Teórica - 15 março

Propriedades dos conjuntos contáveis.

A contável e $B \subseteq A$ $\Rightarrow$ B é contável

Dem: Queremos mostrar que existe $f: B \to \mathbb{N}$ injetiva

Como A é contável, existe $g: A \to \mathbb{N}$ injetiva.
Consideramos $f(b) = g(b)$ para $b \in B$.
Como g é injetiva, a sua restrição f também o é.

A e B contáveis $\Rightarrow$ $A \cup B$ é contável
Dem: Queremos mostrar que existe $f: \mathbb{N} \to A \cup B$ sobrejetiva
Existem $g: \mathbb{N} \to A$ e $h: \mathbb{N} \to B$ sobrejetivas

$$f(n) = \begin{cases} g(\frac{n}{2}), & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ h(\frac{n-1}{2}), & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$f(0) = g(0)$
$f(1) = h(0)$
$f(2) = g(1)$
$f(3) = h(1)$

f é sobrejetiva. Seja $y \in A \cup B$ qualquer.
Queremos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = y$
Procedemos por casos:
i-) $y \in A$. Como g é sobrejetiva existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(k) = y$. Escolhemos $n = 2k$, e então $f(n) = g(\frac{n}{2}) = g(k) = y$
ii-) $y \in B$. Como h é sobrejetiva existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $h(l) = y$. Escolhemos $n = 2l+1$, e então $f(n) = h(\frac{n+1}{2}) = h(l) = y$

Mais geralmente
A_1, A_2 contáveis $\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ é contável

$x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \Leftrightarrow$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_i$

A, B contáveis $\Rightarrow$ $A \times B$ é contável
Dem.: Queremos mostrar que existe $f: A \times B \to \mathbb{N}$ injetiva. Existem $g: A \to \mathbb{N}$ e $h: B \to \mathbb{N}$ injetivas

$f(a,b) = 2^{g(a)} 3^{h(b)}$ injetiva (usem injetividade de g e h)

$\mathbb{R}$ é contável? Não? Temos de mostrar que não existe $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sobrejetiva

n	f(n)
0	3,1415....
1	2,71 82....
2	1,41 142....
3	0,57 72....
4	16 180....
⋮	

Queremos mostrar que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(n) \neq y$ para todo o $n \in \mathbb{N}$

$y = y_0 . y_1 y_2 y_3 \ldots$
$y_0 \neq 3 \to y_0 = 4$
$y_1 \neq 7 \to y_1 = 8$
$y_2 \neq 1 \to y_2 = 2$
$y_3 \neq 7 \to y_3 = 8$
$y_4 \neq 0 \to y_4 = 1$

No geral, $y_n = (f(n)_n + 1) \% 10$
↳ n-ésima casa decimal de f(n)

i-) $y \in \mathbb{R}$
ii-) $f(n) \neq y$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ pois $y_n \neq f(n)_n$
$\Rightarrow$ Não existe $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sobrejetiva
$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ não é contável

Princípio da Diagonalização

P(IN) não é contável. Usamos o princípio da diagonalização.

Queremos mostrar que não existe $f: \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ sobrejetiva.

n	$S_n = f(n)$						
0	1^{0}	1	1	0	0	0	...
1	1	0^{1}	1	0	1	0	..
2	0	0	0^{1}	0	0	0	...
3	1	1	0	0^{1}	1	1	...
⋮							

$S = \{1, 3, 5\}$

$V_S = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 \ldots)$

Queremos demonstrar existência do conjunto $\overline{S} \in P(\mathbb{N})$ tal que

$S_n \neq \overline{S}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

$\overline{S} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}$

i) $\overline{S} \in P(\mathbb{N})$

ii) $\overline{S} \neq S_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$

pois,

a) se $n \in S_n$, então $n \notin \overline{S} \Rightarrow \overline{S} \neq S_n$

b) se $n \notin S_n$, então $n \in \overline{S} \Rightarrow \overline{S} \neq S_n$

Teorema de Cantor