

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO
LEEC

3º Trabalho Laboratorial
Bola Saltitante

Grupo 38:

Inês CARDOSO PAIVA, nº 99961

ines.c.paiva@tecnico.ulisboa.pt

João BARREIROS C. RODRIGUES, nº 99968

joaobarreiroscoellhorodrigues@tecnico.ulisboa.pt

Tomás ACHANDO A. A. LOPES, nº 100097

tomas.archer@tecnico.ulisboa.pt

Compromisso de ética de originalidade:

O grupo de alunos acima identificado garante que o texto deste relatório e todo o software e resultados entregues foram inteiramente realizados pelos elementos do grupo, com uma participação significativa de todos eles, e que nenhuma parte do trabalho ou do software e resultados apresentados foi obtida a partir de outras pessoas ou fontes.

1º semestre 2022/2023

Introdução

Define-se *sistema híbrido* como um sistema capaz de exibir tanto comportamento discreto como contínuo. Em suma um sistema híbrido mínimo é constituído por um sistema dinâmico (que representa a relação entre posição geométrica e tempo contínuo) e por uma máquina de estados discretos.

Identifica-se a bola saltitante como um sistema híbrido. A relação entre a posição geométrica da bola no espaço de duas dimensões e o tempo contínuo é descrita por um sistema dinâmico, e a inversão do movimento o estado único (A) do autómato, cuja condição de entrada é o impacto com obstáculo.

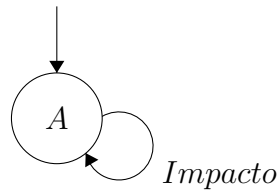


Figura 1: Máquina de estados constituinte do sistema

O objetivo deste trabalho é simular este sistema híbrido para diferentes condições iniciais, com e sem atrito e tanto com barreiras horizontais, ou seja o chão, como barreiras verticais como uma parede.

Pergunta 1

Utilizando o sistema de *Simulink* disponibilizado no enunciado laboratorial é possível simular a evolução de uma bola que é lançada contra o chão com uma altura inicial de 10 metros, velocidade inicial nula e fator de atenuação de -0.8. Obtém-se o gráfico infra.

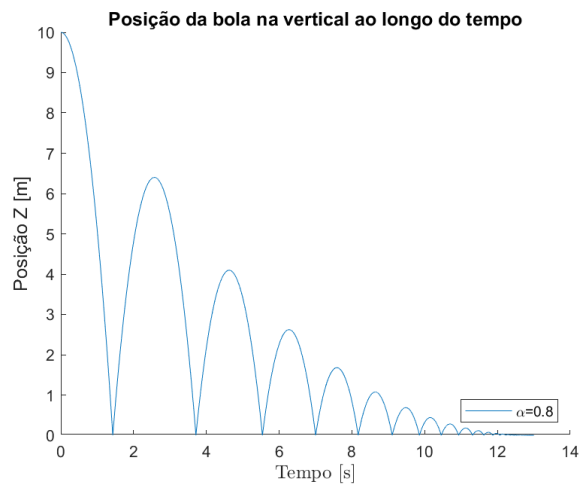


Figura 2: Posição da bola na vertical em função do tempo

Como é possível verificar a cada impacto com o solo a bola vai perder energia, uma vez que nunca volta a atingir a altura inicial para qualquer instante $t \neq 0$. Este fenómeno depende do valor atribuído ao fator de atenuação $\alpha \in [0, 1]$, assim, a velocidade da bola após o choque com o solo será α vezes inferior à velocidade imediatamente anterior ao mesmo, tal que:

$$v_z^+ = -\alpha v_z^-$$

Assim, foi testada a influencia do fator de atenuação e da velocidade inicial nos resultados obtidos. Para tal, foram simulados para diferentes valores de atenuação K e velocidade inicial V_0 a evolução da posição da bola ao longo do tempo. Na figura 3 e na figura 4 encontram-se os resultados obtidos.

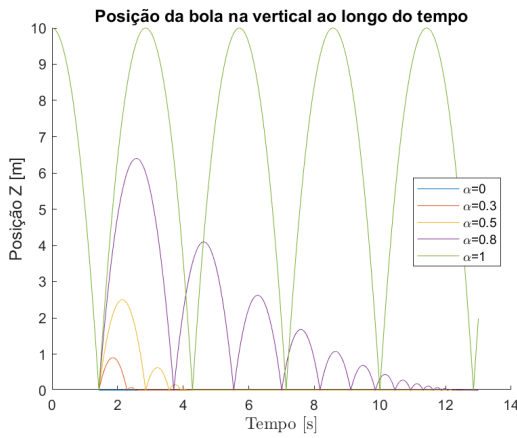


Figura 3: Posição da bola na vertical em função do tempo para diferentes fatores de atenuação

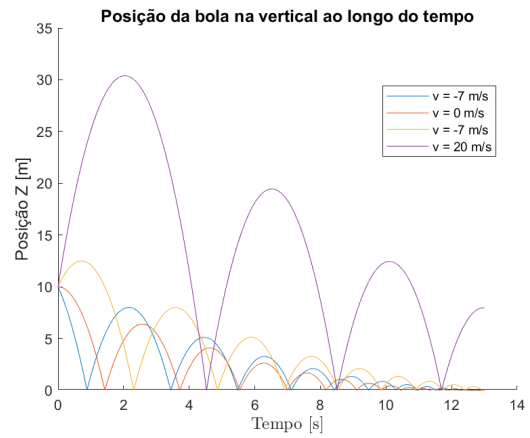


Figura 4: Posição da bola na vertical em função do tempo para diferentes velocidades iniciais

Tal como esperado, analisando a figura 3 verificamos que no caso do fator de atenuação ser unitário a velocidade no instante exatamente anterior e posterior ao choque a velocidade é igual em modulo alterando unicamente o sentido da trajetória, como seria previsto pela equação apresentada anteriormente. Por outro lado, no caso da atenuação ser nula, após o primeiro choque com o chão a bola mantém no solo, sendo a sua velocidade nula. Tal ocorre uma vez que este valor de atenuação corresponde à dissipação total de energia com a colisão. Desta forma, quanto menor for α , menor será a altura de ressalto e, consequentemente, menor será o tempo entre dois embates consecutivos, uma vez que a dissipação de energia será maior.

Ao analisar a figura 4 e sabendo que a velocidade inicial aplicada será ascendente se $v_i > 0$ e descendente se $v_i < 0$ é possível verificar que quanto maior o modulo da velocidade inicial maior será o tempo até a bola parar o seu movimento por completo e maior será a sua altura de ressalto. Para além disto, uma vez que o sistema é conservativo, a energia cinética (que varia com o quadrado da velocidade) faz com que a energia potencial e por consequência a altura máxima atingida no primeiro ressalto seja proporcional a v_i^2 , com uma relação de $z = \frac{v_i^2}{2g}$, logo quanto maior a velocidade inicial maior será a altura do primeiro ressalto.

Por ultimo, com o objetivo de estudar o efeito de zeno sabemos que:

$$h(t) = vt - \frac{g}{2}t^2$$

De forma a calcular o tempo de uma colisão iguala-se a equação de $h(t)$ a zero, logo

$$h(t) = vt - \frac{g}{2}t^2 = 0 \iff t = 0 \vee t = \frac{2v}{g}$$

Assim, uma vez que a velocidade após K choques é $\alpha^K v$ temos que o tempo de choque K será dado por

$$t_K = \frac{2v}{g} \sum_{n=0}^{K-1} \alpha^n$$

Assim, para um numero infinito de choques obtém-se o seguinte:

$$t_\infty = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{2v}{g} \sum_{n=0}^{K-1} \alpha^n = \frac{2v}{g} \frac{1}{1 - \alpha} < \infty$$

Conclui-se então que existe um intervalo de tempo finito para um numero infinito de choques, a este efeito chama-se efeito de zeno. No caso do programa de *Simulink* este possui o parâmetro *algorithm do zero-crossing options a nonadaptive*, no entanto este permite que a posição z seja negativa, algo que vai contra a fisica do problema proposto. Assim, na figura 5 encontra-se representado um ensaio com 15 segundos para um lançamento sem velocidade inicial e com $\alpha = -0.8$.

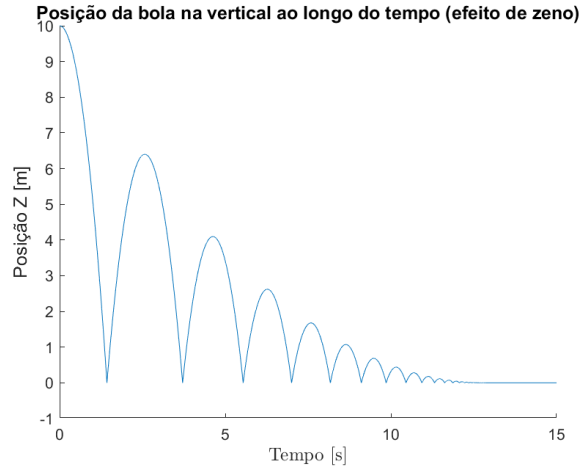


Figura 5: Posição da bola na vertical em função do tempo considerando o efeito de zeno

Adicionalmente é possível computar-se uma solução para o efeito de Zeno ao acrescentar um segundo estado (Out) à máquina finita discreta constituinte do modelo híbrido, cuja transição do estado A para o estado Out é a aceleração instantânea da bola ser igual a zero.

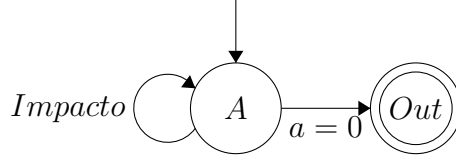


Figura 6: Máquina de estados melhorada para solução do efeito de Zeno

Pergunta 2

Nesta secção pretende-se verificar os efeitos da força de atrito durante o movimento da bola. Esta relação é traduzida através:

$$F_a = \mu v_z$$

$$F = m\ddot{z} \iff F_g - F_a = m\ddot{z} \iff mg - \mu v_z = m\ddot{z}$$

assim,

$$\ddot{z} = g - \frac{\mu}{m}v_z = g - Lv_z$$

No código de *MATLAB* utilizado considerou-se um valor de $L = 0.6$ com um valor de atenuação de -0.8. Na figura 5 encontram-se os resultados obtidos.

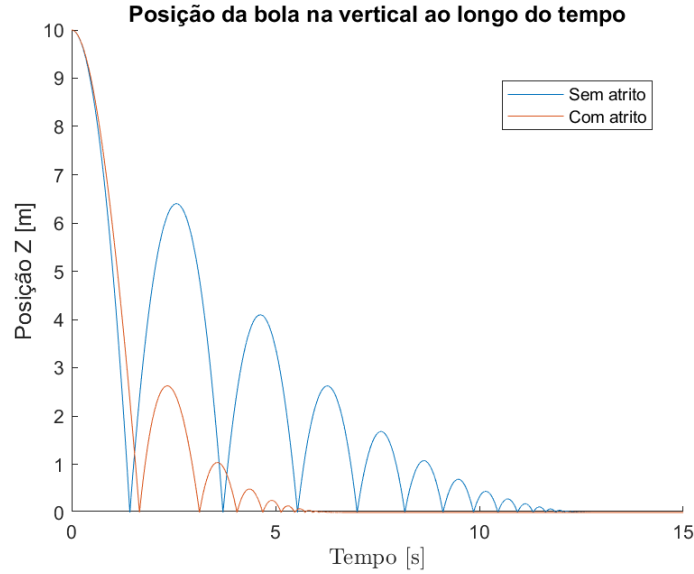


Figura 7: Posição da bola na vertical em função do tempo com e sem consideração do atrito

Como seria esperado na situação em que o atrito está presente existe uma perda de energia superior que faz com que a altura do ressalto seja inferior. Assim, a velocidade diminui de forma constante uma vez que existe uma força contrária ao movimento com valor não variável, efeito este responsável por existir menor energia potencial na altura do choque com o chão provocando a disparidade de altura de ressalto entre os casos com e sem atrito. Para além disto, no caso com atrito a bola

anula a sua velocidade muito mais rapidamente como seria esperado uma vez que para ambos os casos a energia inicial é a mesma mas existem maiores dissipações no caso com o atrito que mais rapidamente dissipa a energia inicial.

Pergunta 3

De forma a simular o problema proposto definem-se dois valores de atenuação por impacto distintos, de tal forma que o valor a aplicar na determinação do movimento descrito da bola é função do valor da distância horizontal ao ponto inicial aquando o impacto no solo. Efetivamente este *mutex* define um modelo no qual existem dois solos com distintas propriedades de absorção de energia com meio de separação em $x=20$ metros. Mantendo o parâmetro $\alpha_1 = 0.8$ foi simulado o ressalto com separação de superfície de impacto para os dois casos possíveis: $\alpha_1 > \alpha_2$ e $\alpha_1 < \alpha_2$ subpostos sobre o ressalto em superfície homogênea com atenuação α_1 , tendo sido obtidos os resultados apresentados infra.

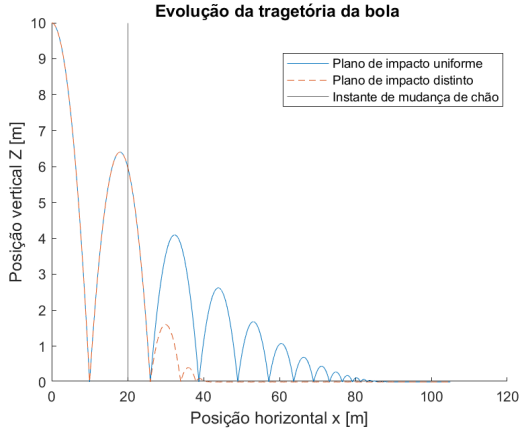


Figura 8: Posição da bola na vertical em função do espaço para atenuação uniforme e para atenuação variável ($\alpha_2 = 0.5$)

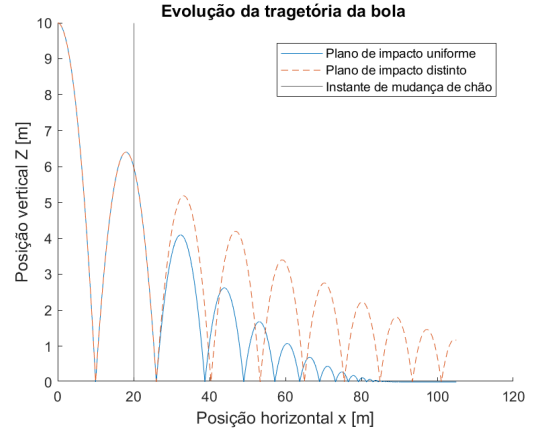


Figura 9: Posição da bola na vertical em função do espaço para atenuação uniforme e para atenuação variável ($\alpha_2 = 0.9$)

Como seria esperado antes da mudança de solo as trajetórias são sobrepostas sendo que após a mudança de solo as trajetórias mantêm-se idênticas até à primeira colisão no novo meio ocorrer. Quando a diferença de atenuações é sentida o valor da mesma vai influenciar a trajetória obtida, tal como visto na pergunta 1. Como se verifica na figura 8, quando $\alpha_1 > \alpha_2$ a altura dos ressaltos será menor e em menor distancia irá atingir a velocidade nula. No entanto, para $\alpha_1 < \alpha_2$ como visto na figura 9, a altura do ressalto vai ser superior e a sua velocidade anula-se a uma distância mais afastada da origem.

Pergunta 4

Nesta secção, foram simulados dois impactos de uma bola com as mesmas condições iniciais, ou seja, velocidade vertical inicial nula, velocidade horizontal constante a 7 ms^{-1} e fator de atenuação igual a -0.8 . Na primeira simulação a parede encontra-se a 25 metros enquanto na segunda simulação esta encontra-se a 40 metros, os resultados obtidos encontram-se representados de seguida.

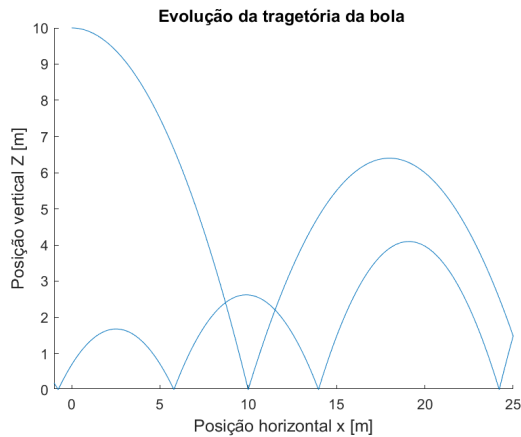


Figura 10: Trajetória da bola para o choque com uma parede a 25 metros

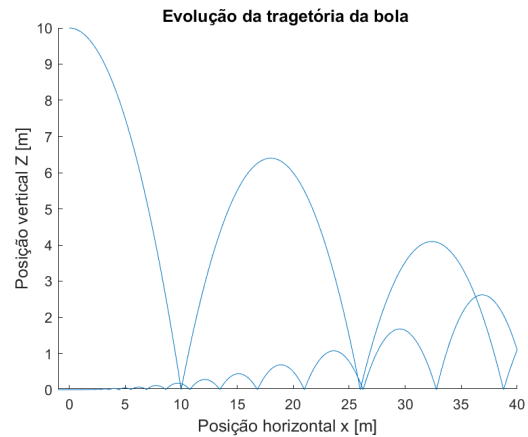


Figura 11: Trajetória da bola para o choque com uma parede a 40 metros

Tal como esperado, a colisão da bola com a parede faz com que esta inverta o sentido do seu movimento. Esta inversão de sentido na componente horizontal x apresenta duas variações, se $v_z > 0$, ou seja na altura da colisão o movimento é ascendente, a bola manterá a sua tendência de subida como é comprovado pela figura 11. Por oposição, caso $v_z < 0$ a bola manterá o seu regime descendente e após atingir a parede dirige-se diretamente ao solo, como se observa na figura 10. Como não existe nenhum limite espacial quando a bola regressa após atingir a parede esta apenas vai parar quando toda a sua energia for consumida, apresentando um comportamento semelhante ao apresentado na alínea anterior mas em sentido oposto.

Conclusão

Em suma os modelos da bola saltitante simulados podem ser tomados como introdutórios ao estudo de colisões, permitindo simular colisões perfeitamente elásticas, elásticas e inelásticas, essencial no estudo de modelos mecânicos e na simulação de projetos de engenharia ligados, por exemplo, à indústria automóvel ou aeronáutica.

Adicionalmente, o estudo de colisões de objetos deformáveis (nos modelos simulados apenas foram consideradas bolas indeformáveis) seria de interesse simular, uma vez que para a projeção de modelos realistas é necessários considerar as propriedades materiais dos objetos envolvidos na colisão.