Exemplo: Calcular a característica da matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Tem-se,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ A matriz dada tem característica 2.

Conforme visto, o sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ pode representar-se

matricialmente da forma $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ designada Matriz Ampliada do Sistema

(matriz de ordem $m \times (n+1)$)

Abreviadamente, (Ab), $\underbrace{A = (a_{ij})}_{\text{matriz simples do sistema}}$ e $\underset{\sim}{b} = (b_i)$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$

Condições para que o Sistema tenha solução:

Observe-se que este pode ser escrito na forma

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

O sistema $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ tem solução se e só se $\underset{\sim}{b}$ é combinação linear das colunas de A

Recordar o Teorema:

Se $\underset{\sim}{a}_1, \dots, \underset{\sim}{a}_m$ são vectores de um espaço vectorial V e se $\underset{\sim}{b} \in V$ é combinação linear de $\underset{\sim}{a}_1, \dots, \underset{\sim}{a}_m$, então o subespaço gerado pelos vectores $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \dots, \underset{\sim}{a}_m$ coincide com o que é gerado pelos vectores $\underset{\sim}{a}_1, \dots, \underset{\sim}{a}_m, \underset{\sim}{b}$.

Assim, o espaço gerado pelas colunas de A, $\boxed{R(A)}$, coincide com o espaço gerado pelas colunas de (Ab), $\boxed{R(Ab)}$. Tem-se, então,

Teorema: O sistema $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ tem solução sse $C(A) = C(Ab)$

característica

NOTA: Se A é uma matriz de ordem $m \times m$ e $C(A) = m$, o sistema $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ tem sempre solução $\forall \underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^m$