Definição: Seja $\underline{A}$ uma matriz de ordem $\underline{n}$. Seja A_{ij} o complemento algébrico do elemento a_{ij} de A. A transposta da matriz quadrada de ordem $\underline{n}$ cujo elemento na posição (i,j) é A_{ij}, chama-se matriz adjunta de A e representa-se por $\mathrm{Adj}(A)$, i.e.,

$$\mathrm{Adj}(A) = (A_{ij})^T$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 4 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -9$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -1 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

Teorema: Seja A uma matriz de ordem $\underline{n}$. Então,

(i) A é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$

(ii) Se A é invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A)$$

Ex: Calcular A^{-1} da matriz $\underline{A}$ do exemplo anterior, pelo método da adjunta.

$$\det(A) = (-1)^{2+3} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -(-9) = 9 \quad \text{Logo } A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & 0 & -1/9 \\ 1/9 & 0 & 2/9 \\ -1/9 & -1 & -2/9 \end{pmatrix}$$