Nome completo: ______________________________

N.º aluno: __________ Curso: __________

Em cada pergunta apenas uma das respostas está correcta. Assinale a sua resposta com um **X** no quadrado correspondente. Se pretender anular uma resposta já assinalada, rasure por completo o respectivo quadrado. Uma resposta correcta tem a cotação indicada na prova. Uma resposta incorrecta desconta 0.2 valores e uma não resposta nada vale nem desconta. n.o. significa nenhuma das outras opções de resposta.

---

1. A Raquel e o Carlos são estudantes do primeiro ano da mesma licenciatura e na mesma escola. As probabilidades de se licenciarem (em três anos) são 0.2 e 0.25, respectivamente.
Considere que existe independência na obtenção da licenciatura (em três anos) destes estudantes.

(1.2) (a) A probabilidade de ambos se licenciarem tem valor?

A 0.45 B 0.1 C 0.4 D n.o.

(1.2) (b) A probabilidade de pelo menos um se licenciar tem valor?

A 0.4 B 0.05 C 0.45 D n.o.

(1.2) (c) A probabilidade de só se licenciar a Raquel tem valor?

A 0.95 B 0.2 C 0.15 D n.o.

2. Para um certo tipo de cancro a taxa de prevalência (proporção de doentes na população em geral) é p. Um teste diagnóstico para esta doença é tal que: a probabilidade do teste resultar positivo quando aplicado a um indivíduo com cancro (sensibilidade do teste) é 0.99; a probabilidade do teste resultar negativo quando o indivíduo não tem cancro (especificidade do teste) é 0.95. Considere o acontecimento: TP - teste resultar positivo.

(1.4) (a) Se $P(TP) = 0.0594$, a taxa de prevalência (proporção de doentes na população em geral), p, é:

A 0.01 B 0.05 C 0.95 D n.o.

(1.2) (b) Considere $p = 0.05$. Se o teste resultou positivo, a probabilidade de ter sido realizado a um indivíduo com cancro é:

A $\dfrac{0.0475}{1-P(TP)}$ B $\dfrac{0.05}{P(TP)}$ C $\dfrac{0.0495}{P(TP)}$ D n.o.

3. Seja (X, Y) um par aleatório discreto com a seguinte função de probabilidade conjunta com $a < 1$:

$X \setminus Y$	a	1	2
a	1/8	1/8	1/8
1		1/8	1/8
2	1/4	1/8	0

(1.2) (a) A $P(\max\{X, Y\} = 1)$ é:

A 1/4 B 3/8 C 1/2 D n.o.

(1.2) (b) V F As variáveis aleatórias X e Y não são independentes.

(1.4) (c) Se $a = 0$, a $cov(2X - 1, Y)$ é:

A $-1/4$ B $5/4$ C $-1/2$ D n.o

4. Numa unidade fabril são fabricadas pilhas (alcalinas AAA), estimando-se em 10% a percentagem de produção defeituosa. As pilhas são embaladas em caixas com 6 unidades.
O n.º de interrupções para manutenção do processo de fabrico tem distribuição de Poisson com uma taxa de 4 interrupções por mês (mês com 4 semanas).

(1.2) (a) Numa caixa seleccionada ao acaso, a probabilidade de 5 ou mais pilhas não terem defeito tem valor (arredondado com 6 casas decimais):

A 0.354294 B 0.885735 C 0.999945 D n.o.

(1.2) (b) Num conjunto de 30 caixas, 19 apresentam pilhas defeituosas. Numa amostra de *dez* caixas, seleccionadas ao acaso e *sem* reposição de entre as 30, o total de *caixas* com pilhas defeituosas tem distribuição:

A $H(30, 10, 19)$ B $B(60, 0.1)$ C $H(30, 19, 10)$ D n.o.

(1.4) (c) A probabilidade de, em *duas* semanas ser feita no máximo uma interrupção no processo de fabrico tem valor:

A $5\left(\frac{1}{2}\right)^4$ B $1 - 2\,e^{-4}$ C $3\,e^{-2}$ D n.o.

(1.4) (d) Em *seis* caixas seleccionadas aleatóriamente e com reposição, a probabilidade *aproximada* de se obter um total de 5 pilhas defeituosas tem valor (arredondado com 5 casas decimais):

A 0.13768 B 0.86232 C 0.00036 D n.o.

(1.2) (e) Deverão ser produzidas sucessivamente $m \in \mathbb{N}$ pilhas para que, com probabilidade 0.0729, saia uma defeituosa pela 1.ª vez. Então m deve satisfazer:

A $m \geq 5$ B $m = 4$ C $m = 3$ D n.o.

5. Considere a função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{h}(a - x), & x \in [a-h, a[\\ \frac{c}{h}(x - a), & x \in [a, a+h[\\ 0, & x \notin]a-h, a+h] \end{cases}, \quad h \in \mathbb{R}^+, \quad a, c \in \mathbb{R}$$

(1.2) (a) A função f é efectivamente função densidade de probabilidade se e só se :

A $c = a$ B $c = 1/h$ C $h = 18$ D n.o.

(b) Seja X uma v.a absolutamente contínua com função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} (a - x), & x \in [a-1, a[\\ (x - a), & x \in [a, a+1[\\ 0, & x \notin [a-1, a+1[\end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

(1.2) i. Sabendo que $E\left[(X-a)^2\right] = 1/2$, escolha a resposta correcta:

A $E(X) = a, \; V(X) = 1/2$ B $E(X) = 0, \; V(X) = 1$ C $E(X) = a, \; V(X) = 1/4$ D n.o.

(1.2) ii. Sendo F_X a função distribuição da v.a. X, indique a resposta correcta:

A $F_X(a) = 0$ B $F_X(a + 0.1) < 1/2$ C $P(|X - a| \geq 0.5) = 2F_X(a - 0.5)$ D n.o.

Nome completo: ______________________________

N.º aluno: __________ Curso: __________

Em cada pergunta apenas uma das respostas está correcta. Assinale a sua resposta com um **X** no quadrado correspondente. Se pretender anular uma resposta já assinalada, rasure por completo o respectivo quadrado. Uma resposta correcta tem a cotação indicada na prova. Uma resposta incorrecta desconta 0.2 valores e uma não resposta nada vale nem desconta. n.o. significa nenhuma das outras opções de resposta.

---

1. A Raquel e o Carlos são estudantes do primeiro ano da mesma licenciatura e na mesma escola. As probabilidades de se licenciarem (em três anos) são 0.2 e 0.25, respectivamente.
Considere que existe independência na obtenção da licenciatura (em três anos) destes estudantes.

(1.2) (a) A probabilidade de ambos se licenciarem tem valor?

[A] 0.1 [B] 0.4 [C] 0.45 [D] n.o.

(1.2) (b) A probabilidade de pelo menos um se licenciar tem valor?

[A] 0.45 [B] 0.4 [C] 0.05 [D] n.o.

(1.2) (c) A probabilidade de só se licenciar a Raquel tem valor?

[A] 0.15 [B] 0.2 [C] 0.95 [D] n.o.

2. Para um certo tipo de cancro a taxa de prevalência (proporção de doentes na população em geral) é p. Um teste diagnóstico para esta doença é tal que: a probabilidade do teste resultar positivo quando aplicado a um indivíduo com cancro (sensibilidade do teste) é 0.99; a probabilidade do teste resultar negativo quando o indivíduo não tem cancro (especificidade do teste) é 0.95. Considere o acontecimento: TP - teste resultar positivo.

(1.4) (a) Se $P(TP) = 0.0594$, a taxa de prevalência (proporção de doentes na população em geral), p, é:

[A] 0.05 [B] 0.95 [C] 0.01 [D] n.o.

(1.2) (b) Considere $p = 0.05$. Se o teste resultou positivo, a probabilidade de ter sido realizado a um indivíduo com cancro é:

[A] $\dfrac{0.05}{P(TP)}$ [B] $\dfrac{0.0495}{P(TP)}$ [C] $\dfrac{0.0475}{1-P(TP)}$ [D] n.o.

3. Seja (X, Y) um par aleatório discreto com a seguinte função de probabilidade conjunta com $a < 1$:

$X \setminus Y$	a	1	2
a	1/8	1/8	1/8
1		1/8	1/8
2	1/4	1/8	0

(1.2) (a) A $P(\max\{X, Y\} = 1)$ é:

[A] 1/2 [B] 1/4 [C] 3/8 [D] n.o.

(1.2) (b) [V] [F] As variáveis aleatórias X e Y são independentes.

(1.4) (c) Se $a = 0$, a $cov(2X - 1, Y)$ é:

[A] $-1/2$ [B] $5/4$ [C] $-1/4$ [D] n.o

4. Numa unidade fabril são fabricadas pilhas (alcalinas AAA), estimando-se em 10% a percentagem de produção defeituosa. As pilhas são embaladas em caixas com 6 unidades.
O n.º de interrupções para manutenção do processo de fabrico tem distribuição de Poisson com uma taxa de 4 interrupções por mês (mês com 4 semanas).

(1.2) (a) Numa caixa seleccionada ao acaso, a probabilidade de 5 ou mais pilhas não terem defeito tem valor (arredondado com 6 casas decimais):

A 0.999945 B 0.354294 C 0.885735 D n.o.

(1.2) (b) Num conjunto de 30 caixas, 19 apresentam pilhas defeituosas. Numa amostra de *dez* caixas, seleccionadas ao acaso e *sem* reposição de entre as 30, o total de *caixas* com pilhas defeituosas tem distribuição:

A $H(30, 19, 10)$ B $B(60, 0.1)$ C $H(30, 10, 19)$ D n.o.

(1.4) (c) A probabilidade de, em *duas* semanas ser feita no máximo uma interrupção no processo de fabrico tem valor:

A $1 - 2\,e^{-4}$ B $3\,e^{-2}$ C $5\left(\frac{1}{2}\right)^4$ D n.o.

(1.4) (d) Em *seis* caixas seleccionadas aleatóriamente e com reposição, a probabilidade *aproximada* de se obter um total de 5 pilhas defeituosas tem valor (arredondado com 5 casas decimais):

A 0.86232 B 0.13768 C 0.00036 D n.o.

(1.2) (e) Deverão ser produzidas sucessivamente $m \in \mathbb{N}$ pilhas para que, com probabilidade 0.0729, saia uma defeituosa pela 1ª vez. Então m deve satisfazer:

A $m = 3$ B $m \geq 5$ C $m = 4$ D n.o.

5. Considere a função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{h}(a-x), & x \in [a-h, a[\\ \frac{c}{h}(x-a), & x \in [a, a+h[\\ 0, & x \notin]a-h, a+h] \end{cases}, \quad h \in \mathbb{R}^+, \quad a, c \in \mathbb{R}$$

(1.2) (a) A função f é efectivamente função densidade de probabilidade se e só se :

A $c = 1/h$ B $h = 18$ C $c = a$ D n.o.

(b) Seja X uma v.a absolutamente contínua com função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} (a-x), & x \in [a-1, a[\\ (x-a), & x \in [a, a+1[\\ 0, & x \notin [a-1, a+1[\end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

(1.2) i. Sabendo que $E\left[(X-a)^2\right] = 1/2$, escolha a resposta correcta:

A $E(X) = 0,\ V(X) = 1$ B $E(X) = a,\ V(X) = 1/4$ C $E(X) = a,\ V(X) = 1/2$ D n.o.

(1.2) ii. Sendo F_X a função distribuição da v.a. X, indique a resposta correcta:

A $F_X(a + 0.1) < 1/2$ B $P(|X - a| \geq 0.5) = 2F_X(a - 0.5)$ C $F_X(a) = 0$ D n.o.