Grelha de respostas certas

Versão A

Grupo	1		2				3				4			5
	a)	b)	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	
	B	D	C	A	C	A	A	C	A	B	A	D	B	D

Versão B

Grupo	1		2				3				4			5
	a)	b)	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	d)	a)	b)	c)	
	D	A	A	C	D	B	D	B	C	D	D	A	C	A

Resolução abreviada do 2º Teste

Versão A

1. Considere uma empresa de aluguer de autocarros para excursões de longo curso. Sabe-se, pela análise do seu comportamento, que o número de alugueres por semana de cada autocarro segue uma distribuição de Poisson de valor médio 3 (independentemente do autocarro e da semana).

(1.5) (a) A probabilidade de, em certa semana, um dos autocarros vir a ter um número de alugueres superior a 1 tem valor (arredondado com 4 casas decimais).

A 0.1219 B 0.8009 C 0.1494 D 0.9502 E n.o.

(1.5) (b) A probabilidade de, em 2.5 semanas, um autocarro vir a ter 6 alugueres tem valor (arredondado com 4 casas decimais).

A 0.8633 B 0.3782 C 0.0035 D 0.1367 E n.o.

(a) Seja X-n.º alugueres de um autocarro numa semana $\quad X \sim P(3)$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} e^{-3}\frac{3^k}{k!} = 0.8009$$

(b) Seja Y-n.º alugueres de um autocarro em 2.5 semanas $\quad Y \sim P(3 \times 2.5) \equiv P(7.5)$

$$P(Y = 6) = e^{-7.5}\frac{7.5^6}{6!} = 0.1367$$

---

2. A concentração diária de um certo poluente não deve exceder 320 μg/m^3, de acordo com as normas ambientais em vigor. Admita que a concentração diária deste poluente num dado local, X, tem distribuição normal com valor esperado 300 μg/m^3 e que as concentrações do poluente em dias distintos e neste local, são independentes. Sabe-se ainda que neste local as normas ambientais não são cumpridas em 2.5% dos dias.

(1.5) (a) Os valores de concentração diária deste poluente, neste local, vão sendo registados dia após dia. Quantos dias se espera ter de registar até ocorrer o primeiro dia em que as normas ambientais não são cumpridas?

A 24 B 42 C 40 D 10 E n.o.

(1.5) (b) O desvio padrão da concentração do poluente neste local tem valor (arredondado com 3 casas decimais):

A 10.204 B 12.723 C 11.345 D 14.221 E n.o.

Nas alíneas que se seguem, considere que o desvio padrão é igual a 12 μg/m^3.

(1.5) (c) Qual é a probabilidade de, neste local, a concentração diária do poluente estar entre 280 e 300 μg/m^3? (valor arredondado com 4 casas decimais)

A 0.5788 B 0.1223 C 0.4525 D 0.4463 E n.o.

(1.5) (d) Sejam X_1 e X_2 as concentrações do poluente em dois dias consecutivos. A $P(2X_1 > X_2 + 350)$ tem valor (arredondado com 4 casas decimais):

A 0.0314 B 0.4525 C 0.9667 D 0.0122 E n.o.

Seja X-concentração diária do poluente $X \sim N\left(300, \sigma^2\right)$

(a) Seja Y-n.º de dias a registar concentrações até ocorrer o primeiro dia em que as normas ambientais não são cumpridas
$Y \sim G(0.025)$ e $E(Y) = \dfrac{1}{0.025} = 40$

(b) $P(X > 320) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(\dfrac{X-300}{\sigma} > \dfrac{320-300}{\sigma}\right) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{20}{\sigma}\right) = 0.975 \Leftrightarrow \dfrac{20}{\sigma} = 1.96$
$\sigma = 10.20408163$

(c) $P(280 \leq X \leq 300) = P(X \leq 300) - P(X < 280)$
$= P\left(\dfrac{X-300}{12} \leq \dfrac{300-300}{12}\right) - P\left(\dfrac{X-300}{12} \leq \dfrac{280-300}{12}\right) = P(Z \leq 0) - P(Z < -1.67)$
$= 0.5 - [1 - P(Z < 1.67)] = 0.5 - 1 + 0.9525 = 0.4525$

(d) Seja $D = 2X_1 - X_2$
X_1, X_2 são v.a.'s i.i.d. com distribuição $N\left(300, 12^2\right)$

$E(D) = 2E(X_1) - E(X_2) = 300 \qquad V(D) = 2^2 V(X_1) + V(X_2) = 720$

$D \sim N(300, 720)$

$P(P(2X_1 > X_2 + 350)) = P(D > 350) = 1 - P\left(\dfrac{D-300}{\sqrt{720}} \leq \dfrac{350-300}{\sqrt{720}}\right) = 1 - P(Z \leq 1.86)$
$= 1 - 0.9686 = 0.0314$

---

3. Um artesão executa peças de barro, sendo o tempo de execução (em horas) uma variável aleatória X com função densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x/2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

independentemente da peça.

(1.5) (a) A expressão da função distribuição de X para um argumento $x \geq 0$ é:

A $1 - e^{-x/2}$ B $-\frac{1}{4}e^{-x/2}$ C $2e^{-x/2}$ D $-e^{-x/2}$ E n.o.

(1.5) (b) Qual a probabilidade de uma peça levar pelo menos 1h 30m a ser executada? (valor arredondado com 4 casas decimais)

A 0.3659 B 0.8991 C 0.4724 D 0.0234 E n.o.

(1.7) (c) Verificando-se que em certo momento uma peça já está a ser produzida há 30 minutos, qual a probabilidade de ser necessario esperar mais de 2h para concluir a peça? (valor arredondado com 4 casas decimais)

A 0.4724 B 0.7634 C 0.0234 D 0.1784 E n.o.

(1.7) (d) Num dia em que não havia qualquer peça em stock foi aceite uma encomenda de 100 peças, tendo o artesão assumido o compromisso de fornecer as peças no prazo máximo de 30 dias (o que corresponde a 240 horas de trabalho). Qual a probabilidade, aproximada, de ele cumprir o seu compromisso? (valor arredondado com 4 casas decimais)

A 0.8233 B 0.9772 C 0.7811 D 0.8122 E n.o.

A v.a. X tem distribuição Exponencial de parâmetros $(0, 2)$ $\qquad X \sim E(0, 2)$

(a) Para $x \geq 0$, $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-x/2}$

(b) $P(X \geq 1.5) = 1 - P(X \leq 1.5) = 1 - F_X(1.5) = e^{-1.5/2} = 0.4724$

(c) $P(X > 2 \,|X > 0.5) = P(X > 0.5 + 1.5 \,|X > 0.5) = P(X > 1.5) = 0.4724$

(d) Seja $T = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ - o tempo total de execução de 100 peças

X_i - tempo de execução da peça i, $i = 1, 2, \ldots, 100$

Pelo T.L.C., $T \overset{a}{\sim} N(200, 400) \equiv N\left(200, 20^2\right)$ porque:

- $X_i \sim E(0, 2)$, $i = 1, 2, \ldots, 100$ e são v.a.'s independentes $\quad E(X_i) = 2 \quad V(X_i) = 4$
- $E(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{100} E(X_i) = 200 \qquad V(T) = \sum_{i=1}^{100} V(X_i) = 400$
- $n = 100 \geq 30$

$$P(T \leq 240) = P\left(\frac{T - 200}{20} \leq \frac{240 - 200}{20}\right) \approx P(Z \leq 2) = 0.9772$$

---

4. Considere $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de dimensão $n \geq 2$, proveniente de uma população X com distribuição Uniforme no intervalo $[\theta, 0]$, com $\theta \in \mathbb{R}^-$.

(1.2) (a) O estimador dos momentos para o parâmetro θ é:

A $2\overline{X}$ B $2\sqrt{3M_2}$ C $\overline{X}$ D $\overline{X}/2$ E n.o.

(1.2) (b) Considere uma estatística T_n tal que $E(T_n) = 2\theta/n$. Admita que $\tilde{\theta} = \mathbf{a}\, T_n + \mathbf{b}$ é um estimador do parâmetro θ, sendo $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ contantes reais e $\mathbf{a} \neq 0$. $\tilde{\theta}$ é um estimador centrado para o parâmetro θ se, e só se:

A $\mathbf{a} = 1$ e $\mathbf{b} = \dfrac{2}{n}$ B $\mathbf{a} = \dfrac{2}{n}$ e $\mathbf{b} = 1$ C $\mathbf{a} = 1$ e $\mathbf{b} = \dfrac{n}{2}$ D $\mathbf{a} = \dfrac{n}{2}$ e $\mathbf{b} = 0$ E n.o.

(1.2) (c) Sejam $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ e $\ddot{\theta}$ dois estimadores centrados para o parâmetro θ. Sabendo que $V\left(\ddot{\theta}\right) = \dfrac{\theta^2}{n(n+2)}$, qual das afirmações é verdadeira?

A $\hat{\theta}$ é mais eficiente que $\ddot{\theta}$ B $\ddot{\theta}$ é mais eficiente que $\hat{\theta}$ C $\hat{\theta}$ é tão eficiente quanto $\ddot{\theta}$ D n.o.

$X \sim U(\theta, 0)\,, \ \theta \in \mathbb{R}^- \qquad E(X) = \dfrac{\theta}{2} \qquad V(X) = \dfrac{\theta^2}{12}$

(a) $E(X) = \overline{X} \Leftrightarrow \dfrac{\theta}{2} = \overline{X} \Leftrightarrow \theta = 2\overline{X}$ O estimador dos momentos é $\theta^* = 2\overline{X}$

(b) $E\left(\tilde{\theta}\right) = \theta \Leftrightarrow \mathbf{a}E(T_n) + \mathbf{b} = \theta \Leftrightarrow \dfrac{2\mathbf{a}}{n}\theta + \mathbf{b} = \theta \Leftrightarrow \dfrac{2\mathbf{a}}{n} = 1$ e $\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \dfrac{n}{2}$ e $\mathbf{b} = 0$

(c) $V\left(\hat{\theta}\right) = V\left(2\overline{X}\right) = 2^2 V\left(\overline{X}\right) = 4\dfrac{V(X)}{n} = \dfrac{\theta^2}{3n}$

$$\frac{V\left(\hat{\theta}\right)}{V\left(\ddot{\theta}\right)} = \frac{\dfrac{\theta^2}{3n}}{\dfrac{\theta^2}{n(n+2)}} = \frac{n+2}{3} > 1 \text{ porque } n \geq 2 \qquad \ddot{\theta} \text{ é mais eficiente que } \hat{\theta}$$

(1.0) 5. Seja X uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade de probabilidade $f(x) = 2\phi(x)\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, onde $\phi(x)$ e $\Phi(x)$ representam, respetivamente, a função densidade de probabilidade e a função de distribuição de uma variável aleatória $N(0,1)$. Se $P(X \leq a) = 0.985$, então a tem valor

A 2.36   B 2.17   C 2.78   D 2.43   E n.o.

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} 2\phi(x)\Phi(x)dx = \left[\Phi^2(x)\right]_{-\infty}^{a} = \Phi^2(a)$$

$$P(X \leq a) = 0.985 \Leftrightarrow \Phi^2(a) = 0.985 \Rightarrow \Phi(a) = 0.992471662 \Rightarrow a = \Phi^{-1}(0.9925) = 2.43$$

Versão B

1. Considere uma empresa de aluguer de autocarros para excursões de longo curso. Sabe-se, pela análise do seu comportamento, que o número de alugueres por semana de cada autocarro segue uma distribuição de Poisson de valor médio 3 (independentemente do autocarro e da semana).

(1.5) (a) A probabilidade de, em certa semana, um dos autocarros vir a ter um número de alugueres superior a 1 tem valor (arredondado com 4 casas decimais).

$\boxed{\text{A}}$ 0.1494 $\boxed{\text{B}}$ 0.9502 $\boxed{\text{C}}$ 0.1219 $\boxed{\text{D}}$ 0.8009 $\boxed{\text{E}}$ n.o.

(1.5) (b) A probabilidade de, em 2.5 semanas, um autocarro vir a ter 6 alugueres tem valor (arredondado com 4 casas decimais).

$\boxed{\text{A}}$ 0.1367 $\boxed{\text{B}}$ 0.0035 $\boxed{\text{C}}$ 0.3782 $\boxed{\text{D}}$ 0.8633 $\boxed{\text{E}}$ n.o.

(a) Seja X-n.º alugueres de um autocarro numa semana $\quad X \sim P(3)$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} e^{-3}\frac{3^k}{k!} = 0.8009$$

(b) Seja Y-n.º alugueres de um autocarro em 2.5 semanas $\quad Y \sim P(3 \times 2.5) \equiv P(7.5)$

$$P(Y = 6) = e^{-7.5}\frac{7.5^6}{6!} = 0.1367$$

---

2. A concentração diária de um certo poluente não deve exceder 320 μg/m^3, de acordo com as normas ambientais em vigor. Admita que a concentração diária deste poluente num dado local, X, tem distribuição normal com valor esperado 300 μg/m^3 e que as concentrações do poluente em dias distintos e neste local, são independentes. Sabe-se ainda que neste local as normas ambientais não são cumpridas em 2.5% dos dias.

(1.5) (a) Os valores de concentração diária deste poluente, neste local, vão sendo registados dia após dia. Quantos dias se espera ter de registar até ocorrer o primeiro dia em que as normas ambientais não são cumpridas?

$\boxed{\text{A}}$ 40 $\boxed{\text{B}}$ 10 $\boxed{\text{C}}$ 24 $\boxed{\text{D}}$ 42 $\boxed{\text{E}}$ n.o.

(1.5) (b) O desvio padrão da concentração do poluente neste local tem valor (arredondado com 3 casas decimais):

$\boxed{\text{A}}$ 11.345 $\boxed{\text{B}}$ 14.221 $\boxed{\text{C}}$ 10.204 $\boxed{\text{D}}$ 12.723 $\boxed{\text{E}}$ n.o.

Nas alíneas que se seguem, considere que o desvio padrão é igual a 12 μg/m^3.

(1.5) (c) Qual é a probabilidade de, neste local, a concentração diária do poluente estar entre 280 e 300 μg/m^3? (valor arredondado com 4 casas decimais)

$\boxed{\text{A}}$ 0.1223 $\boxed{\text{B}}$ 0.5788 $\boxed{\text{C}}$ 0.4463 $\boxed{\text{D}}$ 0.4525 $\boxed{\text{E}}$ n.o.

(1.5) (d) Sejam X_1 e X_2 as concentrações do poluente em dois dias consecutivos. A $P(2X_1 > X_2 + 350)$ tem valor (arredondado com 4 casas decimais):

$\boxed{\text{A}}$ 0.4525 $\boxed{\text{B}}$ 0.0314 $\boxed{\text{C}}$ 0.0122 $\boxed{\text{D}}$ 0.9667 $\boxed{\text{E}}$ n.o.

Seja X-concentração diária do poluente $\quad X \sim N\left(300, \sigma^2\right)$

(a) Seja Y-n.º de dias a registar concentrações até ocorrer o primeiro dia em que as normas ambientais não são cumpridas

$$Y \sim G(0.025) \quad \text{e} \quad E(Y) = \frac{1}{0.025} = 40$$

(b) $P(X > 320) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-300}{\sigma} > \frac{320-300}{\sigma}\right) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{20}{\sigma}\right) = 0.975 \Leftrightarrow \frac{20}{\sigma} = 1.96$

$\sigma = 10.20408163$

(c) $P(280 \leq X \leq 300) = P(X \leq 300) - P(X < 280)$

$= P\left(\frac{X-300}{12} \leq \frac{300-300}{12}\right) - P\left(\frac{X-300}{12} \leq \frac{280-300}{12}\right) = P(Z \leq 0) - P(Z < -1.67)$

$= 0.5 - [1 - P(Z < 1.67)] = 0.5 - 1 + 0.9525 = 0.4525$

(d) Seja $D = 2X_1 - X_2$
X_1, X_2 são v.a.'s i.i.d. com distribuição $N\left(300, 12^2\right)$

$E(D) = 2E(X_1) - E(X_2) = 300 \qquad V(D) = 2^2 V(X_1) + V(X_2) = 720$

$D \sim N(300, 720)$

$P(P(2X_1 > X_2 + 350)) = P(D > 350) = 1 - P\left(\frac{D-300}{\sqrt{720}} \le \frac{350-300}{\sqrt{720}}\right) = 1 - P(Z \le 1.86)$
$= 1 - 0.9686 = 0.0314$

---

3. Um artesão executa peças de barro, sendo o tempo de execução (em horas) uma variável aleatória X com função densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-x/2}, & x \ge 0 \end{cases}$$

independentemente da peça.

(1.5) (a) A expressão da função distribuição de X para um argumento $x \ge 0$ é:

A $-e^{-x/2}$ B $2e^{-x/2}$ C $-\frac{1}{4}e^{-x/2}$ D $1 - e^{-x/2}$ E n.o.

(1.5) (b) Qual a probabilidade de uma peça levar pelo menos 1h 30m a ser executada? (valor arredondado com 4 casas decimais)

A 0.0234 B 0.4724 C 0.8991 D 0.3659 E n.o.

(1.7) (c) Verificando-se que em certo momento uma peça já está a ser produzida há 30 minutos, qual a probabilidade de ser necessario esperar mais de 2h para concluir a peça? (valor arredondado com 4 casas decimais)

A 0.0234 B 0.1784 C 0.4724 D 0.7634 E n.o.

(1.7) (d) Num dia em que não havia qualquer peça em stock foi aceite uma encomenda de 100 peças, tendo o artesão assumido o compromisso de fornecer as peças no prazo máximo de 30 dias (o que corresponde a 240 horas de trabalho). Qual a probabilidade, aproximada, de ele cumprir o seu compromisso? (valor arredondado com 4 casas decimais)

A 0.8122 B 0.8233 C 0.7811 D 0.9772 E n.o.

A v.a. X tem distribuição Exponencial de parâmetros $(0, 2)$ $\qquad X \sim E(0, 2)$

(a) Para $x \ge 0$, $\quad F_X(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-x/2}$

(b) $P(X \ge 1.5) = 1 - P(X \le 1.5) = 1 - F_X(1.5) = e^{-1.5/2} = 0.4724$

(c) $P(X > 2 \,|X > 0.5) = P(X > 0.5 + 1.5 \,|X > 0.5) = P(X > 1.5) = 0.4724$

(d) Seja $T = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ - o tempo total de execução de 100 peças

X_i - tempo de execução da peça i, $i = 1, 2, \ldots, 100$

Pelo T.L.C., $T \overset{a}{\sim} N(200, 400) \equiv N\left(200, 20^2\right)$ porque:

- $X_i \sim E(0, 2)$, $i = 1, 2, \ldots, 100$ e são v.a.'s independentes $\qquad E(X_i) = 2 \qquad V(X_i) = 4$
- $E(T) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = 200 \qquad V(T) = \sum_{i=1}^{100} V(X_i) = 400$
- $n = 100 \ge 30$

$P(T \le 240) = P\left(\frac{T-200}{20} \le \frac{240-200}{20}\right) \approx P(Z \le 2) = 0.9772$

---

4. Considere $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de dimensão $n \ge 2$, proveniente de uma população X com distribuição Uniforme no intervalo $[\theta, 0]$, com $\theta \in \mathbb{R}^-$.

(1.2) (a) O estimador dos momentos para o parâmetro θ é:

A $\overline{X}/2$ B $\overline{X}$ C $2\sqrt{3M_2}$ D $2\overline{X}$ E n.o.

(1.2) (b) Considere uma estatística T_n tal que $E(T_n) = 2\theta/n$. Admita que $\tilde{\theta} = \mathbf{a}\,T_n + \mathbf{b}$ é um estimador do parâmetro θ, sendo $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ contantes reais e $\mathbf{a} \neq 0$. $\tilde{\theta}$ é um estimador centrado para o parâmetro θ se, e só se:

A $\mathbf{a} = \frac{n}{2}$ e $\mathbf{b} = 0$ B $\mathbf{a} = 1$ e $\mathbf{b} = \frac{n}{2}$ C $\mathbf{a} = \frac{2}{n}$ e $\mathbf{b} = 1$ D $\mathbf{a} = 1$ e $\mathbf{b} = \frac{2}{n}$ E n.o.

(1.2) (c) Sejam $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ e $\ddot{\theta}$ dois estimadores centrados para o parâmetro θ. Sabendo que $V\left(\ddot{\theta}\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$, qual das afirmações é verdadeira?

A $\hat{\theta}$ é mais eficiente que $\ddot{\theta}$ B $\hat{\theta}$ é tão eficiente quanto $\ddot{\theta}$ C $\ddot{\theta}$ é mais eficiente que $\hat{\theta}$ D n.o.

$X \sim U(\theta, 0)\,,\ \theta \in \mathbb{R}^-$ $\quad E(X) = \frac{\theta}{2}$ $\quad V(X) = \frac{\theta^2}{12}$

(a) $E(X) = \overline{X} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \overline{X} \Leftrightarrow \theta = 2\overline{X}$ O estimador dos momentos é $\theta^* = 2\overline{X}$

(b) $E\left(\tilde{\theta}\right) = \theta \Leftrightarrow \mathbf{a}E(T_n) + \mathbf{b} = \theta \Leftrightarrow \frac{2\mathbf{a}}{n}\theta + \mathbf{b} = \theta \Leftrightarrow \frac{2\mathbf{a}}{n} = 1$ e $\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \frac{n}{2}$ e $\mathbf{b} = 0$

(c) $V\left(\hat{\theta}\right) = V\left(2\overline{X}\right) = 2^2 V\left(\overline{X}\right) = 4\frac{V(X)}{n} = \frac{\theta^2}{3n}$

$$\frac{V\left(\hat{\theta}\right)}{V\left(\ddot{\theta}\right)} = \frac{\frac{\theta^2}{3n}}{\frac{\theta^2}{n(n+2)}} = \frac{n+2}{3} > 1 \text{ porque } n \geq 2$$ $\ddot{\theta}$ é mais eficiente que $\hat{\theta}$

(1.0) 5. Seja X uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade de probabilidade $f(x) = 2\phi(x)\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, onde $\phi(x)$ e $\Phi(x)$ representam, respetivamente, a função densidade de probabilidade e a função de distribuição de uma variável aleatória $N(0,1)$. Se $P(X \leq a) = 0.985$, então a tem valor

A 2.43 B 2.78 C 2.17 D 2.36 E n.o.

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} 2\phi(x)\Phi(x)dx = \left[\Phi^2(x)\right]_{-\infty}^{a} = \Phi^2(a)$$

$$P(X \leq a) = 0.985 \Leftrightarrow \Phi^2(a) = 0.985 \Rightarrow \Phi(a) = 0.992471662 \Rightarrow a = \Phi^{-1}(0.9925) = 2.43$$
