Joan Pau Condal Marco

Homework 23/03

Apartats 1 i 2:

Siguin

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{bmatrix} \in M(n,n,\mathbb{R}) \qquad \text{i} \qquad B = M_{\mathcal{B}}(f) - x \cdot I_n = (b_j^i)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\cdots,n}}$$

hem de demostrar que

$$p_f(x) := det(f - xI_n) \in \mathbb{R}[x] \qquad \text{i} \qquad gr(p_f(x)) = n$$

Per la definició del polinomi característic de *f*, sabem que

$$p_f(x) := det(M_{\mathcal{B}} - x \cdot I_n) = det(B) \tag{1}$$

Podem aplicar la definició de determinant a (1) i obtenim

$$p_f(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma \prod_{i=1}^{n} b_i^{\sigma(i)} \tag{2}$$

On S_n és e conjunt de totes les permutacions $\sigma : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ i ϵ_σ és el signe de la permutació σ.
Ara podem descomposar (2) en dos termes, separant $\sigma = id$ de tot el conjunt S_n per obtenir

$$p_f(x) = \prod_{i=1}^{n} (a_i^i - x) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq id}} \epsilon_\sigma \prod_{i=1}^{n} b_i^{\sigma(i)} \tag{3}$$

Aquesta descomposició ens és molt útil ja que podem veure el polinomi $p_f(x)$ descomposat en una suma de $n!$ productoris (ja que $\#\{S_n\} = n!$). Cada productori generarà un polinomi de grau entre zero i n, ambdós inclosos. El grau del polinomi generat per cada productori dependrà de quants elements de la diagonal de B agafa la σ associada a aquell mateix productori.
La descomposició (3) està feta per veure $p_f(x)$ com a suma de dos termes. El primer terme, el productori associat a $\sigma = id$, genera un polinomi de grau n, i a coeficients reals, ja que la matriu pertany a $M(n, n, \mathbb{R})$. D'aquest primer terme veiem que $gr(p_f(x)) \leq n$. Per demostrar que el grau de $p_f(x)$ és n, hem d'assegurar que el coeficient de x^n no s'anul·li.
El segon terme de (3) és un sumatori de $n! - 1$ polinomis a coeficients reals. És fàcil veure que cap dels polinomis generats per aquest sumatori serà de grau superior a $n - 1$, ja que l'única permutació que agafa els n elements de la diagonal és $\sigma = id$ i no existeix cap permutació a S_n que agafi exactament $n - 1$ elements de la diagonal.
Per tant, com que de (3) veiem que $p_f(x)$ és la suma d'un polinomi de grau n i $n! - 1$ polinomis de grau estictament menor que $n - 1$, queda demostrat que és un polinomi a coeficients reals i de grau n.

Apartat 3:

Apartats 3.1 i 3.2:

Per demostrar els apartats 3.1 i 3.2 utilitzarem inducció. Recordem que els coeficients de x^n i x^{n-1} només depenen del productori dels elements de la diagonal de la matriu $M_{\mathcal{B}} - x \cdot I_n$; per tant, si considerem els dos polinomis

$$p_f(x) \qquad\qquad (a_1^1 - x) \cdots (a_n^n - x)$$

Sabem que els seus coeficients de x^n i x^{n-1} seran els mateixos. Sabent això, farem la demostració per inducció considerant $p_f(x) = (a_1^1 - x) \cdots (a_n^n - x)$.

<u>Inducció sobre n:</u>

<u>n = 1:</u>

Per $n = 1$ sabem que $M_{\mathcal{B}} = (a_1^1)$, per tant, $p_f(x) = det((a_1^1 - x \cdot I_1)) = (a_1^1 - x)$.

Podem observar que es compleixen les dues propietats:

$$p_1 = -1 = (-1)^n$$

$$p_0 = a_1^1 = (-1)^{n-1} \cdot a_1^1 = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{1} a_i^i = (-1)^{n-1} tr(A)$$

Suposem ara que les propietats es compleixen per $n - 1$

<u>Per n:</u>

Considerem p'_f el polinomi de $n - 1$ de la forma

$$p'_f(x) = (a_1^1 - x)(a_2^2 - x) \cdots (a_{n-1}^{n-1}) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

I com que sabem que es compleixen les dues propietats, el podem reescriure de la forma següent:

$$p'_f(x) = c_0 + \cdots + (-1)^{n-2} tr(A_{n-1}) x^{n-2} + (-1)^{n-1} x^{n-1}$$

on $tr(A_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^i$.

I ara podem construir el polinomi de grau n a partir de p'_f de la manera següent:

$$p_f(x) = (a_1^1 - x) \cdots (a_{n-1}^{n-1} - x)(a_n^n - x) = p'_f(x)(a_n^n - x)$$

Substituïnt $p'_f(x)$ i operant una mica obtenim

$$\begin{aligned}
p_f(x) &= (c_0 + \cdots + (-1)^{n-2} tr(A_{n-1}) x^{n-2} + (-1)^{n-1} x^{n-1}) \cdot (a_n^n - x) \\
&= d_0 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n^n x^{n-1} + (-1)^{n-2} tr(A_{n-1}) x^{n-2}(-x) + (-1)^{n-1} x^{n-1}(-x) \\
&= d_0 + \cdots + \left[(-1)^{n-1} a_n^n + (-1)^{n-1} tr(A_{n-1})\right] x^{n-1} + (-1)^n x^n \\
&= d_0 + \cdots + \left[(-1)^{n-1}(a_n^n + tr(A_{n-1}))\right] x^{n-1} + (-1)^n x^n \\
&= d_0 + \cdots + (-1)^{n-1} tr(A) x^{n-1} + (-1)^n x^n
\end{aligned}$$

D'on observem que també es compleixen les dues propietats, demostrant que les proposicions 3.1 i 3.2 són certes.

Apartat 3.3:

Per demostrar la propietat del determinant, analitzarem el terme independent dels polinomis del tipus $\prod_{i=1}^{n} b_i^{\sigma(i)}$, $\sigma \in S_n$, ja que la suma de tots aquests polinomis amb el seu signe corresponent és $p_f(x)$. Depenent de σ, el polinomi del productori pot tenir un grau o un altre, però és fàcil veure que sigui quin sigui el grau del polinomi, el seu terme independent serà $\epsilon_\sigma \prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}$.
Sabent que el terme independent serà la suma de tots aquests termes independents per tot $\sigma \in S_n$, podem reescriure el terme independent de $p_f(x)$ com

$$p_0 = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma \prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)} = det(A)$$

D'on queda demostrada l'última propietat.

Apartat 4:

Sigui $B = C^{-1}MC - xI_n$, podem reorganitzar els seus termes de manera que quedi

$$B = C^{-1}MC - x \cdot I_n = C^{-1}MC - C^{-1}x \cdot I_nC = C^{-1}(M - x \cdot I_n)C$$

I aplicant les propietats dels determinants obtenir

$$\begin{aligned} p_{C^{-1}MC}(x) &= det(B) = det(C^{-1}(M - x \cdot I_n)C) = det(C^{-1}) \cdot det(M - x \cdot I_n) \cdot det(C) \\ &= det(C^{-1}C) \cdot det(M - x \cdot I_n) = det(M - x \cdot I_n) = p_M(x) \end{aligned}$$

D'on queda demostrat que $p_{C^{-1}MC}(x) = p_M(x)$