Homework 13/03
Joan Pau Condal Marco

<u>Exercici 1:</u> Demostra que f^* és lineal.

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal, definim f^* de la següent manera:

$$f^* : F^* \longrightarrow E^*$$
$$\omega \mapsto \omega \circ f$$

Donada la definició de f^*, demostrarem les dues propietats per veure que l'aplicació és lineal.

Siguin $w, v \in F^*$ dues aplicacions lineals, sabem que:

$$f^*(w+v) = (w+v) \circ f = (w+v)(f) =$$
$$w(f) + v(f) = w \circ f + v \circ f = f^*(w) + f^*(v)$$

D'on queda demostrada la primera propietat de la linealitat.

Per la segona propietat, considerarem $\alpha \in \mathbb{R}$ i $w \in F^*$ aplicació lineal. Aleshores, per definició de f^* sabem que:

$$f^*(\alpha w) = (\alpha w) \circ f = (\alpha w)(f) =$$
$$\alpha w(f) = \alpha(w \circ f) = \alpha f^*(w)$$

D'on queda demostrada la linealitat de f^*.

<u>Exercici 2:</u> Demostra el següent corol·lari:

$$C(\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*) = (C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2))^t$$

On C és la matriu de canvi de base; i $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ són dues bases de l'espai E de dimensió finita.

Recordem que si tenim l'aplicació lineal $f : E \longrightarrow F$ i definim $f^* : F^* \longrightarrow E^*$, aleshores

$$M_{\mathcal{B}_{F^*}\mathcal{B}_{E^*}}(f^*) = (M_{\mathcal{B}_E\mathcal{B}_F}(f))^t \tag{1}$$

Siguin $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ bases de E i $\mathcal{B}_1^*$ i $\mathcal{B}_2$ les seves bases duals. Definim ara l'endomorfisme f

$$f : E \longrightarrow E$$
$$f(u) \mapsto u$$

que és l'aplicació identitat i comprovem que f^* també ho és:

$$f^* : E^* \longrightarrow E^*$$
$$f^*(\omega) = \omega \circ f = \omega \circ id = \omega$$

I com que tant f com f^* són l'aplicació identitat, al escriure les seves matrius obtenim

$$\begin{cases} M_{\mathcal{B}_2^*\mathcal{B}_1^*}(f^*) = M_{\mathcal{B}_2^*\mathcal{B}_1^*}(id^*) = C(\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*) \\ M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(f) = M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id) = C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \end{cases} \overset{(1)}{\Longrightarrow} C(\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*) = (C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2))^t$$

<u>Exercici 3:</u> **Si $\mathcal{B}$ és una base de $\boldsymbol{E}$, $\mathcal{B}^*$ la seva base dual i $\mathcal{B}^{**}$ la base dual de la base dual, demostra que**

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^{**}}(\Psi) = \mathbf{I}$$

la matriu identitat

Recordem de teoria les aplicacions ψ_u i Ψ:

$$\begin{aligned} \psi_u &: E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \psi_u(\omega) &\mapsto \omega(u) \\ \psi_u &\in E^{**} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \Psi &: E \longrightarrow E^{**} \\ \Psi(u) &:= \psi_u \end{aligned}$$

Definim les bases dels tres espais de la següent manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{u_1, \ldots, u_n\} \\ \mathcal{B}^* &= \{v_1, \ldots, v_n\} \\ \mathcal{B}^{**} &= \{w_1, \ldots, w_n\} \end{aligned}$$

Per la definició de matriu d'aplicació lineal, sabem que la columna i de la matriu $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^{**}}(\Psi)$ serà $\Psi(u_i) = \psi_{u_i}$. Aplicant la definició de ψ_{u_i} sabem que $\psi_{u_i}(v_j) = v_j(u_i), \forall j = 1, \ldots, n$. Per tant

$$\psi_{u_i}(v_j) = v_j(u_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \implies \psi_{u_i} = w_i$$

Finalment, si representem cada ψ_{u_i}, $i = 1, \ldots, n$ en coordenades de $\mathcal{B}^{**}$ obtenim:

$$\begin{aligned} (\psi_{u_1})_{\mathcal{B}^{**}} &= (1, 0, \ldots, 0) \\ (\psi_{u_2})_{\mathcal{B}^{**}} &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ (\psi_{u_n})_{\mathcal{B}^{**}} &= (0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

I al construir la matriu de Ψ ens queda

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}^{**}}(\Psi) = [\psi_{u_1}, \ldots, \psi_{u_n}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$