Exercício 10. [3 valores] Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar o valor mínimo tomado pela função definida por $f(x,y) = x^2 + (y-2)^2$, na hipérbole definida por $x^2 - y^2 = 1$.

10

Sejam f e g definidas, respetivamente, por

$$f(x,y) = x^2 + (y-2)^2$$

e

$$g(x,y) = x^2 - y^2$$

Então

$$\nabla f(x,y) = \left(2x, 2(y-2)\right) = (2x, 2y-4)$$

e

$$\nabla g(x,y) = (2x, -2y)$$

Método dos Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2}x = \cancel{2}\lambda x \\ \cancel{2}y - 4^2 = -\cancel{2}\lambda y \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ y + \lambda y = 2 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} x = 0 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}} \vee \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ 2y = 2 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = 1 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ x = -\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \text{---} \\ x = \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

impossivel (pq $-y^2 \neq 1$)

Ora, nos pontos de coordenadas $(\pm\sqrt{2}, 1)$ tem-se

$$f(\sqrt{2}, 1) = f(-\sqrt{2}, 1) = 2 + (-1)^2 = 3$$

e $\underline{\underline{3}}$ é o mínimo procurado.

Recorde que: $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$