MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS

SUCESSÕES

SÉRIES

COLECÇÃO MATEMÁTICA

1 - INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
2 - CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n
3 - PRIMITIVAS E INTEGRAIS
4 - FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA
5 - ÁLGEBRA LINEAR Vol. 1 - Matrizes e Determinantes
6 - ÁLGEBRA LINEAR Vol. 2 - Espaços Vectoriais e Geometria Analítica
7 - PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA
8 - CÁLCULO INTEGRAL EM IR - PRIMITIVAS
9 - PRIMITIVAS E INTEGRAIS - EXERCÍCIOS
10 - SUCESSÕES E SÉRIES
11 - ÁLGEBRA LINEAR - EXERCÍCIOS Vol. 1 - Matrizes e Determinantes
12 - CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR
13 - CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n - EXERCÍCIOS
14 - ÁLGEBRA LINEAR - Exercícios Vol. 2 - Espaços Vectoriais e Geometria Analítica
15 - SUCESSÕES E SÉRIES - EXERCÍCIOS
16 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SÉRIES

MANUEL ALBERTO M. FERREIRA

SUCESSÕES E SÉRIES

EXERCÍCIOS

FICHA TÉCNICA:

Título: Sucessões e Séries – Exercícios
Autores: Manuel Alberto M. Ferreira

1ª Edição
Lisboa, 1994

Impressão e acabamentos: Barbosa e Filhos, Lda.
Depósito legal: 79427/94
ISBN: 972-618-100-3

EDIÇÕES SÍLABO, LDA.

R. Passos Manuel, 99, 5º Esq.
1100 Lisboa
Telfs: 520647 / 525880
Fax: 525880

ÍNDICE

SUCESSÕES

ENUNCIADOS

1

Dada a sucessão $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

a) Indique o seu termo geral,

b) Estude-a quanto à monotonia.

c) Verifique se é limitada.

2

Considere a sucessão $u_n = \dfrac{2n-1}{n-1}$.

a) Prove que ela é minorada,

b) Prove que ela é majorada,

c) Prove que ela é monótona crescente,

d) Que conclui quanto à existência de limite?

3

Prove, recorrendo à definição, que:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$,

b) $\dfrac{2n-1}{n+1} \to 2$,

c) $\dfrac{\cos n\pi}{n+1} \to 0,$

d) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0\,.$

4

Estude quanto ao limite as seguintes sucessões:

a) $\lim \dfrac{n^3 + 5n}{3n^3 + n^2},$

b) $\lim \dfrac{5n^3 + 4n}{n^2 + 1},$

c) $\lim (-1)^n \dfrac{2n^2 + 5}{n^2 + 1},$

d) $\lim \dfrac{1}{n-1} \sqrt{9n^2 - 3n + 1}\,,$

e) $\lim (-1)^n \cos \dfrac{1}{n},$

f) $\lim \left(1 + \dfrac{\cos (n+1)\pi}{n}\right),$

g) $\lim \dfrac{2}{n} \times \sqrt{n^2 + 1}\,,$

h) $\lim \left(\dfrac{1}{n} + \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2}\right),$

i) $\lim \left(n \sec \dfrac{1}{n} + \operatorname{tg} \dfrac{2}{n}\right).$

5

Determine os limites das sucessões cujos termos gerais são os seguintes:

a) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n,$

b) $a_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1} + (-1)^{n+1}\left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^n,$

c) $a_n = n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}$ (atenda a que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$),

d) $a_n = n \operatorname{tg} \dfrac{2}{n},$

e) $a_n = \dfrac{3^n - e^{n+1}}{e^n - 3^{n+1}},$

f) $a_n = \dfrac{2^{n-1} + 1}{2^{n+1} + 1},$

g) $\left(1 - \dfrac{a}{n^2}\right)^{n^2},$

h) $\left(\dfrac{n^4 - 16}{n^4}\right)^{n^2}$,

i) $\left(\dfrac{2n + 5}{2n + 3}\right)^{2n}$,

j) $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{3n}$,

k) $\left(1 + \dfrac{1}{5n}\right)^{n}$,

l) $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.

6

Aplicando o teorema das sucessões enquadradas calcule os limites das sucessões:

a) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dots + \dfrac{1}{(2n)^2}$,

b) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$,

c) $\dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$,

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}$.

7

Sabendo que com $a_n = 0$, $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, se este limite existir calcule:

a) $\lim \sqrt[n]{n}$,

b) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{n}}$,

c) $\lim \dfrac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$.

8

Mostre, recorrendo à definição de limite, que não é verdade que:

a) $\lim \dfrac{n}{2n+1} = 3$,

b) $\lim \sqrt{n} = 1$.

9

Considere a sucessão u_n dada por

$$u_n = \int_0^n \frac{1}{(x+1)(x+2)}\, dx.$$

a) Calcule u_1 e u_2.

b) Estude-a quanto à monotonia.

c) Calcule $\lim u_n$.

d) Indique um minorante e um majorante de u_n.

10

Mostre que

$$y_t = \begin{cases} A^t y_0 + B\,\dfrac{C^t - A^t}{C - A} & , A \neq C \\ A^t y_0 + BA^{t-1}t & , A = C \end{cases} \quad , t \in IN_0$$

é solução da equação com diferenças (ou equação recorrente) $y_{t+1} = Ay_t + B \,.\, C^t$.

11

Mostre, recorrendo à definição de Heine, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x - 1}{1 - x} = -1.$$

12

Sabendo que se $\lim \dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = a$ então $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = a$,

calcule $\lim \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{n}$.

13

Utilize o facto de $\lim (u_{n+1} - u_n) = a \Rightarrow \lim \dfrac{u_n}{n} = a$

para calcular $\lim \dfrac{\log n}{n}$.

14

Use o resultado de 13 para calcular o limite de 12.

15

Calcule $\lim \dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{1 - \cos \frac{1}{n}}$.

SUCESSÕES

RESOLUÇÕES

1

a)

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

pode pôr-se na forma

$$\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots$$

o que leva a concluir que

$$u_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

b)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= \frac{1-2}{2^n} = -\frac{1}{2^n} < 0,$$

pelo que a sucessão dada é monótona decrescente.

c)

Obviamente $u_n > 0$.

Como $u_1 = 1$ e u_n é decrescente, $u_n \leq 1$. Assim $0 < u_n \leq 1$, sendo portanto limitada.

2

a)

$$u_n = \frac{2n+1}{n+1} = \frac{n+n+1}{n+1} =$$

$$= 1 + \frac{n}{n+1} = 1 + \frac{n+1-1}{n+1} =$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Como o maior valor de $\frac{1}{n+1}$ é $\frac{1}{2}$, $u_n \geq \frac{3}{2}$.

b)

Em face da alínea *a)*, conclui-se também que $u_n \leq 2$.

c)

De $u_n = 2 - \frac{1}{n+1}$ conclui-se facilmente que u_n é crescente.

$\frac{1}{n+1}$ decresce com n, obviamente, e está afectado de sinal «menos».

Mas, procedendo como usualmente,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} =$$

$$= \frac{2n^2 + 3n + 2n + 3 - 2n^2 - n - 4n - 2}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0.$$

pelo que u_n é crescente.

d)

Sendo uma sucessão monótona e limitada $\left(\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2\right)$ ela é convergente.

Como se vê facilmente $\lim u_n = \lim \frac{2n+1}{n+1} = 2$.

3

a)

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \varepsilon^2.$$

Portanto, desde que $n > \varepsilon^2$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \in V_\varepsilon(0)$.

Assim $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

b)

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{3} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 1 .$$

Se $n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$, $\dfrac{2n-1}{n+1} \in V_{\varepsilon}(2)$.

Portanto, $\dfrac{2n-1}{n+1} \to 2$.

c)

$$\left| \frac{\cos n\pi}{n+1} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\cos n\pi}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 .$$

Obviamente $\dfrac{\cos n\pi}{n+1} \to 0$

d)

$$\left| \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \varepsilon \Leftrightarrow n+1 < n + 2\varepsilon\sqrt{n} + \varepsilon^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\varepsilon\sqrt{n} - \varepsilon^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \left(\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon} \right)^2 .$$

Portanto, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$.

4

a)

$$\lim \frac{n^3 + 5n}{3n^3 + n^2} = \frac{1}{3}$$ (grau do numerador igual ao do denominador).

b)

$$\lim \frac{5n^3 + 4n}{n^2 + 1} = +\infty$$ (grau do numerador superior ao do denominador. E os termos de maior grau do numerador e do denominador são ambos positivos).

c)

— *n par*

$$\lim (-1)^n \frac{2n^2 + 5}{n^2 + 1} = \lim \frac{2n^2 + 5}{n^2 + 1} = 2 .$$

— *n ímpar*

$$\lim (-1)^n \frac{2n^2 + 5}{n^2 + 1} = \lim - \frac{2n^2 + 5}{n^2 + 1} = -2 .$$

Não tem limite porque tem dois sublimites diferentes: 2 e − 2.

d)

$$\lim \frac{1}{n-1}\sqrt{9n^2-3n+1} =$$

$$= \lim \sqrt{\frac{9n^2-3n+1}{n^2-2n+1}} =$$

$$= \sqrt{\lim \frac{9n^2-3n+1}{n^2-2n+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{1}} = 3\,.$$

e)

— *n par*

$$\lim (-1)^n \cos \frac{1}{n} = \lim \cos \frac{1}{n} = \cos 0 = 1.$$

— *n ímpar*

$$\lim (-1)^n \cos \frac{1}{n} = -\lim \cos \frac{1}{n} = -\cos 0 = -1.$$

Não tem limite porque tem dois sublimites diferentes: 1 e – 1.

f)

$$\lim\left(1+\frac{\cos(n+1)\pi}{n}\right) = 1 + \lim \frac{\cos(n+1)\pi}{n} =$$

$$= 1 \pm \lim \frac{1}{n} = 1 \pm 0 = 1\,.$$

g)

$$\lim \frac{2}{n} \times \sqrt{n^2+1} = 2 \lim \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} =$$

$$= 2\sqrt{\lim \frac{n^2+1}{n^2}} =$$

$$= 2\sqrt{1} = 2\,.$$

h)

$$\lim\left(\frac{1}{n} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) = \lim \frac{1}{n} + \lim \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} =$$

$$= 0 + \lim \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} = \lim \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\,.$$

$n = 0,\ 4,\ 8,\ 12,\ \ldots$

$$\lim \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} = \lim 0 = 0,$$

$n = 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ \ldots$

$$\lim \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} = \lim \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \lim\ 1 = 1,$$

$n = 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ \ldots$

$$\lim \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \quad \lim \operatorname{sen}\pi = \lim 0 = 0,$$

$n = 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \ldots$

$$\lim \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = \lim \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = \lim(-1) = -1.$$

Não tem limite porque tem três sublimites diferente: -1, 0 e 1

i)

$$\lim n \sec \frac{1}{n} + \operatorname{tg} \frac{2}{n} = \frac{\lim n}{\lim \cos \frac{1}{n}} + \operatorname{tg}\left(\lim \frac{2}{n}\right) =$$

$$= \frac{+\infty}{1} + 0 = +\infty .$$

5

a)

$$\lim a_n = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e .$$

b)

$$\lim \frac{n-1}{n+1} = 1.$$

$$\lim\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = e^{-3}.$$

— *n par*

$$\lim a_n = \lim \frac{n-1}{n+2} - \lim\left(1 - \frac{3}{n}\right) = 1 - e^{-3}$$

— *n ímpar*

$$\lim a_n = -\lim \frac{n-1}{n+1} + \lim\left(1 - \frac{3}{n}\right) = -1 + e^{-3}.$$

Não tem limite porque tem dois sublimites diferente: $1 - e^{-3}$ e $-1 + e^{-3}$.

c)

$$\lim a_n = \lim n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = \lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{visto que} \quad \frac{1}{n} \to 0.$$

d)

$$\lim a_n = \lim n \operatorname{tg} \frac{2}{n} = \lim n \frac{\operatorname{sen} \frac{2}{n}}{\cos \frac{2}{n}} =$$

$$= \lim n \operatorname{sen} \frac{2}{n} \cdot \lim \frac{1}{\cos \frac{2}{n}} = \left(\lim \frac{\operatorname{sen} \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}\right) \frac{1}{\cos 0} =$$

$$= 2 \lim \frac{\operatorname{sen} \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = 2 \times 1 = 2,$$

visto que $\frac{2}{n} \to 0$.

e)

$$\lim a_n = \lim \frac{3^n - e^{n+1}}{e^n - 3^{n+1}} = \lim \frac{\dfrac{3^n}{3^{n+1}} - \dfrac{e^{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{e^n}{3^{n+1}} - 1} =$$

$$= \lim \frac{\dfrac{1}{3} - \left(\dfrac{e}{3}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{e}{3}\right)^n - 1}.$$

Como $\left(\dfrac{e}{3}\right)^n \to 0$ visto que $e < 3$ conclui-se que $\lim a_n = \dfrac{\frac{1}{3}}{-1} = -\dfrac{1}{3}$.

f)

$$\lim a_n = \lim \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n+1} - 1} =$$

$$= \lim \frac{\dfrac{2^{n-1}}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}} = \lim \frac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{4} + 0}{1 + 0} = \frac{1}{4},$$

visto que $\dfrac{1}{2^{n+1}} \to 0$.

g)

$$\lim\left(1 - \frac{a}{n^2}\right)^{n^2} = e^{-a}.$$

h)

$$\lim\left(\frac{n^4 - 16}{n^4}\right)^{n^2} = \lim\left[\left(\frac{n^2 + 4}{n^2}\right)\left(\frac{n^2 - 4}{n^2}\right)\right]^{n^2} =$$

$$= \lim\left(\frac{n^2 + 4}{n^2}\right)^{n^2} \lim\left(\frac{n^2 - 4}{n^2}\right)^{n^2} =$$

$$= \lim\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^{n^2} . \lim\left(1 - \frac{4}{n^2}\right)^{n^2} =$$

$$= e^4 . e^{-4} = e^0 = 1.$$

i)

$$\lim\left(\frac{2n + 5}{2n + 3}\right)^{2n} = \lim\left(\frac{2n + 3 + 2}{2n + 3}\right)^{2n} =$$

$$= \lim\left(1 + \frac{2}{2n + 3}\right)^{2n} = \lim\left(1 + \frac{2}{2n + 3}\right)^{2n+3-3} =$$

$$= \lim\left(1 + \frac{2}{2n + 3}\right)^{2n+3} \lim\left(1 + \frac{2}{2n + 3}\right)^{-3} =$$

$$= e^2 . 1^{-3} = e^2.$$

j)

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3n}=\lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{3}=\left[\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^{3}=$$

$$=(e^{-1})^{3}=e^{-3}.$$

k)

$$\lim\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{\frac{1}{5}}{n}\right)=e^{1/5}=\sqrt[5]{e}.$$

l)

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\lim\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}=$$

$$=\frac{1}{e^{-1}}=e$$

6

a)

$$a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}=$$

$$=\frac{1}{(n+0)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n+i)^2}\qquad\text{(portanto } n+1 \text{ parcelas).}$$

A maior é $\frac{1}{n^2}$ e a menor $\frac{1}{(2n)^2}$.

Portanto, $\frac{n+1}{(2n)^2}\le a_n\le\frac{n+1}{n^2}$.

Como $\lim\frac{n+1}{(2n)^2}=\lim\frac{n+1}{n^2}=0$, $\lim a_n=0$.

b)

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+0}}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+i}}\qquad(n+1\ \text{parcelas}).$$

A menor é $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ e a maior $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Então $\frac{n+1}{\sqrt{2n}}\le a_n\le\frac{n+1}{\sqrt{n}}$.

Como $\lim\frac{n+1}{\sqrt{2n}}=+\infty$ e $\lim\frac{n+1}{\sqrt{n}}=+\infty$, também, conclui-se que $\lim a_n=+\infty$.

c)

Como $-1 \leq \operatorname{sen} n \leq 1$; $\quad -\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\operatorname{sen} n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.

$\lim -\dfrac{1}{n} = \lim \dfrac{1}{n} = 0$ e, assim, $\lim \dfrac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$.

d)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n+1}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+i}} \quad (2n+1 \text{ parcelas}).$$

Obviamente

$$\frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^3+2n+1}} \leq a_n \leq \frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^3+1}}.$$

$$\lim \frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^3+2n+1}} = \lim \frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^3+1}} = 2$$

e, assim, $\lim a_n = 2$.

7

a)

$$\lim \sqrt[n]{n} = \lim \frac{n+1}{n} = 1.$$

b)

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} = \lim \frac{\dfrac{n+2}{n+1}}{\dfrac{n+1}{n}} = \lim \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} =$$

$$= \lim \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} = 1.$$

c)

$$\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)} =$$

$$= \lim \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{n^n}} =$$

$$= \lim \frac{(n+2)(n+3)\ldots(2n)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \; \frac{n^n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)} =$$

$$= \lim \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{(n+1)} =$$

$$= \lim \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \cdot \lim \frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= 4 \lim \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{4}{\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{4}{e}.$$

8

a)

$$\left|\frac{n}{2n+1}-3\right|<\delta \Leftrightarrow \left|\frac{n-6n-3}{2n+1}\right|<\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{-5n-3}{2n+1}\right|<\delta \Leftrightarrow \frac{5n+3}{2n+1}<\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5n<2n\delta+\delta \Leftrightarrow n(5-2\delta)<\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n<\frac{\delta}{5-2\delta}$$

desde que $5-2\delta>0 \Leftrightarrow 2\delta<5 \Leftrightarrow \delta<\frac{5}{2}$. Portanto, não é verdade que para qualquer $\delta>0$ exista uma ordem a partir da qual $\frac{n}{2n+1}\in V_\delta(3)$. Aliás como se sabe, $\lim \frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

b)

$$|\sqrt{n}-1|<\delta \Leftrightarrow \sqrt{n}-1<\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n}<\delta+1 \Rightarrow n<(\delta+1)^2.$$

Portanto, não é verdade que para qualquer $\delta>0$ exista uma ordem a partir da qual $\sqrt{n}\in V_\delta(1)$. Aliás, como se sabe, $\lim\sqrt{n}=+\infty$

9

a)

$$u_1=\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx.$$

Mas, $$P\frac{1}{(x+1)(x+2)}=P\frac{1}{x+1}+P\frac{-1}{x+2}=$$

$$=P\frac{1}{x+1}-P\frac{1}{x+2}=$$

$$=\log|x+1|-\log|x+2|=$$

$$=\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|.$$

Portanto,

$$u_1=\left[\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]_0^1=$$

$$=\log\frac{2}{3}-\log\frac{1}{2}=\log\frac{4}{3}.$$

E

$$u_2=\left[\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]_0^2=\log\frac{3}{4}-\log\frac{1}{2}=$$

$$=\log\frac{6}{4}=\log\frac{3}{2}.$$

b)

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx - \int_0^{n} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx =$$

$$= \int_n^{0} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx + \int_0^{n+1} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx =$$

$$= \int_0^{n+1} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx > 0$$

visto que

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} > 0 \quad \text{em } [\,n,\ n+1\,].$$

Portanto u_n é crescente.

c)

$$\lim u_n = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_1^{\varepsilon} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \left[\log \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \right]_0^{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +\infty} \left(\log \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon+2} - \log \frac{1}{2} \right) \log 1 - \log \frac{1}{2} = \log 2 .$$

d)

Sendo u_n crescente:

— $u_n \geq u_1 = \log \dfrac{4}{3}$,

— $u_n \leq \lim u_n = \log 2$.

10

$A \neq C$

Se a expressão dada for a solução deve ter-se

$$A^{t+1} y_0 + B \frac{C^{t+1} - A^{t+1}}{C - A} =$$

$$= A\left(A^t y_0 + B \frac{C^t - A^t}{C - A}\right) - BC^t .$$

Desenvolvendo-se o segundo membro obtém-se:

$$A^{t+1} y_0 + B \frac{AC^t - A^{t+1}}{C - A} + BC^t =$$

$$= A^{t+1} y_0 + B \frac{AC^t - A^{t+1} + C^{t+1} - AC^t}{C - A} =$$

$$= A^{t+1} y_0 + B \frac{C^{t+1} - A^{t+1}}{C - A}$$

idêntico ao primeiro membro como se pretendia.

$A = C$

Neste caso

$$A^{t+1} y_0 + BA^t (t+1) = A(A^t y_0 + BA^{t-1} t) + BA^t .$$

Procedendo como no caso anterior, obtém-se

$A^{t+1} y_0 + BA^t = A^{t+1} y_0 + BA^t (t+1)$, como se pretendia.

11

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se e só se $u_n \to a$ e $f(u_n) \to b$.

Por exemplo, $\frac{1}{n} \to 0$.

Neste caso

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - x}$$

e, assim,

$$f(u_n) = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - 1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1 + n - n^2}{n^2}}{\frac{n - 1}{n}} =$$

$$= \frac{(-n^2 + n + 1)\, n}{(n - 1)\, n^2} = \frac{-n^2 + n + 1}{n^2 - n}.$$

Então

$$\lim (u_n) = \lim \frac{-n^2 + n + 1}{n^2 - n} = \frac{-1}{1} = -1$$

12

Seja $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Então

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n + 1}.$$

E, pondo $v_n = n$, $v_{n+1} - v_n = n + 1 - n = 1$.

Portanto, $\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \lim \frac{1}{n + 1} = 0$

pelo que

$$\lim \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{n} = 0.$$

13

Como é óbvio $u_n = \log n$.

$$u_{n+1} - u_n = \log (n + 1) - \log n = \log \frac{n + 1}{n}.$$

E, $\lim (u_{n+1} - u_n) = \lim \log \frac{n + 1}{n} = \log 1 = 0$.

14

Agora $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$,

e, como já vimos, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$. Como $\lim \frac{1}{n+1} = 0$ tem-se que

$$\lim \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{n} = 0$$ tal como em 12.

15

$$\lim \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{1 - \cos\frac{1}{n}} = \frac{0}{1 - \cos 0} = \frac{0}{0}.$$

$$\lim \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{1 - \cos\frac{1}{n}} = \lim \frac{n \operatorname{sen}\frac{1}{n}}{n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)}.$$

$$\lim n \operatorname{sen}\frac{1}{n} = \lim \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{visto que } \frac{1}{n} \to 0.$$

$$\lim n\left((1 - \cos\frac{1}{n}\right) = \lim \frac{1 - \cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

Recorrendo, por exemplo, à regra de Cauchy tem-se que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1} = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

Em consequência, $\lim \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{1 - \cos\frac{1}{n}} = \frac{1}{0} = \infty$.

SÉRIES

ENUNCIADOS

1

Estude quanto à natureza e calcule a soma das séries, se possível:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-5n+1}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{3n-2}} + \frac{3}{2^{2n}}\right)$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\text{sen}\, a)^n \quad a \in IR$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\text{sen}\, a + \cos a)^n, \ a \in IR$.

2

O mesmo que no problema anterior para as séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+4)}$,

d) $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)}$.

3

Determine o termo geral e a soma das seguintes séries numéricas:

a) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots,$

b) $\frac{1}{1\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,5} + \frac{1}{5\,.\,7} + \dots,$

c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \dots,$

d) $\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} + \frac{1}{3\,.\,4\,.\,5} + \dots,$

4

Ache a natureza das seguintes séries analisando o seu termo geral:

a) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{3}{2^n}$,

b) $\displaystyle\sum \frac{2n^2 - 3n + 4}{3n^2 + 2n - 5}$,

c) $\displaystyle\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n}$,

d) $\displaystyle\sum \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n}$.

5

Estude por comparação a natureza das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum \frac{2}{\sqrt[3]{n^2 + 4}}$,

b) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \operatorname{sen} \frac{1}{n^3}$,

c) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n \operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\sqrt{n^3 + 1}}$,

d) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + 3n - 1}{2n^4 + n^2 + 2}$,

e) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1 + \sqrt{n}}{n^2 - n}$,

f) $\displaystyle\sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

g) $\displaystyle\sum \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)$.

6

Classifique as séries de termos gerais:

a) $\dfrac{(2n)!}{(n!)^3}$,

b) $\dfrac{[(2n)!]^2}{n!\,(3n)!}$,

c) $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}$,

d) $\dfrac{2^n\, n!}{n^n}$,

e) $\dfrac{3^n n!}{n^n}$.

7

Classifique as séries de termos gerais:

a) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

b) $\left[\left(2 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right)^n\right]^2$,

c) $\left(\dfrac{n+1}{4n+3}\right)^{2n}$,

d) $\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

8

Estude quanto à convergência absoluta as séries convergentes:

a) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$,

b) $3 - \dfrac{3}{2!} + \dfrac{3}{3!} - \dfrac{3}{4!} + \ldots$,

c) $\sum (-1)^{n-1} \dfrac{2n-1}{n(n+1)}$.

9

Recorrendo ao critério de Leibnitz diga quais das séries seguintes são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+50}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1+n^2}$.

10

Recorrendo ao critério do integral, mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)}$$

é divergente.

11

Estude quanto à convergência as seguintes séries

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$,

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{n^2 2^n}$,

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$,

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(x-2)^n$,

e) $\sum n(x-1)^{n-1}$ com $x \in IR$.

12

Determine os valores de x para os quais é valido o seguinte desenvolvimento em série de potências:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

13

Determine os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x\log x}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1+e^{4x}}$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^4}$;

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + e^{-x^3}}$.

14

Resolva em IR as equações

a) $(x - 2)\, e^{-x^2+3x+1} = 0$,

b) $\log(x^2 - 5x + 7) = 0$,

b) $\log(5x + 1)\ .\ e^{(2x-3)} = 0$,

c) $\log(5x + 1)\ .\ e^{2x-3} = 0$,

d) $e^{x^2-7x+12} = 1$,

e) $e^{x-1} = -3$,

f) $\log(-x^2 + 2x - 5) = 1$.

15

Calcule $\lim (n + 1)^{\frac{1}{\log n}}$.

16

Utilize o desenvolvimento de Taylor em torno do ponto 0 para deduzir as fórmulas:

a) $e^x = 1 + \xi x \left(\lim\limits_{x \to 0} \xi = 1 \right)$,

b) $\log(1 + x) = x - \lambda x^2 \left(\lim\limits_{x \to 0} \lambda = \dfrac{1}{2} \right)$,

c) $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha \zeta x \left(\lim\limits_{x \to 0} \zeta = 1 \right)$.

17

Calcule o desenvolvimento em série de Taylor em torno do ponto 0 até a segunda ordem e com resto de Lagrange das funções:

a) e^{1-x},

b) $\dfrac{1 - x}{\sqrt{1 + x}}$,

c) $\log(1 - x^2)$.

18

Estabeleça os seguintes desenvolvimentos:

a) $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \ldots$

b) $\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \ldots$

19

Estabeleça séries de Taylor para as funções seguintes na vizinhança dos pontos indicados:

a) $\frac{1}{x-1}$; $x = 0$,

b) $\frac{1}{9-x^2}$; $x = 0$,

c) $\frac{1}{x^2 - 6x + 8}$; $x = 0$,

d) $\frac{x}{9+x}$; $x = 0$,

e) $\frac{2}{5+x}$; $x = 1$,

f) $\frac{e^x}{1-x}$; $x = 0$,

g) $e^x \cos x$; $x = 0$,

h) $\frac{1}{(x-5)(x+3)}$; $x = 2$,

i) $\log(3+x)$; $x = 0$,

j) $(x-1)\log x$; $x = 1$.

20

Determine o desenvolvimento em série de $\frac{1}{(2+x)(3-x)(1+x)}$ na vizinhança de $x = 4$. Infira dele uma expressão para $f^{(n)}(4)$ para a função dada.

21

Veja se é possível desenvolver $e^{-\frac{1}{x^2}}$ em série de MacLaurin.

22

Mostre que $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$.

23

Determine a soma das séries

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_0^1 e^x\,dx}{n!}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\int_1^2 (1+x^2)\,dx\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+2}}{n!} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-a} \frac{a^n}{n!}$.

24

Determine valores aproximados a menos de 0,01 de

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$.

25

Determine majorantes dos erros cometidos ao substituir o valor das séries dadas pela soma dos seus dez primeiros termos:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$.

26

Estude, em função de x, a convergência das séries de funções seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} 2^n$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^n x}{n(n+2)}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!}$.

27

Seja $f(x) = e^{-x^2}$

a) Desenvolva $f(x)$ em fórmula de MacLaurin com resto de terceira ordem.

b) Use as 2duas primeiras parcelas do desenvolvimento de *a)* para calcular um valor aproximado de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

c) Determine um majorante do erro cometido em *b)* ao substituir o integral de *b)* pelo valor aproximado sugerido.

d) Mostre que e^{-x^2} tem um desenvolvimento em série de MacLaurin válido em qualquer $x \in V_\varepsilon(0)$, com $\varepsilon > 0$ qualquer.

e) Determine o desenvimento em série de MacLaurin de $f(x)$.

f) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin de $(x^2 - 1)\,e^{-x^2}$

g) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin de 2^{-x^2}.

SÉRIES

RESOLUÇÕES

1

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 .$$

Série geométrica de primeiro termo $\frac{1}{2}$ e razão $\frac{1}{2}$. $|r| < 1$ pelo que é convergente.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-5n+1} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-5n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^5}\right)^n =$$

$$= 3 \, \frac{\frac{1}{3^5}}{1 - \frac{1}{3^5}} = 3 \, \frac{1}{3^5 - 1} =$$

$$= \frac{3}{242} \left(a_1 = \frac{1}{3^5} \;\; \text{e} \;\; r = \frac{1}{3^5} \right).$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{3n-2}} + \frac{3}{2^{2n}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n-2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{2n}} =$$

$$= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n =$$

$$= 4\,\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} + 3\,\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{4}{7} + 1 = \frac{11}{7}.$$

d)

$a = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in Z.$

$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ e a série dada é divergente: série geométrica com $r = 1$.

$a = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$

$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ e a série dada é divergente: série geométrica com $r = -1$.

Outros valores de a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} a)^n = \frac{\operatorname{sen} a}{1 - \operatorname{sen} a}$$

e)

Se $|\operatorname{sen} a + \cos a| \geq 1$ a série dada é divergente.

Se $|\operatorname{sen} a + \cos a| < 1$, temos uma série geométrica em que $a_1 = r = \operatorname{sen} a + \cos a$ e, portanto, $s = \dfrac{\operatorname{sen} a + \cos a}{1 - \operatorname{sen} a - \cos a}$.

2

Neste exercício todas as séries são de Mengoli.

a)

$$\frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} - \frac{A}{n+2}.$$

$$\begin{array}{rcl} A(n+2) & = & An + 2A \\ -An & = & -An \\ \hline & & 2A \end{array}$$

Portanto $2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$.

Assim,

$$\frac{1}{n^2 + 2n} = u_n - u_{n+2} =$$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}.$$

Portanto

$$s = u_1 + u_2 - 2\lim u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 2\lim\frac{1}{2n} =$$

$$= \frac{3}{4}.$$

b)

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} - \frac{A}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\begin{array}{lcl} A(n+2) & = & An + 2A \\ -An & = & -An \\ \hline & & 2A \end{array}$$

Portanto $2A = 1 \Leftrightarrow A = \dfrac{1}{2}$.

Assim

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = u_n - u_{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Portanto

$$s = u_1 - \lim u_n = \frac{1}{2\,.\,1(1+1)} - \lim \frac{1}{2n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{4}.$$

c)

$$\frac{1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{A}{n(n+2)} - \frac{A}{(n+2)(n+4)}.$$

$$\begin{array}{lcl} A(n+4) & = & An + 4A \\ -An & = & -An \\ \hline & & 4A \end{array}$$

Portanto $4A = 1 \Leftrightarrow A = \dfrac{1}{4}$.

Assim

$$\frac{1}{n(n+2)(n+2)} = u_n - u_{n+2} = \frac{1}{4n(n+2)} - \frac{1}{4(n-2)(n+4)}.$$

Portanto,

$$s = u_1 + u_2 - 2\lim u_n =$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{32} - 2\lim \frac{1}{4n(n+2)} =$$

$$= \frac{8+3}{96} = \frac{11}{96}.$$

d)

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} =$$

$$= \frac{A}{n(n+1)\ldots(n+k-1)} - \frac{A}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}.$$

$$\begin{array}{lcl} A(n+k) & = & An + Ak \\ -An & = & -An \\ \hline & & Ak \end{array}$$

$Ak = 1 \Leftrightarrow A = \dfrac{1}{k}$.

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} = u_n - u_{n+1} =$$

$$= \frac{1}{kn(n+1)\ldots(n+k-1)} - \frac{1}{k(n+1)\ldots(n+k)}.$$

Portanto,

$$s = u_1 - \lim u_n =$$

$$= \frac{1}{k \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots k} - \lim \frac{1}{kn\,(n+1)\ldots(n+k-1)} =$$

$$= \frac{1}{k \,.\, k!}\,.$$

3

a)

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots =$$

$$= 2 + 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Portanto $a_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Como é evidente, é uma série geométrica em que $a_1 = 2$ e $r = \frac{1}{3}$.

Portanto

$$s = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3.$$

b)

$$\frac{1}{1 \,.\, 3} + \frac{1}{3 \,.\, 5} + \frac{1}{5 \,.\, 7} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{1\,.\,3} + \frac{1}{(1+2)\,.\,(3+2)} + \frac{1}{(1+2+2)\,(3+2+2)} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)}\,.$$

Assim, $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)\,(2n+1)}$.

$$\frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} - \frac{A}{2n+1}\,.$$

$$\begin{aligned} A\,(2n+1) &= 2nA + A \\ -A\,(2n-1) &= -2nA + A \\ \hline & \quad 2A \end{aligned}$$

$$2A = 1 \iff A = \frac{1}{2}\,.$$

É portanto uma série de Mengoli:

$$a_n = u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2\,(2n-1)} - \frac{1}{2\,(2n+1)}$$

$$s = u_1 - \lim u_n = \frac{1}{2} - \lim \frac{1}{2\,(2n-1)} = \frac{1}{2}$$

c)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(2-1)(2+1)} + \frac{1}{(3-1)(3+1)} +$$

$$+ \frac{1}{(4-1)(4+1)} + \frac{1}{(5-1)(5+1)} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}.$$

Assim, $a_n = \dfrac{1}{n^2-1}$.

Trata-se de uma série de Mengoli:

$$— \frac{1}{n^2-1} = \frac{A}{n-1} - \frac{A}{n+1},$$

$$\begin{array}{rcl} — \quad A(n+1) & = & An + A \\ -A(n-1) & = & -An + A \\ \hline & & 2A \end{array}$$

$$2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

$$— a_n = \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n+1)} = u_n - u_{n-2}.$$

$$s = u_2 + u_3 - 2 \lim u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 2 \lim \frac{1}{2(n-1)} = \frac{3}{4}$$

(note-se que o primeiro termo é a_2).

d)

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} + \frac{1}{3\,.\,4\,.\,5} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Portanto $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Trata-se de uma série de Mengoli:

$$a_n = u_n - u_{n+1} = \frac{A}{n(n+1)} - \frac{A}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)},$$

já que

$$\begin{array}{rcl} A(n+2) & = & An - 2A \\ -An & = & -An \\ \hline & & 2A \end{array}$$

$$2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

$$s = u_1 - \lim u_n = \frac{1}{4} - \lim \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{4}.$$

4

a)

$\lim \dfrac{3}{2^n} = 0$, o que não permite concluir nada.

Mas $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \, \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$:

série geométrica convergente visto que $|r| = \frac{1}{2} < 1$.

b)

$$\lim \frac{2n^2 - 3n + 4}{3n^2 + 2n - 5} = \frac{2}{3} \neq 0 \text{ pelo que a série dada é divergente.}$$

c)

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^4 =$$

$$= \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^4 = e^4 \neq 0$$

pelo que a série dada é divergente.

d)

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Então,

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = e^{-1} e = e^0 = 1 \neq 0$$

pelo que a série dada é divergente.

5

a)

$$\lim n^{\alpha} \frac{2}{\sqrt[3]{n^2 + 4}} = \lim \frac{2n^{\alpha}}{\sqrt[3]{n^2 + 4}} = 2$$

(finito e diferente de 0) se $\alpha = \frac{2}{3} < 1$.

A série dada é divergente ($\sqrt[3]{n^2} = n^{2/3}$).

b)

$$\lim n^{\alpha} \operatorname{sen} \frac{1}{n^3} = \lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = 1 \quad \text{se } \alpha = 3 > 1$$

(recorda-se que $\frac{1}{n^3} \to 0$ e $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$).

A série dada é convergente.

c)

$$\lim n^{\alpha} \frac{n \operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\sqrt{n^3 + 1}} = 1 \quad \text{se } \alpha = \frac{3}{2} > 1.$$

A série dada é convergente.

d)

$$\lim n^{\alpha}\,\frac{n^2+3n-1}{2n^4+n^2+2}=\lim\frac{n^{2+\alpha}+3n^{1+\alpha}-n^{\alpha}}{2n^4+n^2+2}=\frac{1}{2}$$

(finito e diferente de 0) se $2+\alpha=4 \iff \alpha=2$.

Portanto $\alpha>1$. A série dada é convergente.

e)

$$\lim n^{\alpha}\,\frac{1+\sqrt{n}}{n^2-n}=\lim\frac{n^{\frac{1}{2}+\alpha}+n^{\alpha}}{n^2-n}=1$$

(finito e diferente de 0) se $\frac{1}{2}+\alpha=2 \iff \alpha=\frac{3}{2}$. $\alpha>1$.

A série dada é convergente.

f)

$$\lim n^{\alpha}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim n^{\alpha}\,\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim\frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$$

se $\alpha=\frac{1}{2}<1$. A série dada é divergente.

g)

$$\lim n^{\alpha}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim n^{\alpha}\,\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=$$

$$=\lim\frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{2}$$

se $\alpha=\frac{1}{2}<1$. A série dada é divergente.

6

Para todas as séries deste exercício está indicado aplicar o critério de D'Alembert.

a)

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^3}\,\frac{(n!)^3}{(2n)!}=\lim\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^3=$$

$$=\lim\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^3}=0<1\,.$$

A série dada é convergente.

b)

$$\lim\frac{[(2n+2)!]^2}{(n+1)!\,(3n+3)!}\,\frac{n!\,(3n)!}{[(2n)!]^2}=$$

$$=\lim\left[\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\right]^2\frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{(3n)!}{(3n+3)}=$$

$$=\lim\frac{((2n+2)(2n+1))^2}{(n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=$$

$$=\frac{16}{27}<1\,.$$

A série dada é convergente.

c)

$$\lim \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)(2n+1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots (2n)(2n+2)} \; \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n}{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)} =$$

$$= \lim \frac{2n+1}{2n+2} = 1$$

por valores inferiores a 1, pelo que o critério de D'Alembert é inconclusivo.

Recorrendo ao critério de Raabe

$$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim n \, \frac{2n+2-2n-1}{2n+1} =$$

$$= \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \,,$$

pelo que a série diverge.

d)

$$\lim \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \; \frac{n^n}{2^n n!} = \lim \frac{2^{n+1}}{2^n} \; \frac{(n+1)!}{n!} \; \frac{n^n}{(n+1)^n} \; \frac{1}{n+1} =$$

$$= 2 \lim (n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} =$$

$$= 2 \lim \frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= 2 \, \frac{1}{\lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1 \,.$$

A série dada converge.

e)

$$\lim \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \; \frac{n^n}{3^n n!} = 3 \lim \frac{(n+1)!}{n!} \; \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= 3 \, \frac{1}{\lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1 \,.$$

A série é divergente.

7

Neste exercício está indicado usar o critério de Cauchy.

a)

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{\lim\left(1 \;\; \dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \,.$$

Série convergente.

b)

$$\lim \sqrt[n]{\left[\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}\right)^n\right]^2} = \lim \sqrt[n]{\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}\right)^{2n}} =$$

$$= \lim \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}\right)^2 =$$

$$= 2^2 = 4 > 1 .$$

Série divergente.

c)

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{4n+3}\right)^{2n}} = \lim \left(\frac{n+1}{4n+3}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{16} < 1.$$

Série convergente.

d)

$$\lim \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n} \lim 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 1,$$

por valores superiores a 1. Série divergente.

8

a)

A série dos módulos associada é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$.

É uma série de Dirichelet com $\alpha < 1$. Portanto divergente.

A série dada é $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (alternada). O critério de Leibnitz garante a sua convergência: $\frac{1}{\sqrt{n}}$ é decrescente e converge para 0.

A série dada é, assim, simplesmente convergente.

b)

A série dos módulos associada é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n!}$. Pelo critério de D'Alembert, por exemplo, tem-se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3}{(n+1)!} \frac{n!}{3} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1$.

Portanto convergente. Assim a série dada é absolutamente convergente.

c)

A série dos módulos associada é $\sum \frac{2n-1}{n(n+1)}$.

Como $\lim n^{\alpha} \frac{2n-1}{n(n+1)} = \lim \frac{2n^{\alpha+1}}{n(n+1)} = 2$ (finito e diferente de zero) se $\alpha + 1 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ela é divergente.

Seja $a_n = \frac{2n-1}{n(n+1)}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} - \frac{2n-1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{2n^2 + n - 2n^2 + n - 4n + 2}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{-2n+2}{n(n+1)(n+2)} < 0 \quad \text{desde que } n > 1 .$$

Portanto a_n é decrescente. Como $\lim a_n = 0$, o critério de Leibnitz garante a convergência da série dada. Sendo convergente sem ser absolutamente convergente ela é simplesmente convergente.

9

a)

$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ tende para 0, e é decrescente. Portanto a série dada é convergente.

b)

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+50}.$$

$\lim a_n = 0$ como é evidente.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+1+50} - \frac{\sqrt{n}}{n+50} =$$

$$= \frac{n\sqrt{n+1} + 50\sqrt{n+1} - n\sqrt{n} - 51\sqrt{n}}{(n+51)(n+50)} =$$

$$= \frac{(n+50)\sqrt{n+1} - (n+51)\sqrt{n}}{(n+51)(n+50)};$$

$$(n+50)\sqrt{n+1} - (n+51)\sqrt{n} < 0 \iff$$

$$\iff (n+50)\sqrt{n+1} < (n+51)\sqrt{n} \iff$$

$$\iff (n+50)^2(n+1) < (n+51)^2 n \iff$$

$$\iff (n^2 + 100n + 2500)(n+1) < (n^2 + 102n + 2601)\, n \iff$$

$$\iff n^3 + 100n^2 + 2500n + n^2 + 100n + 2500 < n^3 +$$

$$+ 102n^2 + 2601n \iff$$

$$\iff -n^2 - n + 2500 < 0 \iff$$

$$\iff n^2 + n - 2500 > 0.$$

Como $\Delta = 1^2 - 4(-2500) > 0$ há um valor de n a partir do qual, de facto, $n^2 + n - 2500 > 0$.

Portanto $a_{n+1} - a_n < 0$. Ou seja: a_n é decrescente.

A série dada é convergente.

c)

$$a_n = \frac{1}{n^3}.$$

É um infinitésimo decrescente como é evidente.

A série é convergente.

d)

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim \dfrac{n+1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{1} = 1 \neq 0.$$

Portanto a série dada é divergente.

e)

$$\lim \frac{n^2}{1+n^2} = 1 \neq 0 .$$

Portanto a série dada é divergente.

10

Temos que considerar o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(4x-3)(4x-1)}\, dx$.

Mas,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} \frac{x}{(4x-3)(4x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{(4x-3)(4x-1)}$$

$$= \frac{1}{16} .$$

(finito e diferente de zero) se $\alpha + 1 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Portanto o integral é divergente e a série também.

11

a)

Consideremos a série dos módulos associada $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{|x|^{2n-1}}{2n-1}$.

Apliquemos o critério de D'Alembert:

$$\lim \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \frac{2n-1}{|x|^{2n-1}} = \lim |x|^2 \frac{2n-1}{2n+1} =$$

$$= |x|^2 \lim \frac{2n-1}{2n+1} = |x|^2 .$$

Para se ter convergência tem que ser

$$|x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 .$$

Vejamos agora o que acontece para $x = -1$ e $x = 1$.

$\underline{x = -1}$

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{3n-2}}{2n-1} .$$

Trata-se de uma série alternada em que $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$ é, evidentemente, decrescente e um infinitésimo. Portanto convergente pelo critério de Leibnitz

$\underline{x = 1}$

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ é também uma série alternada cuja convergência é garantida pelo critério de Leibnitz como para $x = -1$.

Portanto a série dada é convergente para $x \in [-1, 1]$ e divergente para $x \in\,]-\infty, -1[\; \cup\;]1, +\infty[$.

b)

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{n^n 2^n}$ é uma série de termos positivos. Podemos aplicar-lhe o critério de D'Alembert:

$$\lim \frac{x^{2n+2}}{(n+1)^{n+1}\,2^{n+1}}\;\frac{n^n 2^n}{x^{2n}} = \lim \frac{x^2}{2}\;\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{x^2}{2}\lim\frac{1}{n+1}\lim\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot 0 \cdot \frac{1}{e} = 0 < 1 .$$

Portanto a série é convergente para $x \in IR$.

c)

Considerando a série dos módulos e aplicando o critério de D'Alembert, tem-se

$$\lim \frac{x^{2n+4}}{(2n+3)(2n+4)}\;\frac{(2n+1)(2n+2)}{x^{2n+2}} =$$

$$= x^2 \lim \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+3)(2n+4)} = x^2 .$$

E $x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

$\underline{x = -1 \text{ ou } x = 1}$

$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ é uma série alternada nas condições do critério de Leibniz $\left(\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \to 0 \text{ e é descrescente}\right)$ e, portanto convergente.

Concluindo:

— série convergente para $x \in [-1, 1]$,

— série divergente para $x \in]-\infty, -1[\;\cup\;]1, +\infty[$.

d)

Procedendo como nos casos anteriores:

$$\lim \frac{|x-2|^{n+1}}{n+1}\;\frac{n}{|x-2|^n} = |x-2| \lim \frac{n}{n+1} =$$

$$= |x-2| ;$$

$$|x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3 .$$

$\underline{x = 1}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(-1)^n = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$ é a série harmónica alternada que, como se sabe, é convergente.

$\underline{x = 3}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(1)^n = \sum_{n\geq} \frac{1}{n}$ é a série harmónica que é divergente.

Em consequência:

— a série é convergente para $x \in [1, 3[$;

— a série é divergente para $x \in]-\infty, 1[\;\cup\; [3, +\infty[$.

e)

Como é costume façamos

$$\lim \frac{(n+1)\,|x-1|^n}{n\,|x-1|^{n-1}} = |x-1| \lim \frac{n+1}{n} =$$

$$= |x-1|;$$

$|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$

$\underline{x = 0}$

$\sum (-1)^n n$. Como é evidente é divergente porque $\lim (-1)^n n = \infty$.

$\underline{x = 2}$

$\sum n$ é divergente porque $\lim n = +\infty$.

A série é convergente para $x \in \,]0, 2[$ e divergente para $x \in \,]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

12

Sendo

$f(x) = \cos x, \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

Então

$$R_n = f^{(n+1)}(x_1)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

com $0 < x_1 < x$ ou $x < x_1 < 0$, ou seja:

$$R_n = \cos\left(x_1 + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Como $-1 < \cos\left(x_1 + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right) < 1$ tem-se, como é evidente, que $\lim R_n = 0$. Portanto o desenvolvimento dado é válido para $x \in IR$.

13

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x\log x} = \frac{1-1}{1\log 1} = \frac{0}{0}.$$

Aplicando a regra de Cauchy, tem-se

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x\log x} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x\frac{1}{x} + \log x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1+\log x} = \frac{2}{1} = 2.$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Mas

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= 1 \,.\, 1 = 1.$$

c)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + e^{4x}} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Aplicando a regra de Cauchy:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + e^{4x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4e^{4x}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

d)

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x^4} = e^{-(+\infty)} = e^{-\infty} = 0.$$

e)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x^3}} = \frac{1}{1 + e^{-(+\infty)}} =$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

14

a)

$$(x - 2)\, e^{-x^2 + 3x + 1} = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2;$$

$$e^{-x^2 + 3x + 1} > 0, \quad \forall_{x \in IR}.$$

b)

$$\log(x^2 - 5x + 7) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \lor x = 2.$$

c)

$$\log(5x + 1)\, e^{2x - 3} = 0 \Leftrightarrow \log(5x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x + 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

d)

$$e^{x^2 - 7x + 12} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \lor x = 4.$$

e)

$$e^{x-1} = -3.$$

Equação impossível porque $e^{x-1} > 0, \quad \forall_{x \in IR}$.

f)

$$\log(-x^2+2x-5)=1 \Leftrightarrow -x^2+2x-5=e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2+2x-5-e=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+5+e=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{1-(5+e)}\ ;$$

impossível em IR porque $1-(5+e)<0$.

15

$$\lim (n+1)^{\frac{1}{\log n}} = \lim_{x\to 0} (x+1)^{\frac{1}{\log x}} .$$

$$\lim_{x\to 0} (x+1)^{\frac{1}{\log x}} = (+\infty)^{\frac{1}{+\infty}} = (+\infty)^0 .$$

Mas,

$$\lim_{x\to+\infty} (x+1)^{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\log(x+1)}\right)^{\frac{1}{\log x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(x+1)}{\log x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1)}{\log x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1)}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1 ,$$

aplicando a regra de Cauchy.

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^{\frac{1}{\log x}} = e^1 = e$

e, portanto, $\lim (n+1)^{\frac{1}{\log n}} = e$.

16

a)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} =$$

$$= 1 + \xi x ,$$

em que

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} ,$$

e, portanto, $\lim\limits_{x\to 0} \xi = 1$.

b)

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots =$$

$$= x - x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \dots - (-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n} + \dots\right) =$$

$$= x - x^2\lambda$$

em que $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \dots - (-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n}$

e, como é evidente, $\lim_{x \to 0} \lambda = \frac{1}{2}$.

c)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots +$$

$$+ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots =$$

$$= 1 + \alpha x\left(1 + \frac{\alpha-1}{2!}x + \dots + \frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n-1} + \dots\right) =$$

$$= 1 + \alpha x \zeta.$$

em que

$$\zeta = 1 + \frac{\alpha-1}{\alpha!}x + \dots + \frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n-1}$$

e $\lim_{x \to 0} \zeta = 1$.

17

O desenvolvimento pedido tem a forma

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + R_2$$

em que

$$R_2 = \frac{x^3}{3!}f'''(x_1), \quad 0 < x_1 < x \quad \text{ou} \quad x < x_1 < 0.$$

a)

Com $f(x) = e^{1-x}$,

$f(0) = e^{1-0} = e$,

$f'(0) = (e^{1-x})'_{x=0} = (-e^{1-x})_{x=0} = -e$,

$f''(0) = (-e^{1-x})'_{x=0} = e$,

$f'''(x_1) = (-e^{1-x})_{x=x_1} = -e^{1-x_1}$.

Portanto,

$$e^{1-x} = e - xe + \frac{x^2}{2!}e - \frac{x^3}{3!}e^{1-x_1}.$$

b)

$$f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}}$$

$f(0) = 1$

$$f'(0)=\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}\right)'_{x=0}=\left(\frac{-\sqrt{1+x}-(1-x)\,\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}\right)_{x=0}=$$

$$=\left(\frac{-2(1+x)-(1-x)}{(1+x)^{3/2}}\right)_{x=0}=$$

$$=\left(\frac{-2-2x-1+x}{(1+x)^{3/2}}\right)_{x=0}=$$

$$=\left(\frac{-x-3}{(1+x)^{3/2}}\right)_{x=0}=-3\,.$$

$$f''(0)=\left(\frac{-x-3}{(1+x)^{3/2}}\right)'_{x=0}=$$

$$=\left(\frac{-(1+x)^{3/2}-(-x-3)\,\dfrac{3}{2}(1+x)^{1/2}}{(1+x)^{3}}\right)_{x=0}=$$

$$=\left(\frac{(1+x)^{1/2}\left(-1-x+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{2}\right)}{(1+x)^{3}}\right)_{x=0}=$$

$$=\left(\frac{(1+x)^{1/2}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}\right)}{(1+x)^{3}}\right)_{x=0}=\frac{7}{2}\,.$$

$$f'''(x_1)=\left(\frac{(1+x)^{1/2}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}\right)}{(1+x)^{3}}\right)'_{x=x_1}=$$

$$=\left(\frac{\left(\dfrac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}\right)+\dfrac{1}{2}(1+x)^{1/2}\right)(1+x)^{3}-(1+x)^{1/2}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{7}{2}\right)3(1+x)^{2}}{(1+x)^{6}}\right)_{x=x_1}=$$

$$=\left(\frac{\left(\dfrac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}\right)+\dfrac{1}{2}(1+x)^{1/2}\right)(1+x)-3(1+x)^{1/2}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}\right)}{(1+x)^{4}}\right)_{x=x_1}=$$

$$=\left(\frac{\dfrac{1}{2}(1+x)^{1/2}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}\right)+\dfrac{1}{2}(1+x)^{3/2}-3(1+x)^{1/2}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}\right)}{(1+x)^{4}}\right)_{x=x_1}=$$

$$=\left(\frac{-\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}\right)(1+x)^{1/2}+\dfrac{1}{2}(1+x)^{3/2}}{(1+x)^{4}}\right)_{x=x_1}=$$

$$=\frac{-\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{7}{2}\right)+\dfrac{1}{2}(1+x_1)}{(1+x_1)^{7/2}}\,.$$

Então, finalmente,

$$\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}=1-3x+\frac{7}{2}\,\frac{x^{2}}{2!}+\frac{-\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{7}{2}\right)+\dfrac{1}{2}(1+x_1)}{(1+x_1)^{7/2}}\,\frac{x^{3}}{3!}\,.$$

c)

$$f(x) = \log(1 - x^2).$$

$$f(0) = \log(1 - 0) = 0.$$

$$f'(0) = \left(\log(1 - x^2)\right)'_{x=0} =$$

$$= \left(\frac{-2x}{1 - x^2}\right)_{x=0} = 0.$$

$$f''(0) = \left(-\frac{2x}{1 - x^2}\right)'_{x=0} = \left(-\frac{2(1 - x^2) + 2x\,2x}{(1 - x^2)^2}\right)_{x=0} =$$

$$= \left(-\frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1 - x^2)^2}\right)_{x=0} = \left(-\frac{2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2}\right)_{x=0} = -2.$$

$$f'''(x_1) = \left(-\frac{2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2}\right)'_{x=x_1} =$$

$$= \left(-\frac{4x(1 - x^2)^2 - 2(1 - x^2)(-2x)(2 + 2x^2)}{(1 - x^2)^4}\right)_{x=x_1} =$$

$$= \left(-\frac{4x(1 - x^2) + 4x(2 + 2x^2)}{(1 - x^2)^3}\right)_{x=x_1} = \left(-\frac{4x(3 + x^2)}{(1 - x^2)^3}\right)_{x=x_1} =$$

$$= -\frac{4x_1(3 + x_1^2)}{(1 - x_1^2)^3}.$$

Portanto,

$$\log(1 - x^2) = -2\frac{x^2}{2!} - \frac{4x_1(3 + x_1^2)}{(1 - x_1^2)^3}\,\frac{x^3}{3!} =$$

$$= -x^2 - \frac{4x_1(3 + x_1)^2}{(1 - x_1^2)^3}\,\frac{x^3}{3!}.$$

18

Obviamente os desenvolvimentos pedidos são

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\,\frac{x_n}{n!} \quad \text{(série de MacLaurin).}$$

a)

$$f(x) = \operatorname{tg} x,$$

$$f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0,$$

$$f'(0) = (\sec^2 x)_{x=0} = 1,$$

$$f''(0) = (2\sec^2 x \operatorname{tg} x)_{x=0} = 0,$$

$$f'''(0) = (2(2\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + \sec^4 x))_{x=0} = 2,$$

$$f^{(4)}(0) = (2(4\sec^2 x \operatorname{tg}^3 x + 2\sec^2 x\, 2\operatorname{tg} x \sec^2 x + 4\sec^3 x \sec x \operatorname{tg} x))_{x=0} =$$

$$= (2(4\sec^2 x \operatorname{tg}^3 x + 4\operatorname{tg} x \sec^4 x + 4\sec^4 x \operatorname{tg} x))_{x=0} =$$

$$= (2(4\sec^2 x \operatorname{tg}^3 x + 8\sec^4 x \operatorname{tg} x))_{x=0} = 0.$$

$$f^{(5)}(0) = (2\,(8 \sec^2 x \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^3 x + 4 \sec^2 x\, 3 \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x +$$
$$+ 32 \sec^3 x \sec x \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} x + 8 \sec^6 x))_{x=0} =$$
$$= 2 \,.\, 8\,.$$

Então,

$$\operatorname{tg} x = 0 + 1 \,.\, x + 0\,\frac{x^2}{2!} + 2\,\frac{x^3}{3!} + 0\,\frac{x^4}{4!} + 2 \,.\, 8\,\frac{x^5}{5!} + \ldots =$$
$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$$

b)

$$f(x) = \log(\cos x),$$
$$f(0) = \log(\cos 0) = \log 1 = 0,$$
$$f'(0) = \left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)_{x=0} = -\operatorname{tg} 0 = 0,$$
$$f''(0) = (-\operatorname{tg} x)'_{x=0} = (-\sec^2 x)_{x=0} = -1,$$
$$f'''(0) = (-\sec^2 x)'_{x=0} = (-2 \sec x \sec x \operatorname{tg} x)_{x=0} =$$
$$= (-2 \sec^2 x \operatorname{tg} x)_{x=0} = 0\,.$$
$$f^{(4)}(0) = (-2\,(2 \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + \sec^4 x))_{x=0} = -2,$$
$$f^{(5)}(0) = (-2\,(4 \sec^2 x \operatorname{tg}^3 x + 4 \sec^2 x \operatorname{tg} x \sec^2 x + 4 \sec^3 x \sec x \operatorname{tg} x))_{x=0} =$$
$$= (-2\,(4 \sec^2 x \operatorname{tg}^3 x + 4 \sec^2 x \operatorname{tg} x + 4 \sec^4 x \operatorname{tg} x))_{x=0} = 0\,.$$
$$f^{(6)}(0) = (-2\,(8 \sec^2 x \operatorname{tg}^4 x + 12 \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x + 8 \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x +$$
$$+ 4 \sec^4 x + 16 \sec^4 x \operatorname{tg}^4 x + 4 \sec^6 x))_{x=0} =$$
$$= -2\,(4 + 4) = -16\,.$$

Então,

$$\log(\cos x) = 0 + 0\,\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + 0\,\frac{x^3}{3!} - 2\,\frac{x^4}{4!} - 16\,\frac{x^6}{6!} + \ldots =$$
$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \ldots$$

19

a)

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -x^n$$

(série geométrica de primeiro termo 1 e razão x). Desenvolvimento válido desde que $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

b)

$$\frac{1}{9-x^2} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{x^2}{9}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{9}\right)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{9^{n+1}}\,.$$

Série geométrica de primeiro termo $\frac{1}{9}$ e razão $\frac{x^2}{9}$, válido desde que

$$\frac{x^2}{9} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < x < 3.$$

c)

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 8} = \frac{1}{(x-2)(x-4)}$$

já que

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4.$$

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4}.$$

$$\begin{array}{rcl} A(x-4) & = & Ax - 4A \\ B(x-2) & = & Bx - 2B \\ \hline & & (A+B)x - 4A - 2B \end{array}$$

E

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -4A - 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ -2A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Portanto

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 8} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-4}.$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{-1}{2-x} = \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}}\,x^n$$

desde que $\left| \frac{x}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

$$\frac{1}{x-4} = \frac{-1}{4-x} = \frac{-\frac{1}{4}}{1 - \frac{x}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{4^{n+1}}\,x^n$$

desde que $\left| \frac{x}{4} \right| < 1 \Leftrightarrow -4 < x < 4$.

Assim

$$\frac{1}{x^2 - 6x + 8} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}}\,x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{4^{n+1}}\,x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)_{x^n},$$

desde que $-2 < x < 2$.

d)

$$\frac{x}{9+x} = x\,\frac{1}{9+x} = x\,\frac{\frac{1}{9}}{1 - \left(-\frac{x}{9}\right)} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9}\left(-\frac{x}{9}\right)^n =$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{x^n}{9^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{9^{n+1}},$$

desde que $\left| -\frac{x}{9} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 9 \Leftrightarrow -9 < x < 9$.

e)

$$\frac{2}{5+x} = \frac{2}{6+(x-1)} = \frac{2}{6-(-(x-1))} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1-(-\frac{x-1}{6})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(-\frac{x-1}{6}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3 \cdot 6^n} (x-1)^n ,$$

desde que

$$\left| -\frac{x-1}{6} \right| < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6 < x-1 < 6 \Leftrightarrow -5 < x < 7 .$$

f)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in IR \text{ como se sabe.}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Façamos o produto das duas séries:

$$a_0 b_0 = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2,$$

$$a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2},$$

$$a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3!} \cdot 1 =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{6+6+3+1}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3},$$

$$\vdots$$

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$$

visto que $b_n = 1, \ \forall_{n \in IN}$.

Portanto $\displaystyle \frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \right) x^n, \quad -1 < x < 1 .$

g)

$$(e^x \cos x)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (e^x)^{(n-p)} (\cos x)^{(p)}$$

aplicando a fórmula de Leibnitz.

Mas $(e^x)^{n-p} = e^x$,

$(\cos x)^p = \cos\left(x + p\frac{\pi}{2}\right)$.

Portanto

$$(e^x \cos x)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} e^x \cos\left(x + p\frac{\pi}{2}\right)$$

o que para $x = 0$ conduz a $\displaystyle \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos\left(p\frac{\pi}{2}\right)$.

Então, finalmente,

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos\left(p\frac{\pi}{2}\right)\right) \frac{x^n}{n!},$$

válido certamente para $x \in IR$.

h)

$$\frac{1}{(x-5)(x+3)} = \frac{1}{8}\frac{1}{x-5} - \frac{1}{8}\frac{1}{x+3} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+3}\right).$$

$$\frac{1}{x-5} = \frac{-1}{5-x} = \frac{-1}{3+2-x} = \frac{-1}{3-(x-2)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{x-2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}}$$

desde que

$$\left|\frac{x-2}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5.$$

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{5+x-2} = \frac{1}{5-(-(x-2))} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{-(x-2)}{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{-(x-2)}{5}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{5^{n+1}},$$

desde que

$$\left|-\frac{x-2}{5}\right| < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 < x-2 < 5 \Leftrightarrow -3 < x < 7.$$

Então, para $-1 < x < 5$

$$\frac{1}{(x-5)(x+3)} = \frac{1}{8}\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{5^{n+1}}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8}\left(\frac{(-1)^n}{5^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-2)^n.$$

i)

$$(\log(x+3))' = \frac{1}{x+3}.$$

$$\frac{1}{x+3} = \frac{\frac{1}{3}}{1-(-\frac{x}{3})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{3}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n.$$

Por primitivação obtém-se $\log(x+3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Para determinar C, faz-se $x = 0$ obtendo-se $\log 3 = C$.

Então

$$\log(x+3) = \log 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{para } |x| < 3.$$

j)

$$(\log x)' = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \frac{1}{1-(-(x-1))} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n,$$

desde que $|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Primitivando temos que $\log x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} + C$.

Fazendo $x = 1$ obtemos $C = 0$.

Então

$$(x-1)\log x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+2}}{n+1}, \quad 0 < x < 2.$$

20

$$\frac{1}{(2+x)(3-x)(1+x)} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{3-x} + \frac{C}{1+x}.$$

Como se sabe:

$$— A = \left[\frac{1}{(3-x)(1+x)}\right]_{x=-2} = \frac{1}{5(-1)} = -\frac{1}{5},$$

$$— B = \left[\frac{1}{(2+x)(1+x)}\right]_{x=3} = \frac{1}{5\,.\,4} = \frac{1}{20},$$

$$— C = \left[\frac{1}{(2+x)(3-x)}\right]_{x=-1} = \frac{1}{1\,.\,4} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{6-(-x+4)} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{x-4}{6}\right)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6}\left(-\frac{x-4}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n+1}} (x-4)^n,$$

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{-1-(x-4)} = \frac{-1}{1-\left(\frac{x-4}{-1}\right)} =$$

$$= \frac{-1}{1-(-(x-4))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)(-(x-4))^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x-4)^n.$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{5+(x-4)} = \frac{1}{5-(-(x-4))} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{x-4}{5}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5}\left(-\frac{x-4}{5}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} (x-4)^n .$$

$$\frac{1}{(2+x)(3-x)(1+x)} = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n+1}} (x-4)^n +$$

$$+ \frac{1}{20} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x-4)^n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} (x-4)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{5 \,.\, 6^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{20} + \frac{(-1)^n}{4 \,.\, 5^{n+1}} \right) (x-4)^n .$$

Como o desenvolvimento de $\frac{1}{2+x}$ é válido para

$$\left| -\frac{x-4}{6} \right| < 1 \Leftrightarrow |x-4| < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6 < x-4 < 6 \Leftrightarrow -2 < x < 10 ,$$

o de $\frac{1}{3-x}$ em $|x-4| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-4 < 1 \Leftrightarrow 3 < x < 5$,

e o de $\frac{1}{1+x}$ em

$$\left| -\frac{x-4}{5} \right| < 1 \Leftrightarrow |x-4| < 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 < x-4 < 5 \Leftrightarrow -1 < x < 9 ,$$

o desenvolvimento obtido é valido em $]\,3, 5\,[$.

Para responder à última parte da questão recordemos que, em geral, tem-se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(4)}{n!} (x-4)^n .$$

Então,

$$\frac{f^{(n)}(4)}{n!} = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{5 \,.\, 6^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{20} + \frac{(-1)^n}{4 \,.\, 5^{n+1}} \right)$$

pelo que

$$f^{(n)}(4) = n! \left(\frac{(-1)^{n+1}}{5 \,.\, 6^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{20} + \frac{(-1)^n}{4 \,.\, 5^{n+1}} \right).$$

21

Como facilmente se verifica $e^{-\frac{1}{x^2}}$ é prolongável por continuidade em $x = 0$:

$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\infty} = 0$. Portanto a função que vamos considerar é, de facto,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

Por outro lado,

$$\left(e^{-\frac{1}{x^2}} \right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2x}{x^4} = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} .$$

$$\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{(n)} = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\,\frac{2}{x^3}\right)^{n} =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{p}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{(n-p)}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{(p)} =$$

$$= 2\sum_{p=0}^{n}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{n-p}\frac{(-1)^p\,3\,(3+1)\ldots(3+p-1)}{x^{3+p}},$$

para $n \geq 2$, aplicando a fórmula de Leibnitz. Mostrar-se-ia facilmente que

$f^{(n)}(0) = 0, \quad \underset{n \in IN}{\forall}$.

Portanto, ter-se-ia

$$R_n = \frac{2\sum\limits_{p=0}^{n+1}\left(e^{-\frac{1}{x_1^2}}\right)^{(n+1-p)}\dfrac{(-1)^p\,3\,(3+1)\ldots(3+p-1)}{x_1^{3+p}}}{(n+1)!}\,x^{n+1},$$

$0 < x_1 < x$ ou $x < x_1 < 0$. Vê-se facilmente que não se pode garantir que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ para $x_1 \in V_\varepsilon(0)$. De facto, considerando a parcela $(n+1)$ do somatório tem-se em R_n uma parcela dada em parte por,

$$(-1)^{n+1}\,\frac{3\,(3+1)\ldots(3+n)}{(n+1)!} = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}\,\frac{(n+3)!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(n+3)(n+2),$$

que é um infinitamente grande. Assim, $f(x)$ não se pode desenvolver em série de MacLaurin.

22

Consideremos a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$. Apliquemos-lhe o critério de D'Alembert:

$$\lim \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{2^n} = 2\lim\frac{1}{n+1} = 2\times 0 = 0 < 1.$$

Portanto $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ (série de termos não negativos) é convergente. Em consequência $\frac{2^n}{n!}\to 0$.

23

a)

$$\int_0^1 e^x\,dx = [\,e^x]_0^1 = e - 1\,.$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\int_0^1 e^x\,dx\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e-1)^n}{n!} = e^{e-1},$$

visto que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x, \quad \underset{x\in IR}{\forall}$.

b)

$$\int_1^2 (1 + x^2)\, dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 2 + \frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} =$$

$$= 1 + \frac{7}{3} = \frac{10}{3}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\int_1^2 (1 + x^2)\, dx\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \operatorname{sen} \frac{10}{3},$$

visto que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} x, \quad \forall_{x \in IR}$.

c)

$$\sum_{n=0}^{2} \left(\frac{2^{n+2}}{n!} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= 4e^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ é uma série de Mengoli.

$u_n = \dfrac{1}{n+1}$ e $s = u_1$. $\lim u_n = \dfrac{1}{2} - \lim \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Portanto, a soma da série dada é $4e^2 + \dfrac{1}{2}$.

d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-a} \frac{a^n}{n!} = e^{-a} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{a^n}{n!} = e^{-a} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{a^n}{(n-1)!} =$$

$$= e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{a^{n+1}}{n!} = e^{-a} a \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{a^n}{n!} =$$

$$= e^{-a} a \left(\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{a^n}{n^{n!}}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} =$$

$$= e^{-a} a \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} + e^a\right) =$$

$$= e^{-a} a \left(a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} + e^a\right) =$$

$$= e^{-a} a (a e^a + e^a) = a^2 + a.$$

24

Ambas as séries são convergentes. Note-se que são séries alternadas nas condições do critério de Leibnitz. Como se sabe, o erro cometido ao substituir a soma da série pela de um número finito dos seus termos é inferior ao módulo do primeiro termo desprezado.

a)

Sendo p a ordem do primeiro termo desprezado.

$$\frac{1}{p^2} = 0{,}01 \iff p^2 = 100 \iff p = 10.$$

Basta assim calcular,

$$\sum_{n=1}^{9} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{1}{36} - \frac{1}{49} + \frac{1}{64} - \frac{1}{81}.$$

b)

Tal como em *a)* p é a ordem do primeiro termo desprezado.

$$\frac{1}{p^3} = 0{,}01 \iff p^3 = 100 \iff p = \sqrt[3]{100} \approx 4{,}64 \ldots.$$

Basta assim calcular,

$$\sum_{n=1}^{4} (-1)^n \frac{1}{n^3} = -1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \frac{1}{64}.$$

25

a)

É uma série de termos não negativos. Apliquemos-lhe o critério de D'Alembert:

$$\lim \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{3^n} = 3 \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Portanto a série dada é convergente.

Por outro lado

— $a_M = \dfrac{3^M}{M!}$

— $r_M = \dfrac{3}{M+1}$ $(\lim r_n = 0)$.

Então um majorante do erro é dado por,

$$\frac{a_M}{1 - r_M} = \frac{a_{10}}{1 - r_{10}} = \frac{3^{10}}{10!} \frac{1}{1 - \frac{3}{11}} =$$

$$= \frac{11}{8} \cdot \frac{3^{10}}{10!} \approx 0{,}0223744419.$$

b)

Procedendo como no caso anterior:

— $a_M = \dfrac{4^M}{M!}$,

— $r_M = \dfrac{4}{M+1}$.

$$\frac{a_M}{1 - r_M} = \frac{4^{10}}{10!} \frac{1}{1 - \frac{4}{11}} = \frac{11}{7} \frac{4^{10}}{10!} \approx 0{,}4550791131.$$

26

a)

A série dos módulos é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^n} 2^n$.

Aplicando o critério de Cauchy, tem-se:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{|x|^n 2^n}{n^n}} = \lim \frac{|x|2}{n} = 2|x| \lim \frac{1}{n} = 0 < 1 .$$

Portanto a série dada é convergente para $x \in IR$.

b)

Agora a série dos módulos é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\log x|^n}{n(n+2)}$. Aplicando o critério de D'Alembert tem-se:

$$\lim \frac{|\log x|^{n+1}}{(n+1)(n+3)} \frac{n(n+2)}{|\log x|} = |\log x| \lim \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = |\log x| .$$

Para se ter convergência tem que ser

$$|\log x| < 1 \Leftrightarrow -1 < \log x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < e .$$

$\underline{x = \frac{1}{e}}$

Temos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$ que é uma série alternada convergente (basta atender ao critério de Leibnitz).

$\underline{x = e}$

Temos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. Como $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$,

trata-se de uma série de Mengoli convergente:

$$s = u_1 + u_2 - 2 \lim u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 2 \lim \frac{1}{2n} = \frac{3}{4} .$$

A série é convergente para $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$.

Divergente para $x \in \left]-\infty, \frac{1}{e}\right[\cup \left]e, +\infty\right[$.

c)

É uma série de termos não negativos. Apliquemos o critério de D'Alembert:

$$\lim \frac{e^{nx+x}}{(n+1)} \frac{n!}{e^{nx}} = e^x \lim \frac{1}{n+1} = e^x \cdot 0 = 0 .$$

Portanto a série dada é convergente para todo o $x \in IR$.

27

a)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_3$$

sendo $R_3 = \frac{f^{(x)}(x_1)}{4!}x^4$ com $0 < x_1 < x$ ou $x < x_1 < 0$.

Assim,

— $f(0) = 1$,

— $f'(0) = (-2x\,e^{-x^2})_{x=0} = 0$,

— $f''(0) = (-2\,e^{-x^2} - 2x(-2x)\,e^{-x^2})_{x=0} =$

$= (-2e^{-x^2} + 4x^2\,e^{-x^2})_{x=0} = -2$,

— $f'''(0) = (4x\,e^{-x^2} + 8x\,e^{-x^2} - 8x^3\,e^{-x^2})_{x=0} = 0$,

— $f^{(4)}(x_1) = 4e^{-x_1^2} - 8x_1^2\,e^{-x_1^2} + 8e^{-x_1^2} - 16x_1^2\,e^{-x_1^2} -$

$- 24x_1^2\,e^{-x_1^2} + 16x_1^4\,e^{-x_1^2} =$

$= (12 - 48x_1^2 + 16x_1^4)\,e^{-x_1^2}$.

Portanto, $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{(3 - 12x_1^2 + 4x_1^4)\,e^{-x_1^2}}{6}\,x^4.$

b)

Note-se que a aplicação da Regra de Barrow ao cálculo de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ é problemática porque não se consegue primitivar elementarmente e^{-x^2}.

De acordo com a sugestão:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^1 (1 - x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

c)

O erro cometido é dado por

$$\left|\int_0^1 \frac{(3 - 12x_1^2 + 4x_1^4)\,e^{-x_1^2}}{6}\,x^4\,dx\right| = \left|\left(\frac{1}{2} - 2x_1^2 + \frac{2}{3}x_1^4\right)e^{-x_1^2}\left[\frac{x_5}{5}\right]_0^1\right| =$$

$$= \frac{1}{5}\,e^{-x_1^2}\left|\frac{1}{2} - 2x_1^2 + \frac{2}{3}x_1^4\right| \leq \frac{1}{5}\cdot 1\left(\frac{1}{2} + 2\,|x_1|^2 + \frac{2}{3}\,|x_1|^4\right)$$

porque $e^{-x_1^2} < 1$ e $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

Como $x_1 \leq 1$ o majorante pedido vem

$$\frac{1}{5}\,\frac{3 + 12 + 4}{6} = \frac{19}{30}.$$

d)

Mostra-se facilmente que,

$$\lim \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}\,x^n = 0, \quad \forall_{x \in IR}.$$

e)

Podemos fazê-lo recorrendo a $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Substituindo x por $-x^2$ obtemos

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{n!} =$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

f)

$$(x^2-1)\,e^{-x^2} = (x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(n+1)}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)\,x^{2(n+1)}}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^{2n}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} =$$

$$= -1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{x^{2n}}{n!}.$$

g)

$$2^{-x^2} = (e^{\log 2})^{-x^2} = e^{-(x\sqrt{\log 2})^2}.$$

Basta assim, no desenvolvimento obtido em *e)*, substituir x por $x\sqrt{\log 2}$:

$$2^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x\sqrt{\log 2})^{2n}}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\log^n 2)\,\frac{x^{2n}}{n!}.$$