Probabilidades e Estatística D
Ano Lectivo 2023/2024
1º Teste - 24 de Abril de 2024

Grelha de respostas certas

Versão A

Grupo	1			2		3			4					5		
	a)	b)	c)	a)	b)	a)	b)	c)	a)	b)	c)	d)	e)	a)	b)	c)
	D	A	C	A	C	A	V	C	B	C	C	A	B	B	A	C

Versão B

Grupo	1			2		3			4					5		
	a)	b)	c)	a)	b)	a)	b)	c)	a)	b)	c)	d)	e)	a)	b)	c)
	D	B	A	C	B	B	F	A	C	A	B	B	C	A	C	B

Resolução abreviada do 1º Teste

1. Considere os acontecimentos R-Raquel licenciar-se e C-Carlos licenciar-se
   $P(R) = 0.2$, $P(C) = 0.25$, R e C são acontecimentos independentes
   (a) $P(R \cap C) = P(R)\,P(C) = 0.05$
   (b) $P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C) = 0.4$
   (c) $P\left(R \cap \overline{C}\right) = P(R) - P(R \cap C) = 0.15$

2. Considere o acontecimento D-doente sofrer da doença
   $P(D) = p$, $P(TP\,|D) = 0.99$, $P\left(\overline{TP}\,\middle|\overline{D}\right) = 0.95$
   (a) $P(TP) = P(TP\,|D)\,P(D) + P\left(TP\,\middle|\overline{D}\right)P\left(\overline{D}\right) = 0.99\,p + \left[1 - P\left(\overline{TP}\,\middle|\overline{D}\right)\right](1-p) = 0.05 + 0.94\,p$

   $P(TP) = 0.0594 \Leftrightarrow 0.05 + 0.94p = 0.0594 \Leftrightarrow p = 0.01$
   (b) $P(D\,|TP) = \dfrac{P(D \cap TP)}{P(TP)} = \dfrac{P(TP\,|D)\,P(D)}{P(TP)} = \dfrac{0.0495}{P(TP)}$

3.

$X \setminus Y$	a	1	2	
a	1/8	1/8	1/8	3/8
1	0	1/8	1/8	2/8
2	2/8	1/8	0	3/8
	3/8	3/8	2/8	1

sendo $a < 1$

   (a) $P(\max\{X, Y\} = 1) = P(X = a; Y = 1) + P(X = 1; Y = a) + P(X = 1; Y = 1) = 1/4$
   (b) As v.a.'s não são independentes porque para o serem deveria verificar-se

   $P(X = x; Y = y) = P(X = x)\,P(Y = y)\,, \quad \forall\ (x, y) \in \{a, 1, 2\} \times \{a, 1, 2\}$
   (c) $E(X) = \sum_{x=0}^{2} xP(X = x) = 1 \qquad E(Y) = \sum_{y=0}^{2} yP(Y = y) = 7/8$

   $E(XY) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xy\,P(X = x; Y = y) = 5/8 \quad cov(X, Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = -1/4$

   $cov(2X - 1, Y) = 2cov(X, Y) = -1/2$

4. (a) Seja X-n.º pilhas sem defeito numa caixa de 6 pilhas $\quad X \sim B(6, 0.9)$

   $P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{6} \binom{6}{k} 0.9^k 0.1^{6-k} = 0.885735$
   (b) Seja W-n.º caixas com pilhas defeituosas numa amostra de 10 (seleccionadas sem reposição)

   $W \sim H(30, 19, 10)$

(c) Seja Y-n.º interrupções em duas semanas $\qquad Y \sim P\left(\frac{4}{2}\right) \equiv P(2)$

$$P(Y \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} e^{-2} \frac{2^k}{k!} = 3\, e^{-2}$$

(d) Seja T-n.º pilhas defeituosas numa amostra de 36 pilhas (seleccionadas com reposição) $\qquad T \sim B(36, 0.1)$

$$T \overset{a}{\sim} P(36 \times 0.1) \equiv P(3.6) \qquad P(T = 5) \approx e^{-3.6} \frac{3.6^5}{5!} = 0.137680084$$

(e) Seja V-n.º pilhas a produzir até que saia uma defeituosa pela 1ª vez $\qquad V \sim G(0.1)$

$$P(V = m) = 0.0729 \Leftrightarrow 0.1\,(1 - 0.1)^{m-1} = 0.0729 \Leftrightarrow 0.9^{m-1} = 0.729 \Leftrightarrow m = 1 + \frac{\ln(0.729)}{\ln(0.9)} = 4$$

5. (a) A função f é função densidade de probabilidade se e só se:

- $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow c/h \geq 0$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{a-h}^{a} \frac{c}{h}(a - x)\,dx + \int_{a}^{a+h} \frac{c}{h}(x - a)\,dx = 1 \Leftrightarrow \frac{ch}{2} + \frac{ch}{2} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{h}$

(b) $E(X) = a$ porque f_X é uma função simétrica em torno de a.

$$V(X) = E\left[(X - a)^2\right] = 1/2$$

$$E\left[(X - a)^2\right] = \int_{a-1}^{a} -(x - a)^3\,dx + \int_{a}^{a+1} (x - a)^3\,dx = \left[-\frac{(x - a)^4}{4}\right]_{a-1}^{a} + \left[\frac{(x - a)^4}{4}\right]_{a}^{a+1} =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(c) $F_X(a) = 0$ é uma afirmação falsa porque $F_X(a) = 1/2$ devido a que f_X é função simétrica em torno de a.

$F_X(a + 0.1) \geq F_X(a) = 1/2 \qquad F_X(a + 0.1) < 1/2$ é uma afirmação falsa

$P(|X - a| \geq 0.5) = P(X \leq a - 0.5) + P(X \geq a + 0.5) = 2F_X(a - 0.5)$
é uma afirmação verdadeira porque f_X é função simétrica em torno de a

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a - 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{(x-a)^2}{2}, & a - 1 \leq x < a \\ \frac{1}{2} + \frac{(x-a)^2}{2}, & a \leq x < a + 1 \\ 1, & x \geq a + 1 \end{cases}$$