Deures 24/02/2020

Joan Pau Condal Marco

13 de març de 2020

1 Enunciat:

Siguin E un espai vectorial i $F \subset E$ un subespai.

1. Prova que $f : E \to E/F$ definida com a $f(u) := u + F$ és una aplicació lineal.
2. Prova que f és epimorfisme.
3. Prova que $ker(f) = F$.

2 Demostració:

Per la definició de E/F sabem que $u + F = [u]$ i recordem també les definicions de $+_Q$ i $\cdot_Q$:

$$[u] +_Q [v] := [u + v]$$
$$\alpha \cdot_Q [u] = [\alpha u]$$
$$\forall u, v \in E, \alpha \in \mathbb{R}$$

2.1 Prova que f és aplicació lineal:

Siguin $u, v \in E$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha u + \beta v) = [\alpha u + \beta v] = [\alpha u] + [\beta v] = \alpha[u] + \beta[v] = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Per tant, queda demostrat que f és una aplicació lineal.

2.2 Prova que f és un epimorfisme:

Sabem que f és epimorfisme $\iff Im(f) = E/F$. Per la definició de $Im(f)$ sabem que:

$$Im(f) = \{f(u) : u \in E\} = \{[u] : u \in E\} = E/F$$

Com que $Im(f) = E/F \implies f$ és epimorfisme.

2.3 Prova que el nucli de f és F:

Per la definició de E/F sabem que $u \in F \iff [u] = [0]$.

2.3.1 Nucli és subconjunt de F:

Sigui u un vector qualsevol de $ker(f)$. Sabem que:

$$u \in ker(f) \implies f(u) = [0] \implies [u] = [0] \implies u \in F \implies ker(f) \subseteq F.$$

2.3.2 F és subconjunt del nucli de f:

Sigui u un vector qualsevol de F. Sabem que $f(u) = [0]$ ja que $u \in F$. Per tant, $u \in ker(f) \implies F \subseteq ker(f)$.

Com que $ker(f) \subseteq F$ i $F \subseteq ker(f) \implies F = ker(f)$.