Folha 2 – Sistemas de Equações Lineares

(uma proposta de um esboço de solução)

1. a) V ; efectuando as operações $A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ verifica-se que é igual a b.

c) V ; " " " $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$, " " " " ".

d) F ; se se verificam c) e b) então a solução não é única

e) V ; utilizando o método de eliminação de Gauss determina-se o conjunto solução

conjunto infinito

$$S=\left\{\begin{pmatrix}-1-4x_2\\x_2\\-1+x_2\\-2-2x_2\end{pmatrix} : x_2\in\mathbb{R}\right\}$$

2. a) $Ax=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&3&-2\\2&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

b) $S=\left\{\begin{pmatrix}3/2\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}\right\}$

3. a) $S=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

b) $S=\{\ \}$

c) $S=\{\ \}$

d) $S=\left\{\begin{pmatrix}-3/2\\1\\3/2\\-1\end{pmatrix}\right\}$

e) $S=\left\{\begin{pmatrix}1-2z\\0\\z\\z\end{pmatrix} : z\in\mathbb{R}\right\}$

4. a) $c(A)=3$

b) $c(A)=c(A^T)=3$

c) $c(B)=c(2A)=c(A)=3$

5. a) $c(A)=3$

b) $c(B)=3$

c) $c(C)=1$

d) $c(D)=2$

6. $\lambda=1$ $c(A)=3$

$\lambda=2$ $c(A)=3$

7. $c(A)=3=c(A|b)$ sist. possível e determinado

$n=3$

$$S=\left\{\left(-\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{\beta}{2}+\frac{5}{2},\ \beta+1\right) : \beta\in\mathbb{R}\right\}$$

8) $c(A) = 2$ $\quad$ $c(A) \neq c(A|b)$
$c(A|b) = 3$ $\quad$ sist. impossível

9) $\alpha = 11$

10) a) $\alpha = 2 \vee \alpha = -2$ $\quad$ $c(A) = 2$ $\quad$ sist. impossível
$c(A|b) = 3$ $\quad$ $S = \{\}$

$\forall \alpha \quad c(A) = 3 = c(A|b) = n$ $\quad$ sist. possível e determinado

$S = \ldots.$

b) • $a = 3$ e $b = 1$ $\quad$ $c(A) = 2 = c(A|b)$ $\quad$ sist. possível e indeterminado
$n = 3$

• $a = 3$, $\forall b \neq 1$, $\quad$ $c(A) = 2$ $\quad$ sist. impossível
$c(A|b) = 3$

• $\forall a \neq 3, \forall b$ $\quad$ $c(A) = 3 = c(A|b) = n$ $\quad$ sist. possível e indeterminado

11) Considerando os dois sistemas:

$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

tem-se que:

• o 1º, sendo um sistema homogéneo, é sempre possível, logo tem sempre solução

• o 2º sistema, "origina", depois de utilizado o método de eliminação de Gauss, a matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & 0 \end{array}\right)$$

que: se $\alpha = -1$ $\quad$ $c(A) = 2 = c(A|b)$ $\quad$ sistema possível e indeterminado
$n = 3$

se $\alpha \neq -1$ $\quad$ $c(A) = 3 = c(A|b) = n$ $\quad$ sist. possível e determinado

logo $\forall \alpha$, o sistema é possível

12

a) i) se $K \neq 1$ e $K \neq -2$ $c(A) = 3 = c(A|b) = n$ sist. possível e determinado

ii) se $K = 1$ e $t \neq 1$ sist. impossível; se $K = 1$ e $t = 1$ $c(A) = 1 = c(A|b)$, $n = 3$ sist. possível indeterminado

se $K = -2$ e $t \neq -2$ " "; se $K = -2$ $t = -2$ $c(A) = 2 = c(A|b)$, $n = 3$ sist. possível ind.

b) $K = 0$, $t = 2$ em $A_{K,t}$ e B_t tem-se $c(A) = 3 = c(A|b) = n$ sist. possível e determinado

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$K = 1$, $t = 1$ em $A_{K,t}$ e B_t tem $c(A) = 1 = c(A|b)$, $n = 3$ sist. possível e indeterminado

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

13

a) $S = \left\{ \left(\frac{1}{2} - \alpha - 2\beta, -\cancel{\alpha} - \beta, \alpha, \beta \right) : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

b) Efectuar $A \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e verificar que é igual a $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

De modo a verificar que $(-1, 3/2, -1/2, -1/2)$ é solução de $AX = B$ calcula-se $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ e verifica-se que se obtém a matriz coluna B

14

a) Calculando $c(A)$ conclui-se que $c(A) = 4$ e logo o sistema homogéneo tem solução única $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$;

calcula-se $A \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ e verifica-se que é igual a B, e logo podemos concluir que esta matriz coluna é solução do sistema $AX = B$.

b) Da alínea a) tem-se que $c(A) = 4$ e logo $c(A|b) = 4$, e sendo nº incógnitas $n = 4$, o sistema é possível e determinado, sendo a solução a matriz coluna dada na alínea a), $\begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

(15)

a) $(A|b)$ é uma matriz ampliada de um sistema homogéneo logo sempre possível, tendo pelo menos a solução nula, ou trivial como solução do sistema

b) se $\beta = 2$ $c(A) = 2 < 3 = n$, sist. possível indeterminado

(16)

a) 4 equações
$n = 3$ incógnitas
tem que se ter $c(A) = c(A|b) = n = 3$
escrevendo-se, por exemplo, uma matriz ampliada, na forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ & -1 & 2 & 2 \\ & -1 & 5 & 5 \\ & & 3 & 3 \end{array}\right)$$

podemos escrever o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_2 + 5x_3 = 5 \\ 3x_3 = 3 \end{cases}$$

b) $c(A) = c(A|b) = 2 < 3 = n$

por exemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ & -1 & 2 & 2 \\ & 2 & -2 & -4 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \\ -x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_2 - 4x_3 = -4 \end{cases}$$

c) $c(A) \neq c(A|b)$

por exemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -6 & 3 \\ & & 3 & 1 \\ & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 3 \\ 3x_3 = 1 \\ 5x_2 = 1 \end{cases}$$

(17) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/3 \end{pmatrix}$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(18) a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e é só multiplicar as matrizes obtidas no ex. 17

$= \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

b) $(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}^{-1}$ matriz que não tem inversa.

c) $(D^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

19

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$$

$\underset{1}{\Leftrightarrow} (AA^{-1} + BA^{-1})(A-B) = (AA^{-1} - BA^{-1})(A+B)$

$\underset{2}{\Leftrightarrow} (I + BA^{-1})(A-B) = (I - BA^{-1})(A+B)$

$\underset{1}{\Leftrightarrow} IA - IB + BA^{-1}A - BA^{-1}B = IA - IB - BAA^{-1} - BA^{-1}B$

$\underset{3}{\Leftrightarrow} A - B + BI - BA^{-1}B = A - B - BI - BA^{-1}B$

$\underset{3\,4}{\Leftrightarrow} B - BA^{-1}B = -B - BA^{-1}B$

$\underset{4}{\Leftrightarrow} -BA^{-1}B = BA^{-1}B$ verdade!

1 prop. distributiva da multiplicação relativamente à adição de matrizes

2 def de matriz inversa

3 $\forall A$, $AI = IA = A$

4 operação de adição de matrizes

Nota: a detecção de eventuais falhas ou gralhas é bem vinda;
por favor comunique-me mef@math.uminho.pt