Cálculo de Funções (2011/12)

FUNÇÕES

Natural-id	$f \cdot id = id \cdot f = f$	(1)
Assoc-comp	$(f \cdot g) \cdot h \quad = \quad f \cdot (g \cdot h)$	(2)
Leibniz	$f \cdot h \ = \ g \cdot h \quad \Leftarrow \quad f = g$	(3)
Igualdade extensional	$f \ = \ g \quad \Leftrightarrow \quad \langle \forall \ x \ :: \ f x \ = g x \rangle$	(4)

PRODUTO

Universal-$\times$	$k = \langle f, g \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{array} \right.$	(5)
Cancelamento-$\times$	$\pi_1 \cdot \langle f, g \rangle = f \quad , \quad \pi_2 \cdot \langle f, g \rangle = g$	(6)
Reflexão-$\times$	$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \quad = \quad id_{A \times B}$	(7)
Fusão-$\times$	$\langle g, h \rangle \cdot f = \langle g \cdot f, h \cdot f \rangle$	(8)
Absorção-$\times$	$(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle i \cdot g, j \cdot h \rangle$	(9)
Def-$\times$	$f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle$	(10)
Natural-π_1	$\pi_1 \cdot (f \times g) \quad = \quad f \cdot \pi_1$	(11)
Natural-π_2	$\pi_2 \cdot (f \times g) \quad = \quad g \cdot \pi_2$	(12)
Functor-$\times$	$(g \cdot h) \times (i \cdot j) \quad = \quad (g \times i) \cdot (h \times j)$	(13)
Functor-id-$\times$	$id_A \times id_B \quad = \quad id_{A \times B}$	(14)
Eq-$\times$	$\langle f, g \rangle = \langle h, k \rangle \ \Leftrightarrow \ f = h \wedge g = k$	(15)

COPRODUTO

Universal-$+$	$k = [f \ , g] \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{array} \right.$	(16)
Cancelamento-$+$	$[g \ , h] \cdot i_1 = g \quad , \quad [g \ , h] \cdot i_2 = h$	(17)
Reflexão-$+$	$[i_1 \ , i_2] \quad = \quad id_{A+B}$	(18)
Fusão-$+$	$f \cdot [g \ , h] = [f \cdot g \ , f \cdot h]$	(19)
Absorção-$+$	$[g \ , h] \cdot (i + j) = [g \cdot i \ , h \cdot j]$	(20)
Def-$+$	$f + g = [i_1 \cdot f \ , i_2 \cdot g]$	(21)
Natural-i_1	$(i + j) \cdot i_1 \quad = \quad i_1 \cdot i$	(22)
Natural-i_2	$(i + j) \cdot i_2 \quad = \quad i_2 \cdot j$	(23)
Functor-$+$	$(g \cdot h) + (i \cdot j) = (g + i) \cdot (h + j)$	(24)
Functor-id-$+$	$id_A + id_B = id_{A+B}$	(25)
Eq-$+$	$[f \ , g] = [h \ , k] \ \Leftrightarrow \ f = h \ \wedge \ g = k$	(26)
Lei da troca	$[\langle f, g \rangle \ , \langle h, k \rangle] \quad = \quad \langle [f \ , h], [g \ , k] \rangle$	(27)

EXPONENCIAÇÃO

Universal-exp	$k = \overline{f} \quad \Leftrightarrow \quad f = ap \cdot (k \times id)$	(28)
Cancelamento-exp	$f = ap \cdot (\overline{f} \times id)$	(29)
Reflexão-exp	$\overline{ap} = id_{B^A}$	(30)

Fusão-exp	$\overline{g \cdot (f \times id)} = \overline{g} \cdot f$	(31)
Absorção-exp	$f^A \cdot \overline{g} = \overline{f \cdot g}$	(32)
Def-exp	$f^A = \overline{f \cdot ap}$	(33)
Functor-exp	$(g \cdot h)^A = g^A \cdot h^A$	(34)
Functor-id-exp	$id^A = id$	(35)

INDUÇÃO

Universal-cata	$k = (\!\lvert \beta \rvert\!) \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot in = \beta \cdot (\mathsf{F}\, k)$	(36)
Cancelamento-cata	$(\!\lvert \alpha \rvert\!) \cdot in = \alpha \cdot \mathsf{F}\,(\!\lvert \alpha \rvert\!)$	(37)
Reflexão-cata	$(\!\lvert in \rvert\!) = id_{\mathsf{T}}$	(38)
Fusão-cata	$f \cdot (\!\lvert \alpha \rvert\!) = (\!\lvert \beta \rvert\!) \quad \Leftarrow \quad f \cdot \alpha = \beta \cdot (\mathsf{F}\, f)$	(39)
Absorção-cata	$(\!\lvert \alpha \rvert\!) \cdot \mathsf{T}\, f \quad = \quad (\!\lvert \alpha \cdot \mathsf{B}(f, id) \rvert\!)$	(40)
Def-map	$\mathsf{T}\, f \quad = \quad (\!\lvert in_{\mathsf{F}} \cdot \mathsf{B}(f, id) \rvert\!)$	(41)

RECURSIVIDADE MÚTUA

Fokkinga	$\left\{ \begin{array}{l} f \cdot in = h \cdot \mathsf{F}\,\langle f, g\rangle \\ g \cdot in = k \cdot \mathsf{F}\,\langle f, g\rangle \end{array} \right. \quad \equiv \quad \langle f, g\rangle = (\!\lvert \langle h, k\rangle \rvert\!)$	(42)
“Banana-split”	$\langle (\!\lvert i \rvert\!), (\!\lvert j \rvert\!) \rangle = (\!\lvert (i \times j) \cdot \langle \mathsf{F}\, \pi_1, \mathsf{F}\, \pi_2 \rangle \rvert\!)$	(43)

COINDUÇÃO

Universal-ana	$k = [\!(\beta)\!] \quad \Leftrightarrow \quad out \cdot k = (\mathsf{F}\, k) \cdot \beta$	(44)
Cancelamento-ana	$out \cdot [\!(\alpha)\!] = \mathsf{F}\, [\!(\alpha)\!] \cdot \alpha$	(45)
Reflexão-ana	$[\!(out)\!] = id_{\mathsf{T}}$	(46)
Fusão-ana	$[\!(\alpha)\!] \cdot f = [\!(\beta)\!] \quad \Leftarrow \quad \alpha \cdot f = (\mathsf{F}\, f) \cdot \beta$	(47)
Absorção-ana	$\mathsf{T}\, f \cdot [\!(\alpha)\!] \quad = \quad [\!(\mathsf{B}(f, id) \cdot \alpha)\!]$	(48)
Def-map	$\mathsf{T}\, f \quad = \quad [\!(\mathsf{B}(f, id) \cdot out_{\mathsf{F}})\!]$	(49)

FUNCTORES

Functor-F	$\mathsf{F}(g \cdot h) \quad = \quad (\mathsf{F}\, g) \cdot (\mathsf{F}\, h)$	(50)
Functor-id-F	$\mathsf{F}\, id_A \quad = \quad id_{(\mathsf{F}\, A)}$	(51)

CONDICIONAL

Natural-guarda	$p? \cdot f \quad = \quad (f + f) \cdot (p \cdot f)?$	(52)
Def condicional de McCarthy	$p \rightarrow f, g \quad = \quad [f\ , g] \cdot p?$	(53)
1.ª Lei de fusão do condicional	$f \cdot (p \rightarrow g, h) \quad = \quad p \rightarrow f \cdot g, f \cdot h$	(54)
2.ª Lei de fusão do condicional	$(p \rightarrow f, g) \cdot h \quad = \quad (p \cdot h) \rightarrow (f \cdot h), (g \cdot h)$	(55)

MÓNADAS

Multiplicação	$\mu \cdot \mu = \mu \cdot \mathsf{T}\,\mu$	(56)
Unidade	$\mu \cdot u = \mu \cdot \mathsf{T}\,u = id$	(57)
Natural-u	$u \cdot f \quad = \quad \mathsf{T}\,f \cdot u$	(58)
Natural-μ	$\mu \cdot \mathsf{T}\,(\mathsf{T}\,f) \quad = \quad \mathsf{T}\,f \cdot \mu$	(59)
Composição monádica	$f \bullet g \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad \mu \cdot \mathsf{T}\,f \cdot g$	(60)
Associatividade-$\bullet$	$f \bullet (g \bullet h) = (f \bullet g) \bullet h$	(61)
Identidade-$\bullet$	$u \bullet f = f = f \bullet u$	(62)
Associatividade-$\bullet/\cdot$	$(f \bullet g) \cdot h \quad = \quad f \bullet (g \cdot h)$	(63)
Associatividade-$\cdot/\bullet$	$(f \cdot g) \bullet h \quad = \quad f \bullet (\mathsf{T}\,g \cdot h)$	(64)
μ versus $\bullet$	$id \bullet id \quad = \quad \mu$	(65)
'μ as binding'	$\mu x \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad x \gg\!= id$	(66)
'Binding as μ'	$x \gg\!= f \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad (\mu \cdot \mathsf{T}\,f)x$	(67)
Sequenciação	$x \gg y \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad x \gg\!= \underline{y}$	(68)
Notação-do	$\mathtt{do}\,\{x \leftarrow a; b\} \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad a \gg\!= (\lambda x \rightarrow b)$	(69)

DEFINIÇÕES *ao ponto*

Notação-lambda	$f\ a = b \quad \equiv \quad f = \lambda a \rightarrow b$	(70)
Def-comp	$(f \cdot g)\,x \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad f\,(g\,x)$	(71)
Def-id	$id\,x \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad x$	(72)
Def-const	$\underline{x}\,y \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad x$	(73)
Def-split	$\langle f, g \rangle\,x \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad (f\,x, g\,x)$	(74)
Def-$\times$	$(f \times g)\,(a, b) \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad (f\,a, g\,b)$	(75)
Def-cond	$(p \rightarrow f, g)\,x \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad \mathtt{if}\ p\,x\ \mathtt{then}\ f\,x\ \mathtt{else}\ g\,x$	(76)
Def-proj	$\pi_1\,(x, y) \ = \ x \qquad \wedge \qquad \pi_2\,(x, y) \ = \ y$	(77)
Elim-let	$\mathtt{let}\ x = a\ \mathtt{in}\ b \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad b\,[x/a]$	(78)
Elim-pair	$t \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad t[(x, y)/z, x/\pi_1 z, y/\pi_2 z]$	(79)
Def-ap	$ap(f, x) = f\ x$	(80)