Teoria da Computação
FCT-UNL 2023-2024
Problem Set 8
Gramáticas Livres de Contexto

1. Descreva GLCs que geram as seguintes linguagens:

   (a) $L = \{0^k 1^{2k} 0^n \mid k, n \in \mathbb{N}\}$

   (b) $L = \{(01)^k 0^n \mid k, n \in \mathbb{N} \wedge n > k\}$

   (c) $L = \{0^k 1 0^n \mid k, n \in \mathbb{N} \wedge k \text{ é par} \wedge n \text{ é ímpar}\}$

   (d) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contém pelo menos três 1s}\}$

   (e) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ começa e acaba com o mesmo símbolo}\}$

   (f) $L = \{u0w1 \mid u, w \in \{0,1\}^* \wedge |u| = |w|\}$.

   (g) $L = \varnothing$

   (h) $L = \{\varepsilon\}$

   (i) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = \mathsf{rev}(w)\}$, onde $\mathsf{rev}(w_1 w_2 \dots w_n) = w_n w_{n-1} \dots w_1$. Isto é, L é a linguagem de todos os palíndromos.

2. Seja $L \subseteq \{\texttt{push}, \texttt{pop}\}^*$ a linguagem das strings com o mesmo número de ocorrências de `push` e `pop`.

   (a) Defina uma GLC para L.

   (b) Usando a GLC da alínea (a), mostre que as palavras `pushpushpoppop`, `pushpoppoppush`, e `pushpoppushpop` pertencem à linguagem.

3. Mostre que se L_1 e L_2 são LLCs, então $L_1 \cup L_2$ também é LLC.

4. Considere a seguinte estratégia para mostrar que se L é LLC, então L^* também é LLC: Seja G uma GLC tal que $L = L(G)$. Considere-se a GLC G' obtida a partir de G ao adicionarmos a regra $S \to SS$. Então $L(G') = L^*$. Esta afirmação é verdadeira? Justifique.

5. Mostre que se L é LLC, então L^* também é LLC.

6. Sejam $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ e $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

   (a) Mostre que L_1 e L_2 são LLCs.

(b) Use o facto (não demonstrado em aula) de que a linguagem $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ não é LLC juntamente com a alínea (a) para concluir que a classe de linguagens livres de contexto não é fechada para a intersecção (i.e., existem L_1 e L_2 LLCs tal que $L_1 \cap L_2$ não é LLC).

(c) Usando as alíneas acima, mostre que a classe de linguagens livres de contexto não é fechada para o complemento (i.e., existe L LLC tal que $\overline{L}$ não é LLC).

7. Seja G uma GLC qualquer. Denotamos por $L_k(G)$ o conjunto das palavras $w \in L(G)$ que têm derivações segundo G com k ou menos passos. Mostre que $L_k(G)$ é finito para qualquer $k \in \mathbb{N}^+$.

8. Considere a GLC $G = (V, \Sigma, R, S)$ com $V = \{S, A, N, V, P\}$, $\Sigma = \{\text{Jim}, \text{big}, \text{green}, \text{cheese}, \text{ate}\}$, e regras

$$\begin{array}{ll}
(R_1) & S \to PVP \\
(R_2) & P \to N \\
(R_3) & P \to AN \\
(R_4) & A \to \text{big} \\
(R_5) & A \to \text{green} \\
(R_6) & N \to \text{cheese} \\
(R_7) & N \to \text{Jim} \\
(R_8) & V \to \text{ate} .
\end{array}$$

Desenhe árvores de parsing segundo G para as seguintes palavras:

(a) Jim ate cheese

(b) cheese ate big Jim

(c) big Jim ate green cheese

9. Considere a GLC $G = (V, \Sigma, R, S)$ com $V = \{T, F, E\}$, $\Sigma = \{+, \times, (,), \mathsf{id}\}$, $S = E$, e regras

$$\begin{array}{ll}
(R_1) & E \to E + T \\
(R_2) & E \to T \\
(R_3) & T \to T \times F \\
(R_4) & T \to F \\
(R_5) & F \to (E) \\
(R_6) & F \to \mathsf{id} .
\end{array}$$

Desenhe árvores de parsing segundo G para as seguintes palavras:

(a) $\mathsf{id} + \mathsf{id} + \mathsf{id}$

(b) $\mathsf{id} \times (\mathsf{id} + \mathsf{id})$

10. Considere a GLC $G = (V, \Sigma, R, S)$ com $V = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, e regras

$$\begin{array}{ll} (R_1) & S \to aS \\ (R_2) & S \to Sb \\ (R_3) & S \to \varepsilon\ . \end{array}$$

Mostre que G é ambígua.

11. Considere a GLC $G = (V, \Sigma, R, S)$ com $V = \{E\}$, $\Sigma = \{+, \times, (,), \mathsf{id}\}$, $S = E$, e regras

$$\begin{array}{ll} (R_1) & E \to E + E \\ (R_2) & E \to E \times E \\ (R_3) & E \to (E) \\ (R_4) & E \to \mathsf{id}\ . \end{array}$$

Mostre que G é ambígua.

12. Seja G uma GLC que contém (possivelmente entre outras) regras de substituição

$$\begin{array}{l} X \to XX \\ X \to a \end{array}$$

para alguma variável $X \in V$ e símbolo terminal $a \in \Sigma$. Mostre que G é ambígua.

13. Considere a GLC $G = (V, \Sigma, R, S)$ com $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, e regras

$$\begin{array}{ll} (R_1) & S \to T \mid U \\ (R_2) & U \to T0 \\ (R_3) & T \to U1 \\ (R_4) & U \to \varepsilon\ . \end{array}$$

Mostre que G tem recursividade à esquerda.

14. Considere a GLC $G = (V, \Sigma, R, S)$ com $V = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, e regras

$$\begin{array}{ll} (R_1) & S \to T \mid U \\ (R_2) & U \to 0T \\ (R_3) & T \to U1 \\ (R_4) & U \to \varepsilon\ . \end{array}$$

Mostre que G não tem recursividade à esquerda.