Ex.: Os vectores $\underset{\sim}{e_1}$ e $\underset{\sim}{e_2}$ de $\mathbb{R}^2$ anteriormente definidos são linearmente independentes, pois,

$$\alpha_1 \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{e_1}} + \alpha_2 \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{e_2}} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Ex.: Os vectores $\underset{\sim}{f_1} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{f_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ e $\underset{\sim}{f_3} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ não são linearmente independentes. Veja-se que,

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\-\alpha_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\alpha_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\alpha_3\\\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1 + 2\alpha_3\\-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0\\-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0\end{cases}$$

Por exemplo, $1\underset{\sim}{f_1} + \frac{3}{2}\underset{\sim}{f_2} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{f_3} = \underset{\sim}{0}$, i.e., tem-se uma combinação linear nula dos vectores $\underset{\sim}{f_1}$, $\underset{\sim}{f_2}$ e $\underset{\sim}{f_3}$ sem que os coeficientes sejam todos nulos.

Assim, $\underset{\sim}{f_1}, \underset{\sim}{f_2}, \underset{\sim}{f_3}$ dizem-se linearmente dependentes.

Teorema: Os vectores $\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}, \dots, \underset{\sim}{x_n}$ de um espaço vectorial V são linearmente dependentes se e só se um dos vectores pode ser escrito como combinação linear dos restantes.

dem.: Sejam $\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}, \dots, \underset{\sim}{x_n}$ l.d. (linearmente dependentes)

Então tem-se $\alpha_1 \underset{\sim}{x_1} + \dots + \alpha_n \underset{\sim}{x_n} = \underset{\sim}{0}$ sendo, pelo menos, um dos coeficientes não nulo. Suponhamos, sem perda de generalidade que é α_1. Assim, tem-se,

$$\underset{\sim}{x_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\underset{\sim}{x_2} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\underset{\sim}{x_n}$$, i.e., $\underset{\sim}{x_1}$ é combinação linear dos restantes vectores.

Suponhamos agora que, dados os vectores $\underset{\sim}{x_1}, \dots, \underset{\sim}{x_n}$, um deles, por exemplo $\underset{\sim}{x_1}$, é combinação linear dos restantes. Tem-se então

$\underset{\sim}{x_1} = \alpha_2 \underset{\sim}{x_2} + \dots + \alpha_n \underset{\sim}{x_n} \Leftrightarrow \underset{\sim}{x_1} - \alpha_2 \underset{\sim}{x_2} - \dots - \alpha_n \underset{\sim}{x_n} = \underset{\sim}{0}$, ou seja, temos uma combinação linear nula, onde pelo menos um dos coeficientes (o de $\underset{\sim}{x_1}$) é diferente [illegible] são linearmente dependentes.