Instituto Superior Técnico

Modelação e Simulação

LEEC

2º Trabalho Laboratorial

Simulação de Monte Carlo do jogo do Monopólio

Grupo 38:

Ricardo Filipe D. Simões, nº 70389 rfdsimoes@hotmail.com

Inês Cardoso Paiva, nº 99961 ines.c.paiva@tecnico.ulisboa.pt

João Barreiros C. Rodrigues, nº 99968 joaobarreiroscoelhorodrigues@tecnico.ulisboa.pt

Tomás Achando A. A. Lopes, nº 100097 tomas.archer@tecnico.ulisboa.pt

Compromisso de ética de originalidade:

O grupo de alunos acima identificado garante que o texto deste relatório e todo o software e resultados entregues foram inteiramente realizados pelos elementos do grupo, com uma participação significativa de todos eles, e que nenhuma parte do trabalho ou do software e resultados apresentados foi obtida a partir de outras pessoas ou fontes.

1º semestre 2022/2023

Introdução

Neste trabalho pretende-se simular uma versão simplificada do jogo monopólio e recorrendo ao método de Monte Carlo determinar a distribuição de probabilidades de um jogador cair em cada casa. Esta versão simplificada pode ser modelada como um conjunto finito de estados que se altera quando ocorre um acontecimento, nesta simulação através do lançamento de uma moeda, no caso de calhar cara o jogador avança uma casa quando calha coroa o jogador avança duas casas. O diagrama de estados utilizado para a parte inicial do trabalho encontra-se representado na figura 1.

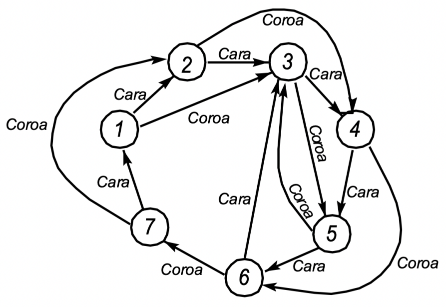

Figura 1: Diagrama de estados

Para além disto, é pretendido obter a frequência com que cada estado é visitado e calcular a respetiva probabilidade de um jogador chegar a essa casa, para tal o jogo será simulado um número variado de vezes.

Pergunta 1

a) Valores simulados e respetivos lançamentos

Foi simulado um jogo com vinte jogadas onde foi possível representar graficamente os lançamentos da moeda em cada uma das jogadas, onde o valor um corresponde a cara e o valor dois corresponde a coroa, e ainda o respetivo estado em cada jogada.

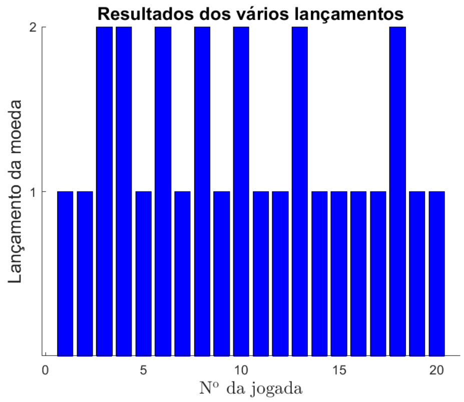

Figura 2: Lançamento da moeda em cada jogada

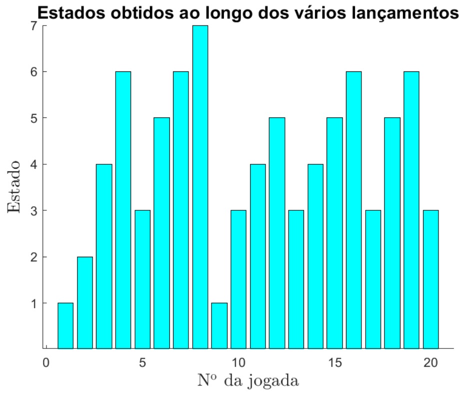

Figura 3: Estado em cada jogada

Ao analisarmos os gráficos é possível verificar que existe uma tendência para o estado três (5 passagens) algo que seria esperado uma vez que existem quatro condições que levam a este estado devido à ida para a prisão. Assim, os estados quatro, cinco e seis são os segundos mais visitados pois na saída da prisão é apenas possível ir para o estado quatro ou para o estado cinco.

b) Frequências Relativas dos diferentes estados

Para tirar conclusões precisas relativamente às casas mais visitadas calcula-se, através do rácio entre o número de vezes que uma casa foi visitada e o número de jogadas, a frequência relativa de cada estado. Para tal foi simulado apenas uma run com dez milhões de jogadas, sendo descartadas as primeiras sete jogadas, o resultado está representado no gráfico da figura 4.

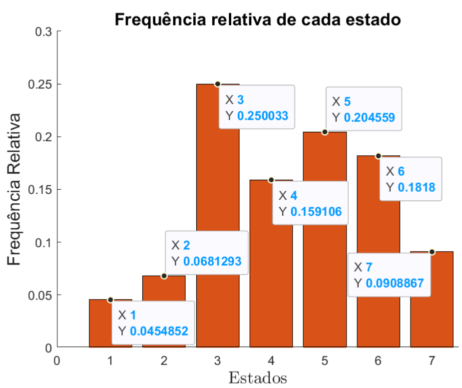

Figura 4: Frequência Relativa para cada estado

Do gráfico acima é possível verificar que a frequência do estado sete é bastante reduzida, tal seria esperado uma vez que apenas estando no estado seis e tal que no lançamento efetuado calhe coroa é possível um jogador ir para a casa sete. Por consequência, o estado um apresenta a menor frequência pois, sem ser na primeira jogada (descartada), apenas é possível haver uma transição para esta casa quando o jogador se encontra no estado sete e obtém cara no lançamento. A frequência relativa do estado dois acaba por ser um máximo relativo dentro das transições de menor frequência uma vez que existem duas transições possíveis para este estado embora ambas provenham de casas com pouca frequência relativa, assim, é possível chegar ao estado dois lançando coroa a partir do estado sete ou lançando cara do estado um. Por outro lado, como já referido anteriormente, o estado três ("prisão") é o mais frequentado, por consequência os estados quatro, cinco e seis são os mais frequentes pois encontram-se entre a casa da "prisão" e a casa que envia o jogador para a "prisão".

c) Rendas médias expectáveis

Para o mesmo número de runs, jogadas por run e jogadas descartadas da alínea anterior foi calculada a renda média de cada estado através da multiplicação das frequências relativas com o valor de renda de cada estado. Os valores obtidos estão representados no gráfico da figura 5.

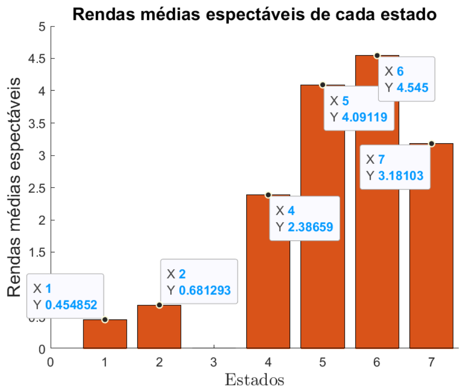

Figura 5: Renda média para cada estado

Ao analisar o gráfico é possível concluir que a renda média é tanto maior quanto maior for a frequência relativa do estado e quanto maior for o preço do aluguer do respetivo estado. No entanto, apesar do estado três ser o estado mais frequente como foi verificado anteriormente apresenta a renda média menor (nula) pois a casa da prisão tem valor de aluguer igual a zero.

Pergunta 2

Vamos começar a analisar o problema utilizando a matriz de transição da Cadeia de Markov,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sabendo que p^T corresponde ao vetor coluna das probabilidades transposto, para descobrir as probabilidades de equilíbrio é necessário que $P^T \mathrm{p} = \mathrm{p}$. Para além disto, como queremos que a soma das probabilidades sejam iguais a um, ou seja, $\sum_{i=1}^{7} p_i = 1$, o valor próprio da matriz P^T tem de ser igual a um e p é o vetor próprio associado a esse valor próprio. Assim,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -1 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ao resolver a matriz anterior obtém-se os valores de probabilidade de equilíbrio de cada estado, sendo assim conhecidos os valores teóricos de probabilidade para cada estado do problema:

$$p^T = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} 0.0455 & 0.0682 & 0.2500 & 0.1591 & 0.2045 & 0.1818 & 0.0909 \end{bmatrix}$$

Por consequência, como referido anteriormente, o valor da renda média é calculado multiplicando a probabilidade de cada estado com o seu respetivo valor de aluguer, assim os valores teóricos da renda são os seguintes:

$$Renda = \begin{bmatrix} 0.455 & 0.682 & 0 & 2.3865 & 4.09 & 4.545 & 3.1815 \end{bmatrix}$$

i.

Para avaliar se a sequência de estados depende só do acontecimento desencadeado na jogada atual ou também pelas jogas efetuadas anteriormente visualiza-se a partir da tabela 1 todas as transições de estados.

	Estado Seguinte	
Estado Atual	Cara	Coroa
E1	E2	E3
E2	E3	E4
E3	E4	E5
E4	E5	E6
E5	E6	E3
E6	E3	E7
E7	E1	E2

Tabela 1: Transição entre estados

Observando a tabela 1 verifica-se que para os estados dois, quatro, cinco e seis apenas é possível transitar de dois estados anteriores, assim, a probabilidade de equilíbrio destes estados será igual à média aritmética das probabilidades dos estados anteriores uma vez que estas transições não estão relacionadas com a ida para a prisão, ou seja:

$$p_2 = \frac{p_1 + p_7}{2} = 0.0682 \qquad p_4 = \frac{p_2 + p_3}{2} = 0.1591$$

$$p_5 = \frac{p_3 + p_4}{2} = 0.2045 \qquad p_6 = \frac{p_4 + p_5}{2} = 0.1818$$

Estes valores calculados foram obtidos através das probabilidades de equilíbrio teóricas obtidas anteriormente. Como é possível verificar, tanto o valor teórico como estas relações de probabilidades são bastante semelhantes aos valores obtidos experimentalmente na secção anterior. Por outro lado, não é possível utilizar a média para calcular a probabilidade dos estados um, três e sete uma vez que estes dependem da ida para a prisão.

Assim, uma vez que os valores teóricos, incluindo a relação da média aritmética entre estados, e experimentais são semelhantes consegue-se concluir que a sequência de estados depende da jogada atual como também dos acontecimentos das jogadas anteriores.

ii.

Sabemos que o método de Monte Carlo é caracterizado por uma distribuição normal de probabilidades com média nula e desvio-padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, em que n é referente ao número de simulações. Desta forma é esperada uma melhor aproximação conforme o aumento do valor n uma vez que assim se diminui o erro em relação ao valor teórico. Assim, o fator $\sqrt{n}$ no denominador do erro de estimação permite inferir que a convergência do método de Monte Carlo é da ordem de raiz quadrada.

No caso particular do problema, o fator n corresponde ao número de runs, ou seja, quando se realiza uma simulação com poucas runs e poucas jogadas não se obtém uma distribuição de equilíbrio válida.

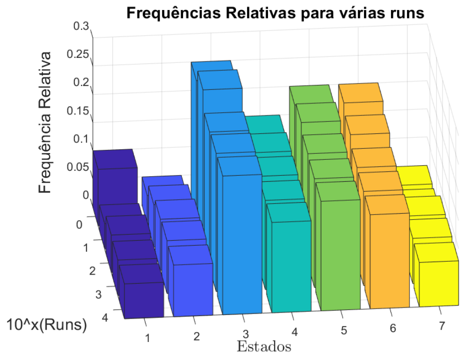

Figura 6: Frequência relativa para cada estado para diferentes valores de runs, todos com 20 jogadas cada

Como é possível verificar, com o aumento do número de runs as frequências relativas dos vários estado convergem.

Relativamente ao gerador de números aleatórios, foram simulados dois gráficos de frequências relativas, com seeds respectivas 42069 e 3333, ambos com apenas uma run, dez milhões de jogadas e descartando as sete primeiras jogadas, seguem infra os resultados.

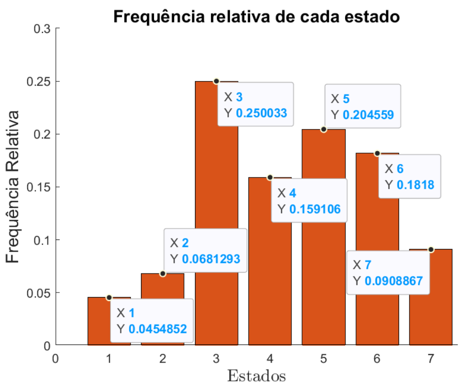

Figura 7: Frequências Relativas para uma seed de 42069

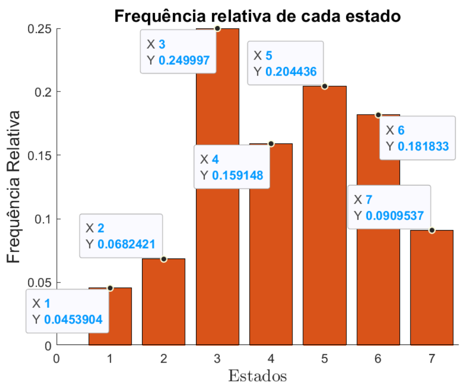

Figura 8: Frequências Relativas para uma seed de 3333

Da figura 7 e 8 é possível concluir que embora com seeds diferentes os valores de frequência relativa diferem muito pouco, não sendo sequer considerado relevante, ou seja, o resultado da simulação é independente do valor do gerador de números aleatórios.

iii.

Para determinar o valor de jogadas iniciais ideal que se tem de descartar ($N_{discard}$) é necessário encontrar o valor mínimo de jogadas que sendo descartadas eliminam o regime transiente, permitindo assim atenuar o erro de estimação. Para tal, podem ser admitidas duas conjecturas:

- O valor de de jogadas descartadas deve ser inferior ao valor total de jogadas realizadas, de forma a descartar-se o regime transitório **inicial** sem adulterar o curso da simulação.

- O número de jogadas descartadas deve ser suficientemente elevado para garantir a diluição de quase todo o transitório, ou seja, que já se tenha dado pelo menos uma volta ao tabuleiro.

Para determinar uma aproximação do valor ótimo de descarte de jogadas foi calculado o valor da frequência relativa para cada estado variando o valor de jogadas descartadas, obteve-se o resultado infra.

Figura 9: Frequência relativa para cada estado variando $N_{discard}$

Observando os resultados supra é possível verificar que as frequências relativas estabilizam em valores próximos dos esperados quando o número de jogadas descartadas é aproximadamente catorze. É essencial notar que um descarte superior a dezoito resulta num plano de estabilidade abaixo do esperado por violação da primeira conjectura uma vez que para cada modelo de descarte realizou-se cem mil runs de 50 jogadas.

iv.

Um ponto interessante a verificar seria o caso de não existir a casa da prisão e como iria evoluir a frequência relativa de cada estado dcom esta alteração. Para verificar este facto foi simulado com uma run, dez milhões de jogadas e catorze jogadas descartadas mas onde não existe a condição de prisão.

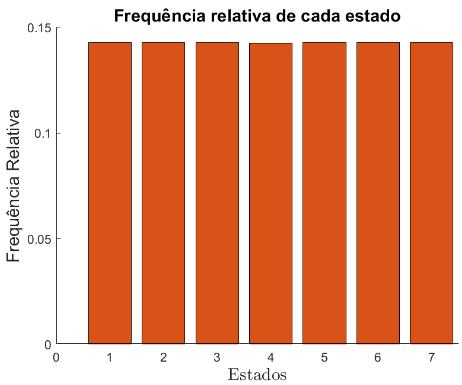

Figura 10: Frequência relativa para cada estado quando não existe a casa da prisão

Tal como previsto, as frequências relativas de cada casa tendem a estabilizar para o mesmo valor, neste caso $0.142822 \approx \frac{1}{7}$, conferindo uma distribuição de probabilidades uniforme como seria esperado.

Pergunta 3

Para responder à questão três foi simulado vinte mil e vinte milhões de jogos cada um com trinta jogadas. Cada um dos gráficos representados em baixo mostra a probabilidade de um jogador se encontrar no estado quatro em cada jogada. Está marcado ainda, uma reta de valor de probabilidade igual a 0.1591 que corresponde à probabilidade de equilíbrio do estado quatro, como verificado na secção anterior.

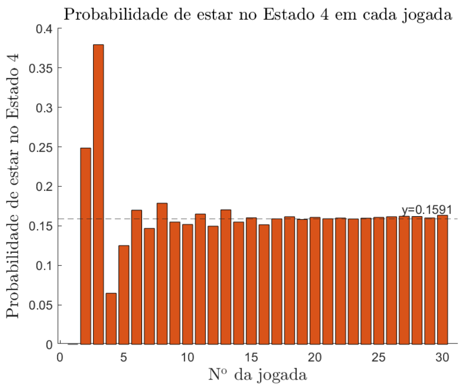

Figura 11: Probabilidade de estar no estado com vinte mil runs

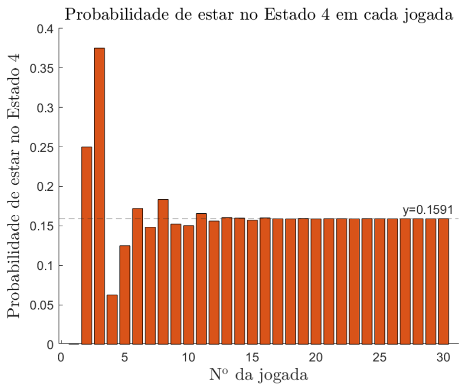

Figura 12: Probabilidade de estar no estado com vinte milhões de runs

Ao analisar os gráficos é possível verificar que a probabilidade de na jogada zero e na jogada um a probabilidade de o jogador se encontrar no estado quatro é nula, tal seria esperado uma vez que o jogo começa na casa zero (jogada zero) e na primeira jogada apenas se pode deslocar ou para a casa um ou para a casa dois. Para a jogada dois apenas é possível chegar ao estado quatro se for lançado coroa duas vezes consecutivas, assim a probabilidade de estar no estado quatro seria igual a $0.5*0.5{=}0.25$, como se pode observar no gráfico. Verifica-se ainda que para a jogada três e quatro tem-se a maior e a menor probabilidade, respetivamente. Tal ocorre pois no caso da terceira jogada, para se atingir o estado quatro, apenas é necessária uma combinação de uma coroa e duas caras independentemente da ordem, ou seja, $3 * 0.5^3{=}0.375$, enquanto que para o jogador se encontrar na jogada quatro na casa quatro é necessário quatro caras seguidas, ou seja, $0.5^4{=}0.0625$.

Por ultimo, verifica-se que a probabilidade de um jogador se encontrar no estado quatro converge para a sua probabilidade de equilíbrio, que neste caso corresponde a 0.1591 como verificado anteriormente, e que esta convergência ocorre mais rapidamente quando o número de jogos é superior.

Pergunta 4

Para adaptar o diagrama de transição de estados à situação em que o jogador tem que permanecer na casa da prisão durante uma jogada antes de poder sair da mesma, gera-se um novo estado P que representa a jogada na qual o jogador não poderá avançar. No caso do jogador se encontrar no estado seis e calhar cara este deve deslocar-se para o novo estado P e na jogada seguinte, independentemente do resultado do lançamento irá deslocar-se para a casa três que representa a prisão, pela mesma lógica, caso o jogador se encontre na casa cinco e calhe coroa no lançamento irá ser transportado para o novo estado P que, por sua vez, o levará ao estado três. Este novo diagrama está representado infra.

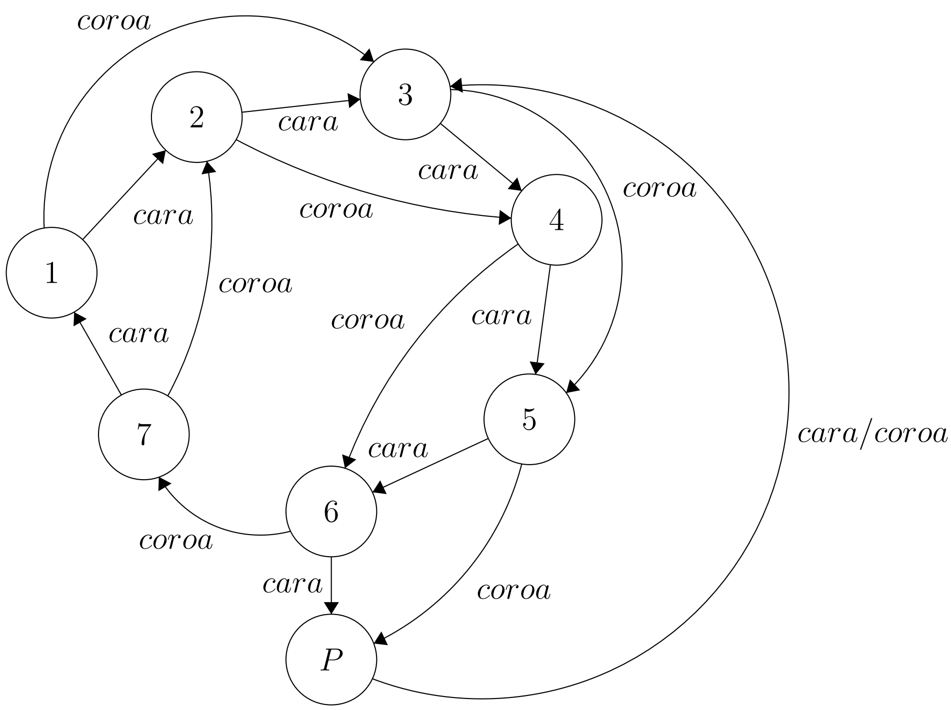

Figura 13: Novo diagrama de estados

Conclusões

Em suma, após modelar e simular o sistema é possível perceber que o método de Monte Carlo utilizado permite estudar a evolução probabilística de um jogo de Monopólio, de forma bastante precisa e adequada à realidade.
Adicionalmente compreende-se a álgebra de Markov como ferramenta estocástica essencial, não só nos diversos contextos da engenharia (modelação e simulação de sistemas químicos, mecânicos e computacionais, *et cetera*) , mas em qualquer contexto que envolva a necessidade de previsão probabilística de acontecimentos (economia e finanças, meteorologia, entre outros) .