Deures 10/02/2020

Joan Pau Condal Marco

February 11, 2020

Enunciat:

Considerem en $\mathbb{R}^n$ les operacions definides com:

$$(a_1, \ldots, a_n) +^* (b_1, \ldots, b_n) := (a_1 +_{\mathbb{R}} b_1 - 1, \ldots, a_n +_{\mathbb{R}} b_n - 1)$$
$$\alpha \cdot^* (a_1, \ldots, a_n) := (\alpha \cdot_{\mathbb{R}} (a_1 - 1) + 1, \ldots, \alpha \cdot_{\mathbb{R}} (a_n - 1) + 1)$$

Prova que $(\mathbb{R}^n, +^*, \cdot^*)$ és un espai vectorial. Caracteritza al vector nul de $\mathbb{R}^n$, i al vector oposat d'un dau.

Demostració:

Per demostrar que $(\mathbb{R}^n, +^*, \cdot^*)$ és un espai vectorial haurem de demostrar que es compleixen els vuit condicions de les dues operacions:

1. $+^*$ és associativa:

Hem de demostrar que $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in E$. Per demostrar-ho agafarem vectors $u = (a_1, \ldots, a_n)$, $v = (b_1, \ldots, b_n)$ i $w = (c_1, \ldots, c_n)$, tots en $\mathbb{R}^n$. Per definició de $+^*$ tenim que:

$$(u + v) + w = ((a_1 + b_1 - 1) + c1 - 1, \ldots, (a_n + b_n - 1) + c_n - 1) =$$
$$(a_1 + b_1 - 1 + c_1 - 1, \ldots, a_n + b_n - 1 + c_n - 1) = (a_1 + (b_1 + c_1 - 1) - 1, \ldots, a_n + (b_n + c_n - 1) - 1) = u + (v + w)$$

D'on queda demostrada la propietat associativa.

2. $+^*$ és commutativa

Hem de demostrar que $u + v = v + u, \forall u, v \in E$. Per fer-ho, utilitzarem dos vectors qualsevols que anomenarem u i v $(u, v \in \mathbb{R}^n)$, on

$$u = (a_1, \ldots, a_n),\ v = (b_1, \ldots, b_n)$$

Utilitzant la definició de $+^*$ trobem que:

$$u + v = (a_1 + b_1 - 1, \ldots, a_n + b_n - 1) = (b_1 + a_1 - 1, \ldots, b_n + a_n - 1) = v + u$$

D'on trobem que $+^*$ és associativa.

3. Vector nul

Per demostrar que existeix un vector nul, hem de trobar $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ tal que $u + \vec{0} = u, \forall u \in \mathbb{R}^n$. Sigui $u = (a_1, \ldots, a_n)$ un vector qualsevol de $\mathbb{R}^n$ i $\vec{0} = (b_1, \ldots, b_n)$ aplicant la definició de $+^*$ tenim:

$$u + \vec{0} = (a_1 + b_1 - 1, \ldots, a_n + b_n - 1) = (a_1, \ldots, a_n) = u \implies a_1 + b_1 - 1 = a_1, \cdots, a_n + b_n - 1 = a_n \implies b_1 = 1, \cdots, b_n = 1 \implies \vec{0} = (1, \ldots, 1)$$

Aix podem veure que es compleix la propietat del vector nul i aquest és $\vec{0} = (1, \ldots, 1)$

4. Suma de l'invers

La quarta propietat que hem de demostrar és que $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $u +^* (-1) \cdot^* u = \vec{0}$. Per demostrar-ho aplicarem la deficició de $+^*$ i de $\cdot^*$:

$$\text{Sigui } u = (a_1, \ldots, a_n)$$
$$u +^* (-1) \cdot^* u = u +^* (-1 \cdot (a_1 - 1) + 1, \ldots, -1 \cdot (a_n - 1) + 1) = u +^* (-a_1 + 1 + 1, \ldots, a_n + 1 + 1) =$$
$$u +^* (2 - a_1, \ldots, 2 - a_n) = (a_1 + (2 - a_1) - 1, \ldots, a_n + (2 - a_n) - 1) = (1, \ldots, 1) = \vec{0}$$

5. Propietat distributiva de $\cdot^*$