

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

LICENCIATURA EM ENGENHARIA ELETROTÉCNICA E DE
COMPUTADORES
SINAIS E SISTEMAS

Relatório Laboratorial

João BARREIROS C. RODRIGUES nº99968 , LEEC
Vasco Maria AGUIAR M. R. ESTEVES nº 100110, LEEC

Janeiro-Fevereiro 2022

Índice

1	Análise de um sistema (R1-R5)	2
1.1	Questão R1	2
1.2	Questão R2	4
1.3	Questão R3	5
1.4	Questão R4	7
1.5	Questão R5	10
2	Filtragem (R6-R9)	11
2.1	Questão R6	11
2.2	Questão R7	13
2.3	Questão R8	15
2.4	Questão R9	17

1 Análise de um sistema (R1-R5)

1.1 Questão R1

Da definição algébrica de *linearidade* compreende-se que um sistema linear deve obedecer às condições seguintes:

Aditividade: Verifica-se que: $sistema(x+y)=sistema(x)+sistema(y)$

Homogeneidade: Verifica-se que: $sistema(\alpha y)=\alpha sistema(y)$

É possível testar a primeira condição executando:

```
In [2]: t = timevar(4)
In [3]: x1 = cos(t)
In [4]: x2 = cos(2 * t)
In [5]: y1 = sistema2(x1) + sistema2(x2)
In [6]: y2 = sistema2(x1 + x2)
In [7]: tplot(y2)
In [8]: tplot(y1)
```

Figura 1: Síntese de dois sinais x_1 e x_2 e síntese de dois sinais y_1 e y_2 por respectiva soma dos outputs da passagem individual de x_1 e x_2 pelo sistema 1 e pela passagem do sinal resultante da soma de x_1 com x_2 pelo sistema1.

Para o qual se obtém o output:

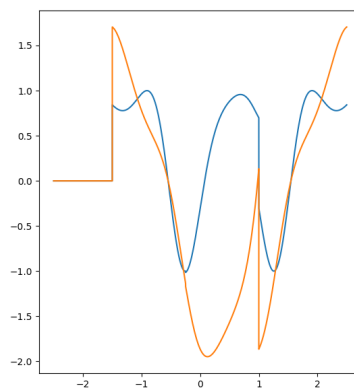


Figura 2: A azul e a laranja, respectivamente as representações gráficas de y_1 e y_2 , de notar que $y_1 \neq y_2$.

Verificando assim que o sistema não é aditivo, precipitando para a conclusão da **não-linearidade do sistema**.

Embora a linearidade seja uma conjunção de duas propriedades, realiza-se também o teste da condição de homogeneidade para efeitos de estudo:

```
In [2]: t = timevar(4)
In [3]: x1 = cos(t)
In [4]: y1 = sistema2(2 * x1)
In [5]: y2 = 2 * sistema2(x1)
In [6]: tplot(y1)
In [7]: tplot(y2)
```

Figura 3: Síntese de um sinal x_1 e síntese de dois sinais y_1 e y_2 por respectiva passagem do produto de x_1 com uma constante β (tal que $\beta=2$) pelo sistema 2 e pelo produto do resultado da passagem de x_1 pelo sistema 2 com β .

Para o qual se obtém os outputs:

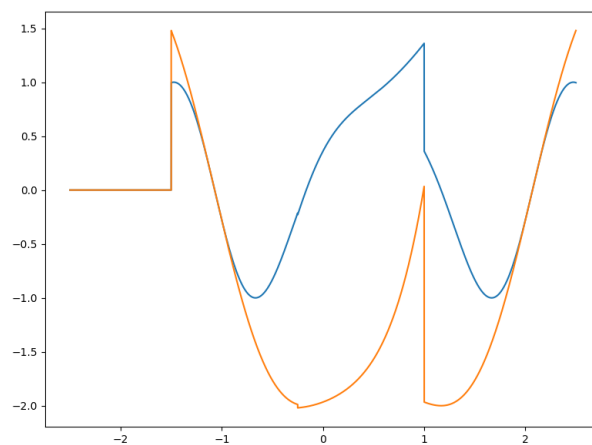


Figura 4: A azul e a laranja, respectivamente as representações gráficas de y_1 e y_2 , de notar que $y_1 \neq y_2$.

Provando adicionalmente que o sistema **não é homogêneo**

1.2 Questão R2

Definem-se sistemas invariantes no tempo aqueles que não dependem directamente da variável tempo, ou seja na expressão matemática do sistema não está contemplada a variável tempo. O sistema invariante no tempo pode contudo depender indirectamente do tempo, ou seja a função de *input* dada pode depender explicitamente do tempo.

Desta forma, o mais simples teste que se pode realizar de forma a concluir a variância ou invariância no tempo de um sistema é através do deslocamento do sinal de entrada. O sistema será invariante no tempo se a seguinte proposição for verdadeira:

Para $x_0(t)$ e $x_1(t) = x_0(t + \beta)$ ou seja $x_1(t) = T_\beta x_0(t)$

$T_\beta \text{ sistema}(x_0) = \text{sistema}(x_1)$

Considerando T_β o operador deslocamento para o vector $(0, -\beta)$

Tomando as noções anteriores computa-se no ambiente *ipython*:

```
In [2]: t = timevar(10)
In [3]: x1 = cos(t)
In [4]: x2 = cos(t - 2)
In [5]: y1 = sistema2(x1)
In [6]: y2 = sistema2(x2)
In [7]: tplot(y1)
In [8]: tplot(y2)
```

Figura 5: Síntese de um sinal x_1 e x_2 , tal que $x_2 = T_{-2} x_1$ e síntese de dois sinais y_1 e y_2 por respectiva passagem de x_1 e x_2 pelo sistema2.

Para o qual se obtém os outputs:

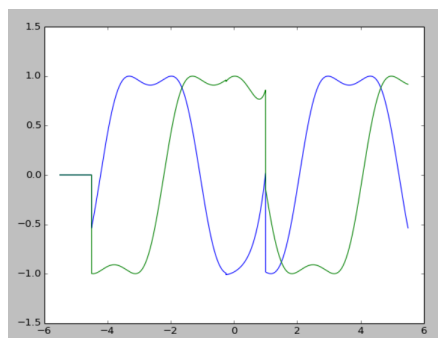


Figura 6: A azul e a verde, respectivamente, os sinais y_1 e y_2 . De notar a distinção entre a forma de onda de y_1 e y_2 , indiciando que $T_{-2} y_1 \neq y_2$.

Concluindo-se que o sistema 2 **não é invariante no tempo**

1.3 Questão R3

Sucintamente, um sistema descreve-se como sem memória se o seu output para um instante t_1 for dependente apenas do input dado nesse mesmo instante.

Desta forma é possível aferir que um sistema sem memória tem todas as suas referências canônicas à variável tempo em $input(t)$ na forma:

$$\alpha t^\gamma + \beta, \text{ com } \alpha = 1, \gamma = 1 \text{ e } \beta = 0.$$

Um teste simples que pode ser utilizado para verificar esta propriedade consiste na síntese de dois sinais x_0 e x_1 distintos que se intersejam em determinado instante t_i . Para um sistema de equação y_1 o sistema será sem memória se $y_1(x_0)$ e $y_1(x_1)$ se intersetarem em t_i .

Executando o referido teste:

```
In [2]: t = timevar(4)
In [3]: x0 = t ** 2
In [4]: x1 = t * 2
In [5]: tplot(x1)
In [6]: tplot(x0)
In [7]: y0 = sistema2(x0)
In [8]: y1 = sistema2(x1)
In [9]: tplot(y0)
In [10]: tplot(y1)
```

Figura 7: Realização em ambiente *ipython* do teste acima descrito.

Do qual se obtém o primeiro *output*, de controlo:

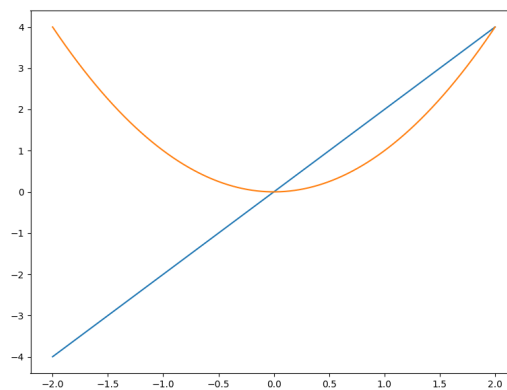


Figura 8: Representação gráfica de x_1 (a azul) e x_0 (a laranja). De notar a intersecção dos gráficos para $t=0$ e $t=2$.

E o segundo, conclusivo:

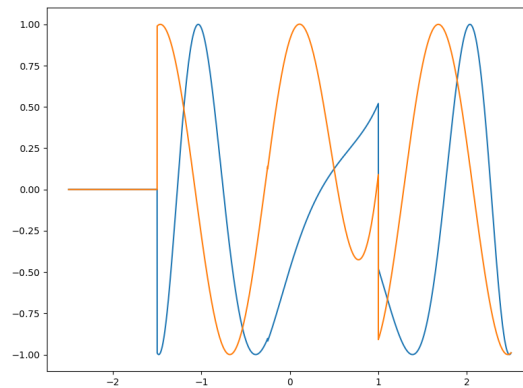


Figura 9: Representação gráfica de y_0 (a azul) e y_1 (a laranja). Verifique-se a não intersecção dos gráficos em $t=0$ e $t=2$.

Prova-se que o sistema 2 **tem memória**.

1.4 Questão R4

Assim como na caracterização da memória do sistema, também a definição de causalidade assenta nas particularidades do sistema relativas à variável tempo. Desta forma um sistema descreve-se como causal quando o seu output para qualquer instante t_1 for dependente apenas de inputs presentes ou passados ou seja $t_1 \geq t_{input}$

Desta forma é possível aferir que um sistema causal tem todas as suas referências canônicas à variável tempo em $input(t)$ na forma:

$$\alpha t^\gamma + \beta, \text{ com } \alpha \in]0, 1[, \gamma \in]0, 1] \text{ e } \beta \in]-\infty, 0].$$

Desta forma, para determinar um possível contra-exemplo utilizam-se sinais de tipo *degrau* (nos testes apresentados utilizam-se degrau unitário, linear, sinusoidal e exponencial) tal que para $t < 0$ x_n é igual a 0. Assim caso o sinal de saída $sistema(x_t(t)) \neq 0$ para $t < 0$ compreende-se o adiantamento do sinal ou seja o output está a depender de inputs futuros, ou seja viola-se a definição inicialmente estipulada para a causalidade.

Assim computa-se o setup inicial:

```
In [2]: t = timevar(4)
In [3]: a0 = 2 * t
In [4]: a1 = e ** t
In [5]: a2 = cos(t)
In [6]: a3 = 0 * t + 3
In [7]: x0 = u(t) * a0
In [8]: x1 = u(t) * a1
In [9]: x2 = u(t) * a2
In [10]: x3 = u(t) * a3
In [11]: tplot(x0)
In [12]: tplot(x1)
In [13]: tplot(x2)
In [14]: tplot(x3)
```

Figura 10: Síntese dos sinais acima propostos, com degrau linear x_0 , degrau exponencial x_1 , degrau sinusoidal x_2 e degrau unitário x_3 .

Para o qual se obtém o output:

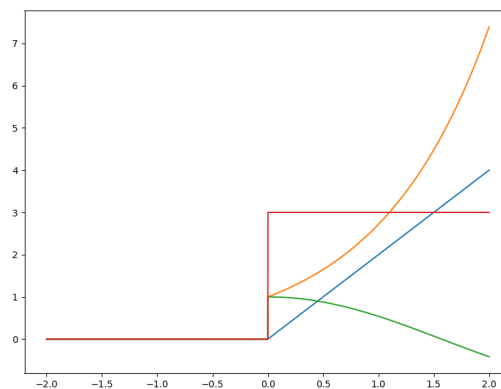


Figura 11: Representação gráfica dos sinais de input sintetizados. A azul, laranja, verde e vermelho respectivamente x_0 , x_1 , x_2 e x_3 .

De seguida computa-se o setup secundário:

```
In [15]: y0 = sistema2(x0)
In [16]: y1 = sistema2(x1)
In [17]: y2 = sistema2(x2)
In [18]: y3 = sistema2(x3)
In [19]: tplot(y0)
In [20]: tplot(y1)
In [21]: tplot(y2)
In [22]: tplot(y3)
```

Figura 12: Síntese dos sinais de output y_n .

Para o qual se obtém o output:

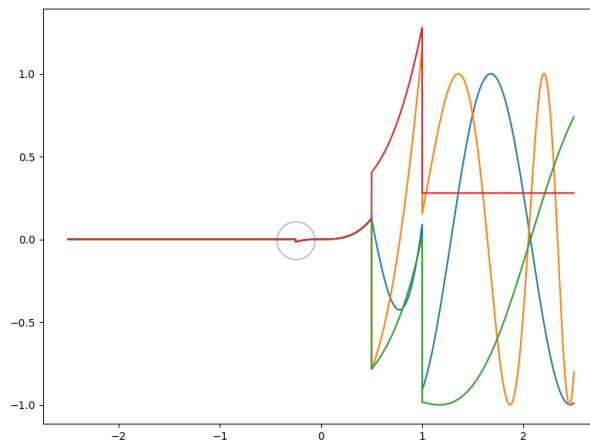


Figura 13: Representação gráfica dos sinais de output, com sinal coincidente ao input respectivo. Adicionalmente não se considera a oscilação do sinal circundada a roxo, proveniente das limitações do ambiente em que as experiências foram realizadas.

Verifica-se que para os sinais dados (propositalmente de equações distintas) a condição inicial que sustenta a definição de causalidade não é quebrada uma vez que nenhum dos sinais y_n possui para $t < 0$ valor $\neq 0$ ou seja não é presente nenhuma evidência que o sistema2 provoque o adiantamento do sinal.

Mantém-se então a hipótese que o sistema **possa ser causal**.

1.5 Questão R5

Sucintamente define-se um sistema estável como um sistema que para um input com pequenas oscilações não diverge

Um teste válido para determinar um contra-exemplo para a estabilidade de um sistema é a utilização de inputs limitados superior e inferiormente (nos testes apresentados utilizam-se degrau unitário e sinal sinusoidal). Desta forma caso o sinal de output pelo sistema sintetizado divergir prova-se que o sistema não é estável.

Assim em ambiente *ipython* computa-se:

```
In [2]: t = timevar(10)
In [3]: x0 = cos(t)
In [4]: x1 = u(t) * 2
In [5]: y0 = sistema2(x0)
In [6]: y1 = sistema2(x1)
In [7]: tplot(y0)
In [8]: tplot(y1)
```

Figura 14: Síntese dos sinais x_0 e x_1 , demonstrados em alíneas anteriores como sendo limitados. Síntese dos sinais de output y_n pela passagem dos respectivos sinais x_n pelo sistema 2.

Para o qual se obtém o output gráfico:

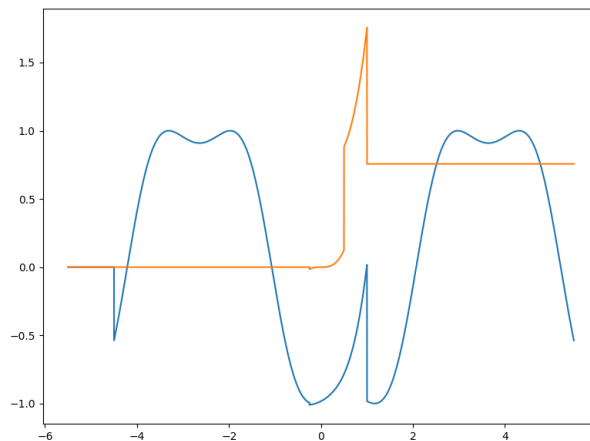


Figura 15: Representação gráfica dos sinais de output. De notar que ambos os sinais de output são limitados superior e inferiormente.

Desta forma não foi possível sintetizar um contra-exemplo mantendo-se a hipótese da **possível estabilidade do sistema**.

2 Filtragem (R6-R9)

2.1 Questão R6

Da expressão deduzida de $|H(j\omega)|$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} \iff$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1+j\omega RC)^2}} \iff$$

$$R = \frac{\sqrt{\frac{1}{|H(j\omega)|^2} - 1}}{\omega C}$$

Obtém-se os valores de $|H(j\omega)|$ pela computação no sistema *ipython*:

```
In [15]: for w in [0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 40]:
...:     y = sistema3(cos(w * t))
...:     ymax = y.max()
...:     print("|H(j" + str(w) + ")|" + " = " + str(ymax))
|H(j0)| = 0.9999716833586383
|H(j1)| = 0.9355423386855392
|H(j2)| = 0.7947602647695621
|H(j3)| = 0.6561129992989437
|H(j5)| = 0.46385861967638675
|H(j8)| = 0.3126295806678477
|H(j13)| = 0.27604154322775193
|H(j21)| = 0.12370545929250168
|H(j34)| = 0.07677048525189852
|H(j40)| = 0.06530842935081761
```

Figura 16: Determinação de $|H(j\omega)|$ para vários ω .

Calculando R pela relação anteriormente estabelecida e cruzamento de dados:

ω	$ H(j\omega) $	R / Ω
1	0.93554	755.12
2	0.79476	763.66
3	0.65611	766.81
5	0.46385	763.96
8	0.31262	759.61
21	0.12370	764
34	0.076770	763.97
40	0.076770	764.06

Assim $R_{medio} = 762.65 \Omega$.

Verifica-se a validade do valor médio obtido para R comparando, por exemplo, a representação gráfica do output do sistema 3 com o impulso unitário como input (controlo) e a representação gráfica da expressão:

$$h_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t),$$

Descritiva da resposta de um circuito RC para o impulso unitário, substituindo R por R_{medio} e C por $500\mu\text{F}$. Obtém-se a comparação gráfica no sistema *ipython*:

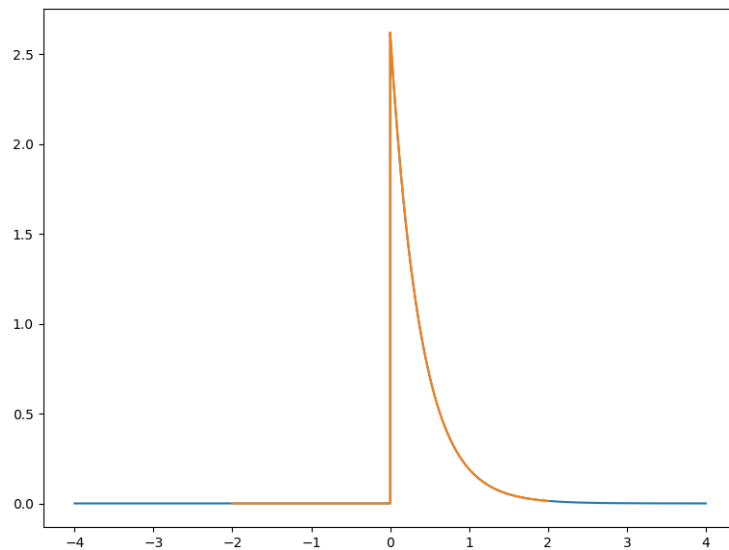


Figura 17: A azul o sinal de controlo e a laranja o sinal sintetizado pela substituição das variáveis R e C na equação de resposta do circuito RC. De notar a sobreposição dos dois gráficos, permitindo inferir que o R_{medio} determinado é solução aproximada de R para o sistema dado.

2.2 Questão R7

Toma-se como noção inicial que quanto mais rápida for a variação instantânea de um dado sinal x_n em t_0 maior será a frequência instantânea nesse mesmo instante no espectro do sinal, F_n .

Têm-se então o sinal p e o módulo do seu espectro y_p , que se utilizarão como controle dos testes seguintes:

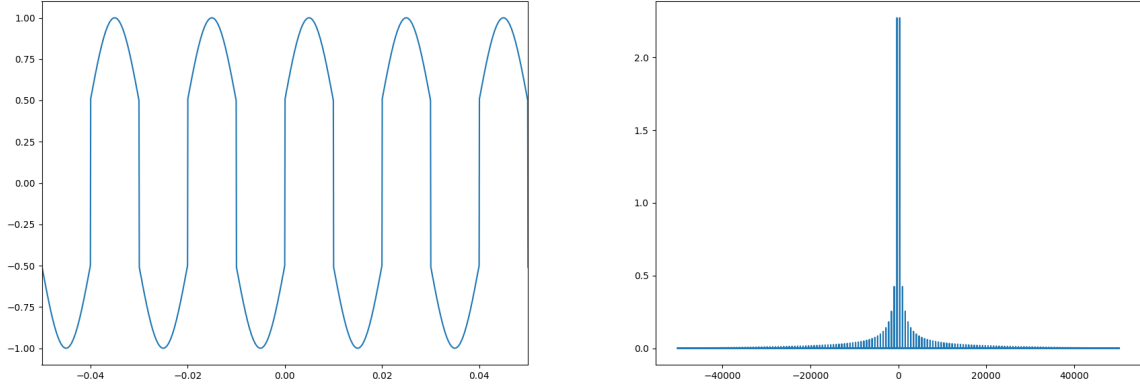


Figura 18: Representação gráfica do sinal p e do módulo do espectro de frequências do sinal p , $|F_p|$

Passando p pelo sistema 4, identificado como um filtro passa-baixo, e extraíndo o espectro do output:

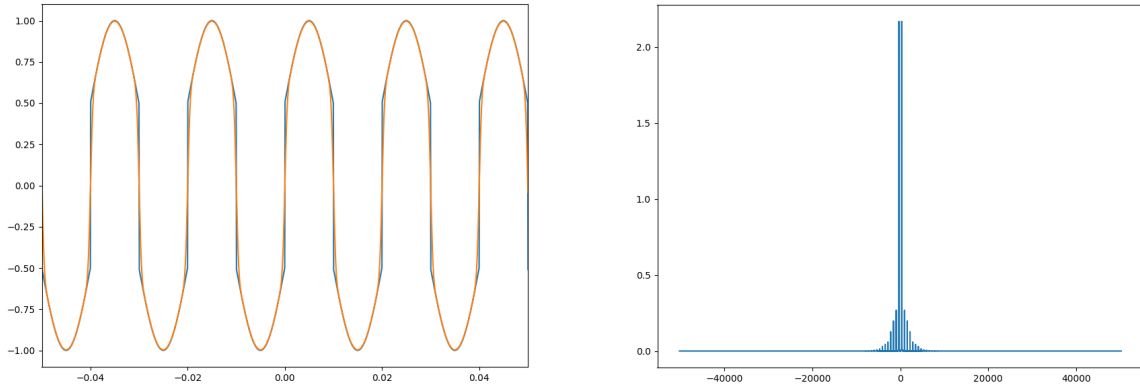


Figura 19: Representação gráfica do sinal filtrado pelo sistema 4, a laranja (sobrepuesto sobre o sinal original, a azul) e espectro do sinal filtrado. De notar a distinção nas variações rápidas do sinal, assim como a supressão da frequências mais altas.

Logo assim como seria previsível as frequências mais altas são suprimidas, resultando numa pior reprodução das variações rápidas do sinal. Passando p pelo sistema 5, identificado como um filtro passa-alto, e extraíndo o espectro do output:

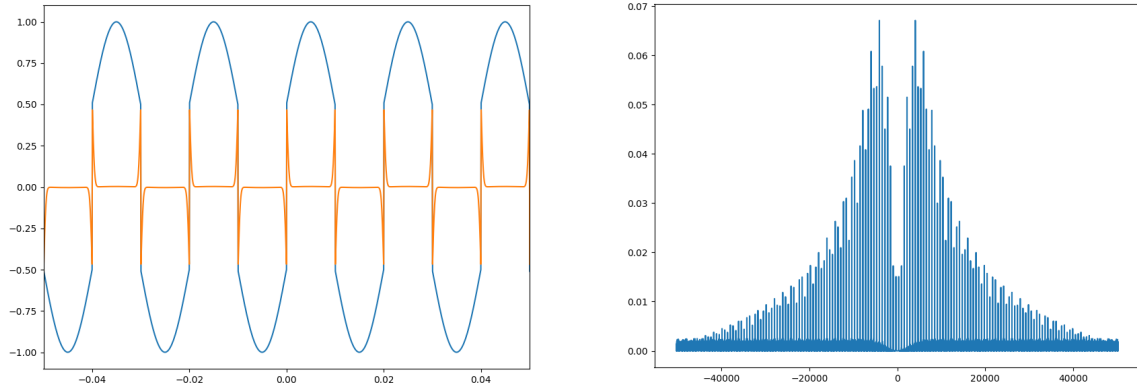


Figura 20: Representação gráfica do sinal filtrado pelo sistema 5, a laranja (sobreposto sobre o sinal original, a azul) e espectro do sinal filtrado. De notar a distinção nas variações lentas do sinal (inexistência total desta mesmas variações), assim como a supressão da frequências mais baixas.

Assim como expectável as frequências mais baixas são suprimidas, resultando numa pior reprodução das variações lentas do sinal.

2.3 Questão R8

Passando o sinal p pelo sistema 6 e obtendo o módulo do espectro deste output:

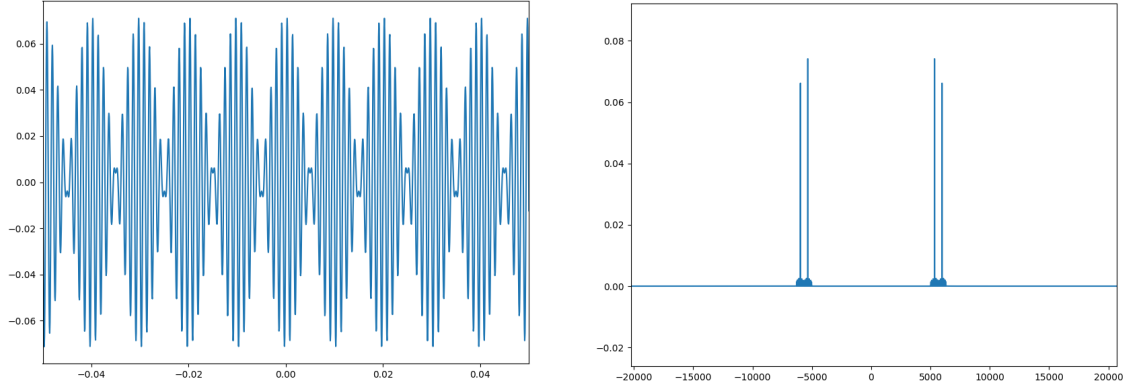


Figura 21: Representação gráfica do sinal filtrado pelo sistema 6, e espectro do sinal filtrado. De notar os dois impulsos no espectro que limitam a banda passante com $|\omega_{min}|=5430$ rad/s e $|\omega_{max}|=5969$ rad/s

Assim pela simples noção que $\frac{\omega}{2\pi} = f$ deduz-se que a banda passante se situa entre os 849.887Hz e os 949.996Hz.

Adicionalmente compreende-se que o sinal obtido é a soma de dois senos, \sin_a e \sin_b com ω_a igual a 5340 rad/s e ω_b iguala 5969 rad/s. As amplitudes A_a e A_b podem ser deduzidas pela expressão $Aa_c=A'$ com $a_c=1.95$ (amplitude de controlo obtida através de medição directa do espectro de $\sin(t)$) e A' a amplitude de cada impulso do espectro de $\text{sistema6}(p)$ respectivamente $A'_a=0.074$ e $A'_b=0.066$. É então possível definir:

$$\text{sistema6}(p) = 0.038\sin(5340t) + 0.034\sin(5969t)$$

Definição essa que pode ser interpretada num cenário de modulação pela identidade trigonométrica:

$$2\sin(\theta)\cos(\phi) = \sin(\theta + \phi) + \sin(\theta - \phi)$$

Obtendo-se assim:

$$\text{sistema6}(p) = 0.072\sin(5654.5t)\cos(314.5t)$$

Utilizando a amplitude média dos senos de forma a ser resolúvel a identidade trigonométrica referida.

Obtêm-se então os outputs gráficos:

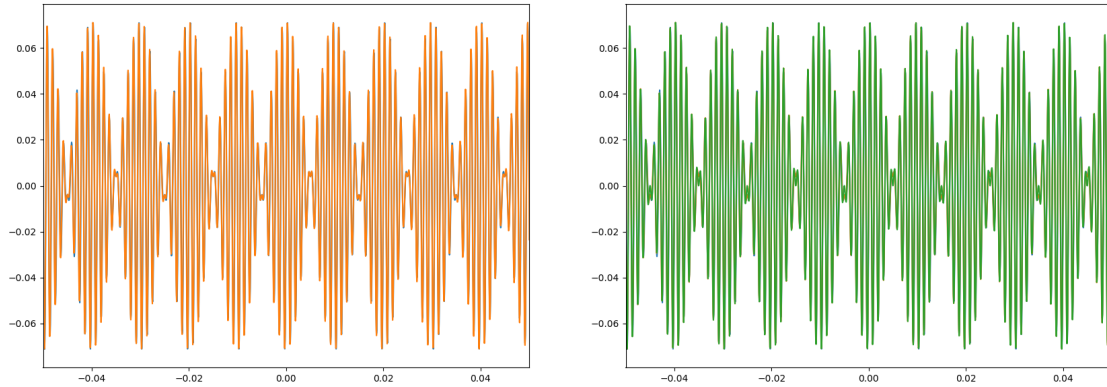


Figura 22: À esquerda: representação gráfica do sinal de saída formulado pela soma de senos (a laranja) sobre a representação gráfica inicial, de controlo (a azul). À direita: representação gráfica do sinal de saída formulado pela igualdade trigonométrica (a verde) sobre o a representação inicial, de controlo (a azul). De notar que em ambas as representações as distinções com o sinal de controlo são mínimas.

Desta forma conclui-se que o output de $\text{sisistema6}(p)$ é uma senoide uma vez que é o produto de duas sinusoides. Adicionalmente conclui-se que a frequência local do sinal de saída corresponde a 899.94 Hz e a de modulação a 50.05 Hz.

2.4 Questão R9

Tomando como noção inicial a síntese do teorema da amostragem de Nyquist-Shannon:

É possível reter toda a informação de um sinal contínuo x_{c1} num sinal discreto x_{d1} se a frequência de amostragem f_a utilizada na síntese de x_{d1} pela amostragem de x_{c1} for igual ao superior ao dobro da frequência máxima presente no sinal x_{c1} .

Amostrando o sinal x_{c1} com periodo de amostragem 0.01 segundos e reconstruindo o sinal com igual periodo obtém-se:

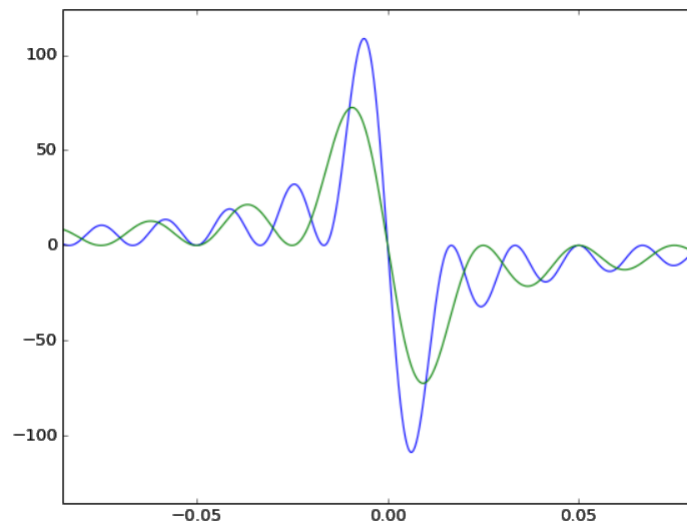


Figura 23: Representação gráfica do sinal y_{c1} reconstruído através da informação amostrada de x_{c1} , a verde sobreposto sobre o sinal inicial, de controlo, a azul, x_{c1} . De notar as distinções entre os dois gráficos, precipitando para a identificação de um caso de sub-amostragem.

De forma a verificar a hipótese acima descrita sintetiza-se o módulo do espectro de x_{c1} :

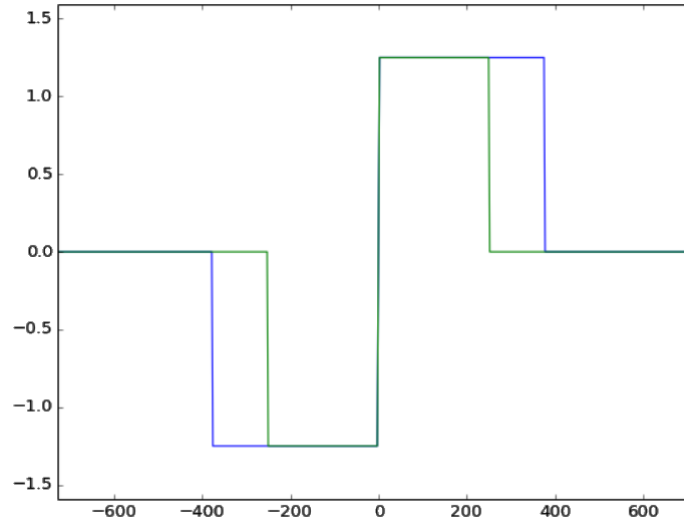


Figura 24: Representação gráfica do espectro do sinal x_{c1} (a azul) subposto sobre o espectro do sinal y_{c1} (a verde). Por medição directa determina-se que ω_{max} presente no sinal x_{c1} é igual a 472.72 rad/s.

A amostragem foi realizada com frequência de amostragem igual a 100 Hz e contudo verifica-se, por métodos anteriormente descritos, que a frequência máxima presente em x_{c1} é 75.23 Hz, ou seja de forma a reter toda a informação do sinal por amostragem, segundo o teorema da amostragem de Nyquist-Shannon, a frequência de amostragem teria que ser superior a 150.47 Hz ou seja período de amostragem igual ou inferior a 0.00646 segundos, condição essa que foi comprometida, originando na reconstrução do sinal a sobreposição de informação simétrica, originando o corte defrequências justificando a distinção entre espectros.

Assim conclui-se a presença de um caso de **sub-amostragem**.

Bibliografia

- [1] A. V. Oppenheim and A. S. Willsky. *Signals & Systems*. Prentice-Hall, 2 edition, 1997.