

Homework 13/03

Joan Pau Condal Marco

Exercici 1: Demuestra que f^* es lineal.

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal, definim f^* de la següent manera:

$$\begin{aligned} f^* : F^* &\longrightarrow E^* \\ \omega &\mapsto \omega \circ f \end{aligned}$$

Donada la definició de f^* , demostrarem les dues propietats per veure que l'aplicació és lineal.

Siguin $w, v \in F^*$ dues aplicacions lineals, sabem que:

$$\begin{aligned} f^*(w + v) &= (w + v) \circ f = (w + v)(f) = \\ w(f) + v(f) &= w \circ f + v \circ f = f^*(w) + f^*(v) \end{aligned}$$

D'on queda demostrada la primera propietat de la linealitat.

Per la segona propietat, considerarem $\alpha \in \mathbb{R}$ i $w \in F^*$ aplicació lineal. Aleshores, per definició de f^* sabem que:

$$\begin{aligned} f^*(\alpha w) &= (\alpha w) \circ f = (\alpha w)(f) = \\ \alpha w(f) &= \alpha(w \circ f) = \alpha f^*(w) \end{aligned}$$

D'on queda demostrada la linealitat de f^* .

Exercici 2: Demuestra el següent corol·lari:

$$C(\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*) = (C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2))^t$$

On C és la matriu de canvi de base; i $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ són dues bases de l'espai E de dimensió finita.

Recordem que si tenim l'aplicació lineal $f : E \longrightarrow F$ i definim $f^* : F^* \longrightarrow E^*$, aleshores

$$M_{\mathcal{B}_F^* \mathcal{B}_E^*}(f^*) = (M_{\mathcal{B}_E \mathcal{B}_F}(f))^t \quad (1)$$

Definim dues bases d'un espai E de dimensió finita i una base dual per cada base de E

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{v_1, \dots, v_n\} & \mathcal{B}_1^* &= \{v_1^*, \dots, v_n^*\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{u_1, \dots, u_n\} & \mathcal{B}_2^* &= \{u_1^*, \dots, u_n^*\} \end{aligned}$$

Definim ara l'endomorfisme f de E de la següent manera:

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ f(v_i) &\mapsto u_i, \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

D'aquesta manera, f és l'aplicació de canvi de base de \mathcal{B}_1 a \mathcal{B}_2 . Si aconseguim demostrar que f^* és la funció de canvi de base de \mathcal{B}_2^* a \mathcal{B}_1^* , per (1) haurem demostrat el corol·lari.

Per definició, f^* serà l'endomorfisme de E^* tal que

$$\begin{aligned} f^* : E^* &\longrightarrow E^* \\ \omega &\mapsto \omega \circ f \end{aligned}$$

Per demostrar que f^* és la funció de canvi de base, hem de demostrar que

$$f^*(u_i^*) = v_i^*, \forall i = 1, \dots, n$$

Per la definició de f^* sabem que

$$f^*(u_i^*)(v_j) = (u_i^* \circ f)(v_j) = u_i^*(f(v_j)) = u_i^*(u_j), \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2)$$

I de la igualtat (2) podem veure que

$$(u_i^* \circ f)(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \implies (u_i^* \circ f) = v_i^*, \forall i = 1, \dots, n$$

D'on concluïm que $f^*(u_i^*) = v_i^*, \forall i = 1, \dots, n$; que significa que f^* és la funció de canvi de base \mathcal{B}_2^* a \mathcal{B}_1^* , demostrant així el corol·lari.

Exercici 3: Si \mathcal{B} és una base de E , \mathcal{B}^* la seva base dual i \mathcal{B}^{**} la base dual de la base dual, demostra que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^{**}}(\Psi) = \mathbf{I}$$

la matriu identitat

Recordem de teoria les aplicacions ψ_u i Ψ :

$$\begin{aligned} \psi_u : E &\longrightarrow \mathbb{R} & \Psi : E &\longrightarrow E^{**} \\ \psi_u(\omega) &\mapsto \omega(u) & \Psi(u) &:= \psi_u \\ \psi_u &\in E^{**} \end{aligned}$$

Definim les bases dels tres espais de la següent manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{u_1, \dots, u_n\} \\ \mathcal{B}^* &= \{v_1, \dots, v_n\} \\ \mathcal{B}^{**} &= \{w_1, \dots, w_n\} \end{aligned}$$

Per la definició de matriu d'aplicació lineal, sabem que la columna i de la matriu $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^{**}}(\Psi)$ serà $\Psi(u_i) = \psi_{u_i}$. Aplicant la definició de ψ_{u_i} sabem que $\psi_{u_i}(v_j) = v_j(u_i), \forall j = 1, \dots, n$. Per tant

$$\psi_{u_i}(v_j) = v_j(u_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \implies \psi_{u_i} = w_i$$

Finalment, si representem cada ψ_{u_i} , $i = 1, \dots, n$ en coordenades de \mathcal{B}^{**} obtenim:

$$\begin{aligned}(\psi_{u_1})_{\mathcal{B}^{**}} &= (1, 0, \dots, 0) \\(\psi_{u_2})_{\mathcal{B}^{**}} &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\&\vdots \\(\psi_{u_n})_{\mathcal{B}^{**}} &= (0, \dots, 0, 1)\end{aligned}$$

I al construir la matriu de Ψ ens queda

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^{**}}(\Psi) = [\psi_{u_1}, \dots, \psi_{u_n}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$