PROGRAMACIÓ CIENTÍFICA. CURS 2019-20. PRIMAVERA.
PRÀCTIQUES DE LABORATORI D'ORDINADORS

LLISTA 1. REPÀS D'ELEMENTS DE PROGRAMACIÓ

1 Programeu el *mètode dels trapezis* per a calcular aproximadament el valor d'una integral definida d'una funció contínua $f(x)$ en un interval compacte $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx T(n) \equiv \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right) ,$$

on $n > 0$ és un enter. La resta de variables són: $h = (b-a)/n$ és el pas entre els punts on s'avalua la funció, i $x_i = a + ih \;\; \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$ són aquests punts (equidistants).

S'han de llegir els valors a, b i n. Feu una funció d'usuari per a avaluar l'integrand $f(x)$.

Aplicació: $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = ln(x)\,ln(1-x)$, diverses n. El resultat exacte és $2 - \frac{\pi^2}{6}$. Podeu trobar alguna relació entre l'error en el resultat i el valor de n?

2 Es vol usar la *tècnica de Montecarlo* (principat amb un casino famós) per a calcular l'àrea d'una regió plana irregular. Per exemple, la regió consta dels punts (x, y) tals que

$$1 \le x \le 3 \;, \quad -1 \le y \le 4 \;, \quad x^3 + y^3 \le 29 \;, \quad \exp(x) \le 2 + y \;.$$

La idea a usar és la següent:

- La regió està continguda en un rectangle (de costats paral·lels als eixos) d'àrea $V = 10$ unitats.

- Es van generant punts aleatoris en aquest rectangle, i es van comptant els que pertanyen a la regió. Siguin n i k les quantitats respectives.

- Suposant que els punts aleatoris estan distribuïts uniformement en el rectangle, l'àrea de la regió es pot aproximar per $A = V\frac{k}{n}$.

Feu un programa que implementi aquest mètode. Ha de tenir una funció separada per a comprovar si un punt pertany, o no, a la regió.

Executeu-lo per a diversos valors de n. Podeu intuir quina és la relació entre l'error en la resposta i el valor n (per a n molt gran)?

Aquest mateix mètode es pot usar per a calcular el volum d'un sòlid irregular. Feu el cas:

$$0 \le x \le 1 \;, \quad 0 \le y \le 1 \;, \quad 0 \le z \le 1 \;, \quad x^2 + \sin(y) \le z \;, \quad x - z + \exp(y) \le 1 \;.$$

3 Molts problemes de probabilitat es poden resoldre aproximadament per *simulació*: aprofitant la velocitat de càlcul, es pot imitar la situació en l'ordinador moltes vegades, i deduir-ne conseqüències.

Mirem de resoldre d'aquesta manera el *problema de l'aniversari*: suposant que tots els anys tenen 365 dies, i que la probabilitat d'haver nascut un dia qualsevol de l'any és la mateixa per a tots els dies, ens preguntem: si es considera un grup de n persones, quina és la probabilitat que almenys 2 celebrin l'aniversari el mateix dia?

El programa ha de fer moltes vegades (M) el següent: generar n valors aleatoris entre 1 i 365, i mirar si n'hi ha de repetits. Llavors, la probabilitat buscada és, aproximadament, el quocient entre la quantitat de vegades que n'hi ha de repetits i M.

Quin és el mínim valor de n per al qual la probabilitat buscada és més gran que 0.5?

Nota. El resultat exacte del problema és $1 - (365)(364)(363)\ldots(365-n+1)/365^n$.

4 Escriviu un programa per a simular el fenomen següent. Una partícula es mou al pla (x, y) sota l'efecte d'una força aleatòria: Inicialment està situada a l'origen, i cada segon es mou una unitat en línia recta en una direcció aleatòria.

El programa ha de llegir un valor, n, de segons (per exemple, 1000), i ha d'escriure $n+1$ punts del pla: la posició inicial, i la posició al final de cada segon.

Redireccioneu la sortida estàndard del programa cap a un fitxer, i pinteu la trajectòria usant l'aplicació `gnuplot`.

5 Programeu el *mètode de Newton-Raphson* per a calcular les arrels reals d'un polinomi real $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, amb $a_n \neq 0$. Indicacions:

- Cal llegir el grau n (fitat per 20, per exemple) i els coeficients a_i's.

- Cal trobar un interval que contingui totes les arrels reals. Idea: Consulteu què és la cota de Cauchy $1 + \max\{|a_0/a_n|, |a_1/a_n|, \ldots, |a_{n-2}/a_n|, |a_{n-1}/a_n|\}$).

- Cal programar la detecció de canvis de signe de $p(x)$ quan x va variant amb un pas h fixat (per exemple, 10^{-2}) dins de l'interval trobat.

- Per a cada canvi de signe trobat, cal aplicar el mètode iteratiu de Newton-Raphson: $x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)}{p'(x_i)}$ $\forall i \geq 0$. Es pot prendre, com a x_0, el punt mig entre les dues abscisses que han definit el canvi de signe del polinomi.

- Cal fixar també: la precisió amb què es volen obtenir les arrels, i el nombre màxim d'iteracions permeses.

- Cal preveure totes les possibilitats: pot passar que el mètode no es pugui aplicar (divisió per 0), i pot passar que el mètode no sigui convergent.

- Feu una funció per a avaluar el polinomi, una altra per a avaluar la seva derivada, i una altra on es fan les iteracions del mètode de Newton-Raphson. Aquesta última retornarà un 0 si hi ha hagut convergència. En aquest cas, l'arrel s'ha de *retornar* mitjançant un paràmetre.

6 Feu un programa que llegeixi un valor n (enter positiu), llegeixi una permutació P del conjunt $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, comprovi que és una permutació correcta, i trobi i escrigui tots els *cicles* que conté la permutació P. Penseu bé un algorisme abans de començar a programar.

Per exemple, si $n = 8$ i $P = \{2, 4, 0, 1, 7, 3, 6, 5\}$ llavors hi ha 3 cicles: $(2, 0)$, $(4, 7, 5, 3, 1)$ i (6).

Feu una variació en la qual només es llegeixi n, i la permutació es generi aleatòriament.

7 Feu una funció que ordeni un vector d'enters pel *mètode de selecció*. Suposant que cal ordenar els elements de les posicions $0, 1, ..., n-1$, l'algorisme és:

- Es busca l'element més petit entre les posicions 0 i n-1, i s'intercanvia amb el de la posició 0.

- Es busca l'element més petit entre les posicions 1 i n-1, i s'intercanvia amb el de la posició 1.

- ...

- Es busca l'element més petit entre les posicions n-2 i n-1, i s'intercanvia amb el de la posició n-2.

A la funció `main` cal llegir el valor de n, cal generar aleatòriament els elements del vector a ordenar, i cal cridar la funció.

Com a comprovació, per a $n < 15$ feu escriure els vectors inicial i final.

Compteu també el temps d'execució. Podeu trobar alguna relació entre el temps i la dimensió?

8 Programeu el producte de dues matrius $n \times n$: $C = A\,B$. Les fórmules són:

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik} b_{kj} \ , \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n-1 \ , \quad \forall j = 0, 1, \ldots, n-1 \ .$$

Llegiu només la dimensió n (fitat per $N = 590$), i genereu aleatòriament els coeficients de les matrius A i B a l'interval $[-1, +1]$.

Cal fer 3 bucles repetitius "aniuats"(amb índexs i, j, k). Feu-ho de 6 maneres diferents (les 6 possibles permutacions de l'ordre dels bucles), i compareu els 6 temps d'execució.

Comproveu que si augmenteu N, no es pot executar el programa.