Aplicações lineares

Definição: Sejam V e W dois espaços vectoriais. Designa-se por **aplicação linear** a transformação $f: V \longrightarrow W$, tal que,

- $\forall\, \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in V \quad f(\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{y}) = f(\underset{\sim}{x}) + f(\underset{\sim}{y})$ (f preserva a $+$)
- $\forall\, \underset{\sim}{x} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha \underset{\sim}{x}) = \alpha f(\underset{\sim}{x})$ (f preserva a $\cdot$)

Exemplo: Vejamos que
$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \longmapsto (2x+y, -y+3z)$$
é aplicação linear:

- $\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$$f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = f((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) =$$
$$=(2(x_1+x_2)+(y_1+y_2), -(y_1+y_2)+3(z_1+z_2))$$
$$= (2x_1+y_1, -y_1+3z_1) + (2x_2+y_2, -y_2+3z_2)$$
$$= f((x_1,y_1,z_1)) + f((x_2,y_2,z_2))$$

- $\forall (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha(x_1,y_1,z_1)) = f((\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)) = (2\alpha x_1 + \alpha y_1, -\alpha y_1 + 3\alpha z_1)$$
$$= \alpha(2x_1+y_1, -y_1+3z_1) = \alpha f((x_1,y_1,z_1))$$

Mais Exemplos:

- a aplicação identidade $Id: V \longrightarrow V, \ \underset{\sim}{u} \longmapsto \underset{\sim}{u}$ é aplicação linear

- a aplicação nula $O: V \longrightarrow V, \ \underset{\sim}{u} \longrightarrow \underset{\sim}{0}$ é aplicação linear

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto 2x$ é aplicação linear

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto 2x+1$ **não é aplicação linear**
  (p.ex., $f(\alpha x) = 2\alpha x + 1 \underset{\forall \alpha \in \mathbb{R}}{\neq} 2\alpha x + \alpha = \alpha f(x)$)

- $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é aplicação linear
  $(x,y) \longmapsto (3x+y, 0, y-x)$

- $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ não é aplicação linear
  $(x,y) \longmapsto (x^2, 0, x+y)$

- $f_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ onde $\underset{=}{A}$ é uma matriz de ordem $m \times n$
  $\underset{\sim}{x} \longmapsto A\underset{\sim}{x}$ é aplicação linear
  (este exemplo mostra que, dada uma matriz, existe sempre uma aplicação linear que lhe está associada)

- $f: \mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}^{n\times m}(\mathbb{R})$ é aplicação linear
  $A \longmapsto A^T$
  ($\mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{R}) \rightarrow$ espaço das matrizes reais de ordem $m \times n$)

- $\psi: P_3 \longrightarrow P_2$ é aplicação linear
  $ax^3+bx^2+cx+d \longmapsto 3ax^2+2bx+c$ (a cada polinómio de grau 3 associa o polinómio derivado)

Teorema: Se $f: V \rightarrow W$ é uma aplicação linear, então:

1) $f(\underset{\sim}{0}_V) = \underset{\sim}{0}_W$ (f preserva o vector nulo)

2) $\forall \underset{\sim}{x} \in V, \ f(-\underset{\sim}{x}) = -f(\underset{\sim}{x})$ (f preserva os simétricos)

dem.: 1) $f(\underset{\sim}{0}_V) = f(0 \cdot \underset{\sim}{0}_V) \underset{(*)}{=} 0 \cdot f(\underset{\sim}{0}_V) = \underset{\sim}{0}_W$

2) $f(\underset{\sim}{x}) + f(-\underset{\sim}{x}) \underset{(*)}{=} f(\underset{\sim}{x} + (-\underset{\sim}{x})) = f(\underset{\sim}{0}_V) \underset{1)}{=} \underset{\sim}{0}_W \ , \forall \underset{\sim}{x} \in V$

(*) f é aplicação linear

Teorema: Se $f: V \to W$ é aplicação linear, então:

1) $f(\alpha_1 \underset{\sim}{v_1} + \dots + \alpha_n \underset{\sim}{v_n}) = \alpha_1 f(\underset{\sim}{v_1}) + \dots + \alpha_n f(\underset{\sim}{v_n})$, $\forall \underset{\sim}{v_1}, \dots, \underset{\sim}{v_n} \in V$, $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

(f preserva as combinações lineares)

2) Se $\underset{\sim}{v_1}, \dots, \underset{\sim}{v_n} \in V$ são vectores linearmente dependentes de V, então $f(\underset{\sim}{v_1}), \dots, f(\underset{\sim}{v_n}) \in W$ são vectores linearmente dependentes de W.

(f preserva a dependência linear)

NOTA: Em geral, uma aplicação linear não preserva a independência linear. (p.ex., $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que, $f(x,y,z) = (x,z)$, tem-se $f(1,0,0) = (1,0)$, $f(2,1,0) = (2,0)$, em que os vectores $(1,0,0)$ e $(2,1,0)$ são l.i. mas $(2,0) = 2(1,0)$, i.e., $(2,0)$ e $(1,0)$ são l.d.)

Dois Conjuntos Importantes:

Definição (Núcleo): Seja $f: V \to W$ uma aplicação linear. Designa-se por núcleo de f, ou espaço nulo, ou Kernel de f, e denota-se $Nuc(f)$ ou $Ker(f)$, o conjunto dos elementos de V que têm como imagem o zero de W, i.e.,

$$\boxed{Nuc(f) = \{ \underset{\sim}{x} \in V : f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{0}_W \}} \quad (Nuc(f) \subseteq V)$$

Definição (Espaço Imagem): Seja $f: V \to W$ uma aplicação linear. Designa-se por espaço imagem de f, e denota-se $Im(f)$, o conjunto das imagens de V por meio de f, i.e., $\boxed{Im(f) = \{ \underset{\sim}{y} \in W : \exists \underset{\sim}{x} \in V, f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{y} \}}$

$(Im(f) \subseteq W)$

Teorema: Sejam V e W espaços vectoriais e $f: V \to W$ uma aplicação linear. Então:

(i) Nuc(f) é um subespaço vectorial de V.

(ii) Im(f) é um subespaço vectorial de W.

dem.: (i) •) Veja-se que $\underset{\sim}{0}_W \in W$ (pois W é um espaço vectorial) e porque f é aplicação linear, $\overset{(*)}{,}$ $\underset{\sim}{0}_W = f(\underset{\sim}{0}_V)$. Logo $\underset{\sim}{0}_V \in Nuc(f)$ e, portanto, $Nuc(f) \neq \emptyset$

•) Sejam $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x}' \in Nuc(f)$. Então $f(\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{x}') \overset{(*)}{=} f(\underset{\sim}{x}) + f(\underset{\sim}{x}') = \underset{\sim}{0}_W + \underset{\sim}{0}_W$
$= \underset{\sim}{0}_W$,

pelo que, $\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{x}' \in Nuc(f)$

•) Sejam $\underset{\sim}{x} \in Nuc(f)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se $f(\alpha \underset{\sim}{x}) \overset{(*)}{=} \alpha f(\underset{\sim}{x}) = \alpha \underset{\sim}{0}_W$
$= \underset{\sim}{0}_W$.

logo $\alpha \underset{\sim}{x} \in Nuc(f)$

(ii) (Fica como exercício).

Definição: Seja $f: V \to W$ uma aplicação linear, com V de dimensão finita. Define-se:

- nulidade de f como sendo $\boxed{nul(f) = dim(Nuc(f))}$
- característica de f " " $\boxed{car(f) = dim(Im(f))}$

Teorema: Seja $f: V \to W$ uma aplicação linear com V de dimensão finita. Então:

$$\boxed{dim(V) = nul(f) + car(f)}$$

Exemplos:

•) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \mapsto (x, 2y)$

$$\begin{aligned} Nuc(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x, 2y) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y = 0\} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Veja-se que $(0,0,z) = z(0,0,1)$, i.e., $(0,0,1)$ é gerador do $Nuc(f)$ e, sendo um só vector, é l.i.. Portanto $\{(0,0,1)\}$ constitui uma base de $Nuc(f)$ e $\dim(Nuc(f)) = nul(f) = 1$

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{f(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x,2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$car(f) = \dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

Note-se que, $\dim(\mathbb{R}^3) = nul(f) + car(f)$

$$3 = 1 + 2$$

•) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$

$$\begin{aligned} Nuc(f) &= \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1,\dots,x_n) = 0\} = \\ &= \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\} = \{(0, x_2, \dots, x_n) : x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Veja-se que $(0, x_2, \dots, x_n) = x_2 \underbrace{(0,1,0,\dots,0)}_{\underset{\sim}{e}_2} + \dots + x_n \underbrace{(0,\dots,0,1)}_{\underset{\sim}{e}_n}$,

i.e., $\underset{\sim}{e}_2, \dots, \underset{\sim}{e}_n$ geram o $Nuc(f)$ e são l.i.. Logo, constituem uma base de $Nuc(f)$, pelo que, $nul(f) = \dim(Nuc(f)) = n-1$

$$Im(f) = \{f(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R} : (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1 : x_1 \in \mathbb{R}\}$$
$= \mathbb{R}$ e $car(f) = \dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}) = 1$

$\dim(\mathbb{R}^n) = nul(f) + car(f)$

•) $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que, $f(a,b,c,d) = (a+b, b-c, a+d)$

Veja-se que, $(a+b, b-c, a+d) = a(1,0,1) + b(1,1,0) + c(0,-1,0) + d(0,0,1)$, i.e.,

os vectores $(1,0,1), (1,1,0), (0,-1,0)$ e $(0,0,1)$ geram $\mathrm{Im}(f)$ mas são l.d.. Os 3 primeiros vectores são l.i. (verificar!), pelo que, o conjunto $\{(1,0,1), (1,1,0), (0,-1,0)\}$ constitui uma base de $\mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{car}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$

$$\begin{aligned}\mathrm{Nuc}(f) &= \{\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^4 : f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{0}_{\mathbb{R}^3}\} \\ &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : (a+b, b-c, a+d) = (0,0,0)\} \\ &= \{(a,-a,-a,-a) : a \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$(a,-a,-a,-a) = a(1,-1,-1,-1)$ O vector $(1,-1,-1,-1)$ é gerador de $\mathrm{Nuc}(f)$ e, sendo um só, é l.i., constituindo uma base.

Logo $\mathrm{nul}(f) = \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = 1$

Mais uma vez, $\dim(\mathbb{R}^4) = \mathrm{nul}(f) + \mathrm{car}(f)$

Matriz associada a uma Aplicação Linear

Sejam V e W espaços vectoriais, de dimensão m e n, resp.,

$B = \{\underset{\sim}{v}_1, \dots, \underset{\sim}{v}_m\}$ uma base de V e

$B' = \{\underset{\sim}{w}_1, \dots, \underset{\sim}{w}_n\}$ " " " W.

Pode-se determinar $f(v_i)$, $i = 1, \dots, n$, escrevendo-o na base de W:

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{v}_1) &= a_{11}\underset{\sim}{w}_1 + a_{12}\underset{\sim}{w}_2 + \dots + a_{1n}\underset{\sim}{w}_n \\ f(\underset{\sim}{v}_2) &= a_{21}\underset{\sim}{w}_1 + a_{22}\underset{\sim}{w}_2 + \dots + a_{2n}\underset{\sim}{w}_n \\ &\ \ \vdots \\ f(\underset{\sim}{v}_m) &= a_{m1}\underset{\sim}{w}_1 + a_{m2}\underset{\sim}{w}_2 + \dots + a_{mn}\underset{\sim}{w}_n \end{aligned}$$

A acção de f sobre cada um dos $\underset{\sim}{v}_i$ é determinada pelos coeficientes (escalares) a_{ij}, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$

Estes coeficientes formam uma matriz de ordem $m \times n$.
A matriz transposta desta, designa-se por matriz da aplicação linear f, nas bases $B=\{\underset{\sim}{v}_1,\dots,\underset{\sim}{v}_m\}$ de V e $B'=\{\underset{\sim}{w}_1,\dots,\underset{\sim}{w}_n\}$ de W, tendo ordem $n \times m$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(\underset{\sim}{v}_1) & f(\underset{\sim}{v}_2) & & f(\underset{\sim}{v}_m) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo: seja $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por

$$f(x,y,z) = (2x-3y+z,\ 3x-2y)$$

considerem-se as bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, i.e., respectivamente, $\{\underset{\sim}{e}_1=(1,0,0),\ \underset{\sim}{e}_2=(0,1,0),\ \underset{\sim}{e}_3=(0,0,1)\}$ e $\{\underset{\sim}{e}_1=(1,0),\ \underset{\sim}{e}_2=(0,1)\}$. Tem-se que,

$$f(1,0,0)=(2,3)=2(1,0)+3(0,1)$$
$$f(0,1,0)=(-3,-2)=-3(1,0)+(-2)(0,1)$$
$$f(0,0,1)=(1,0)=1(1,0)+0(0,1),$$

pelo que, a matriz da aplicação linear f em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ é $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Note-se que $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y+z \\ 3x-2y \end{pmatrix}$

Pode-se então determinar a imagem de qualquer elemento de $\mathbb{R}^3$ por meio de f, usando a matriz da aplicação linear, tendo-se

Por exemplo, $f((1,2,3)) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz da aplicação linear f (relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$).

Determine-se f:

A aplicação linear f será definida de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^3$, tendo-se:

$$f(a,b,c,d) = A.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ a+d \end{pmatrix}$$

donde

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(a,b,c,d) \longmapsto (a+b,\ b-c,\ a+d)$$

Exemplo: (Usar matrizes de aplicações lineares para determinar o núcleo)

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longmapsto (x+z,\ x+y-2z,\ 2x+y+3z)$$

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = \underset{\sim}{0}_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+z,\ x+y-2z,\ 2x+y+3z) = (0,0,0)\}$$

Temos de resolver o sistema homogéneo $\begin{cases} x+z=0 \\ x+y-2z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$\mathrm{car}(A) = 3$
$\downarrow$
sistema homogéneo possível determinado

matriz da aplicação linear f em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$

Logo, $\mathrm{Nuc}(f) = \{(0,0,0)\}$

Classificação de Aplicações Lineares

Definição (Sobrejectiva): Uma aplicação linear $f: V \longrightarrow W$ diz-se sobrejectiva se $Im(f) = W$.

Exemplo 1: Retomando a aplicação linear do exemplo anterior,

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x+z, x+y-2z, 2x+y+3z)$$

$$Im(f) = \{ f(x,y,z) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \} = \{ (x+z, x+y-2z, 2x+y+3z) : x,y,z \in \mathbb{R} \}$$

$$(x+z, x+y-2z, 2x+y+3z) = x(1,1,2) + y(0,1,1) + z(1,-2,3)$$

i.e., os vectores $(1,1,2)$, $(0,1,1)$ e $(1,-2,3)$ geram $Im(f)$ e são l.i. (verificar!), constituindo assim uma base de $Im(f)$.

Então $car(f) = \dim(Im(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

3 vectores do $\mathbb{R}^3$ l.i. também geram o espaço $\mathbb{R}^3$.

Portanto, $Im(f) = \mathbb{R}^3$, ou seja, f é sobrejectiva.

Exemplo 2: $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad Im(g) = \mathbb{R}$, pelo que, g é sobrejectiva.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto x_1$$

Definição (Injectiva): Uma aplicação linear $f: V \to W$ diz-se injectiva se $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{y} \Rightarrow f(\underset{\sim}{x}) \neq f(\underset{\sim}{y})$ ou, equivalentemente,

$$f(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{y}) \Rightarrow \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}, \quad \forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in V.$$

Exemplo 3: $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y) \longmapsto (y,0,x)$$

$(y,0,x) = (y',0,x') \Rightarrow y = y'$ e $x = x'$, i.e., $(x,y) = (x',y')$, pelo que, h é injectiva.

Definição (Bijectiva): Uma aplicação linear injectiva e sobrejectiva diz-se bijectiva.

Obs.: A aplicação g (exemplo 2) não é injectiva
$(p.ex., g(1,0,\dots,0) = g(1,0,\dots,1) = 1$ e $(1,0,\dots,0) \neq (1,0,\dots,1))$

A aplicação h (exemplo 3) não é sobrejectiva
$(p.ex., (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ e $(1,1,1) \notin \mathrm{Im}(h))$

Teorema: Se $f: V \to W$ é uma aplicação linear, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f injectiva

(ii) $\mathrm{Nuc}(f) = \{\underset{\sim}{0}_V\}$

dem.: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Supondo f injectiva, então $f(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{y}) \Rightarrow \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ (*)

Seja $\underset{\sim}{x} \in \mathrm{Nuc}(f)$. Então $f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{0}_W = f(\underset{\sim}{0}_V) \underset{(*)}{\Longrightarrow} \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}_V$,

pelo que, $\mathrm{Nuc}(f) = \{\underset{\sim}{0}_V\}$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Seja $\mathrm{Nuc}(f) = \{\underset{\sim}{0}_V\}$ e $f(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{y})$

Então $f(\underset{\sim}{x} + (-\underset{\sim}{y})) = f(\underset{\sim}{x}) + f(-\underset{\sim}{y}) = f(\underset{\sim}{x}) - f(\underset{\sim}{y}) = \underset{\sim}{0}_W$

Logo $\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y} \in \mathrm{Nuc}(f)$, i.e., $\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}_V \Leftrightarrow \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$, donde f é injectiva.

Obs.: A aplicação f (exemplo 1) é bijectiva pois é sobrejectiva e, já tínhamos visto anteriormente que, $\mathrm{Nuc}(f) = \{(0,0,0)\}$, sendo, pelo Teorema anterior, injectiva também.

NOTA: Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita e $\{\underset{\sim}{v}_1, \ldots, \underset{\sim}{v}_n\}$ um conjunto de geradores de V e $f: V \to W$ uma aplicação linear.

Vejamos que $\{f(\underset{\sim}{v}_1), \ldots, f(\underset{\sim}{v}_n)\} \subseteq W$ constituem um conjunto de geradores de $Im(f)$:

Seja $\underset{\sim}{u} \in Im(f)$. Então existe $\underset{\sim}{v} \in V$, tal que, $f(\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{u}$

Mas se $\underset{\sim}{v} \in V$, então existem escalares $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que, $\underset{\sim}{v} = a_1 \underset{\sim}{v}_1 + \ldots + a_n \underset{\sim}{v}_n$.

Tem-se, então $\underset{\sim}{u} = f(\underset{\sim}{v}) = f(a_1 \underset{\sim}{v}_1 + \ldots + a_n \underset{\sim}{v}_n) =$

$= a_1 f(\underset{\sim}{v}_1) + \ldots + a_n f(\underset{\sim}{v}_n)$

f é aplicação linear

Podemos então concluir que $f(\underset{\sim}{v}_1), \ldots, f(\underset{\sim}{v}_n)$ são geradores de $Im(f)$.

Definição (Isomorfismo): Chama-se isomorfismo a uma aplicação linear $f: V \to W$ bijectiva.

Os espaços V e W dizem-se isomorfos, e escreve-se $V \simeq W$.

Exemplo: A aplicação f do exemplo 1, sendo aplicação linear e bijectiva, é um isomorfismo

Exemplo: Vejamos que os espaços $A = \{(x,y,0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(x,0,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ são isomorfos, i.e., $A \simeq B$.

Basta mostrar que, p.ex., a aplicação $f: A \to B$, tal que, $f(x,y,0) = (x,0,y)$ é um isomorfismo, i.e, é uma aplicação linear bijectiva.