Model efektów losowych – założenia

- α_i (i=1,…,N) są traktowane jako zmienne losowe

$$\underset{1\times1}{y_{it}} = \underset{1\times1}{\beta_0} + \underset{1\times k}{x_{it}} \cdot \underset{K\times1}{\beta} + \underset{1\times1}{\varepsilon_{it}} \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon_{it} = \alpha_i + v_{it}$$

$$\alpha_i \sim iidN\left(0,\sigma_\alpha^2\right) \quad v_{it} \sim iidN\left(0,\sigma_v^2\right)$$

$$\alpha_i \perp \alpha_j \quad \alpha_i \perp v_{it} \quad \alpha_i \perp x_{it} \quad v_{it} \perp x_{it}$$

- Macierz kowariancji

$$\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{it},\varepsilon_{js}\right) = \begin{cases} \sigma_\alpha^2 + \sigma_v^2 & \text{dla} \quad i=j, t=s \\ \sigma_\alpha^2 & \text{dla} \quad i=j, t\neq s \\ 0 & \text{dla} \quad i\neq j \end{cases}$$

55

Model efektów losowych – założenia

$$\underset{T\times1}{y_i} = \underset{1\times1}{\beta_0} \cdot \underset{T\times1}{\iota_i} + \underset{T\times K}{x_i} \cdot \underset{K\times1}{\beta} + \varepsilon_i \quad \text{gdzie} \quad \underset{T\times1}{\varepsilon_i} = \underset{1\times1}{\alpha_i} \cdot \underset{T\times1}{\iota_i} + \underset{T\times1}{v_i}$$

- Macierz kowariancji

$$\Omega_0 = E\left[\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i'\right] = V\left(y_i\right) = \sigma_\alpha^2 J_T + \sigma_v^2 I_T$$

$$\underset{T\times T}{\Omega_0} = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2+\sigma_v^2 & \sigma_\alpha^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2+\sigma_v^2 & & \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_\alpha^2 & & \dots & \sigma_\alpha^2+\sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{NT\times NT}{\Omega} = E\left[\varepsilon \cdot \varepsilon'\right] = V\left(y\right) = I_N \otimes \Omega_0$$

$$corr\left(y_{i,t}, y_{i,s}\right) = \sigma_\alpha^2 / \left(\sigma_\alpha^2 + \sigma_v^2\right) \quad t \neq s$$

56

Model z efektami losowych (różnice wzgl. modelu z efektami stałymi)

1. Wielkości nieobserwowane (np. efekty ukryte) traktowane jako dodatkowe zmienne losowe
2. Dla różnych okresów dopuszcza skorelowanie decyzji podmiotu dot. zmiennej Y
3. Możliwość uwzględnienia X-sów stałych w czasie (np. branża, forma prawna) lub identyczne dla podmiotów (czynniki makroek.)
4. Uogólnienie modeli (i testowanie): a) ze wspólnym wyrazem wolnym (pooled regression), b) z efektami stałymi oraz c) „regresji dla średnich wartości zmiennych (dane przekrojowe)"
5. Oszczędna parametryzacja, parametry= β , β_0 i wariancje składników losowych (dwa lub trzy parametry)
6. Ułatwia budowę modeli (hierarchicznych) z zmieniającymi się parametrami, np. β_i lub β_t , które zależą od dodatkowych egzogenicznych determinant.

57

Model efektów losowych – estymacja

Oznaczenia

b_Ω - estymator UMNK dla $\beta=[\beta_1 \ldots \beta_K]$ (bez wyrazu wolnego) w modelu efektów losowych

$b_{0,\Omega}$ - estymator UMNK dla wyrazu wolnego β_0 j.w.

b_{MG} - estymator międzygrupowy dla β w modelu dla danych przekrojowych (uśrednionych po t)

b_{WG} - estymator wewnątrzgrupowy dla $\beta=[\beta_1 \ldots \beta_K]$ (bez wyrazu wolnego) w modelu efektów stałych

58

Model efektów losowych – estymacja

- Podejście jednostopniowe: Ważona Nieliniowa MNK, MNW; zał. Ω nieznane podlegające estymacji.

$$\begin{bmatrix} b_{0,NMNK} \\ b_{NMNK} \\ \hat{\sigma}^2_{v,NMNK} \\ \hat{\sigma}^2_{\alpha,NMNK} \end{bmatrix} = \arg \min_{\beta_0,\beta,\sigma_v^2,\sigma_\alpha^2} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i' \cdot \Omega_0^{-1} \cdot \varepsilon_i$$

- Podejście dwustopniowe: Uogólniona MNK, Ω znane

$$y_i = [\iota_T \quad X_i] \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta \end{bmatrix} + \varepsilon_i \qquad V(\varepsilon_i) = \Omega_0$$

$$\begin{bmatrix} b_{0,\Omega} \\ b_\Omega \end{bmatrix} = \arg \min_{\beta_0,\beta} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \iota_T\beta_0 - X_i\beta)' \Omega_0^{-1} \left(\underbrace{y_i - \iota_T\beta_0 - X_i\beta}_{\varepsilon_i} \right)$$

59

Model efektów losowych – estymacja

(Podejście dwustopniowe)

- Uogólniona MNK, estymator Balestra-Nerlove – Ω znane

$$y_i = \iota_T \cdot \beta_0 + X_i \cdot \beta + \iota_T \cdot \alpha_i + \varepsilon_i$$

$$\text{Niech} \quad \tilde{X}_i = [\iota_T \quad X_i]$$

$$\begin{bmatrix} b_{0,\Omega} \\ b_\Omega \end{bmatrix} = \left(\tilde{X}' \cdot \Omega^{-1} \cdot \tilde{X} \right)^{-1} \left[\tilde{X}' \cdot \Omega^{-1} \cdot y \right] = \qquad \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \vdots \\ \tilde{X}_N \end{bmatrix}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \tilde{X}_i' \cdot \Omega_0^{-1} \cdot \tilde{X}_i \right)^{-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} \tilde{X}_i' \cdot \Omega_0^{-1} \cdot y_i \right]$$

60

Model efektów losowych – estymacja

- Estymator UMNK dla β (bez wyrazu wolnego) – inny zapis

$$b_{\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{*\prime} \Omega_0^{-1} X_i^{*} \right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left[X_i^{*\prime} \Omega_0^{-1} y_i^{*} \right]$$

gdzie

$$X_i^{*} = X_i - \iota_T \bar{x}$$

$$y_i^{*} = y_i - \iota_T \bar{y}$$

61

Model efektów losowych – estymacja

- Postać Ω_0^{-1}

$$\Omega_0^{-1} = \frac{1}{\sigma_v^2}\left(I_T - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_v^2 + T\cdot\sigma_\alpha^2} J_T \right) = \frac{1}{\sigma_v^2}\left(Q_0 + \underbrace{\frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + T\cdot\sigma_\alpha^2}}_{\psi} \frac{J_T}{T} \right)$$

$$\Omega_0^{-1} = \frac{1}{\sigma_v^2}\left(I_T - (1-\psi)\frac{J_T}{T} \right) \quad gdyz \quad Q_0 = I_T - \frac{1}{T} J_T$$

$$\Omega_0^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_v^2}}\left(I_T - \left(1-\sqrt{\psi}\right)\frac{J_T}{T} \right) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_v^2}}\left(Q_0 + \sqrt{\psi}\frac{J_T}{T} \right)$$

62

Estymator międzygrupowy b_{MG}

- Agregacja danych panelowych przez ich uśrednianie po czasie → przejście do danych przekrojowych

$$\bar{x}_i = \tfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_i \qquad \bar{y}_i = \tfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_i$$

- Budujemy regresję dla tych danych

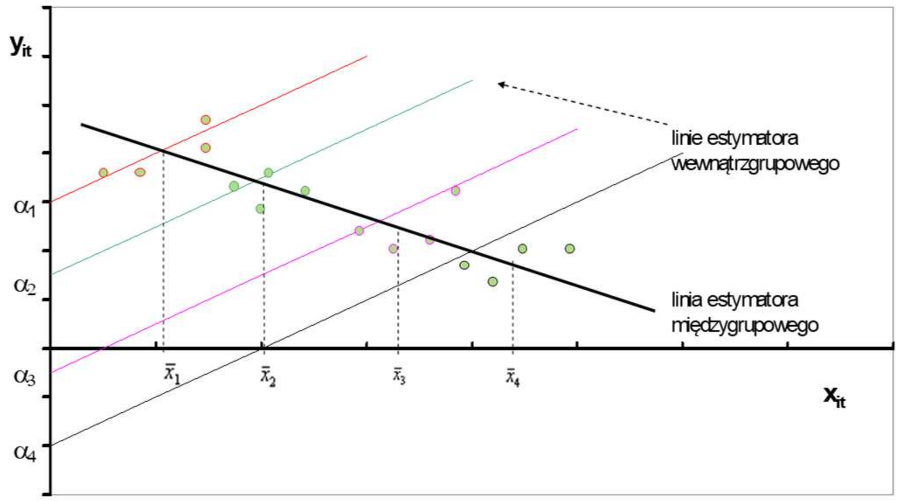
$$\bar{y}_i = \beta_{0,MG} + \bar{x}_i\beta_{MG} + \bar{\varepsilon}_i \quad dla \quad i = 1,\dots,N$$

- Postać tego estymatora (dla parametrów przy x-sach)

$$b_{MG} = \left(\sum_{i=1}^{N} \bar{x}_i^{*\prime}\, \bar{x}_i^{*}\right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} \bar{x}_i^{*\prime}\, \bar{y}_i^{*} \qquad \bar{x}_i^{*} = \bar{x}_i - \bar{x} \qquad \bar{y}_i^{*} = \bar{y}_i - \bar{y}$$

63

Model efektów losowych – związek b_{WG} z b_{Ω}



- Źródło: Arellano M. [2003]

64

Model efektów losowych – Związek b_{WG} z b_{Ω}

- (zał. X_i nie zawiera kolumny z 1)

$$b_{\Omega} = \left(I_k - W_2\right) \cdot b_{WG} + W_2 \cdot b_{MG} \qquad gdzie$$

$$W_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i' Q_0 X_i + \psi \cdot T \cdot \overline{x}_i^{*\prime} \overline{x}_i^{*} \right)^{-1} \cdot \psi \cdot T \cdot \sum_{i=1}^{N} \overline{x}_i^{*\prime} \overline{x}_i^{*}$$

$$\overline{x}_i^{*} = \overline{x}_i - \overline{x} \qquad \overline{y}_i^{*} = \overline{y}_i - \overline{y}$$

$$\overline{y}_i = \beta_{0,MG} + \overline{x}_i \beta_{MG} + \overline{\varepsilon}_i \qquad dla \quad i = 1, \ldots, N$$

$$b_{MG} = \left(\sum_{i=1}^{N} \overline{x}_i^{*\prime} \overline{x}_i^{*} \right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} \overline{x}_i^{*\prime} \overline{y}_i^{*}$$

Estymator międzygrupowy

$$b_{WG} = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i' Q_0 X_i \right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left[X_i' Q_0 y_i \right]$$

Estymator wewnątrzgrupowy 65

Model efektów losowych – estymacja

- Estymator UMNK dla wyrazu wolnego β_0

$$b_{0,\Omega} = \overline{y} - \overline{x} \cdot b_{\Omega}$$

- Estymator międzygrupowy dla wyrazu wolnego β_0

$$b_{0,MG} = \overline{y} - \overline{x} \cdot b_{MG}$$

66

Model efektów losowych – przypadki szczególne

$$\begin{bmatrix} b_{0,\Omega} \\ b_{\Omega} \end{bmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{N} \tilde{X}_i' \cdot \Omega_0^{-1} \cdot \tilde{X}_i \right)^{-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^{N} \tilde{X}_i' \cdot \Omega_0^{-1} \cdot y_i \right]$$

$$\Omega_0^{-1} = \frac{1}{\sigma_v^2} \left(Q_0 + \frac{J_T}{T} \underbrace{\boxed{\frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + T \cdot \sigma_\alpha^2}}}_{\psi} \right)$$

- Jeżeli $\psi \to 1$, gdyż $\sigma^2_\alpha \to 0$, to $b_\Omega \to$ MNK (w modelu ze wspólnym β_0) (bo $Q_0 = I_T - J_T/T$).
- Jeżeli $\psi \to 0$, gdyż $T \to +\infty$ lub $\sigma^2_\alpha \to +\infty$, to $b_\Omega \to b_{WG}$.

67

Model efektów losowych – estymacja

- Macierz kowariancji dla b_Ω

$$V(b_\Omega) = \sigma_v^2 \left(\sum_{i=1}^{N} X_i' Q_0 X_i + \psi \cdot T \cdot (\bar{x}_i - \bar{x})' (\bar{x}_i - \bar{x}) \right)^{-1}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{*\prime} \Omega_0^{-1} X_i^* \right)^{-1}$$

gdzie

$$X_i^* = X_i - \iota_T \bar{x}$$

- Estymator b_Ω jest efektywniejszy od b_{WG}, gdy T jest ustalone.
- Estymator b_Ω jest efektywniejszy od MNK (w modelu ze wspólnym β_0).

68

Model efektów losowych – estymacja

- Szacowana Uogólniona MNK – Ω nieznane

$$b_{\hat{\Omega}} = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{*\prime} \hat{\Omega}_0^{-1} X_i^{*} \right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left[X_i^{*\prime} \hat{\Omega}_0^{-1} y_i^{*} \right]$$

$$\hat{\Omega}_0^{-1} = \frac{1}{\hat{\sigma}_v^2} \left(I_T - \frac{\hat{\sigma}_\alpha^2}{\hat{\sigma}_v^2 + T \cdot \hat{\sigma}_\alpha^2} J_T \right)$$

$$\hat{\sigma}_v^2 = s_v^2 = \frac{1}{NT - N - K} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(y_{it} - \bar{y}_i - \left(x_{it} - \bar{x}_i \right) \cdot b_{WG} \right)^2$$

Estymator Swamy-Arora:

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = s_\alpha^2 = \tfrac{1}{N-K-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{y}_i - \bar{y} - \left(\bar{x}_i - \bar{x} \right) \cdot b_{MG} \right)^2 - \frac{s_v^2}{T} \overset{?}{>} 0$$

69

Model efektów losowych – estymacja

- Szacowana Uogólniona MNK – alternatywa

Estymator Nerlove (1971) dla σ^2_α - wariancja próbkowa z ocen estymatora efektów α_i (i=1,…,N) w modelu z efektami stałymi:

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = s_\alpha^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(a_i - \bar{a} \right)^2$$

W powyższym przypadku zawsze estymator $\sigma^2_\alpha > 0$.

Uwaga: *a* z kreską górną to średnia.

70

Model efektów losowych – estymacja

- UMNK jako ważona MNK - równoważny sposób uzyskania estymatora UMNK, Ω znane

$$y_{it}^{**} = 1^{**} \cdot \beta_0 + x_{it}^{**} \cdot \beta + \varepsilon_{it}^{**}$$

$$\text{gdzie } \theta = 1 - \sqrt{\psi}$$

$$y_{it}^{**} = y_{it} - \bar{y}_i \cdot \theta \qquad x_{it}^{**} = x_{it} - \bar{x}_i \cdot \theta \qquad 1^{**} = 1 - \theta$$

$$\begin{bmatrix} b_{0,\Omega} \\ b_\Omega \end{bmatrix} = \left[\tilde{X}^{**\prime} \cdot \tilde{X}^{**} \right]^{-1} \tilde{X}^{**\prime} \cdot y^{**} \qquad y^{**} = \left[y_{it}^{**} \right]_{NT \times 1}$$

$$V\left(\begin{bmatrix} b_{0,\Omega} \\ b_\Omega \end{bmatrix} \right) = \sigma_v^2 \left[\tilde{X}^{**\prime} \cdot \tilde{X}^{**} \right]^{-1} \qquad \tilde{X}^{**} = \left[1^{**} \quad x_{it}^{**} \right]_{NT \times K+1}$$

71

Model efektów losowych – estymacja

- Równoważny sposób uzyskania UMNK dla β (ważona MNK)

$$y_{it}^{**} = x_{it}^{**} \cdot \beta + \varepsilon_{it}^{**}$$

$$\text{gdzie} \quad y_{it}^{**} = y_{it} - \bar{y} - \theta(\bar{y}_i - \bar{y}) \quad x_{it}^{**} = x_{it} - \bar{x} - \theta(\bar{x}_i - \bar{x})$$

$$b_\Omega = \left[X^{**\prime} \cdot X^{**} \right]^{-1} X^{**\prime} y^{**}$$

$$V(b_\Omega) = \sigma_v^2 \left[X^{**\prime} \cdot X^{**} \right]^{-1}$$

$$\theta = 1 - \sqrt{\psi} \quad y^{**} = \left[y_{it}^{**} \right]_{NT \times 1} \quad X^{**} = \left[x_{it}^{**} \right]_{NT \times K}$$

72

Model efektów losowych - podsumowanie

- możliwa jest estymacja efektów dla zmiennych stałych po czasie i po obiektach
- b_Ω jest efektywniejszy od b_{WG}, gdy T jest ustalone
- gdy $T \to +\infty$ (N - ustalone), to $b_\Omega \to b_{WG}$ i $V(b_\Omega) \to V(b_{WG})$
- gdy $\boldsymbol{\varepsilon}_{it}$ ($\alpha_i + v_{it}$) jest skorelowany z $\mathbf{x}_{it}$, to b_Ω jest niezgodny i obciążony
- MNK (w modelu ze wspólnym β_0) jest zgodny, nieobciążony, ale nieefektywny
- R^2 jest niższe niż w modelu z efektami stałymi.

73

Model z efektami losowymi – testowanie efektów losowych (zał. T – ustalone)

Pytanie: Jak traktować α_i (i=1,…,.N) - jako zmienne losowe (H_0) czy jako parametry (H_1)?

- Test Hausmana (H_0 oznacza efekty losowe)

$$H_0 : E[\alpha_i | x_{it}] = 0 \quad H_1 : E[\alpha_i | x_{it}] \neq 0$$

Statystyka testowa (K - liczba parametrów β):

$$(b_{WG} - b_\Omega)' [V(b_{WG}) - V(b_\Omega)]^{-1} (b_{WG} - b_\Omega) \sim \chi^2(K)$$

gdyż $V(b_{WG} - b_\Omega) = V(b_{WG}) - 2\operatorname{cov}(b_{WG}, b_\Omega) + V(b_\Omega) =$

$$= V(b_{WG}) - V(b_\Omega)$$

74

Model z efektami losowymi vs. pooled regression - test heteroscedastyczności

- Breusch and Pagan test (1980) (H_0 oznacza pooled regression model)

$$H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0 \quad \left(corr\left(\varepsilon_{i,t}, \varepsilon_{i,s}\right) = 0\right) \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_\alpha^2 \neq 0$$

- Test mnożnika Lagrange'a (LM)

$$LM = \frac{NT}{2(T-1)} \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{t=1}^{T} u_{it} \right)^2}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (u_{it})^2} \right]^2 \sim \chi^2(1)$$

rozkład chi^2 o df=1 stopniu swobody

u_{it} – reszty MNK w modelu H_0 (u – wektor reszt NT×1).

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{t=1}^{T} u_{it} \right)^2 = u'(I_N \otimes J_T)u$$

75