**Teorema**: $A$ e $A^T$ têm os mesmos valores próprios.

Dem.: $\det(A-\lambda I) = \det(A-\lambda I)^T = \det(A^T-\lambda I)$

**Teorema**: Se $A$ é uma matriz diagonal ou triangular, os valores próprios de $A$ são os elementos da diagonal.

→ O produto dos $n$ valores próprios de uma matriz de ordem $n$ é igual ao determinante da matriz

→ A soma dos $n$ valores próprios de uma matriz de ordem $n$ é igual à soma dos $n$ elementos diagonais.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (exemplo anterior)

valores próprios: 2, −2 e 4

$2\times(-2)\times 4 = -16 \longrightarrow \det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2+3(0-6) = 2-18 = -16$

$2+(-2)+4 = \boxed{4} \longrightarrow$ soma dos el$^{tos}$ diagonais $= 1+2+1 = \boxed{4}$

**Teorema**: Se $\underset{\sim}{x}_1$ e $\underset{\sim}{x}_2$ são vectores próprios de uma matriz $A$, associados aos valores próprios $\lambda_1$ e $\lambda_2$, respectivamente, tal que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\underset{\sim}{x}_1$ e $\underset{\sim}{x}_2$ são linearmente independentes.

Dem.: Consideremos a combinação linear nula $\alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 + \alpha_2 \underset{\sim}{x}_2 = \underset{\sim}{0}$ (*)

queremos mostrar que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Multiplicando ambos os membros de (*) por $A$:

$A(\alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 + \alpha_2 \underset{\sim}{x}_2) = A.\underset{\sim}{0} \Rightarrow \alpha_1(A\underset{\sim}{x}_1) + \alpha_2(A\underset{\sim}{x}_2) = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \alpha_1(\lambda_1 \underset{\sim}{x}_1) + \alpha_2(\lambda_2 \underset{\sim}{x}_2) = \underset{\sim}{0}$

De (*) tem-se, também, $\alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 = -\alpha_2 \underset{\sim}{x}_2$, donde

$\lambda_1(-\alpha_2 \underset{\sim}{x}_2) + \alpha_2 \lambda_2 \underset{\sim}{x}_2 = \underset{\sim}{0} \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_2 \underset{\sim}{x}_2 = \underset{\sim}{0} \Longrightarrow \alpha_2 = 0$

por hipótese $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \underset{\sim}{x}_2 \neq \underset{\sim}{0} \end{array} \right.$

Assim, por (*), tem-se $\alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 = 0 \underset{x_1 \neq 0}{\Rightarrow} \alpha_1 = 0$