

Relatório 3º projeto ASA 2024/2025

Grupo: AL008

Aluno(s): Joana Vaz (106078) e Guilherme Peixoto (102439)

Descrição do Problema

O problema proposto consiste em distribuir presentes com o objetivo de maximizar o número de crianças satisfeitas, ou seja, que tiveram o seu pedido atendido, respeitando as capacidades de produção das fábricas, os limites de exportação e as exigências mínimas de cada país. A solução proposta utiliza um modelo de programação linear com variáveis binárias e restrições, com a ajuda da biblioteca Pulp.

Variáveis do problema

$x_{\{k, i\}}$: é uma variável binária que indica se o pedido da criança k foi conseguido pela fábrica i . $x_{\{k, i\}}=1$ se o pedido tiver sucesso, caso contrário $x_{\{k, i\}}=0$.

Função objetivo

A função objetivo tem como objetivo maximizar o número de crianças satisfeitas.

$$\text{Maximizar: } \sum_{k=1}^t \sum_{i \in F_k} x_{k,i}$$

Onde $x_{\{k, i\}}$ é uma variável binária que indica se o pedido k foi atendido pela fábrica i ($x_{\{k, i\}}=1$ se sim, $x_{\{k, i\}}=0$ caso contrário). F_k é o conjunto de fábricas disponíveis para atender o pedido k .

Restrições do problema

- **Capacidade de produção das fábricas:**

Cada fábrica i não pode exceder a sua capacidade máxima:

$$\sum_{k=1}^t x_{k,i} \leq \text{capacidade}_i, \quad \forall i \in [1, n]$$

- **Limite máximo de exportação por país:**

Cada país j não pode exceder o seu limite de exportação:

$$\sum_{k=1}^t \sum_{i \in F_k} x_{k,i} \cdot \text{indicador}_j(\text{fábrica}_i) \leq \text{limite_exportação}_j, \quad \forall j \in [1, m]$$

Onde $\text{indicador}_j(\text{fábrica}) = 1$ se a fábrica i pertence ao país j , e 0 caso contrário.

- **Satisfação mínima de pedidos por país:**

Cada país j deve atender a um número mínimo de pedidos, onde $\text{indicador}_j(\text{pedido}) = 1$ se o pedido k pertence ao país j , e 0 caso contrário.

$$\sum_{k=1}^t \sum_{i \in F_k} x_{k,i} \cdot \text{indicador}_j(\text{pedido}_k) \geq \text{mínimo_pedidos}_j, \quad \forall j \in [1, m]$$

- **Cada pedido pode ser atendido por no máximo uma fábrica:**

$$\sum_{i \in F_k} x_{k,i} \leq 1, \quad \forall k \in [1, t]$$

Relatório 3º projeto ASA 2024/2025

Grupo: AL008
Aluno(s): Joana Vaz (106078) e Guilherme Peixoto (102439)

Análise Teórica:

A análise da complexidade depende do número de variáveis e restrições. Para os parâmetros n (fábricas), m (países), e t (pedidos):

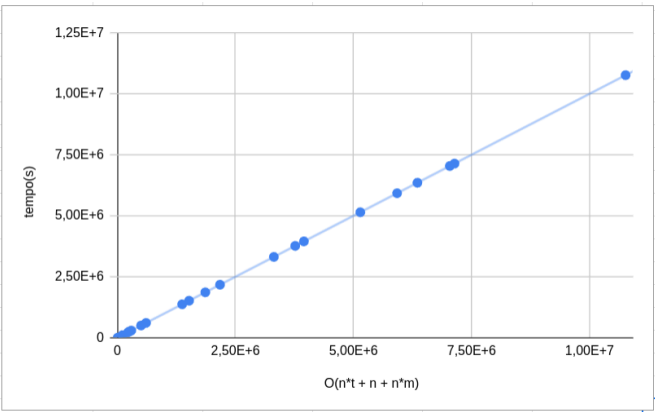
Número de variáveis:
Cada pedido pode ser conseguido por qualquer fábrica, então há no máximo $O(n \cdot t)$ variáveis.

Número de restrições:
 $O(n)$: restrições de capacidade das fábricas.
 $O(m)$: restrições de exportação máxima por país.
 $O(m)$: restrições de pedidos mínimos por país.
 $O(t)$: restrições de satisfação única para cada pedido.
No total, $O(n+m+t)$ restrições.

Complexidade do modelo linear:
Considerando a soma de variáveis e restrições, a complexidade é $O(n \cdot t + n + m + t)$.

Avaliação experimental dos resultados:

Recorrendo ao gerador, geramos um total de 20 instâncias com um incremento de 500 no valor total de $n+m+t$ e obtivemos o seguinte gráfico:



n	m	t	Soma (n+m+t)	x_factory_capac	tempo(s)	O(n+t+n+m+t)
20	144	336	500	10	0.0072	7220
195	260	545	1000	20	0.1073	107275
317	394	789	1500	30	0.2516	251613
139	220	1641	2000	40	1.2301	230099
313	589	1598	2500	50	2.5027	502674
152	927	1921	3000	60	4.2950	294992
676	799	2025	3500	70	6.086	1372400
202	806	2992	4000	80	10.56	608384
486	896	3118	4500	90	13.29	1519848
712	1240	3048	5000	100	15.444	2175176
1041	1280	3179	5500	110	19.33	3314839
987	1203	3810	6000	120	24.05	3766470
1503	1578	3419	6500	130	23.37	5145257
1586	1683	3731	7000	140	26.13	5924366
1385	1532	4583	7500	150	24.43	6354955
274	956	6770	8000	160	29.47	1862980
1175	1340	5985	8500	170	31.56	7040875
1257	2070	5673	9000	180	39.23	7139961
2114	2299	5087	9500	190	45.08	10763418
507	1720	7773	10000	200	49.05	3950911

Com base na análise teórica, a complexidade do algoritmo foi dita como $O(n \cdot t + n + m + t)$. O gráfico acima representa o tempo de execução no eixo y e a complexidade teórica no eixo x. Nesse gráfico, podemos observar que existe uma tendência linear entre os valores teóricos e os tempos medidos.

Esta relação linear confirma que a implementação está alinhada com a complexidade teórica prevista.