

Pràctica 1 - Joan Pau Condal Marco - 20334366

1. Estudieu les funcions següents del Mathematica: *FactorInteger*, *Divisors*, *Prime*, *PrimePi*, *PrimeQ*.

Per estudiar les funcions del Mathematica, el que farem és posar la comanda darrere d'un signe d'interrogació (?):

In[]:= ?FactorInteger

Symbol ⓘ

Out[]:= FactorInteger[n] gives a list of the prime factors of the integer n , together with their exponents.
FactorInteger[n, k] does partial factorization, pulling out at most k distinct factors.

▼

In[]:= ?Divisors

Symbol ⓘ

Out[]:= Divisors[n] gives a list of the integers that divide n .

▼

In[]:= ?Prime

Symbol ⓘ

Out[]:= Prime[n] gives the n^{th} prime number.

▼

In[]:= ?PrimePi

Symbol ⓘ

Out[]:= PrimePi[x] gives the number of primes $\pi(x)$ less than or equal to x .

▼

In[]:= ?PrimeQ

Symbol ⓘ

Out[]:= PrimeQ[expr] yields True if *expr* is a prime number, and yields False otherwise.

▼

Al escriure ?<Comanda> i executar la línia, el que ens surt és una petita descripció de la comanda respectiva. Al fer-ho en les línies anteriors veiem per què ens serveixen totes aquelles funcions.

2. Utilitza la comanda `Table[expre, {i, max}]` per generar una taula dels 1000 primers nombres primers.

Primer de tot hem de veure com funciona la comanda `Table[expre, {i, max}]`. Per aprendre tenim dues opcions: podem fer el mateix que a l'exercici 1 o podem escriure `Table` en qualsevol lloc, posar el cursor a sobre de la paraula i hauria de sortir un petit botó amb forma d'interrogant. Fent *click* se'ns obrirà una pestanya nova amb tota la informació de la comanda.

Un cop llegida la documentació de la comanda ja la podem utilitzar:

`In[]:= Table[Prime[n], {n, 1000}]`

`Out[]:= {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999, 2003, 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089, 2099, 2111, 2113, 2129, 2131, 2137, 2141, 2143, 2153, 2161, 2179, 2203, 2207, 2213, 2221, 2237, 2239, 2243, 2251, 2267, 2269, 2273, 2281, 2287, 2293, 2297, 2309, 2311, 2333, 2339, 2341, 2347, 2351, 2357, 2371, 2377, 2381, 2383, 2389, 2393, 2399, 2411, 2417, 2423, 2437, 2441, 2447, 2459, 2467, 2473, 2477, 2503, 2521, 2531, 2539, 2543, 2549, 2551, 2557, 2579, 2591, 2593, 2609, 2617, 2621, 2633, 2647, 2657, 2659, 2663, 2671, 2677, 2683, 2687, 2689, 2693, 2699, 2707, 2711, 2713, 2719, 2729, 2731, 2741, 2749, 2753, 2767, 2777, 2789, 2791, 2797, 2801, 2803, 2819, 2833, 2837, 2843, 2851, 2857, 2861, 2879, 2887, 2897, 2903, 2909, 2917, 2927, 2939, 2953, 2957, 2963, 2969, 2971, 2999, 3001, 3011, 3019, 3023, 3037, 3041, 3049, 3061, 3067, 3079, 3083, 3089, 3109, 3119, 3121, 3137, 3163, 3167, 3169, 3181, 3187, 3191, 3203, 3209, 3217, 3221, 3229, 3251, 3253, 3257, 3259, 3271, 3299, 3301, 3307, 3313, 3319, 3323, 3329, 3331, 3343, 3347, 3359, 3361, 3371, 3373, 3389, 3391, 3407, 3413, 3433, 3449, 3457, 3461, 3463, 3467, 3469, 3491, 3499, 3511, 3517, 3527, 3529, 3533, 3539, 3541, 3547, 3557, 3559, 3571, 3581, 3583, 3593, 3607, 3613, 3617, 3623, 3631, 3637, 3643, 3659, 3671, 3673, 3677, 3691, 3697, 3701, 3709, 3719, 3727, 3733, 3739, 3761, 3767, 3769, 3779, 3793, 3797, 3803, 3821, 3823, 3833, 3847, 3851, 3853, 3863, 3877, 3881, 3889, 3907, 3911, 3917, 3919, 3923, 3929, 3931, 3943, 3947, 3967, 3989, 4001, 4003, 4007, 4013, 4019, 4021, 4027, 4049, 4051, 4057, 4073, 4079, 4091, 4093, 4099, 4111, 4127, 4129, 4133, 4139, 4153, 4157, 4159, 4177, 4201, 4211, 4217, 4219, 4229, 4231, 4241, 4243, 4253, 4259, 4261, 4271, 4273, 4283, 4289, 4297, 4327, 4337, 4339, 4349, 4357, 4363, 4373, 4391, 4397, 4409, 4421, 4423, 4441, 4447, 4451, 4457, 4463, 4481, 4483, 4493, 4507, 4513, 4517, 4519, 4523, 4547, 4549, 4561, 4567, 4583, 4591, 4597, 4603, 4621, 4637, 4639, 4643, 4649, 4651, 4657, 4663, 4673,`

4679, 4691, 4703, 4721, 4723, 4729, 4733, 4751, 4759, 4783, 4787, 4789, 4793, 4799, 4801, 4813, 4817, 4831, 4861, 4871, 4877, 4889, 4903, 4909, 4919, 4931, 4933, 4937, 4943, 4951, 4957, 4967, 4969, 4973, 4987, 4993, 4999, 5003, 5009, 5011, 5021, 5023, 5039, 5051, 5059, 5077, 5081, 5087, 5099, 5101, 5107, 5113, 5119, 5147, 5153, 5167, 5171, 5179, 5189, 5197, 5209, 5227, 5231, 5233, 5237, 5261, 5273, 5279, 5281, 5297, 5303, 5309, 5323, 5333, 5347, 5351, 5381, 5387, 5393, 5399, 5407, 5413, 5417, 5419, 5431, 5437, 5441, 5443, 5449, 5471, 5477, 5479, 5483, 5501, 5503, 5507, 5519, 5521, 5527, 5531, 5557, 5563, 5569, 5573, 5581, 5591, 5623, 5639, 5641, 5647, 5651, 5653, 5657, 5659, 5669, 5683, 5689, 5693, 5701, 5711, 5717, 5737, 5741, 5743, 5749, 5779, 5783, 5791, 5801, 5807, 5813, 5821, 5827, 5839, 5843, 5849, 5851, 5857, 5861, 5867, 5869, 5879, 5881, 5897, 5903, 5923, 5927, 5939, 5953, 5981, 5987, 6007, 6011, 6029, 6037, 6043, 6047, 6053, 6067, 6073, 6079, 6089, 6091, 6101, 6113, 6121, 6131, 6133, 6143, 6151, 6163, 6173, 6197, 6199, 6203, 6211, 6217, 6221, 6229, 6247, 6257, 6263, 6269, 6271, 6277, 6287, 6299, 6301, 6311, 6317, 6323, 6329, 6337, 6343, 6353, 6359, 6361, 6367, 6373, 6379, 6389, 6397, 6421, 6427, 6449, 6451, 6469, 6473, 6481, 6491, 6521, 6529, 6547, 6551, 6553, 6563, 6569, 6571, 6577, 6581, 6599, 6607, 6619, 6637, 6653, 6659, 6661, 6673, 6679, 6689, 6691, 6701, 6703, 6709, 6719, 6733, 6737, 6761, 6763, 6779, 6781, 6791, 6793, 6803, 6823, 6827, 6829, 6833, 6841, 6857, 6863, 6869, 6871, 6883, 6899, 6907, 6911, 6917, 6947, 6949, 6959, 6961, 6967, 6971, 6977, 6983, 6991, 6997, 7001, 7013, 7019, 7027, 7039, 7043, 7057, 7069, 7079, 7103, 7109, 7121, 7127, 7129, 7151, 7159, 7177, 7187, 7193, 7207, 7211, 7213, 7219, 7229, 7237, 7243, 7247, 7253, 7283, 7297, 7307, 7309, 7321, 7331, 7333, 7349, 7351, 7369, 7393, 7411, 7417, 7433, 7451, 7457, 7459, 7477, 7481, 7487, 7489, 7499, 7507, 7517, 7523, 7529, 7537, 7541, 7547, 7549, 7559, 7561, 7573, 7577, 7583, 7589, 7591, 7603, 7607, 7621, 7639, 7643, 7649, 7669, 7673, 7681, 7687, 7691, 7699, 7703, 7717, 7723, 7727, 7741, 7753, 7757, 7759, 7789, 7793, 7817, 7823, 7829, 7841, 7853, 7867, 7873, 7877, 7879, 7883, 7901, 7907, 7919}

3. Es cert que tots els nombres de la forma $n^2 - n + 41$, n natural, són primers?

Per saber-ho, podem generar una llista de les 100 primeres n i mirarem si $n^2 - n + 41$ és o no és primer :

```
In[ ]:= Table[PrimeQ[n*n - n + 41], {n, 100}]
```

$\text{Out}[n] = \{\text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True},$

$\text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True},$

$\text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{False}, \text{False}, \text{True}, \text{True}, \text{False}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{False}, \text{True},$

$\text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{False}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{False}, \text{True}, \text{True},$

$\text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{False}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{False}, \text{False}, \text{True},$

$\text{False}, \text{True}, \text{True}, \text{False}, \text{True}, \text{False}, \text{True}, \text{False}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{False}, \text{True}, \text{True}, \text{True}\}$

I veiem que fins a un cert valor de n és cert, però clarament no ho és per a tot n . Per saber a partir de quin n tenim el primer nombre no primer, podem tornar a generar la taula posant el valor de n a la comanda:

```
In[ ]:= Table[{n, PrimeQ[n*n - n + 41]}, {n, 100}]
```

```
Out[ ]:= {{1, True}, {2, True}, {3, True}, {4, True}, {5, True}, {6, True}, {7, True}, {8, True}, {9, True}, {10, True},
{11, True}, {12, True}, {13, True}, {14, True}, {15, True}, {16, True}, {17, True}, {18, True}, {19, True},
{20, True}, {21, True}, {22, True}, {23, True}, {24, True}, {25, True}, {26, True}, {27, True}, {28, True},
{29, True}, {30, True}, {31, True}, {32, True}, {33, True}, {34, True}, {35, True}, {36, True}, {37, True},
{38, True}, {39, True}, {40, True}, {41, False}, {42, False}, {43, True}, {44, True}, {45, False}, {46, True},
{47, True}, {48, True}, {49, True}, {50, False}, {51, True}, {52, True}, {53, True}, {54, True}, {55, True},
{56, True}, {57, False}, {58, True}, {59, True}, {60, True}, {61, True}, {62, True}, {63, True}, {64, True},
{65, True}, {66, False}, {67, True}, {68, True}, {69, True}, {70, True}, {71, True}, {72, True}, {73, True},
{74, True}, {75, True}, {76, True}, {77, False}, {78, True}, {79, True}, {80, True}, {81, True}, {82, False},
{83, False}, {84, True}, {85, False}, {86, True}, {87, True}, {88, False}, {89, True}, {90, False}, {91, True},
{92, False}, {93, True}, {94, True}, {95, True}, {96, True}, {97, False}, {98, True}, {99, True}, {100, True}}
```

I veiem que amb $n = 41$ els nombres de la forma $n^2 - n + 41$ ja no són necessàriament primers.

4. Defineix una funció FERMAT que calculi els nombres de Fermat $F_n := 2^{2^n} + 1$. Escribe una taula amb els 10 primers nombres de Fermat. Digueu quins d'ells són primers.

```
In[ ]:= FERMAT[n_] := (2^(2^n)) + 1
```

```
In[ ]:= Table[{PrimeQ[FERMAT[n]], FERMAT[n]}, {n, 10}]
```

```
Out[ ]:= {{True, 5}, {True, 17}, {True, 257}, {True, 65537}, {False, 4294967297},
{False, 18446744073709551617}, {False, 340282366920938463463374607431768211457}, {False,
115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639937},
{False,
13407807929942597099574024998205846127479365820592393377723561443721764030073},
546976801874298166903427690031858186486050853753882811946569946433649006084},
097}, {False,
179769313486231590772930519078902473361797697894230657273430081157732675805500},
963132708477322407536021120113879871393357658789768814416622492847430639474},
124377767893424865485276302219601246094119453082952085005768838150682342462},
881473913110540827237163350510684586298239947245938479716304835356329624224},
137217}}
```

Generant la taula anterior tenim els 10 primers nombres de Fermat i si són o no són primers. Amb la taula anterior, podem veure que dels 10 primers nombres de Fermat, només 4 són primers.

5. És primer el nombre $10^{10} + 1$? Determina un nombre primer que tingui més de 10 xifres decimals. Quin és el primer més petit que té més de 10 xifres decimals?

Per saber si el nombre $10^{10} + 1$ és prim o no, utilitzarem la funció PrimeQ :

```
In[ ]:= PrimeQ[(10^10) + 1]
```

```
Out[ ]:= False
```

I com que ens retorna *False*, significa que el nombre $10^{10} + 1$ no és primer.

Per trobar un nombre primer que tingui més de 10 xifres, utilitzarem la funció Prime amb un nombre gran com a argument :

```
In[*]:= Prime[(10^10) + 1]
```

```
Out[*]= 252097800629
```

I ens surt un nombre prim de 12 xifres decimals.

Per trobar el nombre més petit amb més de 10 xifres decimals, utilitzarem la fórmula PrimePi. Si tornem a l'exercici 1, veiem que la funció PrimePi amb n com a argument ens retorna el nombre de números primers menors o iguals que n; i sabem que 10^{10} és el primer nombre amb més de deu xifres decimals. Per tant, si utilitzem la funció PrimePi amb 10^{10} com a argument, ens donarà la quantitat de primers que vénen abans del nombre 10^{10} , és a dir, ens donarà la posició de l'últim nombre primer amb 10 xifres decimals. Si agafem el següent nombre primer, serà el primer amb 11 xifres decimals:

```
In[*]:= Prime[PrimePi[(10^10) + 1]]
```

```
Out[*]= 10000000019
```

6. Escriu la funció següent:

```
In[*]:= PrimerSegüent[n_] :=
Module[{k = n},
  While[! PrimeQ[k], k++];
  k
]
```

Estudia què fa aquesta funció i analitza les comandes que la defineixen. Repeteix l'exercici anterior.

Per entendre què fa la funció anterior, primer hem de saber què fan totes les comandes que conté.

Després de l'assignació de la funció (:=), trobem la comanda *Module*. Això ens crea una variable (k) i li assigna un valor inicial (n).

Tot seguit veiem la comanda *While*, que repeteix una operació concreta mentre una avaluació sigui certa. En aquest cas, la operació que repeteix és k++, que significa que incrementa en 1 el valor de k. I l'avaluació que fa per veure si repeteix l'operació és !PrimeQ[k]. Aquesta avaluació el que fa és veure si el nombre k és o no primer, i agafa el valor de veritat invers al que retorna la operació PrimeQ gràcies al signe !. Per tant, si k és primer el loop para, i sinó segueix executant-lo.

Per tant, el que fa la funció *PrimerSegüent[n]*, és anar afegint 1 al valor de n fins que troba un altre nombre primer i el retorna.

A l'exercici anterior, el que volíem fer era trobar el primer nombre primer que venia després de 10^{10} , és a dir, el primer nombre primer amb 11 xifres decimals. Ho tornarem a fer amb la funció definida en aquest exercici :

```
In[*]:= PrimerSegüent[10^10]
```

```
Out[*]= 10000000019
```

Podem observar que el resultat en aquest exercici i a l'anterior és el mateix.

7. Defineix la funció PrimerAnterior[n_]. Calcula el primer anterior a 10^{10} .

```
In[ ]:= PrimerAnterior[n_] :=
Module[{k = n},
  While[! PrimeQ[k], k--];
  k
]

In[ ]:= PrimerAnterior[10^10]

Out[ ]:= 9999999967
```

8. Considera la funció $TNP[x_] := N[PrimePi[x]/(x/Log[x])]$. Escriu una taula amb els valors de $PrimePi[10^n]$, $N[10^n/Log[10^n]]$, $TNP[10^n]$, per a $1 \leq n \leq 13$. Observa el comportament de les seves entrades.

```
In[ ]:= TNP[x_] := N[PrimePi[x]/(x/Log[x])]

In[ ]:= Table[{PrimePi[10^n], N[10^n/Log[10^n]], TNP[10^n]}, {n, 13}]

Out[ ]:= {{4, 4.34294, 0.921034}, {25, 21.7147, 1.15129},
{168, 144.765, 1.1605}, {1229, 1085.74, 1.13195}, {9592, 8685.89, 1.10432},
{78498, 72382.4, 1.08449}, {664579, 620421., 1.07117},
{5761455, 5.42868*10^6, 1.0613}, {50847534, 4.82549*10^7, 1.05373},
{455052511, 4.34294*10^8, 1.0478}, {4118054813, 3.94813*10^9, 1.04304},
{37607912018, 3.61912*10^10, 1.03915}, {346065536839, 3.34073*10^11, 1.0359}}
```



```
In[ ]:= TableForm[%2]
```

4	4.34294	0.921034
25	21.7147	1.15129
168	144.765	1.1605
1229	1085.74	1.13195
9592	8685.89	1.10432
78498	72382.4	1.08449
664579	620421.	1.07117
5761455	5.42868×10^6	1.0613
50847534	4.82549×10^7	1.05373
455052511	4.34294×10^8	1.0478
4118054813	3.94813×10^9	1.04304
37607912018	3.61912×10^{10}	1.03915
346065536839	3.34073×10^{11}	1.0359

Per entendre la taula anterior, primer hem d'entendre les comandes entrades. Cada fila de la taula es compon de tres columnes, una per comanda. La primera comanda ens indica quants nombres primers hi ha més petits o iguals que 10^n ; la segona comanda, ens retorna el valor de $10^n/Log(10^n)$, i la tercera comanda ens retorna la divisió de l'element de la primera columna entre el segon.

Per tant, la taula ens demostra que la quantitat de nombres primers que hi ha abans de un cert nombre x és semblant a $x/log(x)$, i podem afirmar que és una bona aproximació ja que la divisió tendeix a 1.