3. Sistemas de Equações Lineares

Considere-se o sistema seguinte de m equações lineares nas n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Em notação abreviada $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ onde

$A = (a_{ij})$ → matriz dos coeficientes

a_{ij} → coeficiente na i-ésima equação da incógnita x_j

$\underset{\sim}{x} = (x_j)$ → vector das incógnitas

$\underset{\sim}{b} = (b_i)$ → vector dos termos independentes

Se $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$ (vector nulo), o sistema diz-se homogéneo ($A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$)

Um sistema homogéneo tem sempre solução, dita solução trivial, $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$.

Ex. 1: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ -2x_2 - x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ O sistema tem uma só solução

Ex. 2: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x_2 = 1/2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ x_1 = -1/4 \end{cases}$

Tem-se, por um lado, $x_1 = x_2$, por outro lado, $x_2 = 1/2$ e $x_1 = -1/4$. Logo, o sistema não tem solução.