Multiplicação de Matrizes (cont.)

A multiplicação de matrizes dá significado à notação, simples e abreviada,

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

para representar um sistema de $\underline{\underline{m}}$ equações lineares por $\underline{\underline{n}}$ incógnitas

$\underline{\underline{\text{p.ex.}}}$: Para o sistema $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 \qquad\quad = 3 \\ x_1 + x_2 \quad + 5x_3 = 7 \end{cases}$ poder ser representado

na forma matricial $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, i.e., $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ onde

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, então o produto deve

ser definido por $A\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{\text{Ex.}}}$: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ então $A\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 1\times 3 \\ -1\times 2 + 0\times 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}}$

Se $\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ então $A\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} 1\times 4 + 1\times 5 \\ -1\times 4 + 0\times 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix}}$

Se $B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ então $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 1\times 3 & 1\times 4 + 1\times 5 \\ -1\times 2 + 0\times 3 & -1\times 4 + 0\times 5 \end{pmatrix}$

$\quad\downarrow \quad \downarrow$

$\quad\underset{\sim}{x} \quad \underset{\sim}{y}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ -2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 9 \\ -4 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Definição: Seja A uma matriz de ordem $m\times l$ e B uma matriz de ordem $l\times n$. O produto de A e B é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m\times n$ cujos elementos são dados por $c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$ $(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$ e escreve-se $C = AB$.