Deures 17/02/2020

Joan Pau Condal Marco

2 de març de 2020

Enunciat:

Siguin F_1 i F_2 subespais de E de dimensió finita amb bases B_1 i B_2. Demostreu:

$$F_1 \oplus F_2 \iff B_1 \cup B_2 \text{ base de } F_1 + F_2$$

Demostració:

Sabem que $F_1 \oplus F_2 \iff F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}$
Per aquesta demostració suposarem:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{v_1, \ldots, v_k\} \\ B_2 &= \{w_1, \ldots, w_m\} \end{aligned}$$

$\implies$] Hem de demostrar que $F_1 \oplus F_2 \implies B_1 \cup B_2$ base de $F_1 + F_2$; per tant, hem de demostrar que $B_1 \cup B_2$ generen $F_1 + F_2$ i són linealment independents.
La nostra hipòtesis és que $F_1 \oplus F_2$. Primer de tot, demostrarem que generen:

1. Generen:

Sigui $u \in F_1 + F_2$, per tant, $\exists v \in F_1$ i $\exists w \in F_2$ tal que:

$$u = v + w$$

Com que $v \in F_1$, existeixen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tals que

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

I com que $w \in F_2$, existeixen $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ tals que

$$w = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m$$

Per tant:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m \\ &\implies u \in \langle B_1 \cup B_2 \rangle \\ &\implies B_1 \cup B_2 \text{ generen } F_1 + F_2 \end{aligned}$$

2. Independència lineal:

Per demostrar la independència lineal de $B_1 \cup B_2$ hem de demostrar que l'única solució a l'equació:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m = 0 \tag{1}$$

és la solució amb $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$.

De l'equació (1), veiem que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = -\beta_1 w_1 - \cdots - \beta_m w_m \tag{2}$$

d'on observem que

$$\begin{gathered} v \in \langle B_1 \rangle \text{ i } v \in \langle B_2 \rangle \\ \implies v \in F_1 \cap F_2 \end{gathered} \tag{3}$$

Sabem per hipòtesis que $F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}$; per tant, $v = \mathbf{0}$. Substituïnt a l'equació (2) obtenim:

$$\mathbf{0} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = -\beta_1 w_1 - \cdots - \beta_m w_m \tag{4}$$

Com que B_1 i B_2 són bases per hipótesis, l'única solució de l'equació (4) és:

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = -\beta_1 = \cdots = -\beta_m = 0 \tag{5}$$

D'on queda demostrada la independència lineal de B_1 i B_2.

Per tant, com que B_1 i B_2 generen $F_1 + F_2$ i són linealment independents, podem afirmar que són base de $F_1 + F_2$.

$\Longleftarrow$] Hem de demostrar que $B_1 \cup B_2$ base de $F_1 + F_2 \implies F_1 \oplus F_2$

Per hipòtesis sabem que $B_1 \cup B_2$ són base de $F_1 + F_2$, per tant, són linealment independents.

Sigui $v \in F_1 \cap F_2$, existeixen $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ tals que:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \\ v &= \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m \end{aligned} \tag{6}$$

Per tant, sabem que:

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k &= \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m \\ \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k - \beta_1 w_1 - \cdots - \beta_m w_m &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{7}$$

I com que $B_1 \cup B_2$ és base de $F_1 + F_2$, l'única soluci a l'equació (7) és:

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = -\beta_1 = \cdots = -\beta_m = 0 \tag{8}$$

I substituïnt els valors a l'equació (6) obtenim:

$$v = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_k = \mathbf{0} \tag{9}$$

Per tant, $F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}\}$; d'on concluïm que $F_1 \oplus F_2$.