Tópicos de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

Teoria elementar de conjuntos

Carla Mendes

Dep. Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

2010/2011

Teoria elementar de conjuntos

A noção de conjuntos e o estudo de conjuntos (designada por Teoria de conjuntos), hoje essenciais em muitos campos da Matemática e das Ciências da Computação, foram introduzidos por Georg Cantor nos finais do século XIX. A teoria de Cantor, um tanto intuitiva, foi posteriormente tratada e organizada de forma axiomática.
Nesta unidade curricular vamos considerar a noção de conjunto como um conceito primitivo, i.e. como uma noção intuitiva, a partir da qual serão definidas outras noções.

Intuitivamente, um **conjunto** é uma colecção de objectos chamados os **elementos** ou **membros** do conjunto.

Os conjuntos serão representados por letras maiúsculas A, B, C, ..., X, Y, Z (possivelmente com índices) e os elementos de um conjunto serão representados por letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, z (também possivelmente com índices).

Teoria elementar de conjuntos

Dado um conjunto A e um objecto x, diz-se que: x **pertence a** A, e escrevemos $x \in A$, se x é um dos objectos de A; x **não pertence a** A, e escreve-se $x \notin A$, caso x não seja um dos objectos de A.

Exemplo 2.1

1. *São exemplos de conjuntos as colecções:*
   - **a)** *de disciplinas do 1ºano do plano de estudos de LCC;*
   - **b)** *de pessoas presentes numa festa;*
   - **c)** *de meses com 30 dias;*
   - **d)** *dos números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos, representados, respectivamente, por* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$.
2. *Tem-se, por exemplo,* $3 \in \mathbb{N}$, $0 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Um conjunto pode ser descrito de várias formas.

Uma delas consiste em enumerar explicitamente os seus elementos, os quais são colocados entre chavetas e separados por vírgulas - neste caso diz-se que o conjunto é descrito por **extensão**.

Quando numa descrição por extensão não é possível ou praticável a enumeração de todos os elementos do conjunto, utiliza-se uma notação sugestiva e não ambígua que permita intuir os elementos não expressos.

Um conjunto também pode ser descrito por **compreensão**, i.e., dado um predicado $p(x)$, com x a variar num conjunto X, $\{x \in X : p(x)\}$ representa o conjunto de todos os elementos de X para os quais $p(x)$ é verdadeira.

Exemplo 2.2

1. *O conjunto dos números naturais menores do que* 5 *pode ser descrito, por extensão, do seguinte modo* $\{1, 2, 3, 4\}$.
2. *O conjunto dos números naturais divisores de* 4 *pode ser descrito, por compreensão, da seguinte forma* $\{n \in \mathbb{N} : n \,|\, 4\}$.
3. *Os conjuntos dos números naturais e dos números inteiros são usualmente representados por extensão utilizando a seguinte notação:* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
   O conjunto cujos elementos são o número 0 *e os números naturais é representado por* $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Definição 2.3

Ao único conjunto que não tem qualquer elemento chamamos **conjunto vazio** *e será representado por* $\emptyset$ *ou por* $\{\}$.

Teoria elementar de conjuntos

Um conjunto fica determinado quando são conhecidos os seus elementos.

Definição 2.4

Dois conjuntos A e B dizem-se **iguais**, *e escreve-se $A = B$, se têm os mesmos elementos, i.e, $A = B$ se*

$$\forall_x \ (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Consequentemente, A e B dizem-se **diferentes**, *e escreve-se $A \neq B$, se existir um elemento num conjunto que não se encontra no outro.*

Exemplo 2.5

1. *O conjunto $A = \{1, 2, 4\}$ é igual ao conjunto dos divisores naturais de 4, e é também igual ao conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0\}$.*
2. *Os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é múltiplo de 3}\}$ e $B = \{6, 12, 18, 24...\}$ são diferentes, pois, $3 \in A$ e $3 \notin B$.*

Definição 2.6

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A **está contido em** *B ou que A* **é subconjunto de** *B, e escreve-se $A \subseteq B$, se todo o elemento de A é também elemento de B, i.e., $A \subseteq B$ se*

$$\forall_x \ (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Caso exista um elemento de A que não seja elemento de B diz-se que A **não está contido em** *B ou que A* **não é subconjunto de** *B, e escreve-se $A \nsubseteq B$. Simbolicamente, $A \nsubseteq B$ se*

$$\exists_{x \in A} \ x \notin B.$$

Exemplo 2.7

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A **está propriamente contido em** *B ou que A* **é subconjunto próprio de** *B , e escreve-se $A \subsetneq B$ ou $A \subset B$, se $A \subseteq B$ e $A \neq B$.*

Exemplo 2.8

1. $\{-1, 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$.
2. $\{0, -1, 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$.
3. $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Proposição 2.9

Sejam A, B e C conjuntos. Então são válidas as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \subseteq A$.
2. $A \subseteq A$.
3. *se* $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, *então* $A \subseteq C$.
4. $(A \subseteq B$ e $B \subseteq A)$ *se e só se* $A = B$.

Demonstração: 1. No sentido de provar, por redução ao absurdo, que $\emptyset \subseteq A$, admitamos que $\emptyset \not\subseteq A$. Daqui segue que existe um elemento de $\emptyset$ que não pertence a A. Mas $\emptyset$ não tem elementos. Temos, então, uma contradição que resultou de admitirmos que $\emptyset \not\subseteq A$. Logo $\emptyset \subseteq A$.

2. Todo o elemento de A é elemento de A. Portanto, $A \subseteq A$.

3. Admitamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Vamos mostrar que $A \subseteq C$.
Seja x um elemento de A. Então, como $A \subseteq B$, segue que $x \in B$. Agora, tendo em conta que $x \in B$ e que $B \subseteq C$, vem que $x \in C$. Assim, todo o elemento de A é elemento de C, ou seja, $A \subseteq C$.

4. Pretendemos mostrar que

$$(A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A) \text{ se e só se } A = B.$$

($\Rightarrow$) Comecemos por admitir que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ e mostremos que $A = B$.

Demonstração (continuação):
Como $A \subseteq B$, todo o elemento de A é elemento de B; por outro lado, como $B \subseteq A$, todo o elemento de B é elemento de A. Logo A e B têm os mesmos elementos, i.e., A = B.
($\Leftarrow$) Reciprocamente, admitamos que $A = B$ e provemos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Como $A = B$, estes conjuntos têm os mesmos elementos. Portanto, para todo o objecto x,

$$(x \in A \Rightarrow x \in B) \;\wedge\; (x \in B \Rightarrow x \in A),$$

i.e., $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.$\square$

Definição 2.10

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X (chamado o universo).
Chama-se **união** *ou* **reunião de** A **com** B, *e representa-se por $A \cup B$, o conjunto cujos elementos são os elementos de A e os elementos de B, ou seja,*

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}.$$

Definição 2.10 (continuação)

Chama-se **intersecção de** A **com** B, *e representa-se por* $A \cap B$, *o conjunto cujos elementos pertencem simultaneamente a* A *e a* B, *isto é,*

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Chama-se **complementar** *de* B **em** A, *e representa-se por* $A \setminus B$, *o conjunto cujos elementos pertencem a* A *mas não a* B, *ou seja,*

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Por vezes, o complementar de B *em* A *é também designado por* **diferença de** A **com** B *e representado por* $A - B$.
Quando A *é o universo* X, $A \setminus B = X \setminus B$ *diz-se o* **complementar** *de* B *e representa-se por* $\overline{B}$ *ou* B'.

Exemplo 2.11

Dados os subconjuntos de $\mathbb{R}$, $A = \{-2, 0, 2, \pi, 7\}$ *e* $B =]-\infty, 3]$, *tem-se*

1. $A \cup B =]-\infty, 3] \cup \{\pi, 7\}$;
2. $A \cap B = \{-2, 0, 2\}$;
3. $A \setminus B = \{\pi, 7\}$;
4. $\overline{A \cup B} = [3, \pi[\cup]\pi, 7[\cup]7, +\infty[$.

Apresentam-se de seguida algumas propriedades relativas às operações de conjuntos apresentadas anteriormente.

Proposição 2.12

Sejam A, B *e* C *subconjuntos de um conjunto* X. *Então,*

1. $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$.
2. $A \cup \emptyset = A$.

Proposição 2.12 (continuação)

1. $A \cup A = A$.
2. $A \cup X = X$.
3. $A \cup B = B \cup A$.
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
5. *se* $A \subseteq B$, $A \cup B = B$.

Demonstração: Demonstramos as propriedades 1., 2. e 7., ficando as restantes como exercício.

1. Vamos mostrar que $A \subseteq A \cup B$.
Seja $x \in A$. Então, a proposição $x \in A \vee x \in B$ é verdadeira. Logo, $x \in A \cup B$. Assim, para todo o objecto x,

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B.$$

Logo $A \subseteq A \cup B$. A prova de $B \subseteq A \cup B$ é semelhante.

Demonstração (continuação): 2. Da propriedade 1. sabemos que $A \subseteq A \cup \emptyset$. Para termos a prova de $A \cup \emptyset = A$, falta mostrar que $A \cup \emptyset \subseteq A$. Consideremos $x \in A \cup \emptyset$. Então, por definição, temos que $x \in A \vee x \in \emptyset$. Dado que $\emptyset$ não tem elementos, podemos concluir que $x \in A$. Logo, para todo o objecto x,

$$x \in A \cup \emptyset \Rightarrow x \in A$$

e, portanto, $A \cup \emptyset \subseteq A$. De $A \subseteq A \cup \emptyset$ e $A \cup \emptyset \subseteq A$ concluímos que $A \cup \emptyset = A$

7. Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cup B = B$. Pela propriedade 1., temos $B \subseteq A \cup B$. Logo, resta mostrar que $A \cup B \subseteq B$. Dado que $A \subseteq B$, todo o elemento de A é também elemento de B, donde segue que, para todo o objecto x

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Rightarrow x \in B.$$

Portanto, $A \cup B \subseteq B$.
De $B \subseteq A \cup B$ e $A \cup B \subseteq B$ tem-se $A \cup B = B$.$\square$

No seguinte resultado, descrevemos algumas propriedades da operação de intersecão de conjuntos.

Proposição 2.13

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,

1. $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$.
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
3. $A \cap A = A$.
4. $A \cap X = A$.
5. $A \cap B = B \cap A$.
6. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
7. *se* $A \subseteq B$, $A \cap B = A$.

Demonstração: Apresentamos a prova das propriedades 1., 2. e 6. A prova das restantes propriedades fica como exercício.

1. Mostremos que $A \cap B \subseteq A$. Dado $x \in A \cap B$, tem-se, por definição, que $x \in A \wedge x \in B$. Então $x \in A$ é uma proposição verdadeira. Logo, para todo o objecto x,

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A,$$

e, portanto $A \cap B \subseteq B$. A prova de $B \subseteq A \cap B$ é análoga.

2. Pretendemos mostrar que o conjunto $A \cap \emptyset$ não tem elementos. No sentido de fazer esta prova por redução ao absurdo, admitamos que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$. Então existe um objecto x tal que $x \in A \wedge x \in \emptyset$; em particular, $x \in \emptyset$. Mas $\emptyset$ não tem elementos, logo temos uma contradição que resultou de admitirmos que $A \cap \emptyset$ tinha elementos. Assim, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Demonstração (continuação):

6. A propriedade $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ é verdadeira se, para todo o objecto x,

$$x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C).$$

Com efeito, atendendo à propriedade de associatividade da operação $\wedge$, tem-se, para todo o objecto x,

$$\begin{array}{rcl} x \in (A \cap B) \cap C & \Leftrightarrow & x \in A \wedge x \in (B \cap C) \\ & \Leftrightarrow & x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \\ & \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \\ & \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) \wedge x \in C \\ & \Leftrightarrow & x \in (A \cap B) \cap C. \end{array}$$

Logo $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.$\square$

Apresentam-se de seguida mais algumas propriedades, desta vez relacionadas com a complementação de conjuntos.

Proposição 2.14

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então são válidas as propriedades seguintes:

1. $A \cap \overline{A} = \emptyset$ *e* $A \cup \overline{A} = X$.
2. $A \setminus \emptyset = A$ *e* $A \setminus X = \emptyset$.
3. *se* $A \subseteq B$, *então* $A \setminus B = \emptyset$.
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
8. $\overline{(\overline{A})} = A$.

Demonstração: Apresentamos a prova das propriedades 1., 2. e 5..

1. Facilmente se prova que o conjunto $A \cap \overline{A}$ não tem elementos. De facto, se admitirmos que este conjunto tem elementos, então existe um objecto x tal que $x \in A \wedge x \in \overline{A}$ e daqui segue que $x \in A \wedge (x \in X \wedge x \notin A)$. Desta forma, temos uma contradição, $x \in A \wedge x \notin A$, que resultou de admitirmos que $A \cap \overline{A}$ tinha elementos. Logo $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Mostremos, agora, que $A \cup \overline{A} = X$. Uma vez que A e $\overline{A}$ são subconjuntos de X é imediato que $A \cup \overline{A} \subseteq X$. Logo, resta mostrar que $X \subseteq A \cup \overline{A}$. Esta última inclusão é também simples de verificar, pois, dado $x \in X$, a proposição $x \in A \vee x \notin A$ é verdadeira. Por outro lado, se $x \in X$ e $x \notin A$, então $x \in \overline{A}$. Sendo assim, para todo o objecto x,

$$x \in X \Rightarrow x \in A \vee x \notin A \Rightarrow x \in A \vee x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A \cup \overline{A}.$$

Logo $X \subseteq A \cup \overline{A}$. Da prova de $A \cup \overline{A} \subseteq X$ e de $X \subseteq A \cup \overline{A}$ segue $A \cup \overline{A} = X$.

Demonstração (continuação):

2. Por definição, $A \setminus \emptyset$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a $\emptyset$. Mas $\emptyset$ não tem elementos, pelo que não se retira qualquer elemento a A e, portanto, $A \setminus \emptyset = A$.

No sentido de provar, por redução ao absurdo, que $A \setminus X = \emptyset$, admitamos que o conjunto $A \setminus X$ tem elementos. Então existe um objecto x tal que $x \in A \setminus X$, ou seja, existe x tal que $x \in A \wedge x \notin X$. Mas A é um subconjunto de X, pelo que todo o elemento de A é também elemento de X. Assim, temos uma contradição: $x \in X \wedge x \notin X$. Por conseguinte, a hipótese inicial, de que o conjunto $A \setminus X$ tinha elementos, está errada e, portanto, $A \setminus X = \emptyset$.

4. Para provar que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, temos de mostrar que para todo o objecto x,

$$x \in A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Demonstração (continuação):

Com efeito, atendendo às leis de De Morgan e à propriedade distributiva das operações lógicas $\wedge$ e $\vee$, tem-se, para todo o objecto x, o seguinte

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).
\end{aligned}$$

Portanto, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Teoria elementar de conjuntos

Estudamos de seguida outros processos de construir conjuntos a partir de conjuntos dados.

Definição 2.15

Dado um conjunto A chamamos **conjunto das partes de** A *ou* **conjunto potência de** A, *e representamos por $\mathcal{P}(A)$, ao conjunto de todos os subconjuntos de A, i.e.,*

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

Exemplo 2.16

Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, \{2\}\}$ e $C = \emptyset$. Então, tem-se

1. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$
2. $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, \{1, \{2\}\}\}.$
3. $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset\}.$

Proposição 2.17

Dados conjuntos A e B, tem-se:

1. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $A \in \mathcal{P}(A)$.
2. *Se* $A \subseteq B$, *então* $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
3. *Se* A *tem* n *elementos, então* $\mathcal{P}(A)$ *tem* 2^n *elementos.*

Demonstração: 1. Para qualquer conjunto A, tem-se $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$. Logo $\emptyset$ e A são elementos de $\mathcal{P}(A)$.

2. Admitamos que $A \subseteq B$. Vamos mostrar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Dado $X \in \mathcal{P}(A)$, tem-se $X \subseteq A$. Logo, como $A \subseteq B$, segue que $X \subseteq B$, o que significa que $X \in \mathcal{P}(B)$. Provámos, desta forma, que todo o elemento de $\mathcal{P}(A)$ é também elemento de $\mathcal{P}(B)$ e, portanto, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

3. Consultar bibliografia adequada.

Dados objectos a, b, os conjuntos $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ são iguais, não interessando a ordem pela qual os elementos ocorrem. No entanto, em certas situações, interessa considerar os objectos por determinada ordem. Sendo assim, introduz-se a noção de par ordenado.

Dados objectos a, b define-se **par ordenado de** a **e de** b como sendo o objecto (a, b) tal que $(a, b) = (c, d)$ se e só se $a = c$ e $b = d$.

Note-se que num par ordenado a ordem dos elementos é relevante: dados dois objectos a, b, se $a \neq b$, tem-se $(a, b) \neq (b, a)$.

Num par ordenado (a, b) designa-se o objecto a como a **primeira componente (ou coordenada)** e o objecto b como a **segunda componente (ou coordenada)**.

Os pares ordenados são objectos com os quais se podem formar novos conjuntos.

Definição 2.18

Sejam A, B conjuntos. O **produto cartesiano de** A **por** B, *representado por $A \times B$, é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b) em que $a \in A$ e $b \in B$, i.e.,*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemplo 2.19

1. *Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Então*
$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}; \\ B \times A &= \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}. \end{aligned}$$
2. *Sejam $A = B = \mathbb{R}$. Os elementos de $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ podem ser representados geometricamente como pontos dum plano munido de um eixo de coordenadas.*

Apresentam-se, agora, algumas propriedades relacionadas com o produto cartesiano, algumas delas envolvendo, também, as operações definidas anteriormente.

Proposição 2.20

Para quaisquer conjuntos A, B, C e D, tem-se

1. $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$.
2. $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$ *se e só se* $A \times B \subseteq C \times D$.
3. $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$;
   $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
4. $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$;
   $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
5. $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$;
   $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Demonstração: Mostremos que $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

Seja $(x, y) \in C \times (A \cup B)$. Então $x \in C \wedge y \in (A \cup B)$. Se $y \in A$, tem-se $(x, y) \in C \times A$; se $y \in B$, tem-se $(x, y) \in C \times B$. Em qualquer dos casos, vem $(x, y) \in (C \times A) \cup (C \times B)$. Logo $C \times (A \cup B) \subseteq C \times A) \cup (C \times B)$.

Para a prova da inclusão contrária basta ter em conta a propriedade 2.. De facto, como $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$, tem-se $C \times A \subseteq C \times (A \cup B)$ e $C \times B \subseteq C \times (A \cup B)$. Logo $(C \times A) \cup (C \times B) \subseteq C \times (A \cup B)$.

Da prova das duas inclusões resulta a igualdade que se pretendia mostrar.

(A prova das restantes propriedades fica ao cuidado do aluno). $\square$

Observação: Se A e B são dois conjuntos com p e q elementos ($p, q \in \mathbb{N}_0$), respectivamente, então $A \times B$ tem $p \times q$ elementos.

As noções de união, intersecção e produto cartesiano de conjuntos podem ser generalizadas a colecções de conjuntos. A uma colecção de conjuntos dá-se a designação de família de conjuntos e, no caso dos seus elementos serem indexados, falamos em família de conjuntos indexada.

Definição 2.21

Seja I um conjunto não vazio e, para cada $i \in I$, seja A_i um conjunto. À colecção dos conjuntos A_i dá-se a designação de **família de conjuntos indexada por** I, *e representamo-la por $(A_i)_{i \in I}$, i.e.,*

$$(A_i)_{i \in I} = \{A_i : i \in I\}.$$

Ao conjunto I referido na definição anterior dá-se o nome de **conjunto de índices**. Este conjunto pode ser finito ou infinito. No caso em que I tem n elementos é usual escrever $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exemplo 2.22

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, *seja* $A_n = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \leq n\}$. *Assim,* $(A_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ *é uma família de conjuntos indexada por* $\mathbb{N}_0$.

Vejamos, então, de que forma se generalizam as noções das operações de união, intersecção e produto cartesiano.

Definição 2.23

Seja I *um conjunto não vazio e* $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I}$ *uma família de conjuntos indexada por* I.

1. *Chama-se* **união da família** $\mathcal{F}$ *e representa-se por* $\bigcup_{i \in I} A_i$ *o conjunto*
$$\{x : \exists_{i \in I}\ x \in A_i\}.$$
2. *Chama-se* **intersecção da família** $\mathcal{F}$ *e representa-se por* $\bigcap_{i \in I} A_i$ *o conjunto*
$$\{x : \forall_{i \in I}\ x \in A_i\}.$$

Definição 2.23 (continuação)

3. Se $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, o produto cartesiano de A_1, A_2, ... A_n, representado por $A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$ ou por $\prod_{i \in I} A_i$, é o conjunto formado pelos n-uplos ordenados $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em que $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$, i.e.,
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$.

No caso em que $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ escrevemos A^n em alternativa a $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Exemplo 2.24

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, *seja* $A_n = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \leq n\}$. *Tem-se*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \mathbb{N}_0; \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = \{0\};$$

$$\prod_{i \in \{0,1,2\}} A_i = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,0,2), (0,1,0), (0,1,1), (0,1,2)\}.$$

Generalizando a noção de igualdade de pares ordenados, diz-se que dois n-uplos ordenados $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ de um produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ são iguais se e só se $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... $a_n = b_n$.

A generalidade das propriedades da união, da intersecção e do produto cartesiano também são extensíveis a famílias de conjuntos. Sendo $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos, tem-se, por exemplo:

- $A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, para todo $i \in I$. $\qquad \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_i$, para todo $i \in I$.
- $B \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$. $\qquad B \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$.
- $B \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \setminus A_i)$. $\qquad B \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \setminus A_i)$.
- $B \times \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \times A_i)$. $\qquad B \times \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \times A_i)$.
- Se $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ e se cada conjunto A_i tem p_i elementos, então $\prod_{i \in I} A_i$ tem $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ elementos.