Diz-se que $\underline{U}$ é o espaço gerado pelos vectores $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots, \underset{\sim}{x}_n$.

Ex.: O espaço de $\mathbb{R}^2$ gerado pelo vector $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ é igual a

$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\} \to$ subespaço de $\mathbb{R}^2$ formado pelos vectores cuja 2.ª componente é nula

Teorema: Se $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_m$ são vectores de um espaço vectorial V e se $\underset{\sim}{b} \in V$ é uma combinação linear de $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_m$, então o subespaço gerado pelos vectores $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_m$ coincide com o subespaço gerado pelos vectores $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_m$ e $\underset{\sim}{b}$.

dem.: Seja U o subespaço de V gerado pelos vectores $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_m$
e W o subespaço de V " " " $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_m, \underset{\sim}{b}$.

É fácil concluir que $U \subset W$ pois, dado $\underset{\sim}{x} \in U$

$\underset{\sim}{x} = \alpha_1 \underset{\sim}{a}_1 + \ldots + \alpha_m \underset{\sim}{a}_m = \alpha_1 \underset{\sim}{a}_1 + \ldots + \alpha_m \underset{\sim}{a}_m + 0\underset{\sim}{b}$ e, portanto, $\underset{\sim}{x} \in W$

Seja $\underset{\sim}{x} \in W$. Então $\underset{\sim}{x} = \alpha_1 \underset{\sim}{a}_1 + \ldots + \alpha_m \underset{\sim}{a}_m + \alpha_{m+1} \underset{\sim}{b}$ com $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1} \in \mathbb{R}$

Porque, por hipótese, $\underset{\sim}{b}$ é uma combinação linear de $\underset{\sim}{a}_1, \ldots, \underset{\sim}{a}_m$, então

$\underset{\sim}{b} = \beta_1 \underset{\sim}{a}_1 + \ldots + \beta_m \underset{\sim}{a}_m$ com $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$

Logo $\underset{\sim}{x} = (\alpha_1 + \alpha_{m+1}\beta_1)\underset{\sim}{a}_1 + \ldots + (\alpha_m + \alpha_{m+1}\beta_m)\underset{\sim}{a}_m$ e, portanto, $\underset{\sim}{x} \in U$.

Provou-se assim que, também se tem, $W \subset U$. Assim sendo, $U = W$.

Bases e Dimensão

Definição: Os vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de um espaço vectorial real V são linearmente independentes (l.i.) se

$$\alpha_1 \underset{\sim}{x}_1 + \alpha_2 \underset{\sim}{x}_2 + \ldots + \alpha_n \underset{\sim}{x}_n = \underset{\sim}{0}$$

apenas se verifica quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$