UFMG/ICEx/DCC DCC216 – Matemática Discreta

Grafos
Lista de Exercícios: Soluções

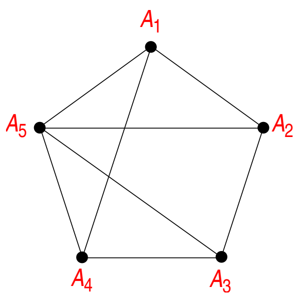
Ciências Exatas & Engenharias 1º Semestre de 2023

1. O grafo de interseção de uma coleção de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é o grafo que tem um vértice para cada um dos conjuntos da coleção e tem uma aresta conectando os vértices se esses conjuntos têm uma interseção não vazia. Construa o grafo de interseção para as seguintes coleções de conjuntos.

   (a)

$$\begin{array}{lcl} A_1 & = & \{0,2,4,6,8\} \\ A_2 & = & \{0,1,2,3,4\} \\ A_3 & = & \{1,3,5,7,9\} \\ A_4 & = & \{5,6,7,8,9\} \\ A_5 & = & \{0,1,8,9\} \end{array}$$

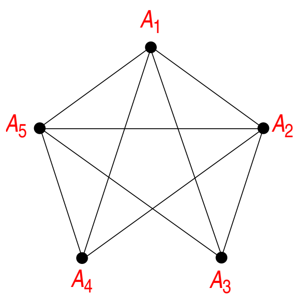
Resposta:



   (b)

$$\begin{array}{lcl} A_1 & = & \{\ldots,-4,-3,-2,-1,0\} \\ A_2 & = & \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} \\ A_3 & = & \{\ldots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\} \\ A_4 & = & \{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\} \\ A_5 & = & \{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\} \end{array}$$

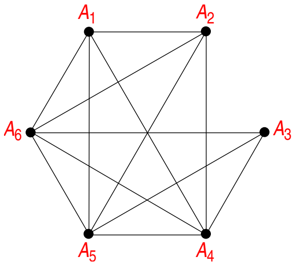
Resposta:



   (c)

$$\begin{array}{lcl} A_1 & = & \{x | x < 0\} \\ A_2 & = & \{x | -1 < x < 0\} \\ A_3 & = & \{x | 0 < x < 1\} \\ A_4 & = & \{x | -1 < x < 1\} \\ A_5 & = & \{x | x > -1\} \\ A_6 & = & \mathbb{R} \end{array}$$

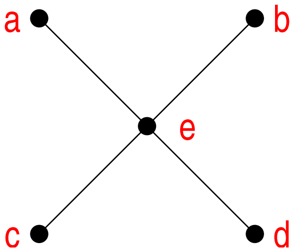
Resposta:

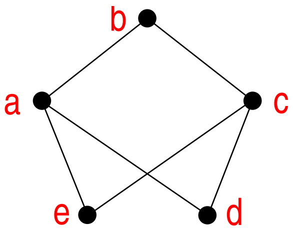


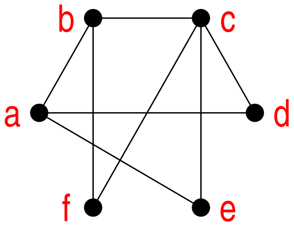
2. Pode haver um grafo simples com 15 vértices, cada um com grau 5?

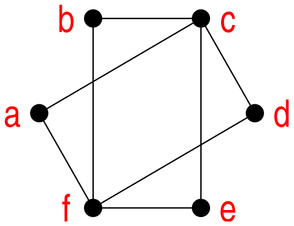
   Resposta:
   Não. O grau desse suposto grafo seria $15 \times 5 = 75$, que é um número ímpar. Sabe-se que o grau de qualquer grafo deve ser um número par.

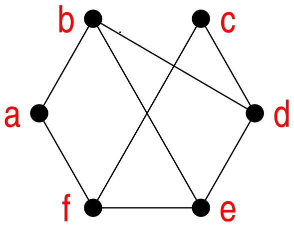
3. Determine se cada um dos grafos abaixo é bipartido.

   (a) 

   (b) 

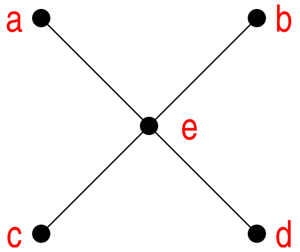
   (c) 

   (d) 

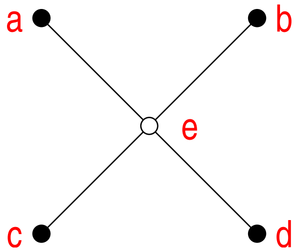
   (e) 

   Resposta:

(a) Sim. Seja $V = \{a, b, c, d\}$ e $W = \{e\}$. Não existe nenhuma aresta entre vértices de V e entre vértices de W. Toda aresta conecta algum vértice de V a algum vértice de W. Esse é o grafo bipartido completo $K_{1,4}$.

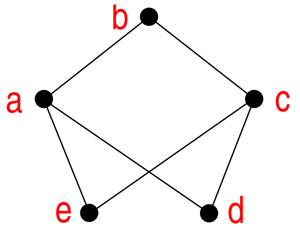


Grafo original

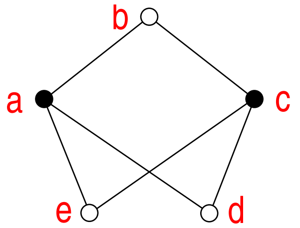


Grafo bipartido

(b) Sim. Seja $V = \{a, c\}$ e $W = \{b, d, e\}$. Não existe nenhuma aresta entre vértices de V e entre vértices de W. Toda aresta conecta algum vértice de V a algum vértice de W. Esse é o grafo bipartido completo $K_{2,3}$.

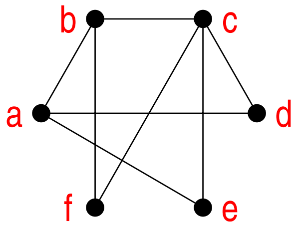


Grafo original

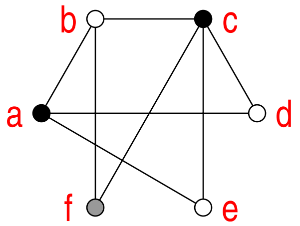


Grafo bipartido

(c) Não. Se $a \in V$ então $\{b, d, e\} \subseteq W$ e $c \in V$. O vértice f está conectado ao vértice $b \in W$ e ao $c \in V$. Assim, não é possível associar f nem a V e nem a W o que faz com que o grafo não seja bipartido.

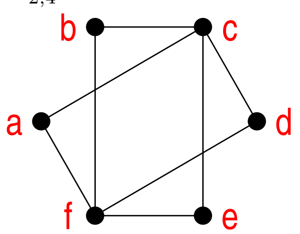


Grafo original

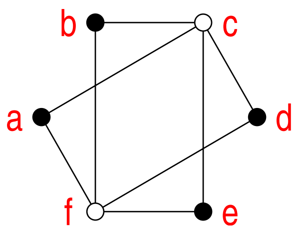


Grafo não é bipartido

(d) Sim. Seja $V = \{a, b, d, e\}$ e $W = \{c, f\}$. Não existe nenhuma aresta entre vértices de V e entre vértices de W. Toda aresta conecta algum vértice de V a algum vértice de W. Esse é o grafo bipartido completo $K_{2,4}$.

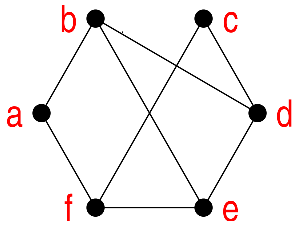


Grafo original

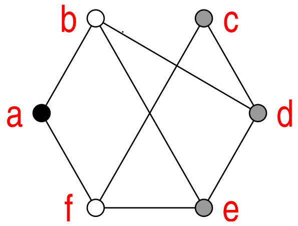


Grafo bipartido

(e) Não. Se $a \in V$ então $\{b, f\} \subseteq W$. O vértice b está conectado, além do vértice a, aos vértices d e e, que por sua vez estão conectados entre si. Ou seja, os vértices d e e devem pertencer a diferentes conjuntos e, ao mesmo tempo, não podem pertencer ao conjunto de b. Assim, o grafo não é bipartido.



Grafo original



Grafo não é bipartido

4. Quantos vértices e quantas arestas têm os grafos abaixo?
   (a) K_n (grafo completo)
   Resposta:

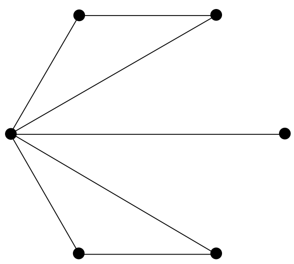
   $|V| = n$
   $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$. Existem n vértices, cada um com grau $n-1$. Assim, a quantidade de arestas é dada pela metade desse produto.
   (b) $K_{m,n}$ (grafo bipartido completo)
   Resposta:

   $|V| = m + n$
   $|E| = m \times n$
   (c) C_n (grafo ciclo)
   Resposta:

   $|V| = n$
   $|E| = n$
   (d) Q_n (grafo cubo)
   Resposta:

   $|V| = 2^n$
   $|E| = \frac{2^n \times n}{2}$. Existem 2^n vértices, cada um com grau n. Assim, a quantidade de arestas é dada pela metade desse produto.
   (e) W_n (grafo roda)
   Resposta:

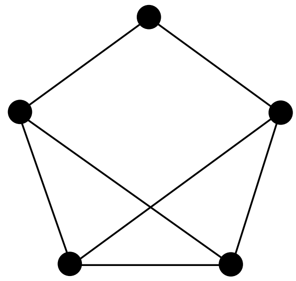
   $|V| = n + 1$
   $|E| = 2n$
5. Quantas arestas tem um grafo com vértices de graus $5, 2, 2, 2, 2, 1$? Desenhe um possível grafo.
   Resposta:
   O grafo possui seis vértices e tem um grau total de $5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 14$. Isso significa que existem sete arestas.



6. Existe um grafo simples com cinco vértices dos seguintes graus? Se existir, desenhe um possível grafo.

   (a) $3, 3, 3, 3, 2$

   Resposta:
   O grafo tem um grau total de $3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 14$. Isso significa que existem sete arestas.

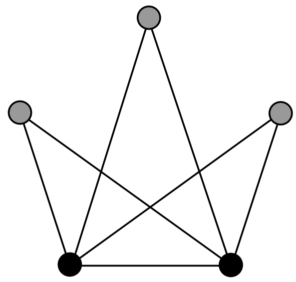
   

   (b) $1, 2, 3, 4, 5$

   Resposta:
   O grafo tem um grau total de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Isso não é possível.

   (c) $1, 2, 3, 4, 4$

   Resposta:
   O grafo tem um grau total de $1+2+3+4+4 = 14$. No entanto, como existem dois vértices com grau 4, todos os vértices devem ter pelo menos grau 2, como mostrado na figura abaixo. Como supostamente existe um vértice com grau 1, não é possível existir tal grafo.

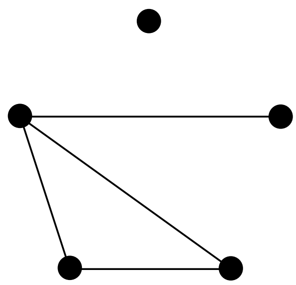
   

   (d) $3, 4, 3, 4, 3$

   Resposta:
   O grafo tem um grau total de $3 + 4 + 3 + 4 + 3 = 17$. Isso não é possível.

   (e) $0, 1, 2, 2, 3$

   Resposta:
   O grafo tem um grau total de $0 + 1 + 2 + 2 + 3 = 8$. Isso significa que existem quatro arestas.

   (f) $1, 1, 1, 1, 1$

   Resposta:
   O grafo tem um grau total de $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$. Isso não é possível.

7. Quantos subgrafos com pelo menos um vértice tem K_3?

   Resposta:
   São os subgrafos com um, dois e três vértices. Temos, então, três casos:

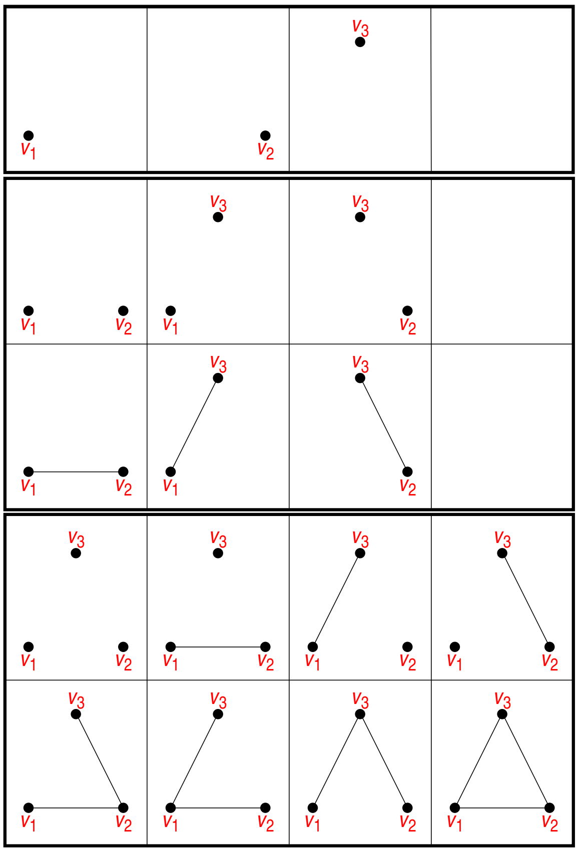
(a) Um vértice: existem três subgrafos com um vértice e, consequentemente, nenhuma aresta;

(b) Dois vértices: existem $C(3,2) = 3$ possibilidades de escolher subgrafos com dois vértices (de um conjunto com três vértices, devemos escolher dois). Para cada possibilidade, podemos incluir ou não a aresta, i.e., $3 \times 2 = 6$ subgrafos com dois vértices;

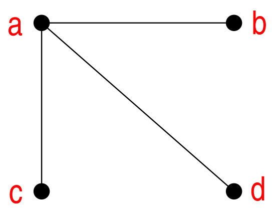
(c) Três vértices: neste caso, para uma das três arestas que podemos ter, podemos incluí-la ou não, ou seja, para cada aresta temos duas possibilidades. Assim, temos $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades. Uma outra forma de analisarmos este caso é que temos um conjunto E com três arestas. O conjunto potência de E nos dá todos os subconjuntos de aresta que podemos escolher. Assim, temos $2^3 = 8$ possibilidades de subconjuntos distintos.

Assim, a quantidade total de subgrafos com pelo menos um vértice é a soma de $3 + 6 + 8 = 17$.

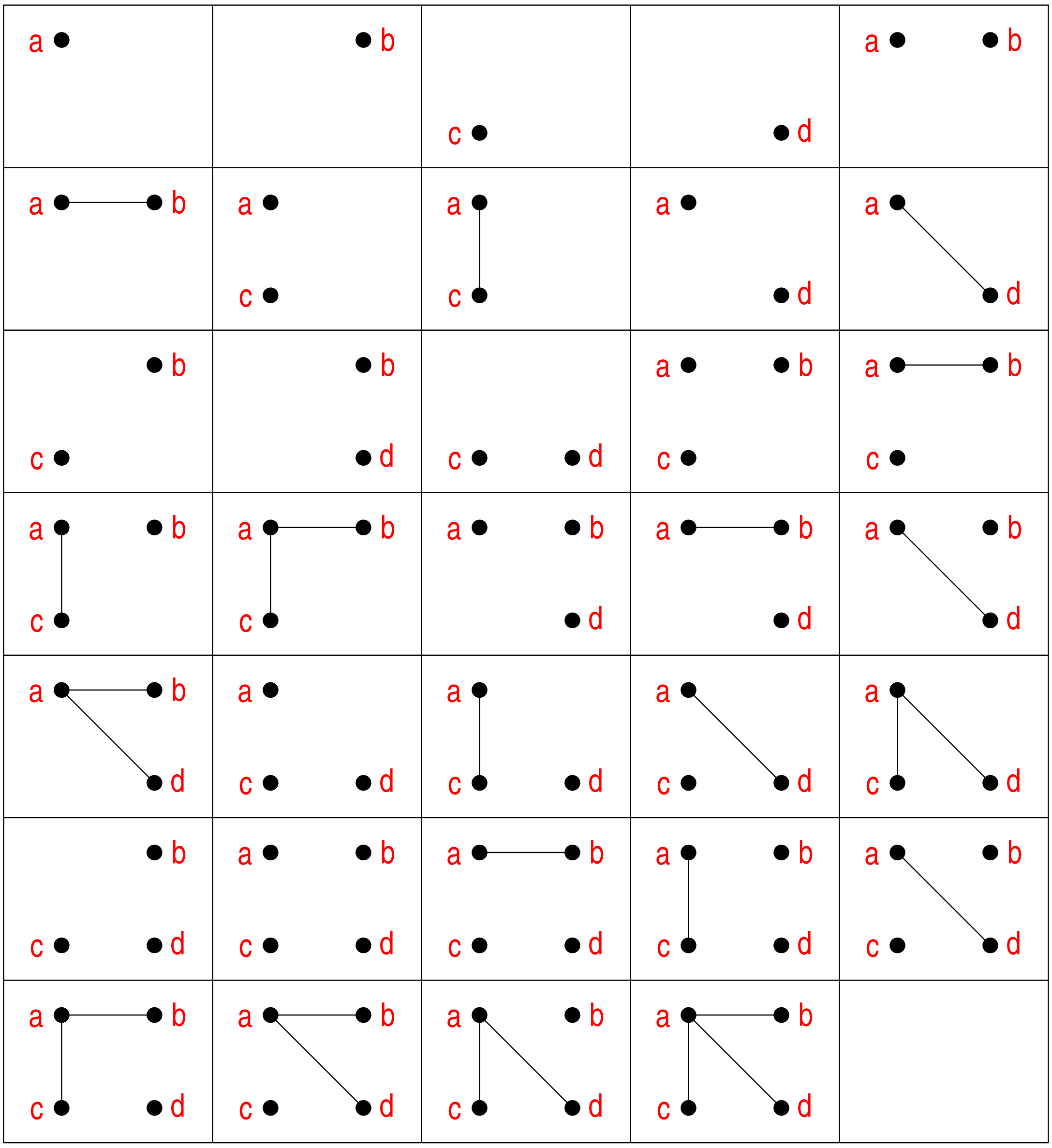
A figura abaixo mostra todos esses subgrafos.



8. Desenhe todos os subgrafos do grafo abaixo.



Resposta:



9. Para que valores de n os grafos abaixo são regulares?

   (a) K_n

   Resposta:
   O grafo completo K_n é regular para todos os valores de $n \geq 1$, já que o grau de cada vértice é $n-1$.

   (b) C_n

   Resposta:
   O grafo ciclo C_n é regular para todos os valores de $n \geq 3$, já que o grau de cada vértice é sempre 2.

   (c) W_n

   Resposta:
   No grafo roda, o grau do vértice do centro é sempre n e o grau dos vértices no ciclo é sempre 3. Assim, o grafo roda W_n é regular apenas para $n = 3$. Observe que W_3 é o mesmo que K_4, ou seja, os grafos W_3 e K_4 são isomorfos.

   (d) Q_n

   Resposta:
   O grafo ciclo Q_n é regular para todos os valores de $n \geq 0$, já que o grau de cada vértice é sempre n. Observe que Q_0 é o grafo com um vértice.

10. Quantos vértices tem um grafo regular de grau 4 com 10 arestas?

Resposta:
Um grafo regular de grau 4 com n vértices possui, pelo Teorema do Aperto de Mãos, $4n/2 = 2n$ arestas. Como existem 10 arestas, temos que $2n = 10$, i.e., $n = 5$ e existem cinco vértices. O grafo completo K_5 possui cinco vértices, todos com grau 4 e 10 arestas.

11. O grafo complementar $\overline{G}$ de um grafo simples G tem os mesmos vértices de G. Dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se, e somente se, eles não são adjacentes em G. Determine os seguintes grafos.

(a) $\overline{K_n}$

Resposta:
O complemento do grafo completo é o grafo com nenhuma aresta.

(b) $\overline{K_{m,n}}$

Resposta:
No grafo bipartido completo $K_{m,n}$, existe uma aresta conectando vértices das "duas partes" e nenhuma aresta entre cada parte. No grafo complemento, existe uma aresta entre cada vértice de cada parte levando aos dois subgrafos K_m e K_n.

(c) $\overline{C_n}$

Resposta:
O grafo complemento de C_n é "quase" o grafo K_n, i.e., é o grafo K_n sem as arestas presentes em C_n.

(d) $\overline{Q_n}$

Resposta:
É o grafo onde existe uma aresta entre vértices cujos strings diferem em mais de um bit.

12. Se o grafo simples G tem v vértices e e arestas, quantas arestas tem $\overline{G}$?

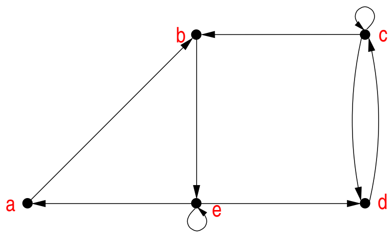
Resposta:
O grafo completo K_v possui $C(v,2) = v(v-1)/2$ arestas. O grafo $\overline{G}$ tem todas as arestas de K_v exceto as presentes em G. Assim $\overline{G}$ possui $\left(\frac{v(v-1)}{2} - e\right)$ arestas.

13. Mostre que se G é um grafo simples com n vértices, então $G \cup \overline{G} = K_n$.

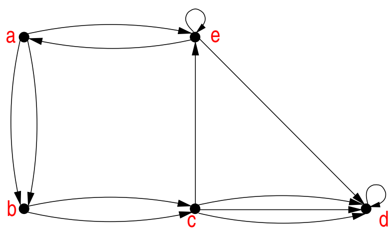
Resposta:
Considere o grafo $G \cup \overline{G}$. Claramente esse grafo possui o conjunto de vértices de G, i.e., possui n vértices. Sejam dois vértices distintos u e v do grafo $G \cup \overline{G}$. Ou existe uma aresta conectando u a v em G ou em $\overline{G}$. Assim, pela definição de união, vamos ter uma aresta entre cada par de vértices u e v para um grafo com n vértices, o que leva ao grafo K_n.

14. O grafo reverso de um grafo dirigido $G = (V, E)$, representado por G^r, é o grafo dirigido (V, F) onde $(u, v) \in F$, se, e somente se, $(v, u) \in E$. Desenhe os grafos G^r correspondentes aos seguintes grafos:

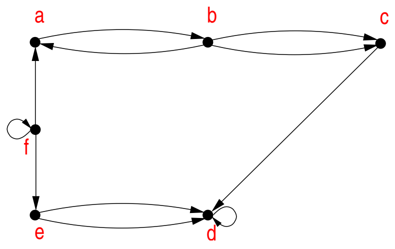
(a)



(b)

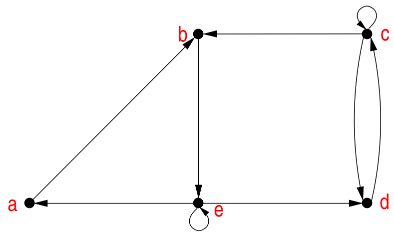


(c)

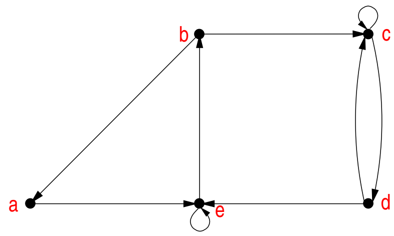


Resposta:

(a)

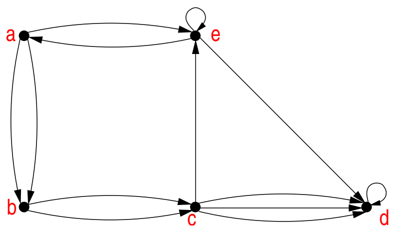


Grafo original

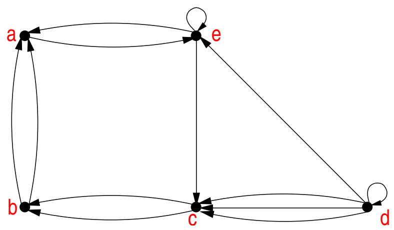


Grafo reverso

(b)

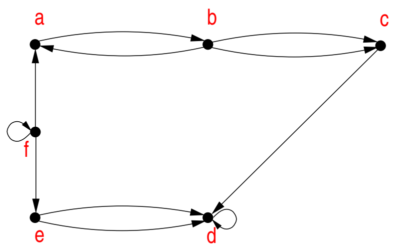


Grafo original

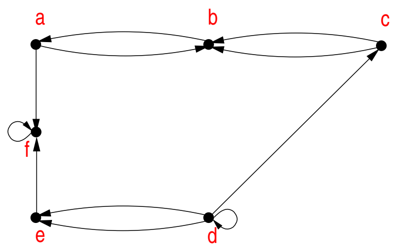


Grafo reverso

(c)



Grafo original



Grafo reverso

15. Seja G um grafo dirigido. Mostre que $G = G^r$ se, e somente se, a relação associada com G é simétrica.

Resposta:
Pela definição de grafo reverso, existe uma aresta de v para u em G^r se, e somente se, existe uma aresta de u para v em G. Mas essa é exatamente a definição da propriedade de simetria. Assim, os grafos G e G^r serão idênticos se, e somente se, eles tiverem a propriedade da simetria.

16. Represente a matriz de adjacência do grafo Q_3.

Resposta:
O grafo Q_3 possui $2^3 = 8$ vértices que podem ser rotulados pelos números binários de 0 a 7. A matriz de adjacência correspondente é:

	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	1	1	0	1	0	0	0
001	1	0	0	1	0	1	0	0
010	1	0	0	1	0	0	1	0
011	0	1	1	0	0	0	0	1
100	1	0	0	0	0	1	1	0
101	0	1	0	0	1	0	0	1
110	0	0	1	0	1	0	0	1
111	0	0	0	1	0	1	1	0

17. Seja uma matriz simétrica quadrada formada apenas por 0's e 1's que tem apenas 0's na diagonal principal. Essa matriz pode representar a matriz de adjacência de um grafo simples?

    Resposta:
    Um grafo simples é um grafo que não possui laços nem arestas paralelas. Se um grafo possuir um laço, haverá uma entrada diferente de zero na diagonal principal. Se um grafo possuir arestas paralelas entre os vértices u e v, haverá um valor maior que 1 nas entradas $[u, v]$ e $[v, u]$ da matriz de adjacência. Como nenhuma dessas duas condições ocorre, essa matriz de adjacência representa um grafo simples.

18. O que representa a soma das entradas de uma coluna de uma matriz de adjacência de um grafo não dirigido? E de um grafo dirigido?

    Resposta:
    Em um grafo não dirigido, cada aresta incidente ao vértice v contribui com um na v-ésima coluna. Assim, a soma das entradas nessa coluna representa o número de arestas incidentes a v. Como uma aresta incidente a um vértice v contribui com um para o grau do vértice (dois se for uma aresta laço), a soma dessa coluna representa o grau do vértice v, se não houver laços e mais um para cada laço existente.

    Em um grafo dirigido, cada aresta incidente ao vértice v contribui com um na v-ésima coluna, i.e., v é o nó terminal da aresta dirigida. Assim, a soma das entradas nessa coluna representa o número de arestas incidentes a v. Como uma aresta incidente a um vértice v contribui com um para o grau de entrada do vértice (*in-degree*), a soma dessa coluna representa o grau de entrada do vértice v.

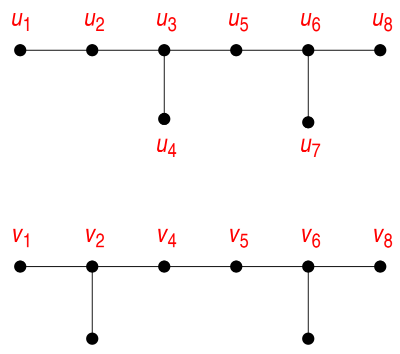
19. O que representa a soma das entradas de uma coluna de uma matriz de incidência de um grafo não dirigido?

    Resposta:
    A matriz de incidência de um grafo é a matriz $M = (m_{ij})$ de tamanho $n \times m$ (n vértices e m arestas) sobre o conjunto dos inteiros não negativos tal que a entrada $m_{ij} = 1$ quando a aresta e_j é incidente a v_i e 0 caso contrário.

    Como cada coluna representa uma aresta, a soma da coluna vale 2, quando a aresta incide a dois vértices, ou 1, quando a aresta é um laço.

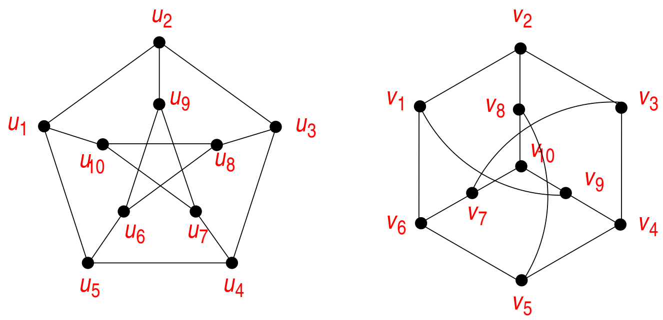
20. Os pares de grafos abaixo são isomorfos?

    (a)



Resposta:
Não. No primeiro grafo, os vértices u_3 e u_6, que têm grau 3, são adjacentes a um vértice em comum (u_5). No segundo grafo, os vértices v_2 e v_6, que têm grau 3, não são adjacentes a um vértice em comum.

(b)



Resposta:
Os grafos são isomorfos. Um possível isomorfismo é $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_9$, $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_3$, $f(u_5) = v_2$, $f(u_6) = v_8$, $f(u_7) = v_7$, $f(u_8) = v_5$, $f(u_9) = v_{10}$ e $f(u_{10}) = v_6$.

21. Mostre que o isomorfismo de grafos simples é uma relação de equivalência.

Resposta:
Devemos mostrar que o isomorfismo gera uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva. A relação é reflexiva já que a função identidade de um grafo para ele próprio provê o isomorfismo (correspondência um-para-um). A relação é simétrica já que se f é uma correspondência um-para-um que faz com que o grafo G_1 seja isomorfo a G_2, então f^{-1} é uma correspondência um-para-um que faz com que o grafo G_2 seja isomorfo a G_1. A relação é transitiva já que se f é uma correspondência um-para-um que faz com que o grafo G_1 seja isomorfo a G_2 e g é uma correspondência um-para-um que faz com que o grafo G_2 seja isomorfo a G_3, então $g \circ f$ é uma correspondência um-para-um que faz com que o grafo G_1 seja isomorfo a G_3.

22. Mostre que os vértices de um grafo bipartido com dois ou mais vértices podem ser ordenados de tal forma que a sua matriz de adjacência tem a forma

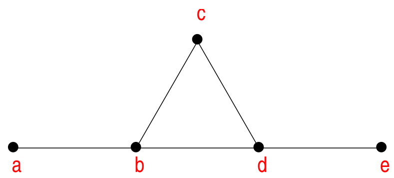
$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

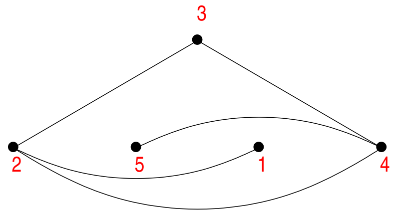
onde as quatro entradas acima são blocos retangulares.

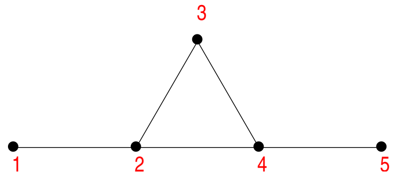
Resposta:
Sejam V_1 e V_2 duas partes de tamanhos m e n, respectivamente. Podemos numerar todos os vértices de V_1 antes dos vértices de V_2. A matriz de adjacência é quadrada de tamanho $(m+n)^2$. Como não existem arestas entre vértices de V_1, as primeiras m linhas e as primeiras m colunas devem ter 0. O mesmo raciocínio vale para V_2 e as últimas n linhas e n colunas devem ter 0.

23. Um grafo simples G é dito ser auto-complementar se G e $\overline{G}$ são isomorfos. Apresente um grafo simples auto-complementar com cinco vértices.

Resposta:
Um grafo simples com cinco vértices pode ter no máximo 10 arestas (K_5). Consequentemente para G e $\overline{G}$ serem isomorfos os dois devem ter o mesmo número de arestas, ou seja, cada um deve ter cinco arestas. Seja G o primeiro grafo abaixo. O segundo é o grafo $\overline{G}$ correspondente. O terceiro é novamente o grafo $\overline{G}$ desenhado da "forma" de G.

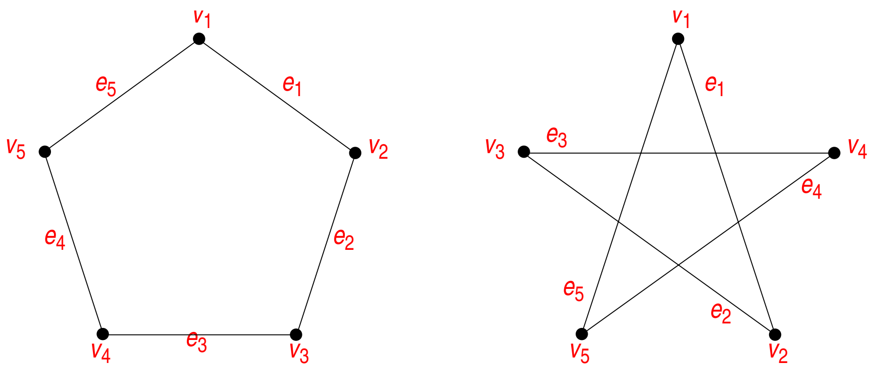






24. Para que inteiros n o grafo C_n é auto-complementar?

    Resposta:
    Se C_n for auto-complementar, então C_n deve ter o mesmo número de arestas que seu complemento. Sabemos que C_n possui n arestas e que o complemento deve ter uma quantidade de arestas idêntica, que pode ser expressa pela quantidade de arestas de $K_n - n$ (quantidade de arestas do grafo completo menos a quantidade de arestas de C_n), i.e., $n\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) - n$. Se resolvermos essa equação, temos que $n = 5$. Isso significa que C_5 é o único grafo C_n que **pode** ser auto-complementar já que o número de arestas de C_5 e de seu complemento é o mesmo. Se desenharmos C_5 e seu complemento vemos que os dois grafos são isomorfos.

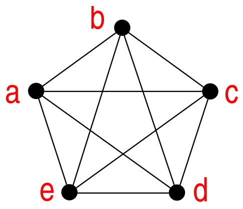


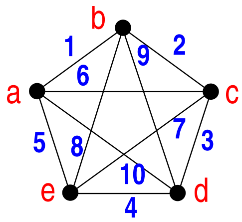
25. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. Seja R uma relação em V formada por pares de vértices (u, v) tal que existe um trajeto (*path*) de u para v ou tal que $u = v$. Mostre que R é uma relação de equivalência.

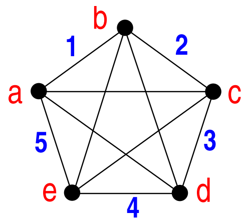
    Resposta:
    Os vértices u e v estão relacionados se, e somente se, ambos estão no mesmo componente conexo. A relação R é obviamente reflexiva. A relação é simétrica já que se u está no mesmo componente conexo de v então v está no mesmo componente conexo de u. A relação R é transitiva já que se u está no mesmo componente conexo de v e v está no mesmo componente conexo de w então u está no mesmo componente conexo de w.

26. Apresente um grafo que tenha um circuito Euleriano e um circuito Hamiltoniano mas que não sejam idênticos.

    Resposta:
    Seja o grafo K_5. Um circuito euleriano está mostrado no grafo do meio abaixo e um circuito hamiltoniano no grafo à direita. Os números associados às arestas indicam uma possível ordem de fazer o caminhamento.







27. Um grafo possui oito vértices e seis arestas? Esse grafo é conexo? Justifique a resposta.

    Resposta:
    Não. O número mínimo de arestas para o grafo ser conexo é a quantidade de vértices menos um. Neste caso, seriam necessárias pelo menos sete arestas para o grafo ser conexo.

28. Nos grafos abaixo, assuma que cada vértice possui um identificador único $v_i, i \geq 1$. Cada variável usada é um número inteiro positivo maior ou igual a 1 ou um outro valor específico, conforme o caso. Para cada letra, diga quantas soluções distintas podem ser obtidas.

    (a) Árvores geradoras de um grafo $C_n, n \geq 3$.

    Resposta:
    Grafo C_n é o grafo ciclo com n vértices. Se qualquer uma das n arestas for removida, então teremos uma árvore geradora. Assim, existem exatamente n árvores geradoras distintas, cada uma correspondente a remoção de uma das n arestas.

    (b) Circuitos Hamiltonianos de um grafo $K_n, n \geq 3$, começando num vértice $v_i, 1 \leq i \leq n$.

    Resposta:
    Grafo K_n é o grafo completo com n vértices. Começando num vértice $v_i, 1 \leq i \leq n$ temos $n-1$ vértices como segunda opção. Como terceira opção temos $n-2$ vértices e assim sucessivamente até chegarmos ao último vértice que tem uma aresta para o vértice v_i, formando o circuito Hamiltoniano. A quantidade de circuitos distintos começando num vértice v_i é dada por:

    $$(n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 = (n-1)!$$

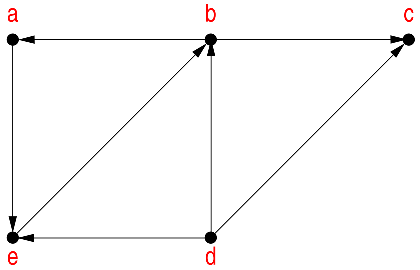
    (c) Circuitos Eulerianos de um grafo $K_{m,m}, m \geq 2$, $m = 2a$ e começando num vértice $v_i, 1 \leq i \leq 2m$.
    Grafo $K_{m,m}, m \geq 2$, $m = 2a$ é o grafo bipartido completo sendo que m é um número par. Os grafos bipartidos completos que podemos ter são da forma $K_{2,2}, K_{4,4}, K_{6,6}, \ldots$. Ou seja, cada vértice está conectado a exatamente m outros vértices. Como m é par, o grau de cada vértice é par e, assim, é possível haver circuitos Eulerianos.

    Resposta:
    Começando num vértice $v_i, 1 \leq i \leq 2m$ temos m opções de arestas para percorrer e chegar a um vértice. Para esse segundo vértice temos $m-1$ opções de arestas para percorrer e chegar a um vértice. Para esse terceiro vértice temos novamente $m-1$ opções de arestas para percorrer e chegar a um vértice, considerando que desejamos maximizar a quantidade de circuitos. Esse processo é repetido exatamente $2m-1$ vezes, quando retornaremos ao vértice v_i, ou seja, completamos a primeira parte do percurso. Nesse momento, para o vértice v_i temos exatamente $m-2$ opções de arestas e chegar a um vértice. Para esse próximo vértice temos $m-3$ opções de arestas e, novamente, esse processo é repetido $2m-1$ vezes, quando a segunda parte do percurso é completada. Esse processo é repetido até que não haja mais arestas a serem percorridas, terminando no vértice v_i. Assim, a quantidade de circuitos Eulerianos distintos começando num vértice v_i é dada por:

    $$m \cdot (m-1)^{2m-1} \cdot (m-2) \cdot (m-3)^{2m-1} \cdot \ldots 2 \cdot 1^{2m-1} = \prod_{i=1}^{\frac{m}{2}} 2i \cdot (2i-1)^{2m-1}$$

29. Determine os componentes fortemente conexos de cada grafo dirigido abaixo.

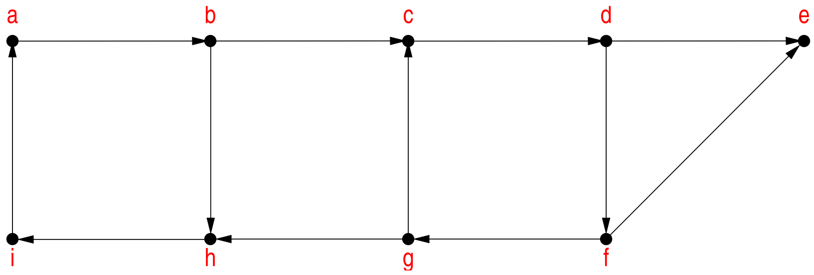
    (a)



Resposta:

(a) $H_1 : V_1 = \{a, b, e\}$
(b) $H_2 : V_2 = \{c\}$
(c) $H_3 : V_3 = \{d\}$

(b)



Resposta:

(a) $H_1 : V_1 = \{a, b, c, d, f, g, h, i\}$
(b) $H_2 : V_2 = \{e\}$

30. Seja uma árvore com n vértices.

(a) Quantas arestas têm essa árvore?

Resposta:
Tem $n - 1$ arestas.

(b) Prove esse resultado por indução matemática.

Resposta:
$P(n)$: Toda árvore com n vértices tem $n - 1$ arestas, $n \geq 1$.

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: $P(n_0) = P(1)$: Toda árvore com um vértice tem zero arestas. Este passo é verdadeiro já que a única aresta que poderia existir seria uma aresta laço e, assim, haveria um ciclo. Como árvores não possuem ciclos, logo não pode haver nenhuma aresta.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, i.e., $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.
– Suponha que a fórmula seja verdadeira para $n = k$, i.e., $P(k)$: Toda árvore com k vértices tem $k - 1$ arestas, $k \geq 1$. [hipótese indutiva]
– Deve-se mostrar $P(k + 1)$: Toda árvore com $k + 1$ vértices tem k arestas, $k \geq 1$.

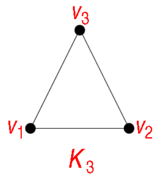
Seja uma árvore com k vértices e $k - 1$ arestas. Vamos acrescentar um vértice $v^\star$ ao grafo que representa essa árvore. Se esse vértice $v^\star$ não for conectado a nenhum vértice da árvore existente, então teremos uma floresta e não uma árvore. Logo, temos que acrescentar uma aresta para não termos uma floresta. Essa aresta deve ser incidente a $v^\star$ e a algum vértice da árvore v_a. O acréscimo dessa aresta mantém a propriedade da árvore (grafo acíclico), já que existe apenas um único caminho entre $v^\star$ e v_a e, conseqüentemente, com qualquer outro vértice da árvore. Note que se acrescentarmos uma segunda aresta incidente a $v^\star$ e a um outro vértice da árvore passaremos a

ter um ciclo, o que deixa de caracterizar uma árvore. Ou seja, não podemos acrescentar mais de uma aresta incidente a $v^\star$.
Assim, ao acrescentarmos um vértice à árvore com k vértices e $k-1$ arestas, passaremos a ter uma árvore com $k+1$ vértices e k arestas.

Para cada afirmação abaixo diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) e justifique.

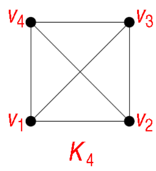
31. Todo grafo que possui um subgrafo K_3 não pode ser bipartido.

    Resposta:
    Verdadeira. O grafo K_3 não é bipartido. Os vértices v_1 e v_2 devem estar em conjuntos diferentes. No entanto, v_3 está conectado a ambos os vértices e, assim, o K_3 não pode ser bipartido.



32. Todo grafo que possui um subgrafo K_4 pode ou não ser bipartido.

    Resposta:
    Falsa. O grafo K_4 não é bipartido. Os vértices v_1 e v_2 devem estar em conjuntos diferentes. No entanto, v_3 está conectado a ambos os vértices e, assim, K_4 não pode ser bipartido.



    Outra forma de provar que essa afirmação é falsa é simplesmente fazer referência à questão anterior, já que K_3 é um subgrafo de K_4.

33. O grafo $K_{m,n}$ possui m vértices com grau n e n vértices com grau m.

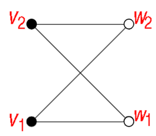
    Resposta:
    Verdadeira. O grafo $K_{m,n}$ tem dois subconjuntos, com m e n vértices respectivamente. Em cada subconjunto não há aresta conectando vértices entre si. No conjunto com m vértices, cada um deles está conectado aos outros n vértices. Ou seja, cada um dos n vértices está conectado aos outros m vértices. Assim, a afirmação é verdadeira.

34. O menor trajeto simples entre um par de vértices no grafo $K_{m,n}$ tem comprimento 2.

    Resposta:
    Falsa. Seja um par de vértices, cada um deles em um subconjunto diferente. Nesse caso, um trajeto simples (caminho sem arestas e vértices repetidos) tem sempre comprimento 1.

35. O menor circuito no grafo $K_{m,n}$ tem comprimento 4, para $m, n \geq 2$.

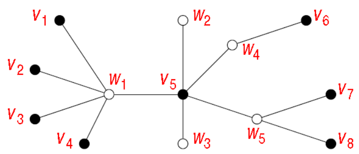
    Resposta:
    Verdadeira. Todo grafo bipartido $K_{m,n}$, para $m, n \geq 2$, tem como subgrafo o $K_{2,2}$ abaixo.



    Nesse subgrafo o menor circuito tem comprimento 4.

36. Toda árvore é um grafo bipartido.

<u>**Resposta**</u>:
Verdadeira. Toda árvore é um grafo acíclico, ou seja, entre cada par de vértices existe apenas um único caminho. Cada vértice nesse caminho pode ser atribuído a um de dois subconjuntos diferentes, gerando uma bipartição ilustrada na figura abaixo.



37. Qualquer árvore que tenha mais de um vértice tem pelo menos um vértice de grau 1.

<u>**Resposta**</u>:
Verdadeira. Toda árvore com n vértices tem $n-1$ arestas. Na prova por indução matemática, o passo indutivo acrescenta um vértice à árvore existente. Esse vértice tem grau 1. Ou seja, há pelo menos um vértice que tem grau 1.

38. O grafo $\overline{K_n}$ possui n componentes conexos, para $n \geq 3$.

<u>**Resposta**</u>:
Verdadeira. O grafo $\overline{K_n}$ não possui nenhuma aresta. Assim, esse grafo possui n componentes conexos.

39. O grafo $\overline{K_{m,n}}$ possui dois componentes conexos que são os subgrafos K_m e K_n, para $m, n \geq 2$.

<u>**Resposta**</u>:
Verdadeira. O grafo $\overline{K_{m,n}}$ possui arestas entre os vértices de cada um subconjunto, levando aos subgrafos completos K_m e K_n.

40. O grafo $\overline{C_n}$ é conexo, para $n \geq 3$.

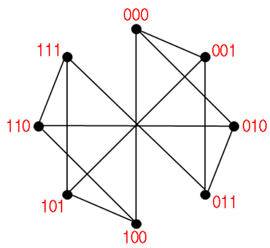
<u>**Resposta**</u>:
Falsa. O grafo $\overline{C_3}$ não possui nenhuma aresta e, assim, possui três vértices isolados. O grafo $\overline{C_4}$ possui duas arestas apenas, entre vértices não consecutivos, o que leva a um grafo não conexo. A partir de $\overline{C_5}$ os grafos são conexos.

41. O menor caminho entre um par de vértices no grafo $\overline{C_n}$ tem comprimento 1, para $n \geq 3$.

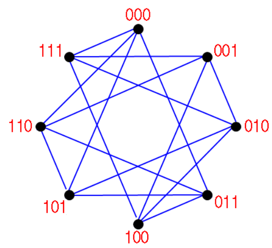
<u>**Resposta**</u>:
Falsa. Como o grafo $\overline{C_3}$ é desconexo, não há caminho entre os vértices. O grafo $\overline{C_4}$ também é desconexo e, assim, existe um par de vértices que não há caminho. A partir de $\overline{C_5}$ os grafos são conexos, mas o menor caminho entre um par de vértices pode ser maior que 1, como, por exemplo, entre os vértices consecutivos do grafo C_5.

42. O grafo $\overline{Q_n}$ tem pelo menos n componentes completos, para $n \geq 1$.

<u>**Resposta**</u>:
Falsa. O grafo $\overline{Q_1}$ possui dois componentes conexos. O grafo $\overline{Q_2}$ possui também dois componentes conexos. No entanto, o grafo $\overline{Q_3}$ é conexo e, assim, possui apenas um componente conexo, como ilustrado na figura abaixo.



Q_3



$\overline{Q_3}$

43. Seja G um grafo dirigido, sendo que cada vértice possui uma aresta laço e não há nenhuma outra aresta. Temos que $G = G^r$.

Resposta:
Verdadeira. O grafo reverso de um grafo dirigido $G = (V, E)$, representado por G^r, é o grafo dirigido (V, F) onde $(u, v) \in F$, se, e somente se, $(v, u) \in E$. Assim, em cada vértice teremos uma aresta laço.

44. Um grafo simples é um caso particular de um multigrafo que é um caso particular de um pseudografo.

Resposta:
Verdadeira. Sim, pelas definições de grafos simples, multigrafo e pseudografo, conforme apresentada na janela abaixo, um grafo simples é um caso particular de um multigrafo que é um caso particular de um pseudografo.

Terminologia de grafos

Tipo	Aresta	Arestas múltiplas?	Laços permitidos?
Grafo simples	Não dirigida	Não	Não
Multigrafo	Não dirigida	Sim	Não
Pseudografo	Não dirigida	Sim	Sim
Grafo dirigido	Dirigida	Não	Sim
Multigrafo dirigido	Dirigida	Sim	Sim

45. Um multigrafo dirigido não possui componente fortemente conexo.

Resposta:
Falsa. O enunciado diz respeito à existência de componente fortemente conexo e, assim, qualquer grafo dirigido ou não terá pelo menos um componente fortemente conexo.

46. Todo multigrafo dirigido possui um único componente fortemente conexo.

Resposta:
Falsa. O enunciado diz respeito à quantidade de componentes fortemente conexos e, assim, o multigrafo dirigido pode ter mais de um componente fortemente conexo.

47. Seja G um grafo simples conexo com n vértices. Esse grafo possui no máximo $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas.

Resposta:
Verdadeira. O grafo K_n é o grafo simples conexo com a maior quantidade de arestas. Neste caso, o valor é $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas.

48. Seja G um grafo simples conexo com n vértices. Esse grafo possui no mínimo $n - 1$ arestas.

Resposta:
Verdadeira. Uma árvore é o grafo simples conexo com a menor quantidade de arestas. Neste caso, o valor é $n - 1$ arestas.

49. Seja G um grafo simples conexo com n vértices. Esse grafo possui no mínimo grau $2n - 2$.

Resposta:
Verdadeira. Uma árvore é o grafo simples conexo com a menor quantidade de arestas. Neste caso, o valor é $n - 1$ arestas. O grau desse grafo é duas vezes a quantidade de arestas, ou seja, $2n - 2$.

50. Seja G um grafo simples conexo com n vértices. Esse grafo possui no máximo grau $n^2 - n$.

Resposta:
Verdadeira. O grafo K_n é o grafo simples conexo com a maior quantidade de arestas. Neste caso, o valor é $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas. O grau desse grafo é duas vezes a quantidade de arestas, ou seja, $n^2 - n$.

51. Não é possível definir a priori o maior grau de um grafo simples conexo com n vértices.

Resposta:
Falsa. O grafo simples conexo com a maior quantidade de arestas é o grafo K_n. Neste caso, a quantidade de arestas é $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas. O grau desse grafo é duas vezes a quantidade de arestas, ou seja, $n^2 - n$. Esse é o maior grau possível de um grafo simples com n vértices.

52. Não é possível definir a priori o maior grau de um multigrafo conexo com n vértices.

<u>**Resposta**</u>:
Verdadeira. Um multigrafo conexo pode ter uma quantidade indeterminada de arestas paralelas e, assim, o grafo desse multigrafo não pode ser definido a priori.

53. Não é possível definir a priori o maior grau de um pseudografo conexo com n vértices.

<u>**Resposta**</u>:
Verdadeira. Um pseudografo conexo pode ter uma quantidade indeterminada de laços e arestas paralelas e, assim, o grafo desse pseudografo não pode ser definido a priori.

54. É possível haver um grafo simples conexo que tenha uma quantidade de arestas que seja pelo menos o dobro de vértices.

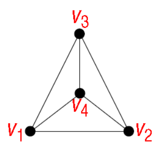
<u>**Resposta**</u>:
Verdadeira. Suponha que G seja um grafo simples conexo com n vértices e pelo menos $2n$ arestas, sendo n um inteiro positivo. A maior quantidade de arestas que um grafo simples pode ter é no caso do grafo completo K_n, i.e., $\frac{n(n-1)}{2}$. Isto implica que $2n \leq \frac{n(n-1)}{2}$, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} n^2 - n & \geq & 4n \\ n^2 - 5n & \geq & 0 \\ n(n-5) & \geq & 0 \end{array}$$

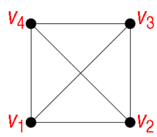
Isto significa que $n \geq 5$, já que n é um número positivo. No caso do grafo K_5 temos cinco vértices e 10 arestas.

55. Os grafos W_3 e K_4 são isomorfos.

<u>**Resposta**</u>:
Verdadeira. Como pode ser visto nas figuras abaixo, os grafos W_3 e K_4 são isomorfos.



W_3



K_4

Seja $n \geq 3$. Para as questões 56 a 60, diga se o grafo é regular ou não.

56. K_n

<u>**Resposta**</u>:
É um grafo regular, sendo que cada vértice possui $n-1$ arestas, ou seja, é um grafo $(n-1)$-regular.

57. $K_{n,n}$

<u>**Resposta**</u>:
É um grafo regular, sendo que cada vértice está conectado a n arestas, ou seja, é um grafo n-regular.

58. Q_n

<u>**Resposta**</u>:
É um grafo regular. Cada vértice está conectado a n outros vértices, ou seja, é um grafo n-regular.

59. W_n

<u>**Resposta**</u>:
É regular apenas para W_3.

60. C_n

Resposta:
É um grafo regular, ou seja, é um grafo 2-regular.

Seja $n \geq 3$. Para as questões 61 a 65, diga se o grafo possui circuito euleriano ou não.

61. K_n

Resposta:
É um grafo regular e terá um circuito euleriano para valores de n ímpar. Neste caso, o grau de cada vértice será par.

62. $K_{n,n}$

Resposta:
É um grafo regular e terá um circuito euleriano para valores de n par. Neste caso, o grau de cada vértice será par.

63. Q_n

Resposta:
É um grafo regular e terá um circuito euleriano para valores de n par. Neste caso, o grau de cada vértice será par.

64. W_n

Resposta:
Não possui circuito euleriano, já que cada vértice da borda está conectado a outros dois e ao vértice central, totalizando grau 3 para todos esses vértices do ciclo.

65. C_n

Resposta:
É um grafo regular e sempre terá um circuito euleriano, já que o grau de cada vértice é sempre 2.

Seja $n \geq 3$. Para as questões 66 a 70, diga se o grafo possui circuito hamiltoniano ou não.

66. K_n

Resposta:
Possui circuito hamiltoniano para qualquer valor de n. Basta fazer o circuito do ciclo.

67. $K_{n,n}$

Resposta:
Possui circuito hamiltoniano para qualquer valor de n. Basta fazer o circuito que alterna vértices de cada conjunto. No final há uma aresta conectando o último vértice de um conjunto ao primeiro vértice do outro conjunto, independente de n ser par ou ímpar.

68. Q_n

Resposta:
Possui circuito hamiltoniano para qualquer valor de n. Isso pode ser visto por indução matemática. O grafo Q_2 possui um circuito hamiltoniano. O grafo Q_3, obtido a partir de duas cópias de Q_2, possui um circuito hamiltoniano que começa em um vértice em uma cópia, vai para a outra cópia e retorna para a primeira cópia completando o circuito.

69. W_n

Resposta:
Possui circuito hamiltoniano para qualquer valor de n. Comece no vértice central e faça o contorno do ciclo até retornar ao vértice central.

70. C_n

Resposta:
Possui circuito hamiltoniano que é o próprio ciclo.

71. Se um grafo possui um circuito simples que passa pelos vértices u e v, então existem dois trajetos simples distintos entre u e v.

<u>**Resposta**</u>:
Verdadeira. Um circuito simples é um trajeto fechado (caminhamento onde arestas não são repetidas) e vértices também que começam e terminam no mesmo vértice. Ou seja, um circuito simples define um ciclo no grafo onde arestas e vértices não são repetidos. Assim, sempre existem dois trajetos simples distintos entre os vértices u e v que estão nesse ciclo.

72. Se um grafo possui um circuito que passa pelos vértices u e v, então existem dois trajetos distintos entre u e v.

<u>**Resposta**</u>:
Verdadeira. Um circuito é um trajeto fechado (caminhamento onde arestas não são repetidas) que começam e terminam no mesmo vértice. Ou seja, um circuito define um ciclo no grafo onde arestas não são repetidos. Assim, sempre existem dois trajetos distintos entre os vértices u e v que estão nesse ciclo.

73. Se um grafo possui um circuito então a remoção de uma das arestas desse circuito não o torna desconexo.

<u>**Resposta**</u>:
Verdadeira. Um circuito é um trajeto fechado (caminhamento onde arestas não são repetidas) que começam e terminam no mesmo vértice. Ou seja, um circuito define um ciclo no grafo onde arestas não são repetidos. Assim, qualquer vértice do circuito pode ser alcançado por dois caminhos diferentes que começam no circuito e, consequentemente, a remoção de uma das arestas do circuito não o tornará desconexo.

74. Suponha que um grafo planar conexo tenha oito vértices, cada um de grau três. Em quantas regiões o plano é dividido por uma representação planar deste grafo?

<u>**Resposta**</u>:
Temos $v = 8$, e a quantidade de arestas é dada por $e = (3 \cdot 8)/2 = 12$. A fórmula de Euler diz que $r = e - v + 2$. Portanto, $r = 12 - 8 + 2 = 6$.

75. Suponha que um grafo planar conexo tenha 30 arestas e sua representação planar tenha 20 regiões. Quantos vértices tem o grafo?

<u>**Resposta**</u>:
Temos $e = 30$ e $r = 20$. A fórmula de Euler diz que $r = e - v + 2$. Portanto, $v = e + 2 - r = 30 + 2 - 20 = 12$.

76. Suponha que o grafo G seja simples, conexo, planar e bipartido, e tenha e arestas e v vértices. Mostre que $e \leq 2v - 4$ se $v \geq 3$.

<u>**Resposta**</u>:
Um grafo simples bipartido não tem circuito simples (i.e., um trajeto fechado onde não há repetição de arestas nem de vértices) de comprimento 3, ou seja, com três arestas. Se tivesse seria o grafo C_3 que não é bipartido. Assim, a afirmação deste exercício afirma o que está dito no corolário 3 (veja slide 13 do material 5.8) de grafo planar.

> Corolário 3. Se G é um grafo simples conexo e planar com e arestas e v vértices, sendo que $v \geq 3$ e nenhum circuito de comprimento três, então
>
> $$e \leq 2v - 4$$

77. Suponha que um grafo planar tenha k componentes conexos, e arestas e v vértices. Também suponha que o plano está dividido em r regiões por uma representação planar do grafo. Ache uma fórmula para r em termos de e, v e k.

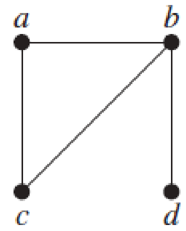
<u>**Resposta**</u>:
Para tornar o grafo conexo basta acrescentarmos $k - 1$ arestas de tal forma que novas regiões não serão criadas e mantendo a planaridade, conforme ilustrado na figura abaixo.

Portanto, temos:

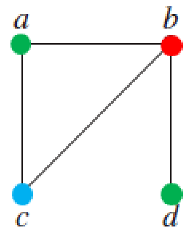
$$
\begin{aligned}
r &= e - v + 2 && \text{Fórmula de Euler} \\
&= (e + k - 1) - v + 2 && \text{Inclusão de novas arestas} \\
&= e + k - v + 1 && \text{Nova fórmula}
\end{aligned}
$$

78. Determine o número cromático dos grafos abaixo.

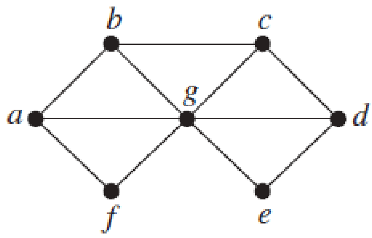
(a)



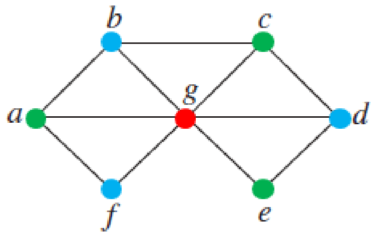
Resposta:
Como há um subgrafo K_3 (vértices abc), três cores são necessárias.



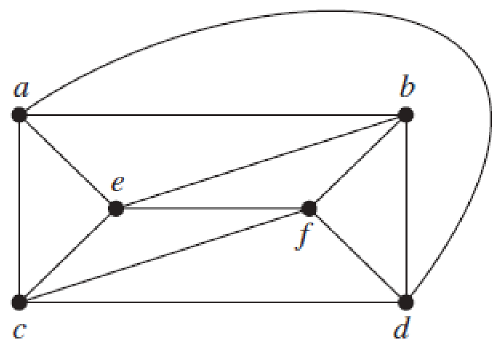
(b)



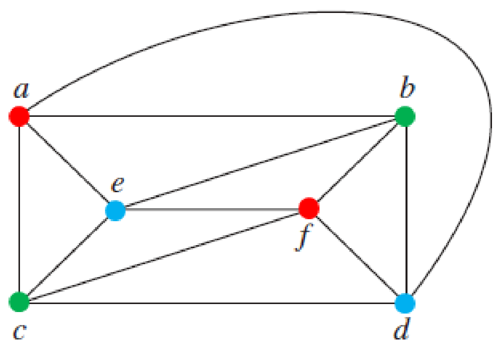
Resposta:
Da mesma forma que a letra anterior, como há subgrafos K_3, três cores são necessárias.



(c)

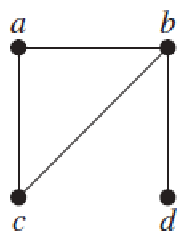


Resposta:
Da mesma forma que as letras anteriores, como há subgrafos K_3, três cores são necessárias.

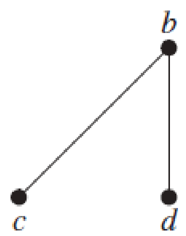


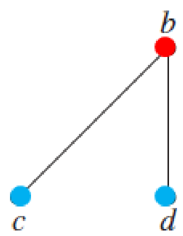
79. Para os grafos do exercício 78, mostre se é possível diminuir o número cromático removendo um único vértice e todas as arestas incidentes a ele.

   (a)

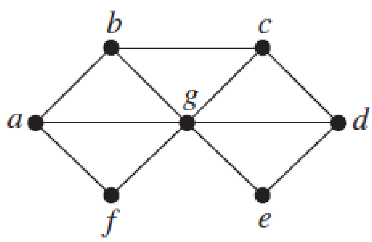


Resposta:
Se removermos o vértice a e suas arestas incidentes, duas cores são necessárias. (Idem para o vértice c.)

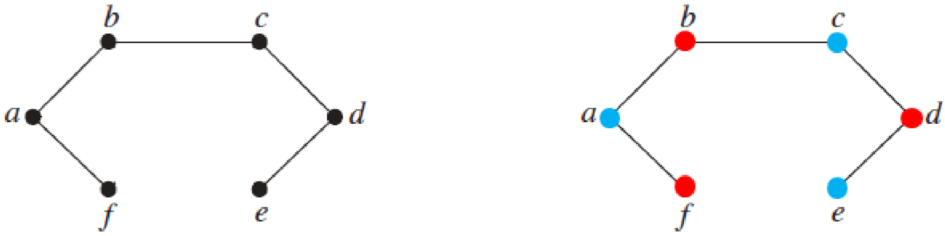




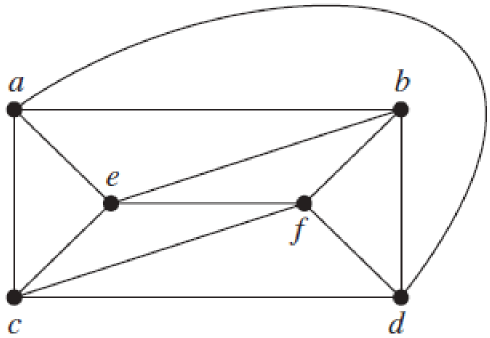
   (b)



Resposta:
Se removermos o vértice g e suas arestas incidentes, duas cores são necessárias.



(c)



Resposta:
A remoção de algum vértice de um subgrafo K_3 (triângulo) não elimina os outros subgrafos K_3 existentes. Note que todo o vértice participa de triângulos. Temos os seguintes subgrafos K_3:

$$\begin{gathered} abd \\ abe \\ ace \\ bdf \\ bef \\ cdf \\ cef \end{gathered}$$

Se removermos algum dos vértices do grafo, teremos algum outro "triângulo" que não compartilha vértices com o que foi removido. Assim, o grafo ainda terá número cromático 3.