Modele dwuczynnikowe

- Model z indywidualnymi i czasowymi efektami stałymi

$$\underset{1\times 1}{y_{it}} = \underset{1\times 1}{\alpha_i} + \underset{1\times 1}{\lambda_t} + \underset{1\times K}{x_{it\cdot}}\ \underset{K\times 1}{\beta} + v_{it} \quad \text{dla } i=1,\dots,N \quad t=1,\dots,T$$

- Model z indywidualnymi i czasowymi efektami losowych

$$y_{it} = \underset{1\times 1}{\beta_0} + \underset{1\times K}{x_{it\cdot}}\ \underset{K\times 1}{\beta} + \varepsilon_{it} \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon_{it} = \alpha_i + \lambda_t + v_{it}$$

gdzie α_i i λ_t – są traktowane jako zmienne losowe.

81

Modele dwuczynnikowe – efekty stałe

Nieobserwowalny efekt czasowy reprezentuje np.:

- Wpływ strajków na spadek produkcji.
- Efekt niedostatecznej podaży surowców energetycznych na jego cenę i PKB.
- Wpływ polityki rządu (np. podatku ekologicznego, wysokości opłat rejestracyjnych itp. na ceny i podaż aut nowych i importowanych).
- Wpływ referencyjnej stopy procentowej (NBP) na „politykę” kredytową banków.
- Warunki pogodowe na plony gospodarstw rolnych.

82

Modele dwuczynnikowe – efekty stałe

- Model z indywidualnymi i czasowymi efektami stałymi

$$\underset{1\times1}{y_{it}} = \underset{1\times1}{\alpha_i} + \underset{1\times1}{\lambda_t} + \underset{1\times K}{x_{it}} \underset{K\times1}{\beta} + v_{it} \quad \text{dla } i = 1,\ldots,N \quad t = 1,\ldots,T$$

$$y_i = \alpha_i \cdot \iota_T + \lambda + X_i \cdot \beta + v_i$$

$$y = (I_N \otimes \iota_T)\alpha + (\iota_N \otimes I_T)\lambda + X \cdot \beta + v$$

$$y = \underset{NT\times N}{Z} \cdot \alpha + \underset{NT\times T}{W} \cdot \lambda + X \cdot \beta + v = [Z \quad W] \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \lambda \end{bmatrix} + X\beta + v$$

83

Modele dwuczynnikowe – efekty stałe

$$y = Z \cdot \alpha + W \cdot \lambda + X \cdot \beta + v = [Z \quad W] \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \lambda \end{bmatrix} + X \cdot \beta + v$$

- Rząd([Z W]) = N + T – 1
- Rząd([Z W X]) = N + T + K – 1 = Liczba swobodnych parametrów

Wygodniejszy zapis („od teraz” λ_t i α_i to tzw. kontrasty)

$$y_{it} = \beta_0 + \alpha_i + \lambda_t + x_{it}\beta + v_{it} \quad \text{dla } i = 1,\ldots,N \quad t = 1,\ldots,T$$

$$\text{gdzie} \quad \sum_{t=1}^{T} \lambda_t = 0 \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0$$

84

Modele dwuczynnikowe – efekty stałe

$$Ad1 \quad y_{it} = \beta_0 + \alpha_i + \lambda_t + x_{it} \cdot \beta + v_{it}$$

$$Ad2 \quad \bar{y}_i = \beta_0 + \alpha_i + \tfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \lambda_t + \bar{x}_i \cdot \beta + \bar{v}_i$$

$$Ad3 \quad \bar{y}_t = \beta_0 + \tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \alpha_i + \lambda_t + \bar{x}_t \cdot \beta + \bar{v}_t$$

$$\text{ale} \quad \sum_{t=1}^{T} \lambda_t = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0$$

$$Ad4 \quad \bar{y} = \beta_0 + \bar{x} \cdot \beta + \bar{v}$$

$$Ad1 - Ad2 - Ad3 + Ad4:$$

$$(y_{it} - \bar{y}_i - \bar{y}_t + \bar{y}) = (x_{it} - \bar{x}_i - \bar{x}_t + \bar{x}) \cdot \beta + (v_{it} - \bar{v}_i - \bar{v}_t + \bar{v})$$

$$\text{Regresja}: \quad y_{it}^* = x_{it}^* \cdot \beta + v_{it}^*$$

85

Modele dwuczynnikowe – efekty stałe

- Estymator wewnątrzgrupowy

$$b_{WG} = \left(X^{*\prime} \cdot X^* \right)^{-1} \left[X^{*\prime} \cdot y^* \right] \qquad b_0 = \bar{y} - \bar{x} \cdot b_{WG} \quad \text{gdzie}$$

$$X^* = [(x_{it} - \bar{x}) - (\bar{x}_i - \bar{x}) - (\bar{x}_t - \bar{x})]$$

$$y^* = [(y_{it} - \bar{y}) - (\bar{y}_i - \bar{y}) - (\bar{y}_t - \bar{y})]$$

$$\text{czyli} \quad X^* = [x_{it} - \bar{x}_i - \bar{x}_t + \bar{x}] \quad y^* = [y_{it} - \bar{y}_i - \bar{y}_t + \bar{y}]$$

- Estymator parametrów α_i i λ_t (*i*=1,…,*N*; *t*=1,…,*T*)

$$a_i = \bar{y}_i - b_0 - \bar{x}_i \cdot b_{WG} = \bar{y}_i - \bar{y} - (\bar{x}_i - \bar{x}) \cdot b_{WG}$$

$$l_t = \bar{y}_t - b_0 - \bar{x}_t \cdot b_{WG} = \bar{y}_t - \bar{y} - (\bar{x}_t - \bar{x}) \cdot b_{WG}$$

86

Modele dwuczynnikowe – efekty stałe

- Estymator wewnątrzgrupowy – inny zapis

$$b_{WG} = (X' \cdot Q \cdot X)^{-1} [X' \cdot Q \cdot y] \quad \text{gdzie} \quad Q \cdot Q = Q$$

$$Q = \left(I_N - \tfrac{1}{N} J_N\right) \otimes \left(I_T - \tfrac{1}{T} J_T\right) =$$
$$= I_{NT} - I_N \otimes \tfrac{1}{T} J_T - \tfrac{1}{N} J_N \otimes I_T + \tfrac{1}{NT} J_N \otimes J_T$$

$$Q \cdot y = [y_{it}^*] \quad y_{it}^* = y_{it} - \bar{y}_i - \bar{y}_t + \bar{y} \quad \bar{y}_t = \tfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{it}$$

$$Q \cdot X = [x_{it}^*] \quad x_{it}^* = x_{it} - \bar{x}_i - \bar{x}_t + \bar{x} \quad \bar{x}_t = \tfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{it}$$

87

Model z efektami stałymi – testowanie obu efektów stałych kontra „zwykła regresja”

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{N-1} = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{T-1} = 0$$
$$H_0 : y_{it} = \beta_0 + x_{it} \cdot \beta + v_{it}$$
$$H_1 : y_{it} = \beta_0 + \alpha_i + \lambda_t + x_{it} \cdot \beta + v_{it}$$

$$F_{emp} = \frac{(SKR_{H0} - SKR_{H1})/(N+T-2)}{SKR_{H1}/(NT-N-T-K+1)} \overset{H_0}{\sim} F\begin{pmatrix} N+T-2, \\ NT-N-T-K+1 \end{pmatrix}$$

gdzie SKR_{H0} (SKR_{H1}) = suma kwadratów w modelu z restrykcjami H_0 (bez restrykcji H_1);

λ_t i α_i to tzw. kontrasty

88

Testowanie: model dwuczynnikowy kontra model z efektami indywidualnymi

$$H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{T-1} = 0$$
$$H_0: y_{it} = \beta_0 + \alpha_i + x_{it} \cdot \beta + v_{it}$$
$$H_1: y_{it} = \beta_0 + \alpha_i + \lambda_t + x_{it} \cdot \beta + v_{it}$$

$$F_{emp} = \frac{(SKR_{H0} - SKR_{H1})/(T-1)}{SKR_{H1}/(NT - N - T - K + 1)} \overset{H_0}{\sim} F\begin{pmatrix} T-1, \\ NT - N - T - K + 1 \end{pmatrix}$$

gdzie SKR_{H0}= suma kwadratów w modelu z restrykcjami, czyli dla modelu

$$(y_{it} - \bar{y}_i) = (x_{it} - \bar{x}_i) \cdot \beta + (v_{it} - \bar{v}_i)$$

oraz λ_t i α_i to tzw. kontrasty

89

Testowanie: model dwuczynnikowy kontra model z efektami czasowymi

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{N-1} = 0$$
$$H_0: y_{it} = \beta_0 + \lambda_t + x_{it} \cdot \beta + v_{it}$$
$$H_1: y_{it} = \beta_0 + \alpha_i + \lambda_t + x_{it} \cdot \beta + v_{it}$$

$$F_{emp} = \frac{(SKR_{H0} - SKR_{H1})/(N-1)}{SKR_{H1}/(NT - N - T - K + 1)} \overset{H_0}{\sim} F\begin{pmatrix} N-1, \\ NT - N - T - K + 1 \end{pmatrix}$$

gdzie SKR_{H0} = suma kwadratów w modelu z restrykcjami, czyli dla

$$(y_{it} - \bar{y}_t) = (x_{it} - \bar{x}_t) \cdot \beta + (v_{it} - \bar{v}_t)$$

oraz λ_t i α_i to tzw. kontrasty

90