e^{-1.5}$ C $1 - e^{-1.5}$ D n.o.

(1.7) (b) Sabendo que o 10º cliente chegou à loja de informática às 12:00 e que não chegaram mais clientes até às 12:10, a probabilidade do 11º cliente chegar após as 12:30 é:

A e^{-200} B e^{-1} C e^{-400} D n.o.

(1.6) (c) O valor esperado do tempo, em minutos, que decorre entre as chegadas dos 10º e 12º clientes é:

A 20 B 10 C 40 D n.o.

(1.6) (d) Sabendo que, o número de clientes que chegam à loja de informática nas primeiras três horas, $N(180)$, tem distribuição de Poisson, a probabilidade aproximada de que cheguem mais de 12 clientes nestas primeiras três horas é:

A 0.1587 B 0.3707 C 0.6293 D 0.8413 E n.o.

2. Seja X uma v.a. com distribuição Normal sendo $E(X) = \delta - 1$ e $V(X) = \delta^2$, $(\delta \in \mathbb{R}^+)$.

(1.6) (a) Se $P(X \leq \delta) = 0.9772$, então o valor de δ é:

A 2 B 1/2 C 1 D 1/4 E n.o.

(1.7) (b) Admita que $\delta = 1$ e considere a v.a. $Z \sim N(0,1)$ independente da v.a. X. Determine a $P\left(X > Z + \sqrt{2}\right)$.

A 0.7611 B 0.8413 C 0.1587 D 0.9772 E n.o.

(1.7) (c) Considerando as v.a.'s independentes Z e W tais que $Z \sim N(0,1)$ e W com distribuição uniforme no intervalo $]0,2[$, a $P\left[(Z \leq 1.96) \cap (W \leq 1)\right]$ é (valores arredondados com 4 casas decimais):

A 0.4750 B 0.9750 C 0.4875 D 0.8315 E n.o.

(1.7) (d) Dado as v.a.'s $X_1, X_2, \ldots X_{35}$ independentes com $X_i \sim N\left(\delta - 1, \delta^2\right)$, $i = 1, \cdots 35$, então:

A $\dfrac{\bar{X} - \delta + 1}{\delta/\sqrt{35}} \sim N(0,1)$ B $\bar{X} \overset{a}{\sim} N\left(\delta - 1, \dfrac{\delta^2}{\sqrt{35}}\right)$

C $\bar{X} \sim N\left(\delta - 1, \dfrac{\delta^2}{\sqrt{35}}\right)$ D $\sqrt{35}\dfrac{\bar{X} - \delta + 1}{\delta} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ E n.o.

3. Seja X uma população cuja distribuição depende do conhecimento dos parâmetros, $\theta \in]-\infty, 0[$ e $\beta \in]0, +\infty[$.

Para uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, e $n \geq 2$, considere as seguintes estatísticas:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \quad \text{e} \quad M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

Tenha em conta a seguinte informação:

$$E(X) = \frac{\theta}{2}, \quad V(X) = \frac{\theta^2}{4(2\beta+1)}$$

(1.6) (a) Os estimadores dos momentos para os parâmetros θ e β, respectivamente, θ^* e β^* têm expressões:

A $\theta^* = \overline{X}$, $\beta^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{X}^2}{M_2} - 1\right)$

B $\theta^* = 2\overline{X}$, $\beta^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{X}^2}{S^2} - 1\right)$

C $\theta^* = 2\overline{X}$, $\beta^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{X}^2}{M_2} - 1\right)$

D $\theta^* = \overline{X}$, $\beta^* = M_2$

E n.o.

(b) Admita que $\beta = 1$. Considere a seguinte estatística e a informação sobre a mesma:

$$N_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n), \quad E(N_n) = \theta\frac{n}{n+1}, \quad V(N_n) = \theta^2\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

(1.7) i. Duas das seguintes estatísticas são centradas para o parâmetro θ. Seleccione-as marcando com um **X** no quadrado correspondente. **Em caso de resposta, terá a cotação da alínea se indicar as duas opções corretas, caso contrário terá uma penalização de 0.2 valores.**

A $\overline{X}/2$ B $\frac{n+1}{n}N_n$ C $\frac{n+1}{n}\overline{X}$ D $2\overline{X}$ E S^2

(1.7) ii. Considere $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ e $\tilde{\theta} = \frac{n+1}{n}N_n$ dois estimadores do parâmetro θ.

A $\tilde{\theta}$ é o mais eficiente B $\hat{\theta}$ é o mais eficiente C $\hat{\theta}$ e $\tilde{\theta}$ são igualmente eficientes

(1.7) iii. Usando o estimador $\hat{\theta} = 2\overline{X}$, para uma amostra de dimensão $n = 1200$ e admitindo que $\theta = -1$, o valor aproximado de $P\left(\left|\hat{\theta} + 1\right| > 0.02\right)$ é:

A 0.2739 B 0.9044 C 0.8849 D 0.2302 E n.o.