Apartats 1 i 2:

Siguin

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{bmatrix} \text{ i } B = M_{\mathcal{B}}(f) - x \cdot I_n = (b_j^i)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\cdots,n}}$$

Per la definició del polinomi característic de *f*, sabem que

$$p_f(x) := det(M_{\mathcal{B}} - x \cdot I_n) = det(B)$$

Podem aplicar la definició de determinant a la definició anterior i obtenim

$$p_f(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma \prod_{i=1}^{n} b_i^{\sigma(i)}$$

On S_n és e conjunt de totes les permutacions $\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ i ϵ_σ és el signe de la permutació σ. Ara podem descomposar l'equació anterior en dos termes de la manera següent:

$$p_f(x) = \prod_{i=1}^{n} (a_i^i - x) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq id}} \epsilon_\sigma \prod_{i=1}^{n} b_i^{\sigma(i)}$$

D'aquesta descomposició podem observar que $p_f(x)$ està format per dos termes. El primer terme és $\prod_{i=1}^{n}(a_i^i - x)$, un polinomi de grau n, amb n arrels: $a_1^1, \ldots, a_n^n$; i el segon terme és un sumatori de polinomis de grau estrictament menor que *n-1*, ja que $\sigma = id$ és l'única permutació en S_n tal que el productori de $b_i^{\sigma(i)}$, $i = 1, \ldots, n$ genera un polinomi de grau n i no existeix cap permutació que agafi n-1 elements de la diagonal.
Com que el primer terme té coeficient de grau n i el segon no en té, podem afirmar que aquest terme no s'anularà mai i $p_f(x)$ serà un sumatori d'un polinomi de grau n i $n! - 1$ polinomis de grau estrictament menor que *n-1*. D'aquí deduïm que $p_f(x)$ és un polinomi i és de grau n.

Apartat 3:

Apartats 3.1 i 3.2:

Per demostrar els apartats 3.1 i 3.2 utilitzarem inducció. Recordem que els coeficients de x^n i x^{n-1} només depenen del productori dels elements de la diagonal de la matriu $M_{\mathcal{B}} - x \cdot I_n$; per tant, si considerem els dos polinomis

$$p_f(x) \qquad\qquad (a_1^1 - x) \cdots (a_n^n - x)$$

Sabem que els seus coeficients de x^n i x^{n-1} seran els mateixos. Sabent això, farem la demostració per inducció considerant $p_f(x) = (a_1^1 - x) \cdots (a_n^n - x)$.
Inducció sobre n:
n = 1:
Per $n = 1$ sabem que $M_{\mathcal{B}} = (a_1^1)$, per tant, $p_f(x) = det((a_1^1 - x \cdot I_1)) = (a_1^1 - x)$.
Podem observar que es compleixen les dues propietats:

$$p_1 = -1 = (-1)^n$$

$$p_0 = a_1^1 = (-1)^{n-1} \cdot a_1^1 = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{1} a_i^i = (-1)^{n-1} tr(A)$$

Suposem ara que les propietats es compleixen per $n-1$
<u>Per n:</u>
Considerem p'_f el polinomi de $n-1$ de la forma

$$p'_f(x) = (a_1^1 - x)(a_2^2 - x)\cdots(a_{n-1}^{n-1}) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$$

I com que sabem que es compleixen les dues propietats, el podem reescriure de la forma següent:

$$p'_f(x) = c_0 + \cdots + (-1)^{n-2}tr(A_{n-1})x^{n-2} + (-1)^{n-1}x^{n-1}$$

I ara podem construir el polinomi de grau n a partir de p'_f de la manera següent:

$$p_f(x) = (a_1^1 - x)\cdots(a_{n-1}^{n-1} - x)(a_n^n - x) = p'_f(x)(a_n^n - x)$$

Substituïnt $p'_f(x)$ i operant una mica obtenim

$$\begin{aligned}
p_f(x) &= (c_0 + \cdots + (-1)^{n-2}tr(A_{n-1})x^{n-2} + (-1)^{n-1}x^{n-1})(a_n^n - x) \\
&= d_0 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n^n x^{n-1} + (-1)^{n-2}tr(A_{n-1})x^{n-2}(-x) + (-1)^{n-1}x^{n-1}(-x) \\
&= d_0 + \cdots + \left[(-1)^{n-1}a_n^n + (-1)^{n-1}tr(A_{n-1})\right]x^{n-1} + (-1)^n x^n \\
&= d_0 + \cdots + \left[(-1)^{n-1}(a_n^n + tr(A_{n-1}))\right]x^{n-1} + (-1)^n x^n \\
&= d_0 + \cdots + (-1)^{n-1}tr(A)x^{n-1} + (-1)^n x^n
\end{aligned}$$

D'on observem que també es compleixen les dues propietats, demostrant que les proposicions 3.1 i 3.2 són certes.

Apartat 3.3:

Sigui k, $0 \leq k \leq n, k \neq n-1$, el nombre d'elements de la diagonal de $B = M_{\mathcal{B}}(f) - x \cdot I_n$ que hi ha al productori $\prod_{i=1}^n b_i^{\sigma(i)}$, per qualsevol $\sigma \in S_n$. Aleshores, podem veure que el terme independent del polinomi $\prod_{i=1}^n b_i^{\sigma(i)}$ és $\prod_{i=1}^n a_i^{\sigma(i)}$.
Aplicant aquesta propietat a la definició del polinomi característic, podem veure que el seu terme independent vé donat per

$$p_0 = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma \prod_{i=1}^n a_i^{\sigma(i)} = det(A)$$

Apartat 4:

Sigui $B = C^{-1}MC - x \cdot I_n$, podem reorganitzar els seus termes de manera que quedi

$$B = C^{-1}MC - x \cdot I_n = C^{-1}MC - C^{-1}x \cdot I_nC = C^{-1}(M - x \cdot I_n)C$$

I aplicant les propietats dels determinants obtenir

$$\begin{aligned}
p_{C^{-1}MC}(x) &= det(B) = det(C^{-1}(M - x \cdot I_n)C) = det(C^{-1}) \cdot det(M - x \cdot I_n) \cdot det(C) \\
&= det(C^{-1}C) \cdot det(M - x \cdot I_n) = det(M - x \cdot I_n) = p_M(x)
\end{aligned}$$

D'on queda demostrat que $p_{C^{-1}MC}(x) = p_M(x)$