

Modelowanie zmian temperatury w domu

Joanna Pokora

1. Wstęp

Celem projektu jest zbadanie zmian temperatury w domu w celu optymalizacji jego ogrzewania, biorąc pod uwagę dwa problemy badawcze. W szczególności, dla każdego z nich przyjmujemy osobne założenia dotyczące wyglądu domu, badanego czasu, temperatur zewnętrznych.

2. Ogólne założenia

Przyjmujemy ogólne założenia o modelowanym świecie, prawdziwe dla obu problemów:

- grzejniki mają moc 684 W (link do źródła);
- jedną jednostką czasu jest godzina;
- przyjmujemy krok czasu $h_t = 0.02 = 72$ sekundy;
- wszystkie wymiary podawane są w metrach;
- każdy dom dzielimy na siatkę kwadratów o bokach 0.1 m;
- początkowa temperatura w każdym pokoju jest taka sama jak temperatura zewnętrzna;
- temperatura okien jest równa temperaturze zewnętrznej;
- temperatura ściany jest taka sama jak temperatura powietrza w miejscu ich zetknięcia się;
- ciepło nie przechodzi do drugiego pokoju przez ścianę;
- pole wszystkich grzejników jest takie same, równe 0.1 m^2 (wymiaru $0.5 \times 0.2 \text{ m}$);
- każdy grzejnik ma termostat ustawiony na temperaturę S_i dla i -tego grzejnika;
- przejścia prowadzące z jednego pokoju do drugiego są otwarte.

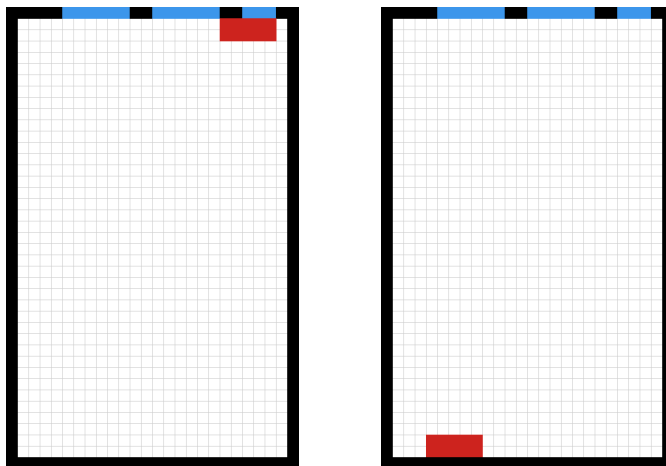
Każdy dom chcemy podzielić na siatkę kwadratów o boku 0.1 m. Przyjmujemy, że

- wszystkie ściany zewnętrzne oraz okna mają grubość jednej komórki (0.1 m);
- ściany wewnętrzne oraz drzwi mają grubość dwóch kwadratów (po jednym dla każdego z dwóch pokoi które łączą).

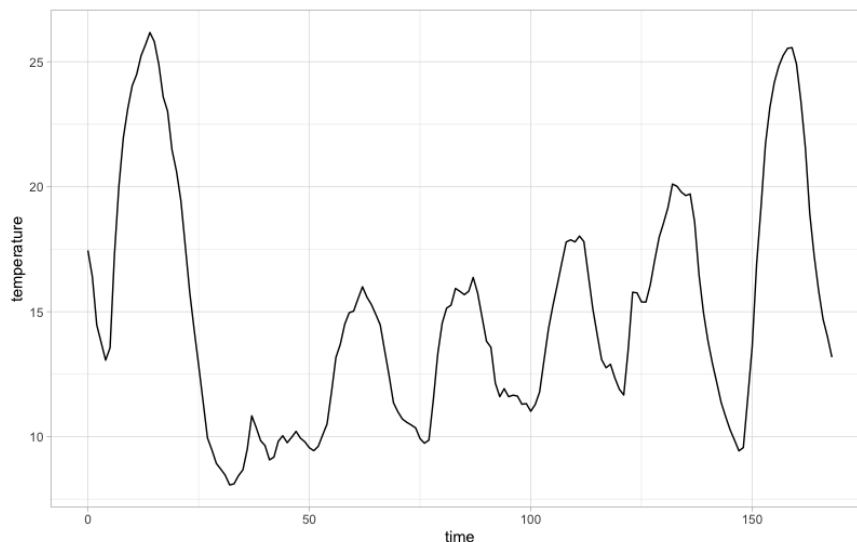
3. Problem 1: umiejscowienie grzejnika

Chcemy porównać jak zachowuje się temperatura w pomieszczeniu gdy kaloryfer znajduje się pod oknami z sytuacją w której jest on umiejscowiony na przeciwko okien. W tym celu przyjmujemy, że mamy do czynienia z domem jednopokojowym o wymiarach 2.5 m na 4 m, podzielonym na kwadraty o długości boku 0.1 m. Jest on wzorowany na pokoju w akademiku.

oniżej znajdują się poglądowe szkice domu w obu przypadkach, z zachowanymi proporcjami. Niebieskim kolorem oznaczone zostały okna, natomiast czerwonym - grzejnik.



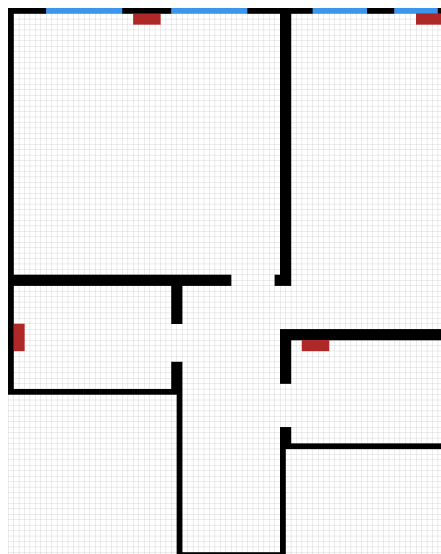
Jako temperatury zewnętrzne przyjmujemy w tym przypadku temperatury od 1.04.2024 o północy do 8.04.2024 o północy, mierzone co godzinę; to znaczy, mamy 169 pomiarów, z czego 168 pochodzi z 7 dni (link do źródła). Temperatury te zostały przedstawione na poniższym wykresie.



Zakładamy, że kaloryfer jest cały czas otwarty, a termostat ustawiony jest na $22^{\circ}C$.

4. Problem 2: wyłączanie grzejników przed wyjściem z domu

Chcemy dowiedzieć się, czy zakręcanie grzejników przed wyjściem z domu jest optymalne. Tym razem bierzemy pod uwagę pięciopokojowy dom mieszczący się w kwadracie 8×10 m, którego schemat został przedstawiony poniżej.



Badamy temperaturę w ciągu 24 godzin. Bedziemy rozważać 6 przypadków:

- temperatura zewnętrzna stała, równa 0, 8 lub $15^{\circ}C$;
- grzejniki wyłączane o godzinie 7 i włączane o 17 lub grzejące cały czas.

5. Zagadnienie przewodnictwa ciepłego i schemat numeryczny

Niech R_i , W_i , V_i , D_i oznaczają kolejno i -ty pokój, okno, ścianę oraz drzwi. Rozpatrywane przez nas zagadnienie przewodnictwa ciepłego na obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ reprezentującym dom ma postać

$$\begin{cases} u_t = \alpha \Delta u + f_i(x, u), & x \in R_i, t > 0, i \in \{1, \dots, N_{rooms}\} \\ u = T_{out}(t), & x \in W_i, t > 0, i \in \{1, \dots, N_{windows}\} \\ \nabla u \cdot n = 0, & x \in V_i, t > 0, i \in \{1, \dots, N_{walls}\} \\ u = \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} u \, dx, & x \in D_i, t > 0, i \in \{1, \dots, N_{doors}\} \\ u(x, 0) = T_{out}(0), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Doprecyzujmy powyższe równania oraz dopasujmy je do naszych założeń.

1. $u(x, t)$ to temperatura wyrażona w Kelwinach w punkcie x i czasie t . W celu uproszczenia odczytu wyników, ostateczna temperatura podawana będzie w stopniach Celsjusza, to znaczy już po przeskalowaniu.
2. $\alpha = 0.07704$ jest współczynnikiem dyfuzyjności cieplnej (przeskalowanym na godziny) (link do źródła).
3. $f_i(x, u) = \frac{P \cdot 3600}{|A_i| \rho c} \mathbb{I}_{\{x \in A_i\}} \mathbb{I}_{\{1/|A_i| \int_{A_i} u(x, t) dx \leq S_i\}}$ to zmiana temperatury przez ogrzewanie grzejnikiem, gdzie $P = 684$ W jest mocą grzejnika. Ponieważ założyliśmy mierzenie czasu w godzinach, to moc jest skalowana aby zachować odpowiednie proporcje. Zakładamy, że gęstość powietrza ρ oraz ciepło właściwe c są stałe równe kolejno 1.205 i 1005 (link do źródła). $|A_i| = 0.1$ jest polem grzejnika. Jednocześnie realizujemy w tym miejscu założenia o istnieniu termostatu oraz produkcji ciepła tylko w miejscu znajdowania się grzejnika. W tym momencie należy zaznaczyć, że ponieważ ciepło jest produkowane na małym obszarze oraz nie robimy założenia co do maksymalnej możliwej temperatury grzejnika, to w okolicach kaloryferów temperatury mogą osiągać wysokie wartości, nie obserwowane w rzeczywistości.
4. $T_{out}(t)$ to temperatura zewnętrzna w momencie t .
4. Drugie równanie jest warunkiem brzegowym dla okien. Ich temperatura będzie stałe równa temperaturze zewnętrznej.
5. Równanie trzecie jest warunkiem brzegowym “dla ścian”. Jest to warunek Neumanna.

Będziemy również posługiwać się funkcją zliczającą ciepło wydzielone podczas eksperymentu postaci

$$\Psi(t) = \int_0^t \int_{\Omega} f(x, u(x, s)) \, dx \, ds.$$

Ponieważ tak na prawdę wykonujemy obliczenia w przestrzeni dyskretniej, to dla i -tego grzejnika możemy zapisać

$$\Psi(t) = \sum_{s=0}^t f(x, u(x, s)) \cdot |A_1|.$$

Główne zagadnienie będziemy rozwiązywać przy pomocy schematu numerycznego

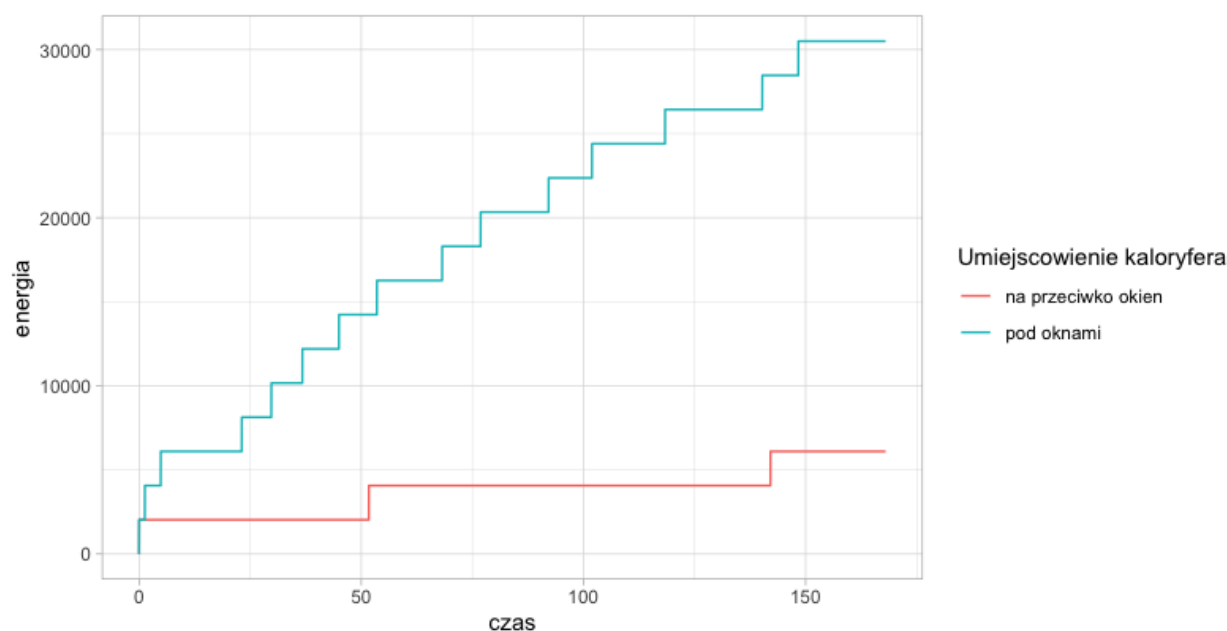
$$u(x, y, t+1) = u(x, y, t) + \frac{h_t}{h^2} (u(x+h, y, t) + u(x-h, y, t) + u(x, y+h, t) + u(x, y-h, t) - 4u(x, y, t)) + h_t f_i(x, u).$$

Temperaturę w komórce brzegowej będącą ścianą przyjmujemy taką, jak w znajdującej się tuż obok niej komórce pokoju. Jeśli kwadrat znajduje się w rogu, to jego temperatura będzie taka sama jak ta w otaczających go trzech kratkach.

Rozwiązanie problemu 1

Zmiany temperatury w czasie zostały przedstawione na wykresach *heatmap1.html* oraz *heatmap2.html* w folderze *plots* w projekcie. Pierwszy z nich przedstawia rozchodzenie się ciepła przy grzejniku ustawionym pod oknami, a drugi - gdy grzejnik znajduje się po przeciwnej stronie domu. Na animacjach dostrzec można, jak w pierwszym przypadku źródła ciepła i zimna równoważą się, natomiast w drugim przypadku występują duże różnice temperatur w pokoju.

Na poniższym wykresie przedstawione zostały wartości funkcji zliczającej ciepło w czasie dla obu przypadków.

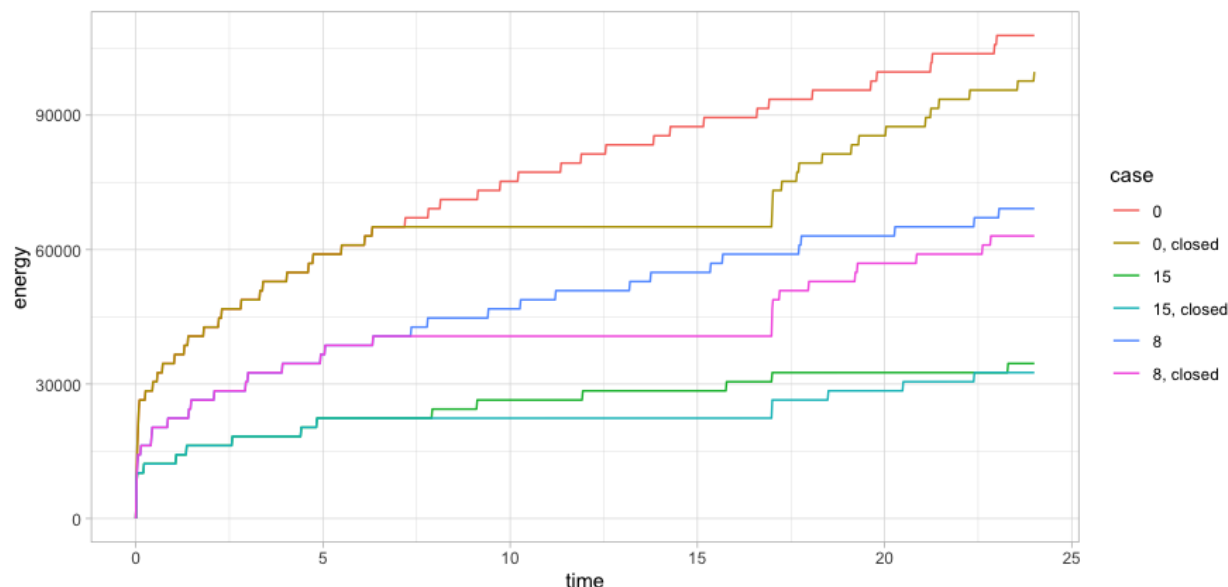


Zdecydowanie więcej ciepła zostało zużyte gdy kaloryfer znajdował się pod oknem. Z drugiej strony, z wykresu odczytać można że przy takim umiejscowieniu grzejnika najpierw ocieplił on pokój, a następnie starał się utrzymywać odpowiednią temperaturę, co jest pożądanym zachowaniem.

Gdy grzejnik nie był pod oknami szybko ocieplał on przestrzeń wokół siebie, sprawiając tym samym że średnia temperatura w pokoju również szybko rosła, stąd dużo mniej zużytego ciepła w tym przypadku. Natomiast sprawiło to, że w pokoju występowały bardzo duże różnice temperatury.

Rozwiązanie problemu 2

Animowane heatmapy przedstawiające rozkład temperatury w czasie znajdują się w folderze *plots*. Dla temperatur początkowych 0, 8 i 15 są to odpowiednio pliki *problem2_0_closed.html* i *problem2_0.html*, *problem2_8_closed.html* i *problem2_8.html* oraz *problem2_15_closed.html* i *problem2_15.html*, gdzie słowo "closed" w nazwie oznacza, że heatmapa dotyczy przypadku gdy zamykamy kaloryfery przed wyjściem z domu. Poniżej natomiast zostały przedstawione wykresy funkcji zliczającej ciepło.



Im większa temperatura początkowa, tym większe zużycie energii, co jest zgodne z rzeczywistością. Na powyższym wykresie dobrze widać czas w którym kaloryfery były wyłączone. Po ich ponownym włączeniu zużycie energii rośnie gwałtowniej niż gdy grzały one cały czas.

W przypadku temperatury początkowej 0 i 8, całkowite zużycie energii po 24 godzinach było trochę mniejsze gdy kaloryfery były zamykane, jednak w ostatnim momencie ciepło w największych pokojach rozkładało się gorzej niż gdy pozostały one otwarte. Oznacza to, że jeśli obserwowalibyśmy proces w kolejnych czasach, to zużyte obu sytuacjach mogłyby być porównywalne. Dzieje się tak przy 15°C - końcowe rozkłady temperatur są mniej więcej podobne, tak samo jak ilość dostarczonego ciepła.

Ponadto, na heatmapach zauważyć można jak takie same kaloryfery zachowują się w różnych pomieszczeniach. Zastosowane kaloryfery dobrze poradziły sobie w mniejszych pokojach, natomiast dla tych o wymiarach 25 i 18 m^2 , ich moc była za słaba aby móc w krótkim czasie równomiernie ogrzać pomieszczenie.

Wnioski

Pierwszy problem dotyczył umiejscowienia kaloryfera w pokoju. Na podstawie obliczonych temperatur oraz ilości dostarczonego ciepła można stwierdzić, że kaloryfer znajdujący się pod oknami jest bardziej optymalnym rozwiązaniem niż ten na przeciwko nich. W pierwszej sytuacji rozłożenie temperatur w pokoju zdecydowanie jest bardziej równomierne, jednak dzieje się to kosztem wyższego zużycia energii. Z drugiej strony, kaloryfer który nie znajdował się pod oknami nie mógł równomiernie ogrzać pokoju, czyli nie spełniał prawidłowo swojej funkcji.

W drugim problemie analizowaliśmy czy warto wyłączać kaloryfery przed wyjściem z domu (na 10 godzin). Na podstawie zużycia energii oraz rozkładu temperatur końcowych możemy stwierdzić, że nie widać znacznej oszczędności przy wyłączaniu kaloryferów przed wyjściem z domu.