Deures 24/02/2020

Joan Pau Condal Marco

8 de març de 2020

1 Enunciat:

Siguin $E = \mathbb{R}[X]_3$ i $F = \left\{p(x) \in E : \int_0^1 p(x)dx = 0\right\}$.

1. Prova que F és un subespai d' E.
2. Prova que $\left\{2x - 1, 3x^2 - 1, 4x^3 - 1\right\}$ és una base de F.
3. Prova que $\left\{2x - 1, 3x^2 - 1, 4x^3 - 1, 1\right\}$ és una base de E.
4. Per $p(x) \in E$, es té que existeix $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $[p(x)] = \alpha \cdot [1]$ en E/F. Prova que $\alpha = \int_0^1 p(x)dx$.

2 Demostració:

2.1 Prova que F és un subespai d' E.

Per demostrar que F és un subespai de E, cal veure que la suma de dos element de F està a F; que el producte d'un escalar per un element de F és de F i que $F \neq \varnothing$.

2.1.1 $\forall u, v \in F, u + v \in F$:

Siguin $p(x), q(x) \in F$. Sabem que:

$$\int_0^1 p(x)dx = 0,\ \int_0^1 q(x)dx = 0$$

Sigui $h(x) = p(x) + q(x)$. Tenim:

$$\int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 \left(p(x) + q(x)\right)dx = \int_0^1 p(x)dx + \int_0^1 q(x)dx = 0 + 0 = 0.$$

D'on veiem que tot element que sigui suma de dos elements de F també pertany a F.

2.1.2 $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in F, \alpha \cdot u \in F$:

Siguin $p(x) \in F$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, sabem que:

$$\int_0^1 p(x)dx = 0$$

Sigui $h(x) = \alpha \cdot p(x)$:

$$\int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 (\alpha \cdot p(x))\, dx = \alpha \cdot \int_0^1 p(x)dx = \alpha \cdot 0 = 0.$$

2.1.3 $F \neq \varnothing$:

Sigui $p(x) = 0$

$$\int_0^1 p(x)dx = [C]_0^1 = C - C = 0.$$

2.2 Prova que $\{2x-1, 3x^2-1, 4x^3-1\}$ és una base de F:

Per demostrar que $\left\{2x-1, 3x^2-1, 4x^3-1\right\}$ són base de F cal veure que pertanyen a F, que generen i que són linealment independents.

2.2.1 $\left\{2x-1, 3x^2-1, 4x^3-1\right\}$ pertanyen a F:

$$\int_0^1 (2x-1)\, dx = \left[\frac{2x^2}{2} - x\right]_0^1 = \left(\frac{2}{2} - 1\right) - 0 = 0$$
$$\int_0^1 \left(3x^2-1\right) dx = \left[\frac{3x^3}{3} - 1\right]_0^1 = \left(\frac{3}{3} - 1\right) - 0 = 0$$
$$\int_0^1 \left(4x^3-1\right) dx = \left[\frac{4x^4}{4} - 1\right]_0^1 = \left(\frac{4}{4} - 1\right) - 0 = 0$$

2.2.2 $\left\{2x-1, 3x^2-1, 4x^3-1\right\}$ generen F:

Siguin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},\ p(x) = \alpha_1 \cdot (2x-1) + \alpha_2 \cdot (3x^2-1) + \alpha_3 \cdot (4x^3-1) \in E$:

$$\int_0^1 p(x)dx =$$
$$= \int_0^1 (\alpha_1 \cdot (2x-1))\, dx + \int_0^1 \left(\alpha_2 \cdot (3x^2-1)\right) dx + \int_0^1 \left(\alpha \cdot (4x^3-1)\right) dx =$$
$$= \int_0^1 (\alpha_1 \cdot (2x-1))\, dx + \int_0^1 \left(\alpha_2 \cdot (3x^2-1)\right) dx + \int_0^1 \left(\alpha_3 \cdot (4x^3-1)\right) dx =$$
$$= \alpha_1 \cdot \int_0^1 (2x-1)\, dx + \alpha_2 \cdot \int_0^1 \left(3x^2-1\right) dx + \alpha_3 \cdot \int_0^1 \left(4x^3-1\right) dx =$$
$$= \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

Per tant, $p(x) \in F$, d'on queda demostrat que $\left\{2x-1, 3x^2-1, 4x^3-1\right\}$ generen F.

2.2.3 $\left\{2x-1, 3x^2-1, 4x^3-1\right\}$ són linealment independents:

Per demostrar que $\left\{2x-1, 3x^2-1, 4x^3-1\right\}$ són linealment independents, hem de demostrar que l'única solució a l'equació:

$$\alpha_1 \cdot (2x-1) + \alpha_2 \cdot (3x^2-1) + \alpha_3 \cdot (4x^3-1) = 0 \tag{1}$$

Amb $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ és la solució $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Com que els tres polinomis de la base tenen grau diferent i els α que busquem pertanyen als nombres reals, no existeixen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ que donin una solució nula a l'equació (1). Per tant, l'única solució possible és $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$; d'on queda demostrat que són linealment independents i, per tant, base de F.

2.3 Prova que $\{2x-1, 3x^2-1, 4x^3-1, 1\}$ és una base de E:

Com que $dim(E) = 4$, i $\left\{2x-1, 3x^2-1, 4x^3-1, 1\right\}$ té quatre polinomis, si aconseguim demostrar que són linealment independents, quedarà demostrat que són base. Per veure si són linealment independents, farem reducció a la matriu que formen els coeficients dels polinomis:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Com podem veure a la reducció (2), els vectors del conjunt $\left\{2x-1, 3x^2-1, 4x^3-1, 1\right\}$ són linealment independents, i per tant, base de E.

2.4 Per $p(x) \in E$, es té que existeix $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $[p(x)] = \alpha \cdot [1]$ en E/F. Prova que $\alpha = \int_0^1 p(x)dx$:

$$\begin{aligned} [p(x)] &= \{p(x) + q(x) : q(x) \in F\} = \\ &= \{h(x) : h(X) = p(x) + q(x), q(x) \in F\} \end{aligned}$$