PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E

Resolução Abreviada do Teste 1

2020/21

Pergunta 1

Versão A

Sejam A, B e C acontecimentos de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tais que: os acontecimentos A e C são independentes, $A \cup B = \Omega$, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$ e $P(C) = 0.2$.
Indique a opção **VERDADEIRA**.

- $P(A \cup C) = 0.68$ **VERDADEIRA**
- $A \subseteq C$
- $P(A \cap B) = 0$
- $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0.3$
- Nenhuma das outras

Resolução:

- $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A)P(C) = 0.68$

Versão B Sejam A, B e C acontecimentos de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tais que: os acontecimentos A e C são independentes, $A \cup B = \Omega$, $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.8$ e $P(C) = 0.1$. Indique a opção **VERDADEIRA**.

- $P(A \cup C) = 0.73$ **VERDADEIRA**
- $A \subseteq C$
- $P(A \cap B) = 0$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$
- Nenhuma das outras

Resolução:

- $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A)P(C) = 0.73$

Versão C Sejam A, B e C acontecimentos de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tais que: os acontecimentos A e C são independentes, $A \cup B = \Omega$, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$ e $P(C) = 0.2$. Indique a opção **VERDADEIRA**.

- $P(A \cap B) = 0.3$ **VERDADEIRA**
- $A \subseteq C$
- $P(A \cup C) = 0.27$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0$
- Nenhuma das outras

Resolução:

- $P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.3$

Versão D Sejam A, B e C acontecimentos de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tais que: os acontecimentos A e C são independentes, $A \cup B = \Omega$, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$ e $P(C) = 0.2$. Indique a opção **VERDADEIRA**.

- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.7$ **VERDADEIRA**
- $A \subseteq C$
- $P(A \cap B) = 0$
- $P(A \cup C) = 0.8$
- Nenhuma das outras

Resolução:

- $P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.3$
  $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 0.7$

Pergunta 2

Versão A Um teste rápido para detecção de uma certa bactéria numa dado tipo de cultura, detecta-a incorrectamente, i.e., detecta-a quando ela não está presente, em 10% dos casos e não a detecta quando ela de facto existe, em 20% dos casos. Admita que há 1% daquele tipo de cultura contaminada com a referida bactéria.

Responda às seguintes questões:

Nota: Introduza o resultado arredondado a 4 casas decimais e se por exemplo a sua resposta for 0.647 digite 0.6470

a) A probabilidade de o teste detectar a bactéria é ?

b) Sabendo que, numa cultura do tipo referido e escolhida ao acaso, o teste não detectou a bactéria, a probabilidade de efectivamente ela existir é ?

Resolução: Considere os acontecimentos D - teste detectar a bactéria E - a bactéria existe
$P(E) = 0.01 \quad P\left(D \left| \overline{E}\right.\right) = 0.1 \quad P\left(\overline{D} \left| E\right.\right) = 0.2$

a) $P(D) = P(D|E)\,P(E) + P\left(D\left|\overline{E}\right.\right)P\left(\overline{E}\right) = [1 - P(D|E)]\,P(E) + P\left(D\left|\overline{E}\right.\right)P\left(\overline{E}\right) = 0.1070$

b) $P\left(E\left|\overline{D}\right.\right) = \dfrac{P\left(\overline{D}\cap E\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{P\left(\overline{D}\left|E\right.\right)P(E)}{1 - P(D)} = 0.0022$

Versão B Um teste rápido para detecção de uma certa bactéria numa dado tipo de cultura, detecta-a incorrectamente, i.e., detecta-a quando ela não está presente, em 10% dos casos e não a detecta quando ela de facto existe, em 20% dos casos. Admita que há 1% daquele tipo de cultura contaminada com a referida bactéria.

Responda às seguintes questões:

Nota: Introduza o resultado arredondado a 4 casas decimais e se por exemplo a sua resposta for 0.647 digite 0.6470

a) A probabilidade de o teste <u>não</u> detectar a bactéria é ?

b) Sabendo que, numa cultura do tipo referido e escolhida ao acaso, o teste detectou a bactéria, a probabilidade de efectivamente ela existir é ?

Resolução: Considere os acontecimentos D - teste detectar a bactéria E - a bactéria existe
$P(E) = 0.01 \quad P\left(D \left| \overline{E}\right.\right) = 0.1 \quad P\left(\overline{D} \left| E\right.\right) = 0.2$

a) $P(D) = P(D|E)\,P(E) + P\left(D\left|\overline{E}\right.\right)P\left(\overline{E}\right) = [1 - P(D|E)]\,P(E) + P\left(D\left|\overline{E}\right.\right)P\left(\overline{E}\right) = 0.1070$
$P\left(\overline{D}\right) = 1 - P(D) = 0.8930$

b) $P(E|D) = \dfrac{P(D\cap E)}{P(D)} = \dfrac{P(D|E)\,P(E)}{P(D)} = 0.0748$

Versão C Numa faculdade há três grandes anfiteatros A, B e C que têm como saída comum o átrio. Sabe-se que C comporta o dobro dos alunos de B e este o triplo de A. Numa dada hora lectiva os três anfiteatros estão cheios estando presentes alunos apenas de Engenharia Informática e de Engenharia Física, sendo a percentagem de alunos de Engenharia Informática em A, B e C, 60%, 70% e 80% respectivamente. No final dessa hora lectiva, o átrio não tem nenhum aluno e saem todos os alunos dos três anfiteatros para esse átrio.

Responda às seguintes questões:

Nota: Introduza o resultado arredondado a 2 casas decimais.

Escolhido ao acaso um aluno, a probabilidade de:

a) Ser de Engenharia Física é ?

b) Sendo de Engenharia Física, ter saído do anfiteatro A é ?

Resolução: Considere os acontecimentos
A - aluno saído do anfiteatro A B - aluno saído do anfiteatro B C - aluno saído do anfiteatro C
F - aluno de Engenharia Fisica I- alunos de Engenharia Informática

$P(B) = 3P(A) \quad P(C) = 2P(B) = 6P(A)$
$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \Leftrightarrow 10P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A) = 0.1$

$P(A) = 0.1 \quad P(B) = 0.3 \quad P(C) = 0.6$
$P(I|A) = 0.6 \quad P(I|B) = 0.7 \quad P(I|C) = 0.8$
$P(F|A) = 0.4 \quad P(F|B) = 0.3 \quad P(F|C) = 0.2$

a) $P(F) = P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) + P(F|C)P(C) = 0.25$

b) $P(A|F) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = 0.16$

Versão D Numa faculdade há três grandes anfiteatros A, B e C que têm como saída comum o átrio. Sabe-se que C comporta o dobro dos alunos de B e este o triplo de A. Numa dada hora lectiva os três anfiteatros estão cheios estando presentes alunos apenas de Engenharia Informática e de Engenharia Física, sendo a percentagem de alunos de Engenharia Informática em A, B e C, 60%, 70% e 80% respectivamente. No final dessa hora lectiva, o átrio não tem nenhum aluno e saem todos os alunos dos três anfiteatros para esse átrio.

Responda às seguintes questões:

Nota: Introduza o resultado arredondado a 2 casas decimais.

Escolhido ao acaso um aluno, a probabilidade de:

a) Ser de Engenharia Física é ?

b) Sendo de Engenharia Física, ter saído do anfiteatro A é ?

Resolução: Considere os acontecimentos
A - aluno saído do anfiteatro A B - aluno saído do anfiteatro B C - aluno saído do anfiteatro C
F - aluno de Engenharia Fisica I- alunos de Engenharia Informática

$P(B) = 3P(A) \quad P(C) = 2P(B) = 6P(A)$
$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \Leftrightarrow 10P(A) = 1 \Leftrightarrow P(A) = 0.1$

$P(A) = 0.1 \quad P(B) = 0.3 \quad P(C) = 0.6$
$P(I|A) = 0.6 \quad P(I|B) = 0.7 \quad P(I|C) = 0.8$

a) $P(I) = P(I|A)P(A) + P(I|B)P(B) + P(I|C)P(C) = 0.75$

b) $P(A|I) = \dfrac{P(A \cap I)}{P(I)} = \dfrac{P(I|A)P(A)}{P(I)} = 0.08$

Pergunta 3

Versão A Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$X\begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{cases}$$

Indique a opção **VERDADEIRA**.

- $E\left(X^2+1\right)=\frac{9}{5}$ **VERDADEIRA**
- $P(X>-1)=1$
- $Var\left(X+\frac{1}{5}\right)=1$
- $P\left(X>0\,|X>-1\right)=\frac{2}{5}$
- Nenhuma das outras

Resolução:

- $E\left(X^2\right)=\sum_{x=-1}^{1}x^2P\left(X=x\right)=\frac{4}{5}$ $\quad E\left(X^2+1\right)=E\left(X^2\right)+1=\frac{9}{5}$
- $Var\left(X+\frac{1}{5}\right)=Var\left(X\right)=E\left(X^2\right)=\frac{4}{5}$ porque $E\left(X\right)=\sum_{x=-1}^{1}xP\left(X=x\right)=0$
- $P\left(X>-1\right)=P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)=\frac{3}{5}$
- $P\left(X>0\,|X>-1\right)=\frac{P\left(X>0\right)}{P\left(X>-1\right)}=\frac{2/5}{3/5}=\frac{2}{3}$

Versão B Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$X \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{cases}$$

Indique a opção **VERDADEIRA**.

- $E\left(X^2+1\right) = \dfrac{4}{5}$
- $P(X > -1) = 1$
- $Var\left(X + \dfrac{1}{5}\right) = 1$
- $P\left(X > 0\,|X > -1\right) = \dfrac{2}{3}$ **VERDADEIRA**
- Nenhuma das outras

Resolução:

- $E\left(X^2\right) = \sum_{x=-1}^{1} x^2 P\left(X = x\right) = \dfrac{4}{5}$ $\quad E\left(X^2+1\right) = E\left(X^2\right) + 1 = \dfrac{9}{5}$
- $Var\left(X + \dfrac{1}{5}\right) = Var\left(X\right) = E\left(X^2\right) = \dfrac{4}{5}$ porque $E\left(X\right) = \sum_{x=-1}^{1} xP\left(X = x\right) = 0$
- $P\left(X > -1\right) = P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) = \dfrac{3}{5}$
- $P\left(X > 0\,|X > -1\right) = \dfrac{P\left(X > 0\right)}{P\left(X > -1\right)} = \dfrac{2/5}{3/5} = \dfrac{2}{3}$

Versão C Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$X \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{cases}$$

Indique a opção **VERDADEIRA**.

- $E\left(X^2+1\right) = 1$
- $P(X > -1) = 1$
- $Var\left(X + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$ **VERDADEIRA**
- $P\left(X > 0\,|X > -1\right) = \dfrac{2}{3}$
- Nenhuma das outras

Resolução:

- $E\left(X^2\right) = \sum_{x=-1}^{1} x^2 P\left(X = x\right) = \dfrac{2}{3}$ $\quad E\left(X^2+1\right) = E\left(X^2\right) + 1 = \dfrac{5}{3}$
- $Var\left(X + \dfrac{1}{3}\right) = Var\left(X\right) = E\left(X^2\right) = \dfrac{2}{3}$ porque $E\left(X\right) = \sum_{x=-1}^{1} xP\left(X = x\right) = 0$
- $P\left(X > -1\right) = P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) = \dfrac{2}{3}$
- $P\left(X > 0\,|X > -1\right) = \dfrac{P\left(X > 0\right)}{P\left(X > -1\right)} = \dfrac{1/3}{2/3} = \dfrac{1}{2}$

Versão D Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$X\left\{\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Indique a opção **FALSA**.

- $E\left(\dfrac{3}{2}X^2\right) = 1$
- $P(X > -1) = \dfrac{2}{3}$
- $Var\,(2X+1) = \dfrac{8}{3}$
- $P\,(X > 0\,|X > -1\,) = \dfrac{1}{2}$
- Nenhuma das outras **FALSA**

Resolução:

- $E\left(X^2\right) = \sum_{x=-1}^{1} x^2 P\,(X = x) = \dfrac{2}{3}$ $\quad E\left(\dfrac{3}{2}X^2\right) = \dfrac{3}{2}E\left(X^2\right) = 1$
- $Var\,(2X+1) = 2^2 Var\,(X) = 2^2 E\left(X^2\right) = \dfrac{8}{3}$ porque $E\,(X) = \sum_{x=-1}^{1} xP\,(X = x) = 0$
- $P\,(X > -1) = P\,(X = 0) + P\,(X = 1) = \dfrac{2}{3}$
- $P\,(X > 0\,|X > -1\,) = \dfrac{P\,(X > 0)}{P\,(X > -1)} = \dfrac{1/3}{2/3} = \dfrac{1}{2}$

Versão E Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$X\left\{\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Indique a opção **VERDADEIRA**.

- $E\left(X^2+1\right) = \dfrac{5}{4}$
- $1 - P(X > -1) = 0$
- $Var\,(2X) = 1$
- $P\,(X > 0\,|X > -1\,) = \dfrac{1}{3}$ **VERDADEIRA**
- Nenhuma das outras

Resolução:

- $E\left(X^2\right) = \sum_{x=-1}^{1} x^2 P\,(X = x) = \dfrac{1}{2}$ $\quad E\left(X^2+1\right) = E\left(X^2\right) + 1 = \dfrac{3}{2}$
- $Var\,(2X) = 2^2 Var\,(X) = 2^2 E\left(X^2\right) = 2$ porque $E\,(X) = \sum_{x=-1}^{1} xP\,(X = x) = 0$
- $P\,(X > -1) = P\,(X = 0) + P\,(X = 1) = \dfrac{3}{4}$ $\quad 1 - P\,(X > -1) = \dfrac{1}{4}$
- $P\,(X > 0\,|X > -1\,) = \dfrac{P\,(X > 0)}{P\,(X > -1)} = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}$

Versão F Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$X \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Indique a opção **FALSA**.

- $E\left(X^2\right) = \dfrac{1}{2}$
- $1 - P(X > -1) = 0$ **FALSA**
- $Var\,(X) = \dfrac{1}{2}$
- $P\,(X < 1\,|X < 0\,) = 1$
- Nenhuma das outras

Resolução:

- $E\left(X^2\right) = \displaystyle\sum_{x=-1}^{1} x^2 P\,(X = x) = \frac{1}{2}$
- $Var\,(X) = E\left(X^2\right) = \dfrac{1}{2}$ porque $E\,(X) = \displaystyle\sum_{x=-1}^{1} x P\,(X = x) = 0$
- $P\,(X > -1) = P\,(X = 0) + P\,(X = 1) = \dfrac{3}{4}$ $1 - P\,(X > -1) = \dfrac{1}{4}$
- $P\,(X < 1\,|X < 0\,) = \dfrac{P\,(X < 0)}{P\,(X < 0)} = 1$

Pergunta 4 Alínea a)

Versão A Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Num certo dia foram atendidos 20 clientes e 5 receberam o prémio.
Tendo sido seleccionados, ao acaso e sem reposição, 7 clientes atendidos neste dia, qual é a probabilidade de mais de 4 deles terem feito uma despesa superior a 50 euros?
(valor arredondado com 4 casas decimais)

Resolução: Seja X - n.º que fazem despesa superior a 50 € na amostra de 7 clientes.

$$X \sim H(20, 5, 7) \qquad P(X > 4) = P(X = 5) = \frac{\binom{5}{5}\binom{15}{2}}{\binom{20}{7}} \approx 0.0014$$

Versão B Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Num certo dia foram atendidos 15 clientes e 8 receberam o prémio.
Tendo sido seleccionados, ao acaso e sem reposição, 10 clientes atendidos neste dia, qual é a probabilidade de mais de 7 deles terem feito uma despesa superior a 50 euros?
(valor arredondado com 4 casas decimais)

Resolução: Seja X - n.º que fazem despesa superior a 50 € na amostra de 10 clientes.

$$X \sim H(15, 8, 10) \qquad P(X > 7) = P(X = 8) = \frac{\binom{8}{8}\binom{7}{2}}{\binom{15}{10}} \approx 0.0070$$

Versão C Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Num certo dia foram atendidos 20 clientes e 6 receberam o prémio.
Tendo sido seleccionados, ao acaso e sem reposição, 9 clientes atendidos neste dia, qual é a probabilidade de mais de 5 deles terem feito uma despesa superior a 50 euros?
(valor arredondado com 4 casas decimais)

Resolução: Seja X - n.º que fazem despesa superior a 50 € na amostra de 9 clientes.

$$X \sim H(20, 6, 9) \qquad P(X > 5) = P(X = 6) = \frac{\binom{6}{6}\binom{14}{3}}{\binom{20}{9}} \approx 0.0022$$

Versão D Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Num certo dia foram atendidos 15 clientes e 7 receberam o prémio.
Tendo sido seleccionados, ao acaso e sem reposição, 10 clientes atendidos neste dia, qual é a probabilidade de mais de 6 deles terem feito uma despesa superior a 50 euros?
(valor arredondado com 4 casas decimais)

Resolução: Seja X - n.º que fazem despesa superior a 50 € na amostra de 10 clientes.

$$X \sim H(15, 7, 10) \qquad P(X > 6) = P(X = 7) = \frac{\binom{7}{7}\binom{8}{3}}{\binom{15}{10}} \approx 0.0186$$

Versão E Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Num certo dia foram atendidos 18 clientes e 10 receberam o prémio.
Tendo sido seleccionados, ao acaso e sem reposição, 12 clientes atendidos neste dia, qual é a probabilidade de mais de 9 deles terem feito uma despesa superior a 50 euros?
(valor arredondado com 4 casas decimais)

Resolução: Seja X - n.º que fazem despesa superior a 50 € na amostra de 12 clientes.

$X \sim H\left(18, 10, 12\right)$ $\qquad P\left(X > 9\right) = P\left(X = 10\right) = \frac{\binom{10}{10}\binom{8}{2}}{\binom{18}{12}} \approx 0.0015$

Pergunta 4 Alínea b)

Versão A Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.1$

Numa amostra casual de 20 clientes, determine a probabilidade de menos de 18 não terem recebido o prémio (valor arredondado com 4 casas decimais).

Resolução: Seja X - n.º que não fazem despesa superior a 50 € na amostra de 20 clientes.

$$X \sim B(20, 0.9) \qquad P(X < 18) = 1 - P(X \geq 18) = 1 - \sum_{k=18}^{20} \binom{20}{k} 0.9^k 0.1^{20-k} \approx 0.3231$$

Versão B Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.05$

Numa amostra casual de 15 clientes, determine a probabilidade de menos de 13 não terem recebido o prémio (valor arredondado com 4 casas decimais).

Resolução: Seja X - n.º que não fazem despesa superior a 50 € na amostra de 15 clientes.

$$X \sim B(15, 0.95) \qquad P(X < 13) = 1 - P(X \geq 13) = 1 - \sum_{k=13}^{15} \binom{15}{k} 0.95^k 0.05^{15-k} \approx 0.0362$$

Versão C Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.15$

Numa amostra casual de 20 clientes, determine a probabilidade de menos de 18 não terem recebido o prémio (valor arredondado com 4 casas decimais).

Resolução: Seja X - n.º que não fazem despesa superior a 50 € na amostra de 20 clientes.

$$X \sim B(20, 0.85) \qquad P(X < 18) = 1 - P(X \geq 18) = 1 - \sum_{k=18}^{20} \binom{20}{k} 0.85^k 0.55^{20-k} \approx 0.5951$$

Versão D Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.9$

Numa amostra casual de 15 clientes, determine a probabilidade de menos de 3 não terem recebido o prémio (valor arredondado com 4 casas decimais).

Resolução: Seja X - n.º que não fazem despesa superior a 50 € na amostra de 15 clientes.

$$X \sim B(15, 0.1) \qquad P(X < 3) = P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{15}{k} 0.1^k 0.9^{15-k} \approx 0.8159$$

Versão E Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.85$

Numa amostra casual de 12 clientes, determine a probabilidade de menos de 3 não terem recebido o prémio (valor arredondado com 4 casas decimais).

Resolução: Seja X - n.º que não fazem despesa superior a 50 € na amostra de 12 clientes.

$X \sim B\,(12, 0.15)$ $\qquad P\,(X < 3) = P\,(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{12}{k} 0.15^k 0.85^{12-k} \approx 0.7358$

Pergunta 4 Alínea c)

Versão A Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.1$

Numa amostra aleatória de 40 clientes atendidos, o valor aproximado da probabilidade de 5 terem recebido o prémio é (valor arredondado com 4 casas decimais):

Resolução: X - n.º que recebem o prémio na amostra de 40 clientes.

$X \sim B(40, 0.1) \qquad n = 40 \geq 30 \quad np = 40 \times 0.1 = 4 \leq 5 \qquad X \overset{a}{\sim} P(40 \times 0.1) \equiv P(4)$

$P(X = 5) \approx e^{-4}\dfrac{4^5}{5!} \approx 0.1563$

Versão B Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.05$

Numa amostra aleatória de 60 clientes atendidos, o valor aproximado da probabilidade de 4 terem recebido o prémio é (valor arredondado com 4 casas decimais):

Resolução: X - n.º que recebem o prémio na amostra de 60 clientes.

$X \sim B(60, 0.05) \qquad n = 60 \geq 30 \quad np = 60 \times 0.05 = 3 \leq 5 \qquad X \overset{a}{\sim} P(60 \times 0.05) \equiv P(3)$

$P(X = 4) \approx e^{-3}\dfrac{3^4}{4!} \approx 0.1680$

Versão C Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.15$

Numa amostra aleatória de 30 clientes atendidos, o valor aproximado da probabilidade de 2 terem recebido o prémio é (valor arredondado com 4 casas decimais):

Resolução: X - n.º que recebem o prémio na amostra de 30 clientes.

$X \sim B(30, 0.15) \qquad n = 30 \geq 30 \quad np = 30 \times 0.15 = 4.5 \leq 5 \qquad X \overset{a}{\sim} P(30 \times 0.15) \equiv P(4.5)$

$P(X = 2) \approx e^{-4.5}\dfrac{4.5^2}{2!} \approx 0.1125$

Versão D Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.04$

Numa amostra aleatória de 50 clientes atendidos, o valor aproximado da probabilidade de 3 terem recebido o prémio é (valor arredondado com 4 casas decimais):

Resolução: X - n.º que recebem o prémio na amostra de 50 clientes.

$X \sim B(50, 0.04)$ $\quad n = 50 \geq 30 \quad np = 50 \times 0.04 = 2 \leq 5 \quad X \overset{a}{\sim} P(50 \times 0.04) \equiv P(2)$

$P(X = 3) \approx e^{-2} \frac{2^3}{3!} \approx 0.1804$

Versão E Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.02$

Numa amostra aleatória de 80 clientes atendidos, o valor aproximado da probabilidade de 2 terem recebido o prémio é (valor arredondado com 4 casas decimais):

Resolução: X - n.º que recebem o prémio na amostra de 80 clientes.

$X \sim B(80, 0.02)$ $\quad n = 80 \geq 30 \quad np = 80 \times 0.02 = 1.6 \leq 5 \quad X \overset{a}{\sim} P(80 \times 0.02) \equiv P(1.6)$

$P(X = 2) \approx e^{-1.6} \frac{1.6^2}{2!} \approx 0.2584$

Pergunta 4 Alínea d)

Versão A Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.1$

Sabendo que foram atendidos mais de 35 clientes até ser atribuído um prémio pela primeira vez, qual é a probabilidade de terem de ser atendidos mais de 38 para tal acontecer?

Resolução: X - n.º de clientes atendidos até ser atribuído um prémio pela primeira vez. $X \sim G\,(0.1)$

$$P\,(X > 38\,|X > 35\,) = P\,(X > 3) = 1 - P\,(X \leq 3) = 1 - F_X\,(3) = 1 - \left[1 - (1 - 0.1)^3\right] = 0.729$$

Versão B Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.2$

Sabendo que foram atendidos mais de 20 clientes até ser atribuído um prémio pela primeira vez, qual é a probabilidade de terem de ser atendidos mais de 24 para tal acontecer?

Resolução: X - n.º de clientes atendidos até ser atribuído um prémio pela primeira vez. $X \sim G\,(0.2)$

$$P\,(X > 24\,|X > 20\,) = P\,(X > 4) = 1 - P\,(X \leq 4) = 1 - F_X\,(4) = 1 - \left[1 - (1 - 0.2)^4\right] = 0.4096$$

Versão C Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.7$

Sabendo que foram atendidos mais de 10 clientes até ser atribuído um prémio pela primeira vez, qual é a probabilidade de terem de ser atendidos mais de 14 para tal acontecer?

Resolução: X - n.º de clientes atendidos até ser atribuído um prémio pela primeira vez. $X \sim G\,(0.7)$

$$P\,(X > 14\,|X > 10\,) = P\,(X > 4) = 1 - P\,(X \leq 4) = 1 - F_X\,(4) = 1 - \left[1 - (1 - 0.7)^4\right] = 0.0081$$

Versão D Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.8$

Sabendo que foram atendidos mais de 8 clientes até ser atribuído um prémio pela primeira vez, qual é a probabilidade de terem de ser atendidos mais de 11 para tal acontecer?

Resolução: X - n.º de clientes atendidos até ser atribuído um prémio pela primeira vez. $X \sim G\,(0.8)$

$$P\,(X > 11\,|X > 8\,) = P\,(X > 3) = 1 - P\,(X \leq 3) = 1 - F_X\,(3) = 1 - \left[1 - (1 - 0.8)^3\right] = 0.008$$

Versão E Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.15$

Sabendo que foram atendidos mais de 24 clientes até ser atribuído um prémio pela primeira vez, qual é a probabilidade de terem de ser atendidos mais de 26 para tal acontecer?

Resolução: X - n.º de clientes atendidos até ser atribuído um prémio pela primeira vez. $X \sim G\,(0.15)$

$P\,(X > 26\,|X > 24\,) = P\,(X > 2) = 1 - P\,(X \leq 2) = 1 - F_X\,(2) = 1 - \left[1 - (1 - 0.15)^2\right] = 0.7225$

Pergunta 4 Alínea e)

Versão A Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.1$

Numa certa semana, nos dois primeiros dias são seleccionadas amostras diárias de 5 clientes e, nos restantes dias são seleccionadas amostras diárias de 20 clientes.

Indique a distribuição do total de prémios atribuídos nesta semana.

Resolução: Considere as v.a.'s X_i - n.º prémios atribuídos no dia $i, i = 1, 2, \ldots 5$.
$X_1 \sim B(5, 0.1)$, $X_2 \sim B(5, 0.1)$, $X_3 \sim B(20, 0.1)$, $X_4 \sim B(20, 0.1)$, $X_5 \sim B(20, 0.1)$ e são independentes

Sendo T - total de prémios atribuídos nesta semana

$T = X_1 + X_2 + \ldots + X_5 \sim B(5 + 5 + 20 + 20 + 20, 0.1) \equiv B(70, 0.1)$

Versão B Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.05$

Numa certa semana, nos dois primeiros dias são seleccionadas amostras diárias de 15 clientes e, nos restantes dias são seleccionadas amostras diárias de 10 clientes.

Indique a distribuição do total de prémios atribuídos nesta semana.

Resolução: Considere as v.a.'s X_i - n.º prémios atribuídos no dia $i, i = 1, 2, \ldots 5$.
$X_1 \sim B(15, 0.05)$, $X_2 \sim B(15, 0.05)$, $X_3 \sim B(10, 0.05)$, $X_4 \sim B(10, 0.05)$, $X_5 \sim B(10, 0.05)$ e são independentes

Sendo T - total de prémios atribuídos nesta semana

$T = X_1 + X_2 + \ldots + X_5 \sim B(15 + 15 + 10 + 10 + 10, 0.05) \equiv B(60, 0.05)$

Versão C Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.15$

Numa certa semana, nos três primeiros dias são seleccionadas amostras diárias de 5 clientes e, nos restantes dias são seleccionadas amostras diárias de 10 clientes.

Indique a distribuição do total de prémios atribuídos nesta semana.

Resolução: Considere as v.a.'s X_i - n.º prémios atribuídos no dia $i, i = 1, 2, \ldots 5$.
$X_1 \sim B(5, 0.15)$, $X_2 \sim B(5, 0.15)$, $X_3 \sim B(5, 0.15)$, $X_4 \sim B(10, 0.15)$, $X_5 \sim B(10, 0.15)$ e são independentes

Sendo T - total de prémios atribuídos nesta semana

$T = X_1 + X_2 + \ldots + X_5 \sim B(5 + 5 + 5 + 10 + 10, 0.15) \equiv B(35, 0.15)$

Versão D Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.9$

Numa certa semana, nos dois primeiros dias são seleccionadas amostras diárias de 20 clientes e, nos restantes dias são seleccionadas amostras diárias de 5 clientes.

Indique a distribuição do total de prémios atribuídos nesta semana.

Resolução: Considere as v.a.'s X_i - n.º prémios atribuídos no dia $i, i = 1, 2, \ldots 5$.
$X_1 \sim B(20, 0.9)$, $X_2 \sim B(20, 0.9)$, $X_3 \sim B(5, 0.9)$, $X_4 \sim B(5, 0.9)$, $X_5 \sim B(5, 0.9)$ e são independentes

Sendo T - total de prémios atribuídos nesta semana

$T = X_1 + X_2 + \ldots + X_5 \sim B(20 + 20 + 5 + 5 + 5, 0.9) \equiv B(55, 0.9)$

Versão E Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

Admita que $p = 0.85$

Numa certa semana, nos três primeiros dias são seleccionadas amostras diárias de 10 clientes e, nos restantes dias são seleccionadas amostras diárias de 5 clientes.

Indique a distribuição do total de prémios atribuídos nesta semana.

Resolução: Considere as v.a.'s X_i - n.º prémios atribuídos no dia $i, i = 1, 2, \ldots 5$.
$X_1 \sim B(10, 0.85)$, $X_2 \sim B(10, 0.85)$, $X_3 \sim B(10, 0.85)$, $X_4 \sim B(5, 0.85)$, $X_5 \sim B(5, 0.85)$ e são independentes

Sendo T - total de prémios atribuídos nesta semana

$T = X_1 + X_2 + \ldots + X_5 \sim B(10 + 10 + 10 + 5 + 5, 0.85) \equiv B(40, 0.85)$

Pergunta 4 Alínea f)

Versão A Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

O número de clientes atendidos nesta loja, tem distribuição de Poisson com uma taxa de 2 clientes/hora. Durante 90 minutos, a probabilidade de serem atendidos 2 ou menos clientes tem valor (arredondado com 4 casas decimais):

Resolução: Seja X - n.º clientes atendidos em 90 minutos (1.5 horas) $\quad X \sim P\,(1.5 \times 2) \equiv P\,(3)$

$$P\,(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} e^{-3}\frac{3^k}{k!} \approx 0.4232$$

Versão B Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

O número de clientes atendidos nesta loja, tem distribuição de Poisson com uma taxa de 10 clientes/hora. Durante 15 minutos, a probabilidade de serem atendidos 3 ou menos clientes tem valor (arredondado com 4 casas decimais):

Resolução: Seja X - n.º clientes atendidos em 15 minutos (0.25 horas) $\quad X \sim P\,(0.25 \times 10) \equiv P\,(2.5)$

$$P\,(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} e^{-2.5}\frac{2.5^k}{k!} \approx 0.7576$$

Versão C Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

O número de clientes atendidos nesta loja, tem distribuição de Poisson com uma taxa de 5 clientes/hora. Durante 45 minutos, a probabilidade de serem atendidos 2 ou menos clientes tem valor (arredondado com 4 casas decimais):

Resolução: Seja X - n.º clientes atendidos em 45 minutos (0.75 horas) $\quad X \sim P\,(0.75 \times 5) \equiv P\,(3.75)$

$$P\,(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} e^{-3.75}\frac{3.75^k}{k!} \approx 0.2771$$

Versão D Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

O número de clientes atendidos nesta loja, tem distribuição de Poisson com uma taxa de 4 clientes/hora. Durante 75 minutos, a probabilidade de serem atendidos 4 ou menos clientes tem valor (arredondado com 4 casas decimais):

Resolução: Seja X - n.º clientes atendidos em 75 minutos (1.25 horas) $\quad X \sim P\,(1.25 \times 4) \equiv P\,(5)$

$$P\,(X \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} e^{-5}\frac{5^k}{k!} \approx 0.4405$$

Versão E Numa loja é atribuído um prémio aos clientes que fazem uma despesa superior a 50 euros, sendo p a probabilidade disto acontecer, independentemente do cliente.

O número de clientes atendidos nesta loja, tem distribuição de Poisson com uma taxa de 8 clientes/hora. Durante 15 minutos, a probabilidade de serem atendidos 3 ou menos clientes tem valor (arredondado com 4 casas decimais):

Resolução: Seja X - n.º clientes atendidos em 15 minutos (0.25 horas) $\quad X \sim P(0.25 \times 8) \equiv P(2)$

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} e^{-2}\frac{2^k}{k!} \approx 0.8571$$

Pergunta 5 Alínea a)

Versão A A função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a-x}{c} & x \in [0,a] \\ 0, & x \notin [0,a] \end{cases}$$

é função densidade de probabilidade se, e só se, $c =$?

(Indique a sua resposta arredondada com 3 casas decimais)

Resolução: Observação: Na prova era apresentado o valor da constante $a \in \mathbb{R}^+$, por exemplo $a = 1.2$.

A função f é função densidade de probabilidade se, e só se, satisfaz:

- $f(x) \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ $\quad$ O que implica $c \in \mathbb{R}^+$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^a \frac{a-x}{c}dx = 1 \Leftrightarrow \left[-\frac{(a-x)^2}{2c}\right]_0^a = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2c} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{a^2}{2}$

Versão B A função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a-x}{c} & x \in [0,a] \\ 0, & x \notin [0,a] \end{cases}$$

é função densidade de probabilidade se, e só se, $a =$?

(Indique a sua resposta arredondada com 3 casas decimais)

Resolução: Observação: Na prova era apresentado o valor da constante $c \in \mathbb{R}^+$, por exemplo $c = 2.2$.

A função f é função densidade de probabilidade se, e só se, satisfaz:

- $f(x) \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ $\quad$ Para $x \in [0,a]$, obviamente $a \in \mathbb{R}^+$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^a \frac{a-x}{c}dx = 1 \Leftrightarrow \left[-\frac{(a-x)^2}{2c}\right]_0^a = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2c} = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt{2c}$

Pergunta 5 Alínea b)

Considere X uma v.a. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a-x)}{a^2} & x \in [0,a] \\ 0, & x \notin [0,a] \end{cases}$$

Sabendo que $P\left(X > \dfrac{a}{2}\right) = 0.25$, determine $P\left(X > f \times a \,\middle|\, X > \dfrac{a}{2}\right)$

(Escreva a sua resposta arredondada com 2 casas decimais)

Resolução: Observação: Na prova era apresentado o valor da constante $a \in \mathbb{R}^+$, por exemplo $a = 1.5$, e o valor da constante $f \in]0.5, 0.9[$, por exemplo $f = 0.7$

Como $f > 0.5$, então $f \times a > \dfrac{a}{2}$. Por isso $(X > f \times a) \cap \left(X > \dfrac{a}{2}\right) = (X > f \times a)$

$$P\left(X > f \times a \,\middle|\, X > \frac{a}{2}\right) = \frac{P\left[(X > f \times a) \cap \left(X > \frac{a}{2}\right)\right]}{P\left(X > \frac{a}{2}\right)} = \frac{P(X > f \times a)}{1/4} = 4(1-f)^2 \qquad \text{porque}$$

$$P(X > f \times a) = \int_{f \times a}^{a} \frac{2(a-x)}{a^2} dx = \left[-\frac{(a-x)^2}{a^2}\right]_{f \times a}^{a} = (1-f)^2$$

Pergunta 5 Alínea c)

Considere X uma v.a. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a-x)}{a^2} & x \in [0,a] \\ 0, & x \notin [0,a] \end{cases}$$

Determine $E\left(\dfrac{1}{a-X}\right)$.

(Apresente a sua resposta arredondada com 2 casas decimais)

Resolução: Observação: Na prova era apresentado o valor da constante $a \in \mathbb{R}^+$, por exemplo $a = 2.5$

$$E\left(\frac{1}{a-X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a-x} f(x)\, dx = \int_0^a \frac{1}{a-x} \frac{2(a-x)}{a^2} dx = \int_0^a \frac{2}{a^2} = \frac{2}{a}$$

Pergunta 6

Versão A Seja X uma variável aleatória que designa a duração (em horas) de um dado tipo de lâmpadas. Admita que X tem distribuição normal de valor médio 1400 horas e variância σ^2.

a) Pretende-se garantir aos clientes que a duração de 90% das lâmpadas excede 1300 horas. O valor admissível para σ^2 (arredondado às unidades) é:

Resolução: $X \sim N\left(1400, \sigma^2\right)$

$$P(X > 1300) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-1400}{\sigma} > \frac{1300-1400}{\sigma}\right) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(Z > -\frac{100}{\sigma}\right) = 0.9 \Leftrightarrow$$

$$P\left(Z < \frac{100}{\sigma}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{100}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.9) \Leftrightarrow \frac{100}{\sigma} = 1.28 \Leftrightarrow \sigma = \frac{100}{1.28} \Leftrightarrow \sigma^2 = \left(\frac{100}{1.28}\right)^2 \approx 6104$$

b) A probabilidade da duração das lâmpadas não se afastar da média mais de $1.5 \times \sigma$ é (arredondada a 4 casas decimais):

Resolução: $X \sim N\left(1400, \sigma^2\right)$

$$P(|X - 1400| \leq 1.5\,\sigma) = P\left(\left|\frac{X-1400}{\sigma}\right| \leq 1.5\right) = P(|Z| \leq 1.5) = P(-1.5 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1.5) = P(Z \leq 1.5) - [1 - P(Z \leq 1.5)] = 2P(Z \leq 1.5) - 1$$

$$= 2 \times 0.9332 - 1 = 0.8664$$

c) Admita que a duração de cada lâmpada segue a distribuição referida com desvio padrão $\sigma = 80$ horas e que as lâmpadas são embaladas em caixas de 10 unidades. A probabilidade de que a duração total das lâmpadas de uma caixa seja inferior a 14160 horas é (arredondada a 4 casas decimais):

Resolução: Seja $X_i \sim N\left(1400, 80^2\right)$ a duração da lâmpada i, $i = 1, 2, \ldots, 10$

Seja $T = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$ a duração total das 10 lâmpadas de uma caixa.
Sendo $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ v.a.'s i.i.d com distribuição $N\left(1400, 80^2\right)$, então

$$T \sim N(E(T), V(T)) \equiv N(14000, 64000)$$

porque T é uma combinação linear de v.a.'s independentes e todas com distribuição Normal,

$$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) = \sum_{i=1}^{10} 1400 = 14000 \qquad \text{e}$$

$$V(T) = V\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} V(X_i) = \sum_{i=1}^{10} 80^2 = 64000$$

$$P(T < 14160) = P\left(\frac{T-14000}{\sqrt{64000}} < \frac{14160-14000}{\sqrt{64000}}\right) = P(Z \leq 0.63) = 0.7357$$

Versão B Seja X uma variável aleatória que designa a duração (em horas) de um dado tipo de lâmpadas. Admita que X tem distribuição normal de valor médio 1300 horas e variância σ^2.

a) Pretende-se garantir aos clientes que a duração de 90% das lâmpadas excede 1100 horas. O valor admissível para σ^2 (arredondado às unidades) é:

Resolução: $X \sim N\left(1300, \sigma^2\right)$

$$P(X > 1100) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-1300}{\sigma} > \frac{1100-1300}{\sigma}\right) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(Z > -\frac{200}{\sigma}\right) = 0.9 \Leftrightarrow$$
$$P\left(Z < \frac{200}{\sigma}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{200}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.9) \Leftrightarrow \frac{200}{\sigma} = 1.28 \Leftrightarrow \sigma = \frac{200}{1.28} \Leftrightarrow \sigma^2 = \left(\frac{200}{1.28}\right)^2 \approx 24414$$

b) A probabilidade da duração das lâmpadas não se afastar da média mais de $1.2 \times \sigma$ é (arredondada a 4 casas decimais):

Resolução: $X \sim N\left(1300, \sigma^2\right)$

$$P(|X-1300| \leq 1.2\,\sigma) = P\left(\left|\frac{X-1300}{\sigma}\right| \leq 1.2\right) = P(|Z| \leq 1.2) = P(-1.2 \leq Z \leq 1.2)$$
$$= P(Z \leq 1.2) - P(Z \leq -1.2) = P(Z \leq 1.2) - [1 - P(Z \leq 1.2)] = 2P(Z \leq 1.2) - 1$$
$$= 2 \times 0.8849 - 1 = 0.7698$$

c) Admita que a duração de cada lâmpada segue a distribuição referida com desvio padrão $\sigma = 60$ horas e que as lâmpadas são embaladas em caixas de 10 unidades. A probabilidade de que a duração total das lâmpadas de uma caixa seja inferior a 13440 horas é (arredondada a 4 casas decimais):

Resolução: Seja $X_i \sim N\left(1300, 60^2\right)$ a duração da lâmpada i, $i = 1, 2, \ldots, 10$

Seja $T = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$ a duração total das 10 lâmpadas de uma caixa.
Sendo $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ v.a.'s i.i.d com distribuição $N\left(1300, 60^2\right)$, então

$$T \sim N(E(T), V(T)) \equiv N(13000, 36000)$$

porque T é uma combinação linear de v.a.'s independentes e todas com distribuição Normal,

$$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) = \sum_{i=1}^{10} 1300 = 13000 \qquad \text{e}$$
$$V(T) = V\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} V(X_i) = \sum_{i=1}^{10} 60^2 = 36000$$
$$P(T < 13440) = P\left(\frac{T-13000}{\sqrt{36000}} < \frac{13440-13000}{\sqrt{36000}}\right) = P(Z \leq 2.32) = 0.9898$$

Versão C O processo de tosquia de ovelhas envolve duas tarefas: o banho e a tosquia do pêlo. O tempo gasto (em minutos) na tarefa da tosquia de cada ovelha, considera-se uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 10 min e variância σ^2.

a) Pretende-se garantir aos clientes que o tempo gasto em 90% das tarefas da tosquia excede 8 minutos. O valor admissível para σ^2 (arredondado às unidades) é:

Resolução: Seja T- tempo gasto na tarefa da tosquia de uma ovelha. $T \sim N\left(10, \sigma^2\right)$

$$P(T > 8) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(\frac{T-10}{\sigma} > \frac{8-10}{\sigma}\right) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(Z > -\frac{2}{\sigma}\right) = 0.9 \Leftrightarrow$$

$$P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{2}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.9) \Leftrightarrow \frac{2}{\sigma} = 1.28 \Leftrightarrow \sigma = \frac{2}{1.28} \Leftrightarrow \sigma^2 = \left(\frac{2}{1.28}\right)^2 \approx 2$$

b) A probabilidade do tempo gasto na tarefa da tosquia não se afastar da média mais de $1.3 \times \sigma$ é (arredondada a 4 casas decimais):

Resolução: $T \sim N\left(10, \sigma^2\right)$

$$P(|T-10| \le 1.3\,\sigma) = P\left(\left|\frac{T-10}{\sigma}\right| \le 1.3\right) = P(|Z| \le 1.3) = P(-1.3 \le Z \le 1.3)$$

$$= P(Z \le 1.3) - P(Z \le -1.3) = P(Z \le 1.3) - [1 - P(Z \le 1.3)] = 2P(Z \le 1.3) - 1$$

$$= 2 \times 0.9032 - 1 = 0.8064$$

c) Admita que o tempo gasto na tarefa do banho de cada ovelha segue uma distribuição normal de valor médio 12 min e desvio padrão $\sigma = 3$ min e considere o desvio padrão do tempo gasto na tarefa da tosquia igual a 2 min. A probabilidade de que o tempo total gasto nas duas tarefas seja inferior a 30 min é (arredondada a 4 casas decimais):

Resolução: Seja B - tempo gasto na tarefa do banho de uma ovelha $B \sim N\left(12, 3^2\right)$
Seja T- tempo gasto na tarefa da tosquia da mesma ovelha. $T \sim N\left(10, 2^2\right)$

Seja $S = T + B$ o tempo total gasto nas duas tarefas.
Admitindo que T e B são v.a.'s independentes,

$$S \sim N(E(S), V(S)) \equiv N(22, 13)$$

porque S é uma combinação linear de 2 v.a.'s independentes e ambas com distribuição Normal,

$$E(S) = E(T+B) = E(T) + E(B) = 10 + 12 = 22 \qquad \text{e}$$

$$V(S) = V(T+B) = V(T) + V(B) = 4 + 9 = 13$$

$$P(S < 30) = P\left(\frac{S-22}{\sqrt{13}} < \frac{30-22}{\sqrt{13}}\right) = P(Z \le 2.22) = 0.9868$$

Pergunta 7

Considere (X, Y) um par aleatório discreto com função de probabilidade conjunta:

$$P(X = x; Y = y) = p_1^x (1-p_1)^{1-x} p_2^y (1-p_2)^{1-y} [1 - \alpha (x - p_1)(y - p_2)]$$

com $x \in \{0, 1\}$, $y \in \{0, 1\}$, $p_1 \in]0, 1[$, $p_2 \in]0, 1[$ e $\alpha \in [-1, 1]$.

Tabela da função de probabilidade conjunta e funções de probabilidade marginais

$X \setminus Y$	0	1	
0	$(1-p_1)(1-p_2)[1-\alpha\, p_1 p_2]$	$(1-p_1)\, p_2 [1+\alpha\, p_1 (1-p_2)]$	$1-p_1$
1	$p_1 (1-p_2)[1+\alpha\ (1-p_1)\, p_2]$	$p_1 p_2 [1-\alpha\ (1-p_1)(1-p_2)]$	p_1
	$1-p_2$	p_2	1

---

a) Deduza a função de probabilidade marginal da v.a. X. Identifique a sua distribuição.

Resolução: Função de probabilidade da v.a. X

$P(X=0) = P(X=0; Y=0) + P(X=0; Y=1)$

$= (1-p_1)(1-p_2)[1-\alpha p_1 p_2] + (1-p_1)\, p_2 [1+\alpha p_1 (1-p_2)]$

$= (1-p_1)[(1-p_2) - \alpha p_1 p_2 (1-p_2) + p_2 + \alpha p_1 p_2 (1-p_2)] = 1 - p_1$

$P(X=1) = 1 - P(X=0) = p_1$

$$X \begin{cases} 0 & 1 \\ 1-p_1 & p_1 \end{cases} \qquad X \sim B(1, p_1)$$

a) Deduza a função de probabilidade marginal da v.a. Y. Identifique a sua distribuição.

Resolução: Função de probabilidade da v.a. Y

$P(Y=0) = P(X=0; Y=0) + P(X=1; Y=0)$

$= (1-p_1)(1-p_2)[1-\alpha p_1 p_2] + p_1 (1-p_2)[1+\alpha (1-p_1)\, p_2]$

$= (1-p_2)[(1-p_1) - \alpha p_1 p_2 (1-p_1) + p_1 + \alpha p_1 p_2 (1-p_1)] = 1 - p_2$

$P(Y=1) = 1 - P(Y=0) = p_2$

$$Y \begin{cases} 0 & 1 \\ 1-p_2 & p_2 \end{cases} \qquad Y \sim B(1, p_2)$$

b) Determine o coeficiente de correlação deste par aleatório, $\rho(X,Y)$.

Resolução:

- $E(X) = p_1 \qquad V(X) = p_1(1-p_1)$
- $E(Y) = p_2 \qquad V(Y) = p_2(1-p_2)$
- $E(XY) = P(X=1; Y=1) = p_1p_2[1-\alpha(1-p_1)(1-p_2)]$
- $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = p_1p_2[1-\alpha(1-p_1)(1-p_2)] - p_1p_2 = -\alpha p_1p_2(1-p_1)(1-p_2)$
- $\rho(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = -\dfrac{\alpha p_1p_2(1-p_1)(1-p_2)}{\sqrt{p_1p_2(1-p_1)(1-p_2)}} = -\alpha\sqrt{p_1p_2(1-p_1)(1-p_2)}$

c) Analise a veracidade da seguinte afirmação: As v.a.'s X e Y são independentes se, e só se, $\rho(X,Y) = 0$.

Resolução: Se X e Y são v.a.'s independentes, então $\rho(X,Y) = 0$

Se $\rho(X,Y) = 0$, então X e Y são v.a.'s independentes?

$\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

Se $\alpha = 0$, as v.a.'s X e Y são independentes porque:

- $P(X=0; Y=0) = (1-p_1)(1-p_2) = P(X=0)P(Y=0)$
- $P(X=0; Y=1) = (1-p_1)p_2 = P(X=0)P(Y=1)$
- $P(X=1; Y=0) = p_1(1-p_2) = P(X=1)P(Y=0)$
- $P(X=1; Y=1) = p_1p_2 = P(X=1)P(Y=1)$