Definição (Subespaço Vectorial): Um subconjunto não vazio $\underset{=}{U}$ de um espaço vectorial real diz-se <u>subespaço vectorial</u> se

(i) $\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y} \in U \;, \forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in U$

(ii) $\alpha \underset{\sim}{x} \in U \;, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \underset{\sim}{x} \in U$

Ex. O conjunto dos vectores $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Os conjuntos das funções reais de variável real contínuas e das funções reais de variável real diferenciáveis, são subespaços vectoriais do espaço vectorial das funções reais de variável real.

Definição (combinação Linear) Sejam $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots, \underset{\sim}{x}_n$ vectores de um espaço vectorial real V. Diz-se que $\underset{\sim}{y} \in V$ é combinação linear dos vectores $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots, \underset{\sim}{x}_n$ se

$$\underset{\sim}{y} = \alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 + \alpha_2 \underset{\sim}{x}_2 + \ldots + \alpha_n \underset{\sim}{x}_n \quad \text{com } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

Ex.: 1) Considerem-se os vectores $\underset{\sim}{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ do espaço $\mathbb{R}^2$. Tem-se que $\underset{\sim}{y} = 5\underset{\sim}{e}_1 + 7\underset{\sim}{e}_2$

2) O vector $\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ é combinação linear dos vectores

$$\underset{\sim}{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \underset{\sim}{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{pois} \quad \underset{\sim}{y} = \frac{1}{2}\underset{\sim}{f}_1 + \frac{7}{2}\underset{\sim}{f}_2$$

Se $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots, \underset{\sim}{x}_n$ são vectores de um espaço vectorial real V, então o conjunto $\underset{\sim}{U}$ formado por todas as combinações lineares destes vectores é um subespaço de V.

dem.: $\underset{\sim}{U}$ é não vazio pois $\underset{\sim}{0} \in V$ e $\underset{\sim}{0}$ é combinação linear de $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots, \underset{\sim}{x}_n$, uma vez que se tem sempre, $\underset{\sim}{0} = 0\underset{\sim}{x}_1 + \ldots + 0\underset{\sim}{x}_n$

Sejam $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{v} \in U$. Então $\underset{\sim}{u} = \alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 + \ldots + \alpha_n \underset{\sim}{x}_n$ e $\underset{\sim}{v} = \beta_1 \underset{\sim}{x}_1 + \ldots + \beta_n \underset{\sim}{x}_n$. Note-se que $\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v} = (\alpha_1 + \beta_1)\underset{\sim}{x}_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\underset{\sim}{x}_n$, ou seja, $\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v}$ é combinação linear de $\underset{\sim}{x}_1, \ldots, \underset{\sim}{x}_n$, pelo que, pertence a U. Também $\alpha \underset{\sim}{u} = \alpha(\alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 + \ldots + \alpha_n \underset{\sim}{x}_n) = (\alpha\alpha_1)\underset{\sim}{x}_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n)\underset{\sim}{x}_n$ pertence a $\underset{=}{U}$.