Teoria da Computação
FCT-UNL 2023-2024
Problem Set 1
Demonstrações

1. Sejam A, B, e C quaisquer conjuntos. Demonstre cada uma das seguintes igualdades:
   (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   (c) $A \cap (A \cup B) = A$.
   (d) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$.

2. Encontre o erro na seguinte "demonstração" de que $2 = 1$:

   Consideremos a equação $a = b$. Multiplicando ambos os lados por a, concluímos que $a^2 = ab$. Subtraindo b^2 a cada um dos lados, obtemos $a^2 - b^2 = ab - b^2$, o que é equivalente a $(a - b)(a + b) = (a - b)b$. Dividindo ambos os lados da equação por $(a - b)$ leva a $a + b = b$. Finalmente, escolhemos $a = b = 1$, caso em que obtemos $2 = 1 + 1 = 1$.

3. Demonstre as seguintes asserções por indução:
   (a) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   (b) $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
   (c) $n^3 + 2n$ é divisível por 3 para todo o $n \in \mathbb{N}$.
   (d) $9^n - 1$ é divisível por 8 para todo o $n \in \mathbb{N}^+$.
   (e) $2^{n+1} > n^2$ para todo o $n \in \mathbb{N}^+$.

4. Sejam A, B, e C conjuntos finitos quaisquer e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções totais quaisquer. Denotamos por $g \circ f : A \to C$ a função composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Demonstre o seguinte:
   (a) Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ também é injetiva.
   (b) Se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ também é sobrejetiva.
   (c) Se f e g são bijetivas, então $g \circ f$ também é bijetiva.