

Deures 10/02/2020

Joan Pau Condal Marco

23 de febrer de 2020

## Enunciat:

Considerem en  $\mathbb{R}^n$  les operacions definides com:

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n) +^* (b_1, \dots, b_n) &:= (a_1 +_{\mathbb{R}} b_1 - 1, \dots, a_n +_{\mathbb{R}} b_n - 1) \\ \alpha \cdot^* (a_1, \dots, a_n) &:= (\alpha \cdot_{\mathbb{R}} (a_1 - 1) + 1, \dots, \alpha \cdot_{\mathbb{R}} (a_n - 1) + 1)\end{aligned}$$

Prova que  $(\mathbb{R}^n, +^*, \cdot^*)$  és un espai vectorial. Caracteritza al vector nul de  $\mathbb{R}^n$ , i al vector oposat de  $(a, b)$ .

## Demostració:

Per demostrar que  $(\mathbb{R}^n, +^*, \cdot^*)$  és un espai vectorial haurem de demostrar que es compleixen les vuit condicions de les dues operacions  $(+^*, \cdot^*)$ .

Per les demostracions següents considerarem:

$$\begin{aligned}a &= (a_1, \dots, a_n) \\ b &= (b_1, \dots, b_n) \\ c &= (c_1, \dots, c_n)\end{aligned} \quad \begin{aligned}a, b, c &\in \mathbb{R}^n \\ \alpha, \beta &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

### 1. $+^*$ és associativa:

Hem de demostrar que  $(a +^* b) +^* c = a +^* (b +^* c)$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n$ . Per definició de  $+^*$  tenim que:

$$\begin{aligned}(a +^* b) +^* c &= ((a_1 + b_1 - 1) + c_1 - 1, \dots, (a_n + b_n - 1) + c_n - 1) = \\ &= (a_1 + b_1 - 1 + c_1 - 1, \dots, a_n + b_n - 1 + c_n - 1) = \\ &= (a_1 + (b_1 + c_1 - 1) - 1, \dots, a_n + (b_n + c_n - 1) - 1) = \\ &= a +^* (b +^* c).\end{aligned}$$

D'on queda demostrada la propietat associativa.

### 2. $+^*$ és commutativa

Hem de demostrar que  $a +^* b = b +^* a$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$ . Utilitzant la definició de  $+^*$  trobem que:

$$\begin{aligned}a +^* b &= (a_1 + b_1 - 1, \dots, a_n + b_n - 1) = \\ &= (b_1 + a_1 - 1, \dots, b_n + a_n - 1) = b +^* a.\end{aligned}$$

D'on trobem que  $+^*$  és commutativa.

### 3. Vector nul

Per demostrar que existeix un vector nul, hem de trobar  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a + \mathbf{0} = a$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}^n$ . Sigui  $\mathbf{0} = (b_1, \dots, b_n)$  aplicant la definició de  $+^*$  tenim:

$$\begin{aligned}a + \mathbf{0} &= (a_1 + b_1 - 1, \dots, a_n + b_n - 1) = (a_1, \dots, a_n) = a \\ \implies a_1 + b_1 - 1 &= a_1, \dots, a_n + b_n - 1 = a_n \\ \implies b_1 &= 1, \dots, b_n = 1 \\ \implies \mathbf{0} &= (1, \dots, 1)\end{aligned}$$

Del procediment podem veure que es compleix la propietat del vector nul i aquest és  $\mathbf{0} = (1, \dots, 1)$

#### 4. Suma de l'invers

La quarta propietat que hem de demostrar és que  $\forall a \in \mathbb{R}^n$ , es compleix  $a +^* (-1) \cdot^* a = \mathbf{0}$ . Per demostrar-ho aplicarem la definició de  $+^*$  i de  $\cdot^*$ :

$$\begin{aligned} a +^* (-1) \cdot^* a &= a +^* (-1 \cdot (a_1 - 1) + 1, \dots, -1 \cdot (a_n - 1) + 1) = \\ &= a +^* (-a_1 + 1 + 1, \dots, -a_n + 1 + 1) = \\ &= a +^* (2 - a_1, \dots, 2 - a_n) = \\ &= (a_1 + (2 - a_1) - 1, \dots, a_n + (2 - a_n) - 1) = \\ &= (1, \dots, 1) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

De la demostració observem també que el vector invers de un  $a \in \mathbb{R}^n$  qualsevol és  $-a = (2 - a_1, \dots, 2 - a_n)$ .

#### 5. Propietat distributiva de $\cdot^*$ :

La següent propietat a demostrar és la distributiva del producte:  $\alpha \cdot^* (a +^* b) = \alpha \cdot^* a + \alpha \cdot^* b$ . Per demostrar-ho, començarem desenvolupant les dues equacions per separat.

Primer de tot, desenvoluparem l'equació  $\alpha \cdot^* (a +^* b)$ . Aplicant la definició de  $+^*$  obtenim:

$$\alpha \cdot^* (a_1 + b_1 - 1, \dots, a_n + b_n - 1)$$

I aplicant la definició de  $\cdot^*$  i desenvolupant arribem a

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot (a_1 + b_1 - 1 - 1) + 1, \dots, \alpha \cdot (a_n + b_n - 1 - 1) + 1) &= \\ = (\alpha \cdot (a_1 + b_1 - 2) + 1, \dots, \alpha \cdot (a_n + b_n - 2) + 1) \end{aligned} \quad (1)$$

Tot seguit, desenvoluparem l'equació  $\alpha \cdot^* a +^* \alpha \cdot^* b$ :

$$\begin{aligned} \alpha \cdot^* a +^* \alpha \cdot^* b &= (\alpha(a_1 - 1) + 1, \dots, \alpha(a_n - 1) + 1) + (\alpha(b_1 - 1) + 1, \dots, \alpha(b_n - 1) + 1) = \\ &= ((\alpha(a_1 - 1) + 1) + (\alpha(b_1 - 1) + 1) - 1, \dots, (\alpha(a_n - 1) + 1) + (\alpha(b_n - 1) + 1) - 1) = \\ &= (\alpha(a_1 + b_1 - 1 - 1) + 1 + 1 - 1, \dots, \alpha(a_n + b_n - 1 - 1) + 1 + 1 - 1) = \\ &= (\alpha(a_1 + b_1 - 2) + 1, \dots, \alpha(a_n + b_n - 2) + 1) \end{aligned} \quad (2)$$

De l'equació (1) i (2) obtenim que  $\alpha \cdot^* (a +^* b) = \alpha \cdot^* a +^* \alpha \cdot^* b$ , demostrant la cinquena propietat.

#### 6. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha u + \beta u, \forall u \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ :

La sisena propietat que hem de demostrar és:  $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha u + \beta u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, u \in E$ . La demostració la farem similar a la secció anterior, desenvolupant per separat la igualtat.

Primer de tot desenvoluparem  $(\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) \cdot^* u, u = (a_1, \dots, a_n)$ :

$$\begin{aligned} (\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) \cdot^* u &= ((\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) \cdot (a_1 - 1) + 1, \dots, (\alpha +_{\mathbb{R}} \beta) \cdot (a_n - 1) + 1) = \\ &= ((\alpha a_1 - \alpha + \beta a_1 - \beta) + 1, \dots, (\alpha a_n - \alpha + \beta a_n - \beta) + 1) = \end{aligned} \quad (3)$$

I tot seguit desenvoluparem la segona part de l'equació:

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot^* u) +^* (\beta \cdot^* u) &= (\alpha(a_1 - 1) + 1, \dots, \alpha(a_n - 1) + 1) +^* (\beta(a_1 - 1) + 1, \dots, \beta(a_n - 1) + 1) = \\ &= ((\alpha(a_1 - 1) + 1) + (\beta(a_1 - 1) + 1) - 1, \dots, (\alpha(a_n - 1) + 1) + (\beta(a_n - 1) + 1) - 1) = \\ &= (\alpha a_1 - \alpha + \beta a_1 - \beta + 1, \dots, \alpha a_n - \alpha + \beta a_n - \beta + 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Finament, comparant les equacions (3) i (4), veiem que la igualtat es compleix.

#### 7. Ttol 7

$$(\alpha \cdot_{\mathbb{R}} \beta) \cdot^* u = \alpha \cdot^* (\beta \cdot^* u)$$

Demostració:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta \cdot^* u) &= \alpha \cdot^* (\beta(a_1 - 1) + 1, \dots, \beta(a_n - 1) + 1) = \\ &= (\alpha(\beta(a_1 - 1) + 1 - 1) + 1, \dots, \alpha(\beta(a_1 - 1) + 1 - 1) + 1) = \\ &= (\alpha\beta(a_1 - 1) + 1, \dots, \alpha\beta(a_n - 1) + 1) = \\ &= (\alpha\beta) \cdot^* u. \end{aligned} \quad (5)$$

## 8. Element neutre del producte

$$1 \cdot^* u = u, \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Demostració:

$$\begin{aligned} 1 \cdot^* u &= (1 \cdot (a_1 - 1) + 1, \dots, 1 \cdot (a_n - 1) + 1) = \\ &= (a_1, \dots, a_n) = u \end{aligned}$$