Zadanie 105

Pokaż, że $\{\wedge, \vee\}$ nie jest zupełny

① DEFINIUJĘ ZBIÓR $\mathcal{F}$

Niech $\mathcal{F}_{p,\wedge,\vee}$ będzie najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

- $p \in \mathcal{F}_{p,\wedge,\vee}$
- dla dowolnych $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_{p,\vee,\wedge}$, mamy $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}_{p,\vee,\wedge}$ oraz $(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}_{p,\vee,\wedge}$

Przy pomocy ind. strukturalnej udowodnię poniższy lemat:

② LEMAT 1

Dowolna formuła z $\mathcal{F}_{p,\vee,\wedge}$ jest równoważna formule p

③ DOWÓD (przez indukcję)

Korzystam z następującej zasady indukcji:

Niech $X \subseteq \mathcal{F}_{p,\vee,\wedge}$ t., że:

- $p \in X$
- dla dowolnych formuł φ i ψ, jeśli $\varphi \in X$ i $\psi \in X$.

Wtedy $X = \mathcal{F}_{p,\vee,\wedge}$

④ DEFINIUJĘ ZBIÓR X

$$X = \{\varphi \in \mathcal{F}_{p,\vee,\wedge} \mid \varphi \equiv p\}$$

⑤ Podstawa indukcji

Cel: pokazać, że $p \in X$

$p \equiv p$, zatem $p \in X$

⑥ KROK INDUKCYJNY

Weźmy dowolne formuły φ i ψ i załóżmy, że $\varphi \in X$ i $\psi \in X$.

Cel: pokazać, że $(\varphi \vee \psi) \in X$ oraz $(\varphi \wedge \psi) \in X$

$(\varphi \vee \psi) \overset{\text{zał}}{\equiv} (p \vee p) \equiv p$, skąd $(\varphi \vee \psi) \in X$

$(\varphi \wedge \psi) \overset{\text{zał}}{\equiv} (p \wedge p) \equiv p$, skąd $(\varphi \wedge \psi) \in X$

Na mocy zasady indukcji strukturalnej $X = \mathcal{F}_{p,\vee,\wedge}$, więc dowolna formuła φ zbudowana ze zmiennej zd. p oraz spójników $\wedge, \vee$ jest równoważna p.

⑦ Zał. nie wprost, że $\{\wedge, \vee\}$ jest zupełny:

oznacza to, że istnieje formuła φ zbudowana ze zmiennej zdaniowej p i spójników $\wedge, \vee$, opisująca funkcję boolowską $f_\perp : B \to B$, zdefiniowaną jako $f_\perp(T) = f_\perp(F) = F$.

Z lematu 1 wiemy, że $\varphi \equiv p$, ale wówczas przy wartościowaniu $\sigma(p) = T$ formuła p jest spełniona, a φ nie, bo dla $\sigma(p) = T$, $\hat{\sigma}(\varphi) = F$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem, że $p \equiv \varphi$.

Stąd: nie istnieje formuła φ zbudowana tylko ze zmiennej zdaniowej p oraz spójników $\wedge, \vee$, zatem zbiór spójników $\{\vee, \wedge\}$ nie jest zupełny $\square$