Model z efektami losowymi – estymacja parametrów dwustopniową UMNK (procedura)

Jerzy Marzec

1

Estymacja parametrów dwustopniową UMNK - procedura

1. Estymacja parametru $\theta = 1 - \sqrt{\psi}$

a) obliczenie s^2_v w modelu ze stałymi efektami

b) regresja dla danych średnich w czasie – oszacowanie wariancji resztowej

$$\bar{y}_i = \beta_{0,MG} + \bar{x}_i \beta_{MG} + \bar{\varepsilon}_i \quad dla \quad i = 1,\ldots,N$$

c) Obliczenie oceny σ^2_α

2. Wyznaczenie macierzy Ω_0, czyli transformacja zmiennych y i X w y^{**} i X^{**}

3. Estymacja MNK dla $y^{**} = X^{**} \cdot \beta + \varepsilon^{**}$

2

Model efektów losowych – przypadki szczególne

$$\begin{bmatrix} b_{0,\Omega} \\ b_{\Omega} \end{bmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{N} \tilde{X}_i' \cdot \Omega_0^{-1} \cdot \tilde{X}_i \right)^{-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} \tilde{X}_i' \cdot \Omega_0^{-1} \cdot y_i \right]$$

$$\Omega_0^{-1} = \frac{1}{\sigma_v^2} \left(Q_0 + \frac{J_T}{T} \underbrace{\boxed{\frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + T \cdot \sigma_\alpha^2}}}_{\psi} \right)$$

- Jeżeli $\psi \to 1$, gdyż $\sigma^2_\alpha \to 0$, to $b_\Omega \to$MNK (w modelu ze wspólnym β_0) (bo $Q_0 = I_T - J_T/T$).
- Jeżeli $\psi \to 0$, gdyż $T \to +\infty$ lub $\sigma^2_\alpha \to +\infty$, to $b_\Omega \to b_{WG}$.

3

Estymator międzygrupowy b_{MG}

- Agregacja danych panelowych przez ich uśrednianie po czasie

$$\bar{x}_i = \tfrac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} X_i \quad \bar{y}_i = \tfrac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_i$$

- Budujemy regresję dla tych danych

$$\bar{y}_i = \beta_{0,MG} + \bar{x}_i \beta_{MG} + \bar{\varepsilon}_i \quad dla \quad i = 1,\ldots,N$$

- Postać tego estymatora (bez wyrazu wolnego)

$$b_{MG} = \left(\sum_{i=1}^{N} \bar{x}_i^{*\prime} \bar{x}_i^* \right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} \bar{x}_i^{*\prime} \bar{y}_i^* \qquad \bar{x}_i^* = \bar{x}_i - \bar{x} \qquad \bar{y}_i^* = \bar{y}_i - \bar{y}$$

4

Model efektów losowych – estymacja

- Szacowana Uogólniona MNK – nieznane Ω zastępujemy wykorzystując estymatory dla σ^2_α i σ^2_v (Swamy i Arora [1972]):

$$\hat{\sigma}_v^2 = s_v^2 = \frac{1}{NT - N - K}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{it} - \bar{y}_i - \left(x_{it} - \bar{x}_i\right)\cdot b_{WG}\right)^2$$

$$s_\alpha^2 = \hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{N - K - 1}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \bar{y} - \left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)\cdot b_{MG}\right)^2 - \frac{s_v^2}{T} \overset{?}{>} 0$$

- Alternatywnie – jeśli $\sigma^2_\alpha \leq 0$, to korzysta się z koncepcji Nerlove [1972] (wariancja „próbkowa” dla ocen α_i):

$$s_\alpha^2 = \hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(a_i - \bar{a}\right)^2$$

5

Model efektów losowych – estymacja

- Równoważny sposób uzyskania UMNK dla β (ważona MNK)

$$y_{it}^{**} = x_{it}^{**}\cdot\beta + \varepsilon_{it}^{**}$$

gdzie $y_{it}^{**} = y_{it} - \bar{y} - \theta\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)$ $\quad x_{it}^{**} = x_{it} - \bar{x} - \theta\left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)$

$$b_\Omega = \left[X^{**\prime}\cdot X^{**}\right]^{-1} X^{**\prime} y^{**}$$

$$V\left(b_\Omega\right) = \sigma_v^2\left[X^{**\prime}\cdot X^{**}\right]^{-1}$$

$$\theta = 1 - \sqrt{\psi} \qquad y^{**} = \left[y_{it}^{**}\right]_{NT\times 1} \qquad X^{**} = \left[x_{it}^{**}\right]_{NT\times K}$$

6