Homework 20/03

1 Trobeu les equacions

1.1 $F = \langle(2,5,2),(1,0,1)\rangle \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 + 2y_3 \\ y_1 + y_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2y_1 + 5y_2 + 2y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases} \overset{y_1=1}{\Longrightarrow} B_{sol} = \langle(1,-1,3/2)\rangle \Longrightarrow x - y + \frac{3}{2}z$$

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + \frac{3}{2}z = 0\right\}$$

1.2 $F = \langle(1,1,0,1),(-1,0,1,0)\rangle \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_4 \\ -y_1 + y_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ -y_1 + y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\underline{y_1 = 1/y_2 = 1} \\ &y_3 = 1 \\ &y_4 = -y_1 - y_2 = -2 \\ &\Longrightarrow (1,1,1,2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\underline{y_1 = 1/y_2 = 0} \\ &y_3 = 1 \\ &y_4 = -y_1 - y_2 = -1 \\ &\Longrightarrow (1,0,1,-1) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow B_{sol} = \langle(1,1,1,2),(1,0,1,-1)\rangle \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z - 2t \\ x + y - z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x + y + z - 2t = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}\right\}$$

1.3 $F = \langle 1, x, x^4 + 1\rangle \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$

Considerem la base de $E = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ següent: $B_E = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$, i reescrivim els vectors generadors de F:

$$F = \langle(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(1,0,0,0,1)\rangle$$

Al ser F de dimensió 3, esperem dues equacions.

$$\begin{cases} y_1 \\ y_2 \\ y_1 + y_5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_1 + y_5 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_5 = 0 \end{cases}$$

Utilitzem y_3 i y_4 com a variables lliures:

$$\begin{aligned} &\underline{y_3 = 1/y_4 = 0} \\ &\Longrightarrow (0,0,1,0,0) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\underline{y_3 = 0/y_4 = 1} \\ &\Longrightarrow (0,0,0,1,0) \end{aligned}$$

D'on obtenim una base de solucions:

$$B_{sol} = \langle (0,0,1,0,0), (0,0,0,1,0) \rangle$$

I finalment trobem les equacions de F:

$$F = \left\{ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 4} : a_2 = 0, a_3 = 0 \right\}$$

2 Demostreu els apartats 2 i 4 del teorema 2:

Per la següent demostració utilitzarem la proposició 2 de la classe del 16/03 que deia:
Sigui $A \subset E$ i $B \subset E^*$

1. $A^\circ = \langle A \rangle^\circ$ i $^\circ B =^\circ \langle B \rangle$.
2. $^\circ(A^\circ) = \langle A \rangle$ i $(^\circ B)^\circ = \langle B \rangle$

Apartat 2 del teorema

Per demostrar l'apartat 2 del teorema, utilitzarem l'apartat 3 del mateix teorema que afirma

$$Ker(f) =^\circ (Im(f^*))$$

A partir d'aquí podem modificar la igualtat amb la proposició 2 recordada abans i obtenir

$$^\circ(Im(f^*)) = Ker(f) \implies (^\circ(Im(f^*)))^\circ = (Ker(f))^\circ \implies Im(f^*) = (Ker(f))^\circ \; \square$$

Apartat 4 del teorema

Anàlogament, amb l'apartat 1 del mateix teorema podem demostrar l'apartat 4

$$(Im(f))^\circ = Ker(f^*) \implies {}^\circ((Im(f))^\circ) =^\circ (Ker(f^*)) \implies Im(f) =^\circ (Ker(f^*)) \; \square$$

D'on queden demostrats els apartats 2 i 4 de la proposició.