Ekonometria w instytucjach finansowych

Ćwiczenia 1-2.

Analiza portfelowa w R

Zadanie 1. Narysować linie portfeli efektywnych dla dowolnej ustalonej liczby aktywów ryzykownych – dopracować plik w programie R

Zadanie 2. Napisać kod w R do konstrukcji portfeli optymalnych z wykorzystaniem **momentów próbkowych**.

Niezbędne ustalenia:

0) pracujemy na prostych stopach zwrotu wyrażonych w punktach procentowych

1) liczba składowych portfela: n = 5

2) portfele tygodniowe / 5 dni roboczych/

3) **krótka sprzedaż dozwolona**,

4) rodzaj portfela: o minimalnym ryzyku, o minimalnym ryzyku ze z góry zadaną oczekiwaną stopą zwrotu (**Rg=13/52**; 13% w skali roku), naiwny (udziały=1/5)

5) długość okna, na podstawie którego należy wyznaczać stosowne momenty próbkowe: **4*52** tygodnie

6) liczba portfeli = **200** dla każdego przypadku

7) obliczyć wartość hipotetycznych inwestycji (wartość początkowa: W0 = 1000), korygowanych według składu portfeli optymalnych (skład portfela korygować co tydzień, wykorzystać rzeczywiste stopy zwrotu)

Dodatkowo przy obliczaniu hipotetycznych inwestycji :

8) uwzględnić koszty transakcji: **0.1%** wartości transakcji

9) wykorzystać próbkową macierz kowariancji oraz semikowariancji dla **γ=5/52**

11) porównać wyniki (np. narysować zmieniające się wartości portfeli)

Zadanie 3. Napisać kod w R do konstrukcji portfeli optymalnych z wykorzystaniem **teorii perspektywy**, maksymalizując oczekiwaną użyteczność:

$$v(x) = \begin{cases} x^{\alpha^+} & x \geq 0 \\ -\beta(-x)^{\alpha^-} & x < 0 \end{cases},$$

$\beta = 2.25, \quad \alpha^+ = 0.88, \qquad \alpha^- = 0.88$

Wzory:

Skład portfela o minimalnym ryzyku:

$$\boldsymbol{\omega}_{MV,t:t+s} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{t:t+s}{}^{-1}\boldsymbol{\iota}}{\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Sigma}_{t:t+s}{}^{-1}\boldsymbol{\iota}}.$$

Wariancja portfela o minimalnym ryzyku:

$$\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{\omega}_{MV,t:t+s}{}'\boldsymbol{R}_{t:t+s}) = (\boldsymbol{\omega}_{MV,t:t+s}{}'\boldsymbol{\Sigma}_{t,t+s}\boldsymbol{\omega}_{MV,t:t+s}), \quad Var(\omega_{MV,t:t+s}{}'R_{t:t+s}) = V_{MV,t:t+s}^2 = \frac{1}{\iota'\Sigma_{t:t+s}^{-1}\iota}.$$

Skład portfela o minimalnym ryzyku i ze z góry zadaną oczekiwaną stopą zwrotu ($R_{g,t:t+s}$):

$$\boldsymbol{\omega}_{MV,R,t:s} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{t:t+s}^{-1}[\boldsymbol{\mu}_{t:t+s}\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Sigma}_{t:t+s}{}^{-1} - \boldsymbol{\iota}\boldsymbol{\mu}_{t:t+s}{}'\boldsymbol{\Sigma}_{t:t+s}{}^{-1}](\boldsymbol{\iota}\boldsymbol{R}_{g,t:t+s} - \boldsymbol{\mu}_{t:t+s})}{(\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Sigma}_{t:t+s}{}^{-1}\boldsymbol{\iota})(\boldsymbol{\mu}_{t:t+s}{}'\boldsymbol{\Sigma}_{t:t+s}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{t:t+s}) - (\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\Sigma}_{t:t+s}{}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{t:t+s})^2}, \qquad \text{gdzie } E(R_{t:t+s}) = \mu_{t:t+s}.$$

==

$$\mathrm{sem}\Sigma_{t:t+s}(\gamma) = [\boldsymbol{sem}_{ij(t:t+s)}(\boldsymbol{\gamma})]$$

$$\boldsymbol{sem}_{ij(t:t+s)}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{E}(\mathbf{min}\,\{\boldsymbol{R}_{i,t:t+s} - \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{0}\} \cdot \mathbf{min}\,\{\boldsymbol{R}_{j,t:t+s} - \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{0}\})$$

$$\widehat{\boldsymbol{sem}_{ij(t:t+s)}}(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\sum_{\boldsymbol{t}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{T}} \mathbf{min}\,\{\boldsymbol{r}_{i,t:t+s} - \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{0}\} \cdot \mathbf{min}\,\{\boldsymbol{r}_{j,t:t+s} - \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{0}\}$$

$\boldsymbol{r}_{i,t:t+s}$ – prosta stopa zwrotu (realizacja) z *i*-tych aktywów finansowych za okres od $\boldsymbol{t}$ do $\boldsymbol{t+s}$.

Kumulatywna teoria perspektywy (ang. *cumulative prospect theory*):

$$\max CPT\ utility = \max_{\omega_i} E\left(v\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i R_{i,t:t+s}\right)\right) \approx \max_{\omega_i}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i R_{i,t:t+s}\right)$$

Odcinkowa potęgowa funkcja użyteczności (piecewise power utility function):

$$v(x) = \begin{cases} x^{\alpha^+} & x \ge 0 \\ -\beta(-x)^{\alpha^-} & x < 0' \end{cases}$$

$\beta = 2.25, \quad \alpha^+ = 0.88, \qquad \alpha^- = 0.88$

Odcinkowa wykładnicza funkcja użyteczności (piecewise exponential utility function):

$$v(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & x \ge 0 \\ -\lambda(1 - e^{\beta x}) & x < 0' \end{cases}$$

$\alpha > 0$ – współczynnik ryzyka dla zysków,

$\beta > 0$ – współczynnik ryzyka dla strat,

$\lambda > 1$– współczynnik awersji do strat (*loss aversion coefficient*), wskazujący, że straty "bolą" bardziej niż cieszą zyski.

Tversky, A., and Kahneman, D. (1992). Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty* **5**(4), 297–323.