Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

3. Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

fmiranda@math.uminho.pt

mif@math.uminho.pt

2015/2016

3.1 Derivadas Parciais

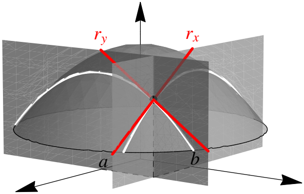
Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função.

- A derivada parcial de f em ordem a x, no ponto (a, b) é o limite (se este existir)
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h},$$
e denota-se por
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \qquad \text{ou} \qquad f_x(a, b).$$

- A derivada parcial de f em ordem a y, no ponto (a, b) é o limite (se este existir)
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h},$$
e denota-se por
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \qquad \text{ou} \qquad f_y(a, b).$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Consideremos o gráfico de uma função f de duas variáveis e a curva que resulta da interseção desse gráfico com o plano de equação $y = b$.



Esta curva é o gráfico da função $g(x) = f(x, b)$.

Assim

$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g'(a)$ é o declive da reta r_x tangente à curva no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Analogamente,

$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ é o declive da reta r_y tangente ao gráfico da função $h(y) = f(a, y)$ no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Exemplo: Se $f(x,y) = x^2y + y^3$, então:

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h}$$
  $$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2;$$
- $$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,1+h) - f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + h + (1+h)^3 - 2}{h}$$
  $$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 4h}{h} = 4.$$

O cálculo da derivada em ordem a x faz-se considerando y como constante e aplicando as regras usuais de derivação relativamente à variável x.

O cálculo da derivada em ordem a y faz-se de forma análoga.

Exemplo: Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

- Se $(x,y) \neq (0,0)$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

- Se $(x,y) = (0,0)$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

f possui derivadas parciais em todos os pontos, embora seja descontínua!

GENERALIZAÇÃO

Sejam $\mathcal{D}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

A derivada parcial de f em ordem a x_i, no ponto $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ é, se existir, o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots a_n)}{h},$$

e denota-se por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \qquad \text{ou} \qquad f_{x_i}(\boldsymbol{a}).$$

3.2 Derivadas Direcionais

Sejam $\mathcal{D}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função, $\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}$ e $\boldsymbol{u}$ um vetor de $\mathbb{R}^n$.
A derivada de f, no ponto $\boldsymbol{a}$, segundo o vetor $\boldsymbol{u}$ define-se como o limite (se este existir)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{a})}{h}$$

e denota-se por $Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{u})$ ou $f'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{u})$.

A derivada direcional de f, no ponto $\boldsymbol{a}$, na direção do vetor não nulo $\boldsymbol{u}$ denota-se por $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})$ e define-se como

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}) = Df\left(\boldsymbol{a}; \tfrac{\boldsymbol{u}}{||\boldsymbol{u}||}\right).$$

- Se $\boldsymbol{e}_i$ designar o i-ésimo vetor da base canónica de $\mathbb{R}^n$, então

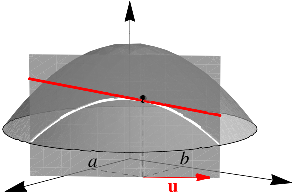
$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}).$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Quando $n = 2$, a derivada direcional de f no ponto (a, b) , segundo o vetor não nulo $\boldsymbol{u}$, tem a seguinte interpretação geométrica:

Consideremos o plano vertical que passa no ponto $(a, b, f(a, b))$ e tem a direção do vetor $\boldsymbol{u}$.

Este plano interseta o gráfico de f segundo uma curva.



$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(a, b)$ é o declive da reta tangente a essa curva no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Exemplo: Sejam

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

- Se $\boldsymbol{u}=(0,0)$, então $Df\big((0,0);(0,0)\big)=0$;
- Se $\boldsymbol{u}\neq(0,0)$, então

$$\begin{aligned}Df\big((0,0);(u_1,u_2)\big) &= \lim_{h\to 0}\frac{f\big((0,0)+h(u_1,u_2)\big)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^4u_1^3u_2}{h^7u_1^6+h^3u_2^2}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{hu_1^3u_2}{h^3u_1^6+u_2^2}=0.\end{aligned}$$

Esta função tem derivada em $(0,0)$, segundo todas as direções. No entanto, esta função não é contínua em $(0,0)$ (verifique!).

3.3 Derivada global

Sejam $\mathcal{D}$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{a}$ um elemento de $\mathcal{D}$.
Uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ diz-se derivável ou diferenciável em $\boldsymbol{a}$, se existir uma aplicação linear[1]

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})|}{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}||} = 0.$$

Pode provar-se que a aplicação linear L, se existir, é única.

L diz-se a derivada de f em $\boldsymbol{a}$ e denota-se por $Df(\boldsymbol{a})$ ou $f'(\boldsymbol{a})$, i.e.

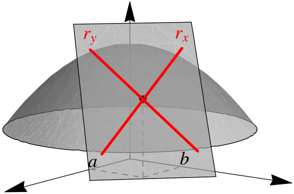
$$\begin{array}{cccc} Df(\boldsymbol{a}): & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{v} & \longmapsto & L(\boldsymbol{v}) \end{array}$$

[1] Relembre que, dados dois espaços vetoriais reais E e F, $L : E \to F$ é uma aplicação linear se $L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$, para todo $x, y \in E$ e todo $a, b \in \mathbb{R}$.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

- Será possível relacionar a derivada de f no ponto (a, b) com a noção de plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$?

Recordado a interpretação das retas r_x e r_y do diapositivo 3, é natural tomar como plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$ o plano que contém essas retas. Sendo os vetores



$$(1, 0, f_x(a, b)) \quad \text{e} \quad (0, 1, f_y(a, b))$$

vetores diretores do plano, uma equação desse plano é

$$(x, y, z) = (a, b, f(a, b)) + \lambda(1, 0, f_x(a, b)) + \mu(0, 1, f_y(a, b)), \ \lambda, \ \mu \in \mathbb{R},$$

ou ainda

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Interpretemos o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$ como sendo o plano que melhor aproxima, num certo sentido, o gráfico de f na vizinhança de $(a, b, f(a, b))$.
Dizemos que

$$f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

corresponde à *melhor aproximação linear* de f na vizinhança de (a, b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\Big|f(x,y) - \big(f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)\big)\Big|}{\|(x,y)-(a,b)\|} = 0.$$

Considerando a aplicação linear $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $L(u_1, u_2) = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2$, a expressão anterior escreve-se como

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\big|f(x,y) - f(a,b) - L(x-a, y-b)\big|}{\|(x,y)-(a,b)\|} = 0,$$

donde se conclui de imediato que $L \equiv Df(a, b)$.

No que se segue $\mathcal{D}$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a}$ é um ponto de $\mathcal{D}$ e f é uma função real definida em $\mathcal{D}$.

Teorema: *Se f é derivável em $\boldsymbol{a}$, então existem todas as derivadas parciais de f em $\boldsymbol{a}$ e*

$$Df(\boldsymbol{a}): \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_1, \ldots, u_n) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})u_n \end{array}$$

Chama-se gradiente de f em $\boldsymbol{a}$ e denota-se por $\nabla f(\boldsymbol{a})$, ao vetor

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right).$$

Conclui-se de imediato que, se f é derivável em $\boldsymbol{a}$, então

$$Df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}.$$

Exemplo: Consideremos novamente a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A função f será derivável em $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)|}{||(x,y)||} = 0.$$

Já sabemos que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, logo $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

e este limite não existe (verifique!), conclui-se que f não é derivável em $(0,0)$.

Teorema: Se f é derivável no ponto $\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}$, então f é contínua em $\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}$.

Exemplo: Relativamente à função anterior, poderíamos ter concluído que ela não é derivável em $(0,0)$, porque já tínhamos verificado anteriormente que esta função não é contínua em $(0,0)$.

Teorema: *Seja f uma função cujas derivadas parciais existem e são contínuas numa vizinhança de um ponto $\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}$. Então f é derivável em $\boldsymbol{a}$.*

Uma função cujas derivadas parciais existem e são contínuas diz-se uma função de classe $\mathscr{C}^1$.

Exemplo: Consideremos novamente a função do exemplo anterior. Já sabemos que:

- existem as derivadas parciais de f em todos os pontos;
- f não é derivável em $(0,0)$.

O resultado anterior permite concluir que pelo menos uma das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}$ é descontínua na origem (verifique!).

Teorema: *Se $f:\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ é derivável em $\boldsymbol{a}$, então f admite derivada em $\boldsymbol{a}$ segundo qualquer vetor $\boldsymbol{u}$ e*

$$Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{u}) = Df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}) = \nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{u}.$$

Exemplo: A função $f(x,y,z)=xe^{-yz}$ é de classe $\mathscr{C}^1$, logo é derivável.

$$Df\big((0,0,0);(1,1,1)\big); = \nabla f(0,0,0)\cdot(1,1,1) = (1,0,0)\cdot(1,1,1) = 1.$$

Exemplo: Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se} \quad x = y, \\ 0 & \text{se} \quad x \neq y. \end{cases}$$

- $Df\big((0,0);(1,1)\big) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,h) - f(0,0)}{h} = 2;$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0;$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$

Como

$$Df\big((0,0);(1,1)\big) \neq \nabla f(0,0) \cdot (1,1),$$

conclui-se que f não é derivável na origem.

Resumo:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existem e são contínuas numa vizinhança de $\boldsymbol{a}$

$\Downarrow \; \not\Uparrow$ [Ex 3.13]

a função f é derivável no ponto $\boldsymbol{a}$ e

$$Df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}$$

$\Downarrow \; \not\Uparrow$ [Ex 3.11]

existem as derivadas em $\boldsymbol{a}$ segundo todos os vetores $\boldsymbol{u}$ e

$$Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{u}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}$$

$\Downarrow \; \not\Uparrow$ [Ex 3.10]

existem as derivadas parciais no ponto $\boldsymbol{a}$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = Df(\boldsymbol{a};\boldsymbol{e}_i)$$

Generalização

Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e seja $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ uma função. Diz-se que $\boldsymbol{f}$ é derivável ou diferenciável em $\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}$, se existir uma aplicação linear

$$\boldsymbol{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tal que

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0.$$

A esta aplicação linear, que se existir é única, chama-se derivada de $\boldsymbol{f}$ em $\boldsymbol{a}$ e denota-se por $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ ou $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$.

Teorema: *A função $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ é derivável em $\boldsymbol{a}$ se e só se cada função componente f_i é derivável em $\boldsymbol{a}$.*

Teorema: *Se $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_m)$ é derivável em $\boldsymbol{a}$, então*

$$
\begin{array}{rccl}
D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}): & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\
 & (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}
\end{array}
$$

À matriz de $D\boldsymbol{f}$ relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ chama-se matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ em $\boldsymbol{a}$ e denota-se por $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, i.e.

$$
J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix}
$$

Note que a linha i de $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ “corresponde” ao vetor gradiente de f_i em $\boldsymbol{a}$.

Exemplo: Seja

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{f}(x,y): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (e^{x+y}+y, y^2x+x, \operatorname{sen}(x+y)) \end{array}$$

Calcular $D\boldsymbol{f}(0,0)$.

- As funções componentes de $\boldsymbol{f}$

  $$f_1(x,y) = e^{x+y}+y, \quad f_2(x,y) = y^2x+x, \quad f_3(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$$

  são funções de classe $\mathscr{C}^1$, logo $\boldsymbol{f}$ é derivável em $(0,0)$.

- $$J\boldsymbol{f}(0,0)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+2u_2 \\ u_1 \\ u_1+u_2 \end{bmatrix}.$$

- $D\boldsymbol{f}(0,0)(u_1,u_2) = (u_1+2u_2, u_1, u_1+u_2)$.

3.4 Derivadas parciais de ordem superior

Sejam $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}$ e $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função tal que existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ numa vizinhança de $\boldsymbol{a}$.

Se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admite derivada parcial em ordem a x_j em $\boldsymbol{a}$, diz-se que f tem uma derivada parcial de segunda ordem em $\boldsymbol{a}$ que se representa por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}) \quad \text{ou} \quad f_{x_i x_j}(\boldsymbol{a}) \quad \text{ou} \quad \partial x_j \partial x_i f(\boldsymbol{a}).$$

É também usual representar $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(\boldsymbol{a})$ por $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{a})$.

Note que poderão existir n^2 derivadas parciais de segunda ordem.

Indutivamente define-se derivada parcial de ordem k como uma derivada parcial de uma derivada parcial de ordem $k-1$.

Quantas derivadas parciais de ordem k poderão existir?

Exemplo: Determine todas as derivadas parciais de 2ª ordem da função $f(x,y) = xy + (x+2y)^2$:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x+2y) = 2x + 5y;$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 4(x+2y) = 5x + 8y;$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(2x+5y) = 2;$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}(5x+8y) = 8;$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}(5x+8y) = 5;$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}(2x+5y) = 5.$

Sejam $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função.

- Diz-se que f é de classe $\mathscr{C}^k$, quando existem e são contínuas todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a k.

- Uma função f diz-se de classe $\mathscr{C}^0$ se for contínua.

- Uma função f diz-se de classe $\mathscr{C}^\infty$ se f for de classe $\mathscr{C}^k$, para todo k.

$$\mathscr{C}^0 \supsetneq \mathscr{C}^1 \supsetneq \mathscr{C}^2 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathscr{C}^\infty$$

Teorema de Schwarz

Se f é de classe $\mathscr{C}^2$, então $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \ i, j = 1, \ldots, n.$

O teorema anterior implica que, se f é de classe $\mathscr{C}^k$, então qualquer permutação na ordem de derivação de uma derivada parcial de ordem menor ou igual a k, conduz ao mesmo resultado.

Exemplo: Verifique o Teorema de Schwarz para a função $f(x,y) = xe^y + yx^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + 2yx, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^y + 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^y + 2x.$$

Exemplo: Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

- $f_x(0,y) = -y, \quad f_y(x,0) = x$.
- $f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = 1$.
- $f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = -1$.

Esta função possui derivadas de 2ª ordem em todos os pontos, mas

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0).$$

Este resultado contraria o Teorema de Schwarz?

3.5 Propriedades das derivadas

- Se $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é derivável em $\boldsymbol{a}$ e $c \in \mathbb{R}$, então $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ é derivável em $\boldsymbol{a}$ e

$$D\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}) = c\, D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$$

$$\updownarrow$$

$$J\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}) = cJ\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$$

- Se $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ são deriváveis em $\boldsymbol{a}$, então $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ é derivável em $\boldsymbol{a}$ e

$$D\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$$

$$\updownarrow$$

$$J\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}) = J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$$

Propriedades das derivadas

- Se $f, g : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são deriváveis em $\boldsymbol{a}$, então $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})$ é derivável em $\boldsymbol{a}$ e

$$Dh(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a})Df(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})Dg(\boldsymbol{a})$$

$$\updownarrow$$

$$\nabla h(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a})\nabla f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})\nabla g(\boldsymbol{a})$$

- Se $f, g : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são deriváveis em $\boldsymbol{a}$ e g não se anula em $\mathcal{D}$, então $h(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}$ é derivável em $\boldsymbol{a}$ e

$$Dh(\boldsymbol{a}) = \frac{g(\boldsymbol{a})Df(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a})Dg(\boldsymbol{a})}{g(\boldsymbol{a})^2}$$

$$\updownarrow$$

$$\nabla h(\boldsymbol{a}) = \frac{g(\boldsymbol{a})\nabla f(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a})\nabla g(\boldsymbol{a})}{g(\boldsymbol{a})^2}$$

REGRA DA CADEIA

Sejam $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ e $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funções tais que $\boldsymbol{g}$ é derivável em $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{f}$ é derivável em $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$. Então $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ é derivável em $\boldsymbol{a}$ e

$$D\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}(a) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})) \circ D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$$

$$\updownarrow$$

$$J\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}(a) = J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$$

Exemplo: $\boldsymbol{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (xz, xy) \end{array}$ $\qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y \end{array}$

$g \circ \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla g \circ \boldsymbol{f}(x,y,z) = \nabla g(f(x,y,z))J\boldsymbol{f}(x,y,z) = (2xz^2+y, x, 2x^2z)$$

$$\begin{pmatrix} 2xz & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz^2+y & x & 2x^2z \end{pmatrix}$$

Observação: $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd}
(x,y) \arrow[r, "\boldsymbol{g}"] \arrow[rr, bend left, "h = f \circ \boldsymbol{g}"] & (u(x,y), v(x,y), w(x,y)) \arrow[r, "f"] & f(u(x,y), v(x,y), w(x,y))
\end{tikzcd}$$

$$\nabla h(x,y) = \nabla f(\boldsymbol{g}(x,y))\ J\boldsymbol{g}(x,y)$$

$$\nabla f(\boldsymbol{g}(x,y)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\boldsymbol{g}(x,y)}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\boldsymbol{g}(x,y)}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{\boldsymbol{g}(x,y)} \right)$$

$f(x,y,z)$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$

$\nabla f(\boldsymbol{g}(x,y)) = \nabla f(u,v,w)$ $\qquad\qquad$ $\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}, \dfrac{\partial f}{\partial w}\right)$

$$h = f(u, v, w),\ u = u(x, y),\ v = v(x, y),\ w = w(x, y).$$

$$\nabla h(x, y) = \nabla f(u, v, w)\ J\boldsymbol{g}(x, y)$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

Exemplo: Sejam $h(x,y) = f(e^{-x+y}, e^{xy})$ e $f(u,v) = u^2 - 3v$.

$$h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)), \qquad u(x,y) = e^{-x+y}, \qquad v(x,y) = e^{xy}.$$

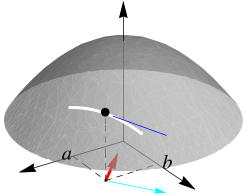
- $$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 2u\Big|_{u=e^{-x+y}}(-e^{-x+y}) - 3ye^{xy} \\ &= -2e^{-2x+2y} - 3ye^{xy}. \end{aligned}$$

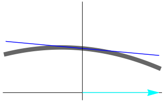
- $$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= 2u\Big|_{u=e^{-x+y}} e^{-x+y} - 3xe^{xy} \\ &= 2e^{-2x+2y} - 3xe^{xy}. \end{aligned}$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO GRADIENTE

- Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \neq \mathbf{0}$.

$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ aponta na direção e sentido de crescimento máximo.

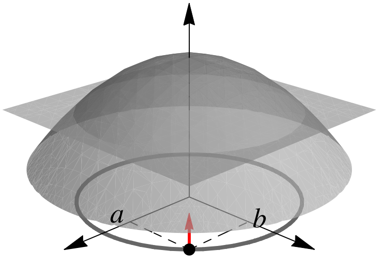




► Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \neq \mathbf{0}$ e seja Σ_c a hipersuperfície de nível c de f, isto é,

$$\Sigma_c = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{D} : f(\boldsymbol{x}) = c\}.$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ é normal, em $\boldsymbol{x}_0$, à hipersuperfície de nível $f(\boldsymbol{x}_0)$ de f.



RETA NORMAL E HIPERPLANO TANGENTE A Σ_c

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável, Σ_c a hipersuperfície de nível c de f e $\boldsymbol{x}_0 \in \Sigma_c$ tal que $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \neq \mathbf{0}$.

- Uma equação da reta normal a Σ_c em $\boldsymbol{x}_0$ é

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \nabla f(\boldsymbol{x}_0), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Uma equação do hiperplano tangente a Σ_c em $\boldsymbol{x}_0$ é

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_0) = 0.$$

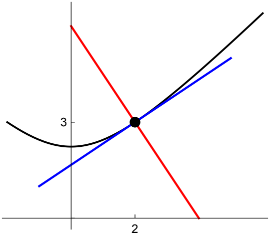
Exemplo: Determinar uma equação da reta perpendicular e da reta tangente à hipérbole $y^2 - x^2 = 5$ no ponto $(2,3)$.

A hipérbole é a curva de nível 5 da função

$$f(x,y) = y^2 - x^2$$

e passa em $(2,3)$. Como $\nabla f(3,5) = (-4,6)$, obtém-se:

- reta perpendicular: $(x,y) = (2,3) + \lambda(-4,6),\ \lambda \in \mathbb{R}$;
- reta tangente: $(x-3, y-5)\cdot(-4,6) = 0 \Leftrightarrow 3y - 2x = 5.$



Exemplo: Determinar uma equação do plano tangente à superfície de equação $z = \dfrac{e^x}{x^2+y^2}$ no ponto $(1, 2, \frac{e}{5})$.

Esta superfície é a superfície de nível 0 da função

$$f(x,y,z) = z - \frac{e^x}{x^2+y^2}$$

e passa em $(1, 2, \frac{e}{5})$. Como

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{2e^x x}{(x^2+y^2)^2} - \frac{e^x}{x^2+y^2}, \frac{2e^x y}{(x^2+y^2)^2}, 1 \right),$$

obtém-se $\nabla f(1, 2, \frac{e}{5}) = (-\frac{3e}{25}, \frac{4e}{25}, 1)$

Plano tangente:

$$(x-1, y-2, z-\tfrac{e}{5}) \cdot (-\tfrac{3e}{25}, \tfrac{4e}{25}, 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + \tfrac{25}{e} z = 10.$$