UFMG/ICEx/DCC DCC216 – Matemática Discreta

Grafos
Lista de Exercícios

Ciências Exatas & Engenharias 1º Semestre de 2023

1. O grafo de interseção de uma coleção de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é o grafo que tem um vértice para cada um dos conjuntos da coleção e tem uma aresta conectando os vértices se esses conjuntos têm uma interseção não vazia. Construa o grafo de interseção para as seguintes coleções de conjuntos.

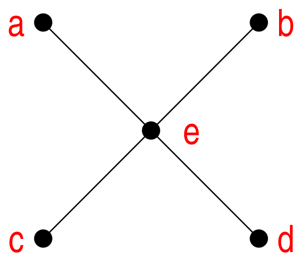
   (a)
   $$\begin{aligned} A_1 &= \{0,2,4,6,8\} \\ A_2 &= \{0,1,2,3,4\} \\ A_3 &= \{1,3,5,7,9\} \\ A_4 &= \{5,6,7,8,9\} \\ A_5 &= \{0,1,8,9\} \end{aligned}$$

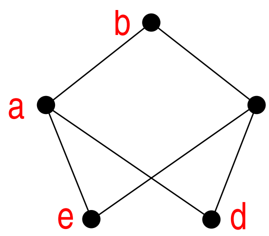
   (b)
   $$\begin{aligned} A_1 &= \{\ldots,-4,-3,-2,-1,0\} \\ A_2 &= \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} \\ A_3 &= \{\ldots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\} \\ A_4 &= \{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\} \\ A_5 &= \{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\} \end{aligned}$$

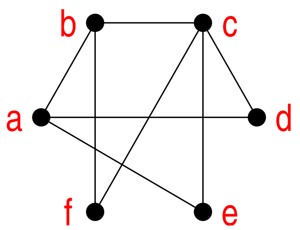
   (c)
   $$\begin{aligned} A_1 &= \{x|x<0\} \\ A_2 &= \{x|-1<x<0\} \\ A_3 &= \{x|0<x<1\} \\ A_4 &= \{x|-1<x<1\} \\ A_5 &= \{x|x>-1\} \\ A_6 &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

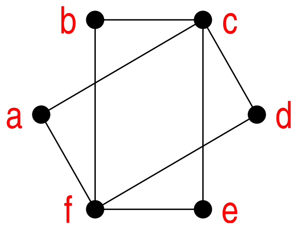
2. Pode haver um grafo simples com 15 vértices, cada um com grau 5?

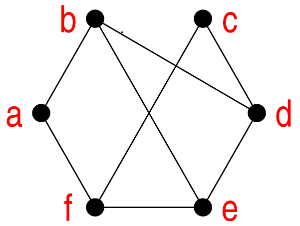
3. Determine se cada um dos grafos abaixo é bipartido.

   (a) 

   (b) 

(c) 

(d) 

(e) 

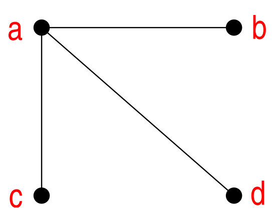
4. Quantos vértices e quantas arestas têm os grafos abaixo?
   (a) K_n (grafo completo)
   (b) $K_{m,n}$ (grafo bipartido completo)
   (c) C_n (grafo ciclo)
   (d) Q_n (grafo cubo)
   (e) W_n (grafo roda)

5. Quantas arestas tem um grafo com vértices de graus $5, 2, 2, 2, 2, 1$? Desenhe um possível grafo.

6. Existe um grafo simples com cinco vértices dos seguintes graus? Se existir, desenhe um possível grafo.
   (a) $3, 3, 3, 3, 2$
   (b) $1, 2, 3, 4, 5$
   (c) $1, 2, 3, 4, 4$
   (d) $3, 4, 3, 4, 3$
   (e) $0, 1, 2, 2, 3$
   (f) $1, 1, 1, 1, 1$

7. Quantos subgrafos com pelo menos um vértice tem K_3?

8. Desenhe todos os subgrafos do grafo abaixo.



9. Para que valores de n os grafos abaixo são regulares?
   (a) K_n

(b) C_n

(c) W_n

(d) Q_n

10. Quantos vértices tem um grafo regular de grau 4 com 10 arestas?

11. O grafo complementar $\overline{G}$ de um grafo simples G tem os mesmos vértices de G. Dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se, e somente se, eles não são adjacentes em G. Determine os seguintes grafos.

    (a) $\overline{K_n}$

    (b) $\overline{K_{m,n}}$

    (c) $\overline{C_n}$

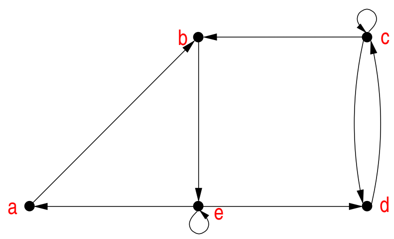
    (d) $\overline{Q_n}$

12. Se o grafo simples G tem v vértices e e arestas, quantas arestas tem $\overline{G}$?

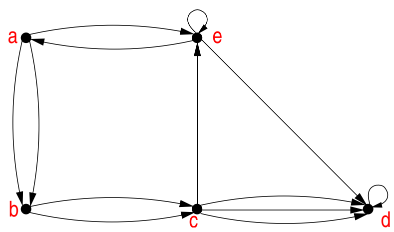
13. Mostre que se G é um grafo simples com n vértices, então $G \cup \overline{G} = K_n$.

14. O grafo reverso de um grafo dirigido $G = (V, E)$, representado por G^r, é o grafo dirigido (V, F) onde $(u, v) \in F$, se, e somente se, $(v, u) \in E$. Desenhe os grafos G^r correspondentes aos seguintes grafos:

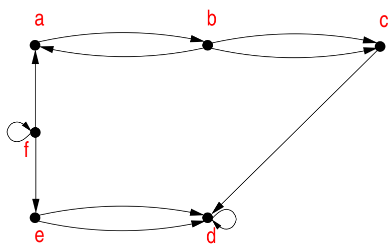
    (a)



    (b)



    (c)



15. Seja G um grafo dirigido. Mostre que $G = G^r$ se, e somente se, a relação associada com G é simétrica.

16. Represente a matriz de adjacência do grafo Q_3.

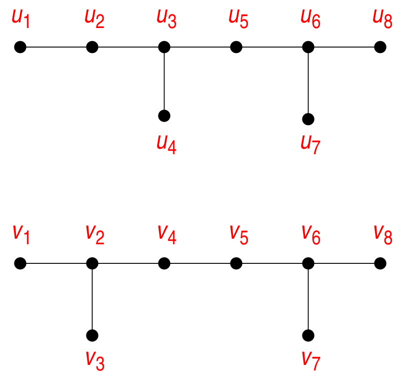
17. Seja uma matriz simétrica quadrada formada apenas por 0's e 1's que tem apenas 0's na diagonal principal. Essa matriz pode representar a matriz de adjacência de um grafo simples?

18. O que representa a soma das entradas de uma coluna de uma matriz de adjacência de um grafo não dirigido? E de um grafo dirigido?

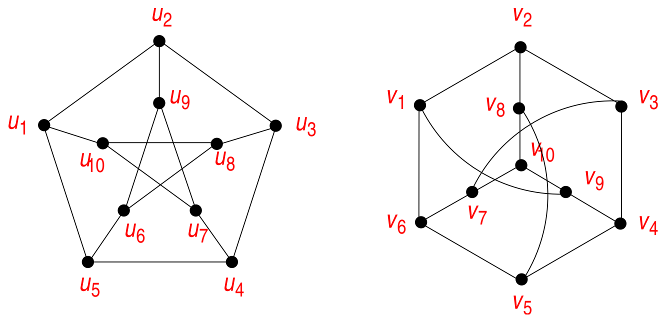
19. O que representa a soma das entradas de uma coluna de uma matriz de incidência de um grafo não dirigido?

20. Os pares de grafos abaixo são isomorfos?

(a)



(b)



21. Mostre que o isomorfismo de grafos simples é uma relação de equivalência.

22. Mostre que os vértices de um grafo bipartido com dois ou mais vértices podem ser ordenados de tal forma que a sua matriz de adjacência tem a forma

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

onde as quatro entradas acima são blocos retangulares.

23. Um grafo simples G é dito ser auto-complementar se G e $\overline{G}$ são isomorfos. Apresente um grafo simples auto-complementar com cinco vértices.

24. Para que inteiros n o grafo C_n é auto-complementar?

25. Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. Seja R uma relação em V formada por pares de vértices (u, v) tal que existe um trajeto (*path*) de u para v ou tal que $u = v$. Mostre que R é uma relação de equivalência.

26. Apresente um grafo que tenha um circuito Euleriano e um circuito Hamiltoniano mas que não sejam idênticos.

27. Um grafo possui oito vértices e seis arestas? Esse grafo é conexo? Justifique a resposta.

28. Nos grafos abaixo, assuma que cada vértice possui um identificador único $v_i, i \geq 1$. Cada variável usada é um número inteiro positivo maior ou igual a 1 ou um outro valor específico, conforme o caso. Para cada letra, diga quantas soluções distintas podem ser obtidas.

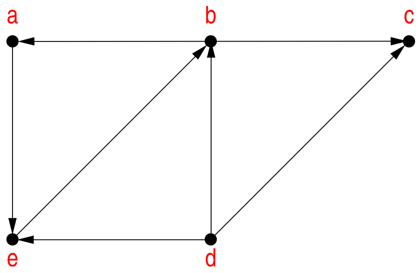
    (a) Árvores geradoras de um grafo $C_n, n \geq 3$.

    (b) Circuitos Hamiltonianos de um grafo $K_n, n \geq 3$, começando num vértice $v_i, 1 \leq i \leq n$.

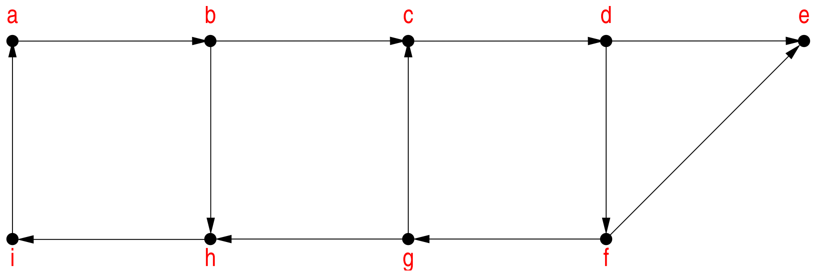
    (c) Circuitos Eulerianos de um grafo $K_{m,m}, m \geq 2$, $m = 2a$ e começando num vértice $v_i, 1 \leq i \leq 2m$. Grafo $K_{m,m}, m \geq 2$, $m = 2a$ é o grafo bipartido completo sendo que m é um número par. Os grafos bipartidos completos que podemos ter são da forma $K_{2,2}, K_{4,4}, K_{6,6}, \ldots$. Ou seja, cada vértice está conectado a exatamente m outros vértices. Como m é par, o grau de cada vértice é par e, assim, é possível haver circuitos Eulerianos.

29. Determine os componentes fortemente conexos de cada grafo dirigido abaixo.

(a)



(b)



30. Seja uma árvore com n vértices.
    (a) Quantas arestas têm essa árvore?
    (b) Prove esse resultado por indução matemática.

Para cada afirmação abaixo diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) e justifique.

31. Todo grafo que possui um subgrafo K_3 não pode ser bipartido.
32. Todo grafo que possui um subgrafo K_4 pode ou não ser bipartido.
33. O grafo $K_{m,n}$ possui m vértices com grau n e n vértices com grau m.
34. O menor trajeto simples entre um par de vértices no grafo $K_{m,n}$ tem comprimento 2.
35. O menor circuito no grafo $K_{m,n}$ tem comprimento 4, para $m, n \geq 2$.
36. Toda árvore é um grafo bipartido.
37. Qualquer árvore que tenha mais de um vértice tem pelo menos um vértice de grau 1.
38. O grafo $\overline{K_n}$ possui n componentes conexos, para $n \geq 3$.
39. O grafo $\overline{K_{m,n}}$ possui dois componentes conexos que são os subgrafos K_m e K_n, para $m, n \geq 2$.
40. O grafo $\overline{C_n}$ é conexo, para $n \geq 3$.
41. O menor caminho entre um par de vértices no grafo $\overline{C_n}$ tem comprimento 1, para $n \geq 3$.
42. O grafo $\overline{Q_n}$ tem pelo menos n componentes completos, para $n \geq 1$.
43. Seja G um grafo dirigido, sendo que cada vértice possui uma aresta laço e não há nenhuma outra aresta. Temos que $G = G^r$.
44. Um grafo simples é um caso particular de um multigrafo que é um caso particular de um pseudografo.
45. Um multigrafo dirigido não possui componente fortemente conexo.
46. Todo multigrafo dirigido possui um único componente fortemente conexo.
47. Seja G um grafo simples conexo com n vértices. Esse grafo possui no máximo $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas.

48. Seja G um grafo simples conexo com n vértices. Esse grafo possui no mínimo $n-1$ arestas.

49. Seja G um grafo simples conexo com n vértices. Esse grafo possui no mínimo grau $2n-2$.

50. Seja G um grafo simples conexo com n vértices. Esse grafo possui no máximo grau n^2-n.

51. Não é possível definir a priori o maior grau de um grafo simples conexo com n vértices.

52. Não é possível definir a priori o maior grau de um multigrafo conexo com n vértices.

53. Não é possível definir a priori o maior grau de um pseudografo conexo com n vértices.

54. É possível haver um grafo simples conexo que tenha uma quantidade de arestas que seja pelo menos o dobro de vértices.

55. Os grafos W_3 e K_4 são isomorfos.

Seja $n \geq 3$. Para as questões 56 a 60, diga se o grafo é regular ou não.

56. K_n

57. $K_{n,n}$

58. Q_n

59. W_n

60. C_n

Seja $n \geq 3$. Para as questões 61 a 65, diga se o grafo possui circuito euleriano ou não.

61. K_n

62. $K_{n,n}$

63. Q_n

64. W_n

65. C_n

Seja $n \geq 3$. Para as questões 66 a 70, diga se o grafo possui circuito hamiltoniano ou não.

66. K_n

67. $K_{n,n}$

68. Q_n

69. W_n

70. C_n

71. Se um grafo possui um circuito simples que passa pelos vértices u e v, então existem dois trajetos simples distintos entre u e v.

72. Se um grafo possui um circuito que passa pelos vértices u e v, então existem dois trajetos distintos entre u e v.

73. Se um grafo possui um circuito então a remoção de uma das arestas desse circuito não o torna desconexo.

74. Suponha que um grafo planar conexo tenha oito vértices, cada um de grau três. Em quantas regiões o plano é dividido por uma representação planar deste grafo?

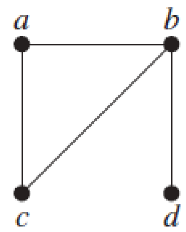
75. Suponha que um grafo planar conexo tenha 30 arestas e sua representação planar tenha 20 regiões. Quantos vértices tem o grafo?

76. Suponha que o grafo G seja simples, conexo, planar e bipartido, e tenha e arestas e v vértices. Mostre que $e \leq 2v - 4$ se $v \geq 3$.

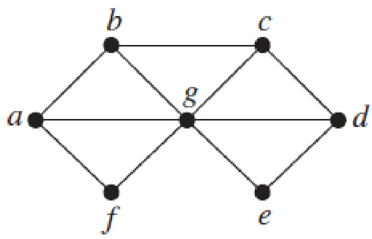
77. Suponha que um grafo planar tenha k componentes conexos, e arestas e v vértices. Também suponha que o plano está dividido em r regiões por uma representação planar do grafo. Ache uma fórmula para r em termos de e, v e k.

78. Determine o número cromático dos grafos abaixo.

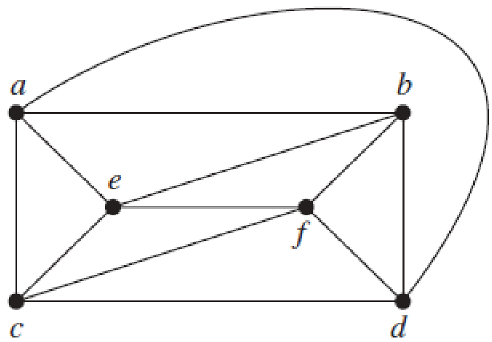
(a)



(b)

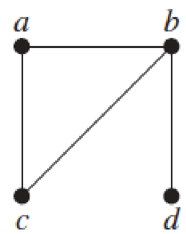


(c)

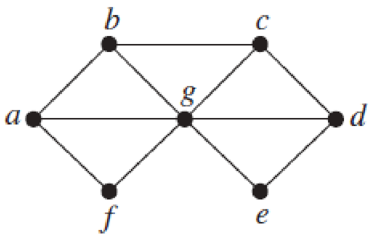


79. Para os grafos do exercício 78, mostre se é possível diminuir o número cromático removendo um único vértice e todas as arestas incidentes a ele.

(a)



(b)



(c)