Deures 10/02/2020

Joan Pau Condal Marco

20 de febrer de 2020

Enunciat:

Considerem en $\mathbb{R}^n$ les operacions definides com:

$$(a_1, \ldots, a_n) +^* (b_1, \ldots, b_n) := (a_1 +_{\mathbb{R}} b_1 - 1, \ldots, a_n +_{\mathbb{R}} b_n - 1)$$
$$\alpha \cdot^* (a_1, \ldots, a_n) := (\alpha \cdot_{\mathbb{R}} (a_1 - 1) + 1, \ldots, \alpha \cdot_{\mathbb{R}} (a_n - 1) + 1)$$

Prova que $(\mathbb{R}^n, +^*, \cdot^*)$ és un espai vectorial. Caracteritza al vector nul de $\mathbb{R}^n$, i al vector oposat d'un dau.

Demostració:

Per demostrar que $(\mathbb{R}^n, +^*, \cdot^*)$ és un espai vectorial haurem de demostrar que es compleixen les vuit condicions de les dues operacions $(+^*, \cdot^*)$.
Per les demostracions segents considerarem:

$$\begin{aligned} a &= (a_1, \ldots, a_n) \\ b &= (b_1, \ldots, b_n) \qquad\qquad a, b, c \in \mathbb{R}^n \\ c &= (c_1, \ldots, c_n) \end{aligned}$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1. $+^*$ és associativa:

Hem de demostrar que $(a +^* b) +^* c = a +^* (b +^* c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}^n$. Per definició de $+^*$ tenim que:

$$\begin{aligned} (a +^* b) +^* c &= ((a_1 + b_1 - 1) + c1 - 1, \ldots, (a_n + b_n - 1) + c_n - 1) = \\ &= (a_1 + b_1 - 1 + c_1 - 1, \ldots, a_n + b_n - 1 + c_n - 1) = \\ &= (a_1 + (b_1 + c_1 - 1) - 1, \ldots, a_n + (b_n + c_n - 1) - 1) = \\ &= a +^* (b +^* c). \end{aligned}$$

D'on queda demostrada la propietat associativa.

2. $+^*$ és commutativa

Hem de demostrar que $a +^* b = b +^* a, \forall a, b \in \mathbb{R}^n$. Utilitzant la definició de $+^*$ trobem que:

$$\begin{aligned} a +^* b &= (a_1 + b_1 - 1, \ldots, a_n + b_n - 1) = \\ &= (b_1 + a_1 - 1, \ldots, b_n + a_n - 1) = b +^* a. \end{aligned}$$

D'on trobem que $+^*$ és commutativa.

3. Vector nul

Per demostrar que existeix un vector nul, hem de trobar $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que $a + \vec{0} = a, \forall a \in \mathbb{R}^n$. Sigui $\vec{0} = (b_1, \ldots, b_n)$ aplicant la definició de $+^*$ tenim:

$$\begin{aligned} a + \vec{0} &= (a_1 + b_1 - 1, \ldots, a_n + b_n - 1) = (a_1, \ldots, a_n) = a \\ &\implies a_1 + b_1 - 1 = a_1, \cdots, a_n + b_n - 1 = a_n \\ &\implies b_1 = 1, \cdots, b_n = 1 \\ &\implies \vec{0} = (1, \ldots, 1) \end{aligned}$$

Del procediment podem veure que es compleix la propietat del vector nul i aquest és $\vec{0} = (1, \ldots, 1)$

4. Suma de l'invers

La quarta propietat que hem de demostrar és $\forall a \in \mathbb{R}^n,\ a +^* (-1) \cdot^* a = \vec{0}$. Per demostrar-ho aplicarem la deficició de $+^*$ i de $\cdot^*$:

$$\begin{aligned} a +^* (-1) \cdot^* a &= a +^* (-1 \cdot (a_1 - 1) + 1, \ldots, -1 \cdot (a_n - 1) + 1) = \\ &= a +^* (-a_1 + 1 + 1, \ldots, a_n + 1 + 1) = \\ &= a +^* (2 - a_1, \ldots, 2 - a_n) = \\ &= (a_1 + (2 - a_1) - 1, \ldots, a_n + (2 - a_n) - 1) = \\ &= (1, \ldots, 1) = \vec{0} \end{aligned}$$

De la demostració observem també que el vector invers de un $u \in \mathbb{R}^n$ qualsevol és $-u = (2 - a_1, \ldots, 2 - a_n)$.

5. Propietat distributiva de $\cdot^*$

La segent propietat a demostrar és l'associativa: $\alpha \cdot (u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \forall u, v \in E$.
Per demostrar-ho, comenarem desenvolupant les dues equacions per separat.
Sigui $u = (a_1, \ldots, a_n)$, $v = (b_1, \ldots, b_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$

Primer de tot, desenvoluparem l'equació $\alpha \cdot^* (u +^* v)$. Aplicant la definició de $+^*$ obtenim:

$$\alpha \cdot^* (a_1 + b_1 - 1, \ldots, a_n + b_n - 1)$$

I aplicant la definició de $\cdot^*$ i desenvolupant una mica arribem a

$$\begin{aligned} &(\alpha \cdot (a_1 + b_1 - 1 - 1) + 1, \ldots, \alpha \cdot (a_n + b_n - 1 - 1) + 1) = \\ &= (\alpha \cdot (a_1 + b_1 - 2) + 1, \ldots, \alpha \cdot (a_n + b_n - 2) + 1) \end{aligned} \tag{1}$$

Tot seguit, desenvoluparem l'equació $\alpha \cdot^* u +^* \alpha \cdot^* v$:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot^* u +^* \alpha \cdot^* &= (\alpha(a_1 - 1) + 1, \ldots, \alpha(a_n - 1) + 1) + (\alpha(b_1 - 1) + 1, \ldots, \alpha(b_n - 1) + 1) = \\ &= ((\alpha(a_1 - 1) + 1) + (\alpha(b_1 - 1) + 1) - 1, \ldots, (\alpha(a_n - 1) + 1) + (\alpha(b_n - 1) + 1) - 1) = \\ &= (\alpha(a_1 + b_1 - 1 - 1) + 1 + 1 - 1, \ldots, \alpha(a_n + b_n - 1 - 1) + 1 + 1 - 1) = \\ &= (\alpha(a_1 + b_1 - 2) + 1, \ldots, \alpha(a_n + b_n - 2) + 1) \end{aligned} \tag{2}$$

De l'equació (1) i (2) obtenim que $\alpha \cdot^* (u +^* v) = \alpha \cdot^* u +^* \alpha \cdot^* v$, demostrant la cinquena propietat.

6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha u + \beta u, \forall u \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$:

La sisena propietat que hem de demostrar és: $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha u + \beta u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u \in E$. La demostració la farem similar a la secció anterior, desenvolupant per separat la igualtat.
Primer de tot desenvoluparem $(\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) \cdot^* u, u = (a_1, \ldots, a_n)$:

$$\begin{aligned} (\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) \cdot^* u &= ((\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) \cdot (a_1 - 1) + 1, \ldots, (\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) \cdot (a_n - 1) + 1) = \\ &= ((\alpha a_1 - \alpha + \beta a_1 - \beta) + 1, \ldots, (\alpha a_n - \alpha + \beta a_n - \beta) + 1) = \end{aligned} \tag{3}$$

I tot seguit desenvoluparem la segona part de l'equació:

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot^* u) +^* (\beta \cdot^* u) &= (\alpha(a_1 - 1) + 1, \ldots, \alpha(a_n - 1) + 1) +^* (\beta(a_1 - 1) + 1, \ldots, \beta(a_n - 1) + 1) = \\ &= ((\alpha(a_1 - 1) + 1) + (\beta(a_1 - 1) + 1) - 1, \ldots, (\alpha(a_n - 1) + 1) + (\beta(a_n - 1) + 1) - 1) = \\ &= (\alpha a_1 - \alpha + \beta a_1 - \beta + 1, \ldots, \alpha a_n - \alpha + \beta a_n - \beta + 1). \end{aligned} \tag{4}$$

Finament, comparant les equacions (1) i (2), veiem que la igualtat es compleix.

7. Ttol 7

$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
Demostració:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta \cdot^* u) &= \alpha \cdot^* (\beta(a_1 - 1) + 1, \dots, \beta(a_n - 1) + 1) = \\ &= (\alpha(\beta(a_1 - 1) + 1 - 1) + 1, \dots, \alpha(\beta(a_1 - 1) + 1 - 1) + 1) = \\ &= (\alpha\beta(a_1 - 1) + 1, \dots, \alpha\beta(a_n - 1) + 1) = \\ &= (\alpha\beta) \cdot^* u.\end{aligned} \tag{5}$$

8. Element neutre del producte

$1 \cdot^* u = u, \forall u \in \mathbb{R}^n$.
Demostració:

$$\begin{aligned}1 \cdot^* u &= (1 \cdot (a_1 - 1) + 1, \dots, 1 \cdot (a_n - 1) + 1) = \\ &= (a_1, \dots, a_n) = u\end{aligned}$$