Ex: Calcular os vectores próprios associados ao valor próprio 2 da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ do exemplo anterior

$$(A - 2I)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $\begin{cases} x_1 = x_3 = 0 \\ x_2 \text{ é qualquer valor real } (\neq 0) \end{cases}$

pois $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$

Tem-se então $\begin{cases} x_1 = x_3 = 0 \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$

Logo, todos os vectores que se possam escrever da forma $\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\alpha \neq 0)$

são vectores próprios de A associados ao valor próprio 2.

Propriedades: Sejam A uma matriz quadrada, λ um valor próprio de A e $\underset{\sim}{x}$ um vector próprio associado ao valor próprio λ de A.

(i) Se α é nº diferente de zero, $\alpha\lambda$ é um valor próprio da matriz αA e $\underset{\sim}{x}$ é um vector próprio associado.

(ii) Se p é um nº, $\lambda - p$ é valor próprio da matriz $A - pI$ e $\underset{\sim}{x}$ um vector próprio associado.

(iii) λ^2 é valor próprio de A^2.

(iv) Se A é invertível, então $\lambda \neq 0$ e reciprocamente. λ^{-1} é valor próprio de A^{-1} e $\underset{\sim}{x}$ um vector próprio associado.

Dem.: Se $\lambda = 0$ então $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$, pelo que, A é singular

$A\underset{\sim}{x} = \lambda\underset{\sim}{x} \Rightarrow (\lambda^{-1}A^{-1})A\underset{\sim}{x} = (\lambda^{-1}A^{-1})\lambda\underset{\sim}{x} \Rightarrow \lambda^{-1}(A^{-1}A)\underset{\sim}{x} = \lambda^{-1}\lambda A^{-1}\underset{\sim}{x} \Rightarrow \lambda^{-1}I\underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{x} \Rightarrow A^{-1}\underset{\sim}{x} = \lambda^{-1}\underset{\sim}{x}$