

Deures 10/02/2020

Joan Pau Condal Marco

24 de febrer de 2020

Enunciat:

Considerem en \mathbb{R}^n les operacions definides com:

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n) +^* (b_1, \dots, b_n) &:= (a_1 +_{\mathbb{R}} b_1 - 1, \dots, a_n +_{\mathbb{R}} b_n - 1) \\ \alpha \cdot^* (a_1, \dots, a_n) &:= (\alpha \cdot_{\mathbb{R}} (a_1 - 1) + 1, \dots, \alpha \cdot_{\mathbb{R}} (a_n - 1) + 1)\end{aligned}$$

Prova que $(\mathbb{R}^n, +^*, \cdot^*)$ és un espai vectorial. Caracteritza al vector nul de \mathbb{R}^n , i al vector oposat de (a, b) .

Demostració:

Per demostrar que $(\mathbb{R}^n, +^*, \cdot^*)$ és un espai vectorial haurem de demostrar que es compleixen les vuit condicions de les dues operacions $(+^*, \cdot^*)$.

Per les demostracions següents considerarem:

$$\begin{aligned}a &= (a_1, \dots, a_n) \\ b &= (b_1, \dots, b_n) \\ c &= (c_1, \dots, c_n)\end{aligned} \quad \begin{aligned}a, b, c &\in \mathbb{R}^n \\ \alpha, \beta &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

1. $+^*$ és associativa:

Hem de demostrar que $(a +^* b) +^* c = a +^* (b +^* c)$. Per definició de $+^*$ tenim que:

$$\begin{aligned}(a +^* b) +^* c &= ((a_1 + b_1 - 1) + c_1 - 1, \dots, (a_n + b_n - 1) + c_n - 1) = \\ &= (a_1 + b_1 - 1 + c_1 - 1, \dots, a_n + b_n - 1 + c_n - 1) = \\ &= (a_1 + (b_1 + c_1 - 1) - 1, \dots, a_n + (b_n + c_n - 1) - 1) = \\ &= a +^* (b +^* c).\end{aligned}$$

D'on queda demostrada la propietat associativa.

2. $+^*$ és commutativa

Hem de demostrar que $a +^* b = b +^* a$. Utilitzant la definició de $+^*$ trobem que:

$$\begin{aligned}a +^* b &= (a_1 + b_1 - 1, \dots, a_n + b_n - 1) = \\ &= (b_1 + a_1 - 1, \dots, b_n + a_n - 1) = b +^* a.\end{aligned}$$

D'on trobem que $+^*$ és commutativa.

3. Vector nul

Per demostrar que existeix un vector nul, hem de trobar $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que $a +^* \mathbf{0} = a$. Sigui $\mathbf{0} = (b_1, \dots, b_n)$, aplicant la definició de $+^*$ tenim:

$$\begin{aligned}a +^* \mathbf{0} &= (a_1 + b_1 - 1, \dots, a_n + b_n - 1) = (a_1, \dots, a_n) = a \\ \implies a_1 + b_1 - 1 &= a_1, \dots, a_n + b_n - 1 = a_n \\ \implies b_1 &= 1, \dots, b_n = 1 \\ \implies \mathbf{0} &= (1, \dots, 1)\end{aligned}$$

Del procediment podem veure que es compleix la propietat del vector nul i aquest és $\mathbf{0} = (1, \dots, 1)$

4. Suma de l'invers

La quarta propietat que hem de demostrar és que $\forall a \in \mathbb{R}^n$, es compleix $a +^* (-1) \cdot^* a = \mathbf{0}$. Per demostrar-ho aplicarem la definició de $+^*$ i de \cdot^* :

$$\begin{aligned} a +^* (-1) \cdot^* a &= a +^* (-1 \cdot (a_1 - 1) + 1, \dots, -1 \cdot (a_n - 1) + 1) = \\ &= a +^* (-a_1 + 1 + 1, \dots, -a_n + 1 + 1) = \\ &= a +^* (2 - a_1, \dots, 2 - a_n) = \\ &= (a_1 + (2 - a_1) - 1, \dots, a_n + (2 - a_n) - 1) = \\ &= (1, \dots, 1) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

De la demostració observem també que el vector invers de un $a \in \mathbb{R}^n$ qualsevol és $-a = (2 - a_1, \dots, 2 - a_n)$.

5. Propietat distributiva de $+^*$ i \cdot^* :

La següent propietat a demostrar és la distributiva de $+^*$ i \cdot^* : $\alpha \cdot^* (a +^* b) = (\alpha \cdot^* a) +^* (\alpha \cdot^* b)$. Per demostrar-ho, començarem desenvolupant les dues equacions per separat.

Primer de tot, desenvoluparem l'equació $\alpha \cdot^* (a +^* b)$. Aplicant la definició de $+^*$ obtenim:

$$\alpha \cdot^* (a_1 + b_1 - 1, \dots, a_n + b_n - 1)$$

I aplicant la definició de \cdot^* i desenvolupant arribem a

$$\begin{aligned} &(\alpha \cdot (a_1 + b_1 - 1 - 1) + 1, \dots, \alpha \cdot (a_n + b_n - 1 - 1) + 1) = \\ &= (\alpha \cdot (a_1 + b_1 - 2) + 1, \dots, \alpha \cdot (a_n + b_n - 2) + 1) \end{aligned} \quad (1)$$

Tot seguit, desenvoluparem l'equació $(\alpha \cdot^* a) +^* (\alpha \cdot^* b)$:

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot^* a) +^* (\alpha \cdot^* b) &= (\alpha(a_1 - 1) + 1, \dots, \alpha(a_n - 1) + 1) + (\alpha(b_1 - 1) + 1, \dots, \alpha(b_n - 1) + 1) = \\ &= ((\alpha(a_1 - 1) + 1) + (\alpha(b_1 - 1) + 1) - 1, \dots, (\alpha(a_n - 1) + 1) + (\alpha(b_n - 1) + 1) - 1) = \\ &= (\alpha(a_1 + b_1 - 1 - 1) + 1 + 1 - 1, \dots, \alpha(a_n + b_n - 1 - 1) + 1 + 1 - 1) = \\ &= (\alpha(a_1 + b_1 - 2) + 1, \dots, \alpha(a_n + b_n - 2) + 1) \end{aligned} \quad (2)$$

De l'equació (1) i (2) obtenim que $\alpha \cdot^* (a +^* b) = (\alpha \cdot^* a) +^* (\alpha \cdot^* b)$, demostrant la cinquena propietat.

6. Propietat distributiva de $+_{\mathbb{R}}$ i \cdot^* :

La sisena propietat que hem de demostrar és la distributiva de $+_{\mathbb{R}}$ i \cdot^* : $(\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) \cdot^* a = \alpha \cdot^* a +^* \beta \cdot^* a$. La demostració la farem similar a la secció anterior, desenvolupant per separat la igualtat.

Primer de tot desenvoluparem $(\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) \cdot^* a$:

$$\begin{aligned} (\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) \cdot^* a &= ((\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) \cdot (a_1 - 1) + 1, \dots, (\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) \cdot (a_n - 1) + 1) = \\ &= ((\alpha a_1 - \alpha + \beta a_1 - \beta) + 1, \dots, (\alpha a_n - \alpha + \beta a_n - \beta) + 1) \end{aligned} \quad (3)$$

I tot seguit desenvoluparem la segona part de l'equació:

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot^* a) +^* (\beta \cdot^* a) &= (\alpha(a_1 - 1) + 1, \dots, \alpha(a_n - 1) + 1) + (\beta(a_1 - 1) + 1, \dots, \beta(a_n - 1) + 1) = \\ &= ((\alpha(a_1 - 1) + 1) + (\beta(a_1 - 1) + 1) - 1, \dots, (\alpha(a_n - 1) + 1) + (\beta(a_n - 1) + 1) - 1) = \\ &= (\alpha a_1 - \alpha + \beta a_1 - \beta + 1, \dots, \alpha a_n - \alpha + \beta a_n - \beta + 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Finament, comparant les equacions (3) i (4), veiem que la igualtat es compleix.

7. Propietat associativa del producte:

La setena propietat, l'associativa del producte, ens diu que \cdot^* ha de complir: $(\alpha \cdot_{\mathbb{R}} \beta) \cdot^* a = \alpha \cdot^* (\beta \cdot^* a)$
Demostració:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot^* (\beta \cdot^* a) &= \alpha \cdot^* (\beta(a_1 - 1) + 1, \dots, \beta(a_n - 1) + 1) = \\ &= (\alpha(\beta(a_1 - 1) + 1 - 1) + 1, \dots, \alpha(\beta(a_1 - 1) + 1 - 1) + 1) = \\ &= (\alpha\beta(a_1 - 1) + 1, \dots, \alpha\beta(a_n - 1) + 1) = \\ &= (\alpha\beta) \cdot^* a.\end{aligned}\tag{5}$$

8. Element neutre del producte

Finalment, hem de comprovar que es compleix la propietat de l'element neutre del producte tal que $1 \cdot^* a = a$.
Demostració:

$$\begin{aligned}1 \cdot^* a &= (1 \cdot (a_1 - 1) + 1, \dots, 1 \cdot (a_n - 1) + 1) = \\ &= (a_1, \dots, a_n) = a\end{aligned}$$

Conclusió

Per les demostracions a l'apartat anterior, podem afirmar que $(\mathbb{R}^n, +^*, \cdot^*)$ és un espai vectorial. Per la demostració número (3.) veiem que el vector nul d'aquest subespai és: $\mathbf{0} = (1, \dots, 1)$; i per la demostració (4.) veiem que el vector oposat d'un (a, b) és $(2 - a, 2 - b)$.