Tópicos de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

Noções elementares de Lógica

Carla Mendes

Dep. Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

2010/2011

Noções elementares de lógica

A lógica desempenha um papel fundamental em qualquer área de aprendizagem, especialmente em Matemática e em Ciências da Computação.

Em Ciências da Computação a lógica é utilizada, por exemplo, no desenvolvimento de linguagens de programação e na verificação da correcção de programas.

A lógica consiste no estudo dos princípios e das técnicas do raciocínio, procurando definir linguagens formais que permitam representar de forma precisa e sem ambiguidade a linguagem natural e definindo regras que permitam a construção rigorosa e sistemática de argumentos que sejam válidos.

Noções elementares de lógica

Um sistema lógico fica definido pelas seguintes componentes:

- **sintaxe** - conjunto de símbolos e regras de formação que definem as palavras, designadas por *fórmulas*, que podem ser utilizadas para representar de forma precisa, concisa e sem ambiguidade a linguagem natural (ou uma parte desta linguagem);
- **semântica** - conjunto de regras que associam um significado às fórmulas;
- **sistema dedutivo** - conjunto de fórmulas, designadas por *axiomas*, e de regras, designadas por *regras de inferência*, utilizados na construção de argumentos.

Ao longo dos anos foram definidos diversos sistemas lógicos. Nesta unidade curricular estudamos algumas noções básicas associadas ao Cálculo Proposicional Clássico e ao Cálculo de Predicados Clássico.

Relativamente ao Cálculo Proposicional Clássico apresentam-se alguns conceitos fundamentais associados à sua sintaxe e à sua semântica.

Em lógica é essencial o rigor e a precisão, dai a necessidade de uma linguagem formal que permita representar de forma clara e sem ambiguidade a linguagem natural.

Em linguagem natural podemos encontrar diversos tipos de frases - declarativas, exclamativas, interrogativas, imperativas - porém, na construção de um argumento recorremos somente a frases declarativas.

As frases podem ser classificadas em simples ou compostas.

Uma **frase declarativa simples** tem, gramaticalmente falando, um sujeito e um predicado.

São exemplos de frases simples as seguintes:

- Lisboa é a capital de Portugal.
- O João gosta de Lógica.
- Todo o número inteiro é par.

A partir de frases simples e recorrendo a palavras tais como "não", "e", "ou", "se ... então", "... se e só se ..."obtêm-se frases mais complexas designadas por **frases compostas**.

Por exemplo:

- Lisboa é a capital de Portugal e é a cidade do país com o maior número de habitantes.
- Se o João gosta de Lógica então é bom aluno a Tópicos de Matemática e a Lógica Computacional.
- Se todo o número inteiro é par, então 7 é divisível por 2.

Cálculo Proposicional Clássico (Sintaxe)

A linguagem formal do Cálculo Proposicional permite representar de forma precisa uma parte significativa da linguagem natural. Vejamos quais os símbolos e regras que definem a linguagem do Cálculo Proposicional.

No Cálculo Proposicional cada frase simples é encarada como um elemento indivisível (não se diferenciando partes da afirmação tais como o nome ou o verbo). Sendo assim, cada frase simples será representada por uma letra minúscula $p, q, r, s, ...$ (possivelmente com índices) - a estes símbolos damos a designação de **variáveis proposiconais**.

Quanto às frases compostas, estas podem ser representadas recorrendo a variáveis proposicionais e aos símbolos $\neg$, $\wedge$, $\vee$ $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$, chamados **conectivos proposicionais** (e designados, respectivamente, por **negação**, **conjunção**, **disjunção**, **implicação** e **equivalência**).

Representando por p e q duas frases declarativas:

- A frase "não p" designa-se por **negação de** p e é representada por $\neg p$. A $\neg p$ também é possivel associar uma das seguintes leituras: "é falso p", "não é verdade p".
- A frase "p e q" é designada por **conjunção de** p **e** q e é representada por $p \wedge q$.
- A frase "p ou q" designa-se por **disjunção de** p **e** q e é representada por $p \vee q$.

- A frase "Se p, então q" designa-se por **implicação de** p, q e é representada por $p \Rightarrow q$. A $p \Rightarrow q$ também se associa uma das seguintes leituras: "p implica q", "p é suficiente para q", "q é necessário para p", "q se p", "q sempre que p", "p somente se q". A p dá-se a designação de **antecedente** ou **hipótese** da implicação e a q dá-se a designação de **consequente** ou **conclusão**.

- A conjunção das implicações "Se p então q" e "Se q então p" pode ser expressa por "p se e só se q". Esta última frase designa-se por **equivalência de** p e q e é representada por $p \Leftrightarrow q$. A $p \Leftrightarrow q$ também se associa uma das leituras: "p é equivalente a q", "p é necessário e suficiente para q".

Cálculo Proposicional Clássico (Sintaxe)

Na representação de frases compostas podem também ocorrer os símbolos auxiliares "(" e ")", os quais são utilizados no sentido de evitar ambiguidade na representação das frases.

Exemplo 1.1

As frases compostas do exemplo anterior podem ser representadas por

- $(p_0 \wedge p_1)$;
- $(p_2 \Rightarrow (p_3 \wedge p_4))$;
- $(p_5 \Rightarrow p_6)$

onde as variáveis p_0 *a* p_6 *representam, respectivamente, as frases "Lisboa é a capital de Portugal", "Lisboa é a cidade do país com o maior número habitantes", "O João gosta de Lógica", "O João é bom aluno a Tópicos de Matemática", "O João é bom aluno a Lógica Computacional", "Todo o número inteiro é par", "7 é divisível por 2".*

Cálculo Proposicional Clássico (Sintaxe)

Conhecidos os símbolos que definem o alfabeto da linguagem do Cálculo Proposicional, definem-se, agora, as palavras desta mesma linguagem.

Definição 1.2

O conjunto de **fórmulas do Cálculo Proposicional**, *também designado por* **linguagem do Cálculo Proposicional**, *é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:*

(F_1) *toda a variável proposicional é uma fórmula;*

(F_2) *se φ é uma fórmula, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula;*

(F_3) *se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$ é uma fórmula;*

(F_4) *se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \vee \psi)$ é uma fórmula;*

(F_5) *se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \Rightarrow \psi)$ é uma fórmula;*

(F_6) *se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ é uma fórmula.*

Cálculo Proposicional Clássico (Sintaxe)

Exemplo 1.3

- *A palavra* $((\neg p_0) \Rightarrow (p_1 \vee p_2))$ *é uma fórmula do Cálculo Proposicional. De facto*
    1. p_0, p_1 *e* p_2 *são fórmulas, pela regra* (F_1) *da definição anterior ;*
    2. $(\neg p_0)$ *é fórmula, por 1. e pela regra* (F_2)*;*
    3. $(p_1 \vee p_2)$ *é fórmula, por 1. e pela regra* (F_4)*;*
    4. $((\neg p_0) \Rightarrow (p_1 \vee p_2))$ *é fórmula, por 2., 3. e pela regra* (F_5)*.*

- *As palavras* $\neg p_0$, $\neg(p_1)$, $p_1 \vee p_3$ *não são fórmulas do Cálculo Proposicional.*

Cálculo Proposicional Clássico (Sintaxe)

Para que uma palavra sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional seja considerada uma fórmula, os parêntesis têm de ocorrer na palavra de acordo com as regras que definem o conjunto de fórmulas. Porém, para simplificação de escrita, é usual omitir os parêntesis extremos e os parêntesis à volta da negação. Interpretando os conectivos como operações no conjunto de fórmulas, convenciona-se a seguinte prioridade na aplicação dos conectivos:

1. $\neg$
2. $\vee$ e $\wedge$
3. $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

Por exemplo, a palavra $\neg p_0 \wedge p_1 \rightarrow \neg p_2$ será usada como representação da fórmula $(((\neg p_0) \wedge p_1) \rightarrow (\neg p_2))$.

Até ao momento estudámos, apenas, a sintaxe do Cálculo Proposicional, sem darmos qualquer significado às fórmulas. Uma fórmula por si só não tem qualquer significado, este depende da interpretação associada aos símbolos.

Por exemplo, a fórmula $p_0 \Rightarrow p_1$ pode representar qualquer uma das afirmações seguintes

- Se $2 \times 7 = 14$, então $1 + 2 \times 7 = 15$.
- Se $2 \times 7 = 14$, então $1 + 2 \times 7 = 16$.

sendo a primeira sentença uma afirmação verdadeira e a segunda uma afirmação falsa.

A semântica do Cálculo Proposicional consiste na atribuição de valores de verdade às suas fórmulas.

Cálculo Proposicional Clássico (Semântica)

Em lógica clássica são considerados dois valores de verdade.

Definição 1.4

Os **valores de verdade** *(ou* **valores lógicos***) do Cálculo Proposicional são* **verdadeiro** *(ou* **V**, *ou* **1***) e* **falso** *(ou* **F**, *ou* **0***).*

Em lógica interessa considerar frases declarativas sobre as quais se possa decidir sobre o seu valor lógico.

Definição 1.5

Designa-se por **proposição** *uma frase declarativa sobre a qual é possível dizer objectivamente se é verdadeira ou falsa (ainda que não sejamos capazes de, no momento actual, determinar se a afirmação é verdadeira ou não).*

Exemplo 1.6

Consideremos as sentenças seguintes:

1. *Lisboa é a capital de Portugal.*
2. *Que horas são?*
3. $2 + 3 = 6$.
4. *Toma uma chávena de café.*
5. *2+x=7.*
6. *Esta frase é falsa.*
7. *Todo o número maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos.*
8. *2 é um número par e todo o número primo é ímpar.*

- As sentenças 1., 3., 7. e 8. são proposições (a afirmação 1. é verdadeira e as afirmações 3. e 8. são falsas; quanto à afirmação 7., conhecida por Conjectura de Goldbach's, não existe, até ao momento actual, uma prova da sua veracidade ou da sua falsidade, porém, esta afirmação é uma proposição pois será possível associar-lhe um e um só dos dois valores lógicos).
- As restantes sentenças não são proposições: no caso das sentenças 2. e 4. não temos frases declarativas, pelo que não é possível associar-lhes um dos valores verdadeiro ou falso; quanto à sentença 5., esta não é nem verdadeira nem falsa, uma vez que o valor de x é desconhecido; no caso da sentença 6. não se consegue decidir se esta é verdadeira ou falsa (a atribuição do valor verdadeiro ou do valor falso a esta afirmação conduz a uma contradição - a uma afirmação deste tipo damos a designação de **paradoxo**).

Cálculo Proposicional Clássico (Semântica)

Uma proposição diz-se simples se se trata de uma frase declarativa simples e diz-se composta caso seja uma frase declarativa composta.

A decisão sobre o valor lógico de uma frase pode depender do contexto em que esta é considerada. Por exemplo, a afirmação “Este livro é vermelho” pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do livro em causa.

A veracidade de uma frase composta pode também depender do contexto em que se insere, mas para avaliar se esta é verdade basta saber o que acontece com as frases simples que a compõem. A afirmação

”este livro está escrito numa língua estrangeira e tem uma capa vermelha”

é verdade para alguns livros e falsa para outros, mas será verdadeira sempre que as afirmações simples que a compõem sejam verdadeiras.

Cálculo Proposicional Clássico (Semântica)

No Cálculo Proposicional não se pretende estudar o processo de determinar se uma frase simples é ou não verdade, mas sim, como determinar a verdade de frases compostas a partir da verdade ou falsidade das frases que a compõem.

Estudamos de seguida o significado associado a cada um dos conectivos proposicionais referidos anteriormente. Esse mesmo significado pode ser expresso de forma clara através de tabelas designadas por **tabelas de verdade**.

Dada uma proposição arbitrária p, a sua negação tem um valor lógico contrário ao de p. A relação entre o valor lógico de p e o valor lógico de $\neg p$ pode ser representado através da seguinte tabela de verdade:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Dadas duas proposições p e q, a conjunção de p e q é verdadeira somente se ambas as proposições que a compõem são verdadeiras. A tabela de verdade associada ao conectivo $\wedge$ é a seguinte:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemplo 1.7

- *A proposição "100 é divisível por 4 e 5 é um número primo" é verdadeira, pois ambas as proposições que compõem esta conjunção são verdadeiras.*
- *A afirmação "100 é divisível por 4 e 5 é um número par" é falsa, pois a proposição "5 é um número par" é falsa.*

Cálculo Proposicional Clássico (Semântica)

Dadas duas proposições p e q, a disjunção de p e q é verdadeira se, pelo menos, uma das proposições que a compõem é verdadeira. O significado do conectivo $\vee$ é dado pela tabela seguinte:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exemplo 1.8

- *A proposição "100 não é divisível por 4 ou 5 não é um número primo" é falsa, pois ambas as proposições que a compõem são falsas.*
- *A proposição "100 é divisível por 4 ou 5 é um número par" é verdadeira, pois uma das proposições desta disjunção é verdadeira.*

Cálculo Proposicional Clássico (Semântica)

Dadas duas proposições p e q, $p \Rightarrow q$ é verdadeira se q é verdadeira sempre que p é verdadeira. O significado do conectivo $\Rightarrow$ é dado pela tabela seguinte:

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exemplo 1.9

Das proposições a seguir consideradas

- *"Se* $1 > 3$*, então* $1 > 2$*."*
- *"Se* $1 > 3$*, então* $1 > 4$*."*
- *"Se* $3 < 2$*, então* $3 < 4$*."*
- *"Se* $3 < 2$*, então* $3 < 1$*."*

a primeira proposição é verdadeira, a segunda é falsa e as duas últimas são verdadeiras.

Dadas duas proposições p e q, a proposição $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira se ambas as proposições tiverem o mesmo valor lógico, tal como é definido na tabela seguinte:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemplo 1.10

Das proposições a seguir consideradas

- "$1 + 1 = 2$ *se e só se* $2 + 4 = 6$."
- "$1 + 1 = 3$ *se e só se* $2 + 4 = 7$."
- "$1 > 3$ *é equivalente a* $3 > 1$."

as duas primeiras são verdadeiras e a terceira é falsa.

Cálculo Proposicional Clássico (Semântica)

Conhecidos os valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula, esta tem associado um e um só valor lógico. Na análise de qual será o valor lógico de uma fórmula, relacionado-o com os valores lógicos das variáveis que nela ocorrem, é útil o recurso a tabelas de verdade.

Exemplo 1.11

Construamos a tabela de verdade de $((\neg p \vee q) \Rightarrow r)$. *Na construção desta tabela, começamos por considerar todas as combinações possíveis dos valores lógicos de* p, q *e* r *(tendo em conta que cada variável pode assumir um dos dois valores lógicos, então existem* 2^3 *combinações possíveis). Seguidamente calculamos o valor lógico de* $(\neg p)$, *o qual será usado para determinar o valor lógico de* $(\neg p \vee q)$. *Por último, determina-se o valor lógico da fórmula* $((\neg p \vee q) \Rightarrow r)$.

Exemplo 2.11 (continuação)

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \Rightarrow r$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0

Se φ é uma fórmula com n variáveis proposicionais, então existem 2^n combinações possíveis para os valores lógicos das variáveis que ocorrem em φ. Logo a tabela de φ tem 2^n linhas.

Existem fórmulas que, devido à sua forma, assumem o valor lógico verdadeiro qualquer que seja a combinação dos valores lógicos das variáveis que nelas ocorrem.

Definição 1.12

Designa-se por **tautologia** *uma fórmula que assume sempre o valor lógico verdadeiro, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.*

Exemplo 1.13

A fórmula $p \vee \neg p$ *é uma tautologia. De facto, da tabela de verdade de* $p \vee \neg p$ *conclui-se que a fórmula assume sempre o valor lógico verdadeiro.*

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

A negação de uma tautologia é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso.

Definição 1.14

Designa-se por **contradição** *uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.*

Exemplo 1.15

A fórmula $p \wedge \neg p$ é uma contradição, tal como se pode concluir a partir da sua tabela de verdade:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

Existem fórmulas proposicionais que, embora distintas, assumem o mesmo valor lógico para cada uma das combinações dos valores lógicos das variáveis que as compõem. Sendo φ e ψ duas fórmulas nessas condições é simples perceber que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Definição 1.16

Sejam φ e ψ duas fórmulas proposicionais. Diz-se que φ e ψ são **logicamente equivalentes** *quando a fórmula proposicional $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Neste caso, $\varphi \Leftrightarrow \psi$ diz-se uma* **equivalência lógica**.

Apresentam-se de seguida algumas das equivalências lógicas mais conhecidas e frequentemente utilizadas.

Proposição 1.17

Dadas fórmulas proposicionais φ, ψ e σ, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

(*associatividade*)
$((\varphi \vee \psi) \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee (\psi \vee \sigma))$; $((\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge (\psi \wedge \sigma))$;

(comutatividade)
$(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$; $(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$;

(idempotência)
$(\varphi \vee \varphi) \Leftrightarrow \varphi$; $(\varphi \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$;

(elemento neutro)
$(\varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi)) \Leftrightarrow \varphi$; $(\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)) \Leftrightarrow \varphi$;

Proposição 1.17 (continuação)

(elemento absorvente)

$(\varphi \vee (\psi \vee \neg\psi)) \Leftrightarrow (\psi \vee \neg\psi);$ $\qquad$ $(\varphi \wedge (\psi \wedge \neg\psi)) \Leftrightarrow (\psi \wedge \neg\psi);$

(leis de De Morgan)

$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi);$ $\qquad$ $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi);$

(dupla negação)

$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi;$

$(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi);$

$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi).$

Dem:

Mostremos que as fórmulas $\varphi \Rightarrow \psi$ e $\neg\varphi \vee \psi$ são logicamente equivalentes. Construindo a tabela de verdade de $(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\neg\varphi \vee \psi$	$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

concluímos que esta fórmula é uma tautologia e, portanto, as fórmulas $\varphi \Rightarrow \psi$ e $\neg\varphi \vee \psi$ são logicamente equivalentes.

(Exercício: Fazer a prova das restantes equivalências lógicas.)

Na secção anterior referimos que frases tais como "x é um inteiro ímpar" e "x=y" não são proposições, uma vez que o seu valor lógico pode ser o de verdade ou o de falsidade, dependendo dos valores de x e y.

Porém, no estudo de qualquer teoria matemática é frequente encontrarmos frases que fazem referência a objectos genéricos representados por letras - às quais damos a designação de **variáveis**.

Frases como estas são objecto de estudo de um ramo da lógica designado por Cálculo de Predicados. Nesta secção não temos por objectivo aprofundar o estudo de Cálculo de Predicados, mas apenas estudar algumas noções elementares que permitam a familiarização com o simbolismo, o significado, o uso e a negação de frases quantificadas.

Em frases que envolvam variáveis está implícito um domínio de discurso designado por **universo** ou **domínio de variação** de x. Por exemplo, na frase "x é um inteiro ímpar" a variável x refere-se a um inteiro, logo o universo da variável x é o conjunto $\mathbb{Z}$.

A frase "x é um inteiro ímpar' não é uma proposição, porém se substituirmos x por valores do seu universo obtemos frases às quais já é possível associar um valor de verdade ou de falsidade; por exemplo, "2 é um inteiro ímpar" e "3 é um inteiro ímpar" são proposições com o valor lógico falso e verdadeiro, respectivamente.

Definição 1.18

A uma frase declarativa que faça referência às variáveis x_1, ..., x_n, cujo valor lógico dependa da substituição destas variáveis por valores do seu domínio de variação e que se torna numa proposição sempre que estas são substituídas por valores do universo dá-se a designação de **predicado** *nas variáveis x_1, ..., x_n.*

Cálculo de Predicados

Um predicado nas variáveis x_1, ..., x_n será representado por uma letra minúscula $p, q, r, \ldots$ (possivelmente com índices) seguida das variáveis que ocorrem no predicado, as quais são colocadas entre parêntesis e separadas por vírgulas.

Exemplo 1.19

Os predicados "x é um inteiro ímpar" e "x é maior do que y" podem ser representados, respectivamente, por $p(x)$ e por $q(x, y)$.

A substituição das variáveis de um predicado por valores concretos do seu universo não é a única forma de o converter numa proposição. Tal também pode ser conseguido através do uso de quantificadores.

Cálculo de Predicados (Quantificadores)

Por exemplo, a partir do predicado "2+x=3" podemos construir as frases

- "Para todo o x, 2+x=3"
- "Existe um x tal que $2 + x = 3$"

as quais são proposições, uma vez que é possível associar-lhes um valor lógico.

Se $p(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n)$ é um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, a frases tais como

"Para todo x, $p(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n)$",

"Qualquer que seja x, $p(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n)$",

"Para cada x, $p(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n)$"

dá-se a designação de **quantificação universal** e serão representadas por $\forall_x\, p(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n)$. Ao símbolo $\forall$ chamamos **quantificador universal** e é usual associar-lhe uma das seguintes leituras "todo", ´´para todo", ´´qualquer que seja", "para cada".

Cálculo de Predicados (Quantificadores)

No caso em que $p(x)$ é um predicado na variável x, a frase representada por "$\forall_x \, p(x)$" é uma proposição.
A proposição "$\forall_x \, p(x)$" será verdadeira se a proposição $p(t)$ for verdadeira para todo o elemento t do domínio de variação de x, também designado por **universo de quantificação de** x. Por conseguinte, caso exista um elemento t do universo de quantificação para o qual a proposição $p(t)$ seja falsa, a proposição "$\forall_x \, p(x)$" é falsa.

Exemplo 1.20

Se considerarmos que p(x) representa o predicado "se x é um número primo, então x é um número ímpar" e que o universo de quantificação de x é o conjunto dos números naturais, a proposição "$\forall_x \, p(x)$" é falsa, uma vez que $2 \in \mathbb{N}$ e $p(2)$ é falsa.
Se $q(x)$ representar o predicado "$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$" e se o universo de quantificação for o conjunto dos reais, a proposição "$\forall_x \, q(x)$" é verdadeira, uma vez que a igualdade anterior é válida para qualquer real.

Cálculo de Predicados (Quantificadores)

Se $p(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n)$ é um predicado nas variáveis $x_1, \ldots, x, \ldots, x_n$, frases tais como

"Existe x tal que $p(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n)$",

"Para algum x, $p(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n)$"

são designadas por **quantificação existencial** e serão representadas por "$\exists_x \, p(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n)$". Ao símbolo $\exists$ dá-se a designação de **quantificador existencial** e é usual associar-lhe uma das leituras "Existe" ou "Para algum".

No caso em que $p(x)$ representa um predicado na variável x, a frase representada por "$\exists x \, p(x)$" é uma proposição.
A proposição "$\exists_x \, p(x)$" é verdadeira se a proposição $p(t)$ for verdadeira para algum elemento t do universo de quantificação. Assim, se não existir qualquer elemento t do universo de quantificação para o qual a proposição $p(t)$ seja verdadeira, a proposição "$\exists_x \, p(x)$" é falsa.

Cálculo de Predicados (Quantificadores)

Exemplo 1.21

Se p(x) representar o predicado "$2 + x = 3$" e se o universo de quantificação for o conjunto dos números naturais, então a proposição "$\exists_x\, p(x)$" é verdadeira, pois 1 é um natural e $p(1)$ é verdade.
No caso em que $q(x)$ representa o predicado "$x^2 + 1 = 0$" e se considera o conjunto dos números reais para universo de quantificação, a proposição "$\exists_x\, q(x)$" é falsa, uma vez que esta equação não tem soluções em $\mathbb{R}$.

Observação: Quando o universo de uma dada quantificação é um determinado conjunto U, escrevemos, por vezes, $\exists_{x\in U}\, p(x)$ (resp. $\forall_{x\in U}\, p(x)$) em vez de $\exists_x\, p(x)$ (resp. $\forall_x\, p(x)$).
Por exemplo, a frase "Existe um natural x tal que $2 + x = 3$" pode ser representada por "$\exists_{x\in\mathbb{N}}\, 2 + x = 3$".

Relativamente ao predicado "$2 + x = 3$", prova-se que o número natural 1 é, de facto, o único natural u tal $p(u)$ é verdade.

A existência e unicidade de um único objecto que satisfaça um predicado $p(x)$ pode ser representada pela expressão "$\exists_x^1 \, p(x)$" à qual é usual associar uma das seguintes leituras "Existe um, e um só, x tal que $p(x)$" ou "Existe um único x tal que $p(x)$".

Por último, apresentamos duas equivalências lógicas que requerem atenção especial e que dizem respeito à negação de frases quantificadas.

Se "$\exists_x \, p(x)$" é uma proposição falsa, então não existe qualquer valor de x para o qual $p(x)$ seja verdadeira, ou seja, $p(x)$ é sempre falsa. Assim

$$\neg(\exists_x \, p(x)) \Leftrightarrow \forall_x \, (\neg p(x))$$

Cálculo de Predicados (Quantificadores)

Por outro lado, se "$\forall_x\, p(x)$" é uma proposição falsa, então não é verdade que para todo x, $p(x)$ seja verdadeira, ou seja, existe x tal que $p(x)$ é falsa. Assim,

$$\neg(\forall_x\, p(x)) \Leftrightarrow \exists_x\, (\neg p(x))$$

Alguns métodos de prova

Prova

A prova (demonstração) de uma proposição matemática é um argumento logicamente válido (construído com base em princípios - regras e axiomas) que estabelece a veracidade da proposição.

A prova de uma proposição pode ser directa ou indirecta. Numa prova directa de uma proposição procura-se estabelecer a veracidade da mesma a partir de axiomas ou factos conhecidos e sem assumir pressupostos adicionais. Porém, em certos casos a prova directa não é simples e pode mesmo não ser possível. Nestas situações pode-se optar por um método de prova indirecta e no qual se faz prova da veracidade de uma proposição mostrando que esta não pode ser falsa.

Prova por contradição ou redução ao absurdo

Para provar uma afirmação p assume-se $\neg p$ e procura-se uma contradição.

No exemplo que se segue apresenta-se uma demonstração do resultado enunciado recorrendo a uma prova por redução ao absurdo.

Exemplo 1.22

Proposição: "Existe um número infinito de números primos".

Demonstração: No sentido de provarmos por contradição este resultado, admitamos que existe um número finito de números primos; sejam p_1*,* p_2*, ...,* p_n *esses números primos. Considere-se, agora, o número* $x = p_1 p_2 \dots p_n + 1$*. É óbvio que o número* x *não é divisível por nenhum dos números primos* $p_1, p_2, \dots, p_n$ *(pois o resto da divisão é sempre 1). Logo* x *é um número primo. Mas isto contradiz a hipótese inicial de que existem apenas* n *números primos. Então a hipótese inicial está errada e, portanto, existe um número infinito de números primos.* $\square$

Alguns métodos de prova

Muitas proposições matemáticas são enunciadas na forma de uma implicação $p \Rightarrow q$. Para além destas, existem outras proposições que embora não sendo implicações, a sua prova pode passar pela demonstração de uma afirmação do tipo $p \Rightarrow q$. Por este motivo torna-se conveniente estudar os diversos métodos de prova que existem para uma implicação.

Prova directa de uma implicação

Para demonstrar directamente uma afirmação do tipo $p \Rightarrow q$, encontra-se uma prova de q, assumindo a veracidade de p.

Exemplo 1.23

Proposição: ´´*Se* a *e* b *são reais tais que* $0 < a < b$, *então* $a^2 < b^2$.

Demonstração: Sejam a, b *números reais tais que* $0 < a < b$. *Assim*

(i) $a < b \overset{a \geq 0}{\Rightarrow} a^2 < ab$; *(ii)* $a < b \overset{b \geq 0}{\Rightarrow} ab < b^2$;

Logo de (i) e (ii) segue que $a^2 < b^2$. $\square$

Alguns métodos de prova

Atendendo a que $p \Rightarrow q$ é logicamente equivalente a $\neg q \Rightarrow \neg p$, a demonstração do primeiro resultado pode ser feita apresentando uma prova de $\neg q \Rightarrow \neg p$; em certos casos a prova desta última implicação torna-se mais simples.

Prova de uma implicação por contraposição

Por forma a provar $p \Rightarrow q$ assume-se $\neg q$ e procura-se uma prova de $\neg p$.

Exemplo 1.24

Proposição: "Se x é um natural tal que x^2 é ímpar, então x é ímpar".

Demonstração: No sentido de provar o resultado por contraposição, suponhamos que x não é ímpar, ou seja, que x é par. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2k$. Logo $x^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ e, por conseguinte, x^2 é par.$\square$

Alguns métodos de prova

A prova de $p \Rightarrow q$ pode também ser feita por contradição. Note-se que $p \Rightarrow q$ é logicamente equivalente a $\neg p \vee q$, pelo que $\neg(p \Rightarrow q)$ é logicamente equivalente a $p \wedge \neg q$.

Prova de uma implicação por redução ao absurdo

Na prova de $p \Rightarrow q$ por redução ao absurdo assume-se $p \wedge \neg q$ e procura-se uma contradição.

Atendendo à equivalência lógica $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ a prova de uma afirmação do tipo $p \Leftrightarrow q$ passa pela prova de duas implicações.

Prova de uma equivalência

Na prova directa de $p \Leftrightarrow q$ procura-se uma prova de $p \Rightarrow q$ e uma prova de $q \Rightarrow p$.

Alguns métodos de prova

Embora a maioria das proposições a provar sejam da forma $p \Rightarrow q$ ou $p \Leftrightarrow q$, surgem também casos cujos resultados a provar são negações, disjunções ou conjunções.

Na prova de uma proposição do tipo $\neg p$, assume-se p e procura-se uma contradição. Na prova directa uma conjunção $p \wedge q$ procura-se uma prova de p e uma prova de q. No que diz respeito a uma disjunção $p \vee q$, basta fazer prova de uma das proposições p ou q.

Como já foi referido anteriormente, em alternativa a uma prova directa, em cada um destes casos pode-se optar por uma prova indirecta - fazendo a prova por redução ao absurdo ou fazendo a prova de uma implicação que seja equivalente à proposição que se pretende mostrar.

Por exemplo, no caso de uma disjunção $p \vee q$ a prova pode passar pela prova de uma das implicações $\neg p \Rightarrow q$ ou $\neg q \Rightarrow p$, atendendo a que $p \vee q$ é logicamente equivalente a cada uma destas implicações.

Alguns métodos de prova

Prova indirecta de uma disjunção

Assume-se $\neg p$ e procura-se uma prova de q ou, analogamente, assume-se $\neg q$ e procura-se uma prova de p.

Na prova de certas proposições p torna-se necessário considerar vários casos. Se todas as alternativas possíveis $q_1, \ldots, q_n$ forem tomadas em consideração, a prova de p equivale a fazer uma prova da implicação $(q_1 \vee \ldots \vee q_n) \Rightarrow p$.

Prova por casos

A prova de uma afirmação do tipo $(q_1 \vee \ldots \vee q_n) \Rightarrow p$ consiste em procurar uma prova para cada uma das implicações $q_1 \Rightarrow p$, ..., $q_n \Rightarrow p$. A uma prova deste tipo dá-se o nome de prova por casos.

No exemplo que se segue é apresentada uma prova por casos.

Exemplo 1.25

Proposição: "Se a e b são reais tais que $0 \leq a < b$, *então* $a^2 < b^2$.*"*

Demonstração: Sejam a e b são reais tais que $0 \leq a < b$. *Uma vez que* $0 \leq a$, *a prova é feita considerando dois casos:* $0 < a$ *e* $a = 0$.

(i) *Se* $0 < a$, *a prova pode seguir como a do exemplo 1.23.*

(ii) *Se* $a = 0$, *então* $0 < b$. *Logo, como* $a < b$, *tem-se* $ab < b^2$. *Assim, e uma vez que* $ab = 0 = a^2$, *segue que* $a^2 < b^2$.

De (i) e (ii) resulta que se a, b *são reais tais que* $0 \leq a < b$, *então* $a^2 < b^2$. $\square$

Alguns métodos de prova

Prova de uma proposição com quantificador universal

Na prova directa de uma proposição do tipo "$\forall_x\, p(x)$", admitimos que a variável u representa um elemento arbitrário do universo de quantificação da variável x e mostramos que $p(u)$ é verdadeira.
No caso em que o universo de quantificação U é um conjunto finito pode-se optar por uma **prova por exaustão**. Tal como o nome indica, tal significa que a prova é feita testando individualmente para cada elemento u de U se $p(u)$ é verdadeira.

Prova de uma proposição com quantificador existencial

Numa prova directa de uma proposição do tipo "$\exists_x\, p(x)$" é necessário exibir um elemento u do universo de quantificação da variável x tal que $p(u)$ seja verdade. Este tipo de prova diz-se uma **prova construtiva**. Em certos casos a prova construtiva não é simples ou não é possível e nestes casos pode-se optar por uma prova indirecta por contradição - neste caso a prova diz-se **não-construtiva**.

Prova de existência e unicidade

A prova de afirmações do tipo "$\exists_x^1\, p(x)$" pode ser dividida em duas partes:

- *prova de existência* - prova-se que existe, pelo menos, um elemento u do universo de quantificação de x tal que $p(u)$ é verdade;
- *prova de unicidade* - supõe-se que u e v são dois elementos do universo de quantificação tais que $p(u)$ e $p(v)$ são verdadeiras e mostra-se que $u = v$.

Exemplo 1.26

Proposição: "Para todo o número complexo z diferente de zero, existe um único número complexo x tal que $zx = 1$."

Note-se que este resultado é uma proposição do tipo $\forall_z\, p(z)$ onde $p(z)$ é o predicado $\exists_x^1\, zx = 1$.

Exemplo 1.26 (continuação)

Demonstração: *No sentido de provar* $\forall_z\, p(z)$ *consideremos* z *um número complexo qualquer, diferente de zero. Por definição, existem* a *e* b *em* $\mathbb{R}$ *tais que* $z = a + bi$, *onde* i *é um elemento de* $\mathbb{C}$ *tal que* $i^2 = -1$.

Sendo z *um número arbitrário nas condições anteriores, vamos, agora, provar a proposição* $\exists_x^1\, zx = 1$.

[Prova de existência] Vamos primeiro mostrar que existe pelo menos um x *em* $\mathbb{C}$ *tal que* $zx = 1$. *Como* z *é diferente de zero, pelo menos um dos números* a *ou* b *é diferente de zero. Isso implica que* $a^2 + b^2$ *é positivo. Podemos, então, considerar o número* $x = (a - bi)/(a^2 + b^2)$. *Relativamente a* x *é simples verificar que* $zx = 1$. *De facto,*

$$\begin{aligned} zx &= ((a+bi)(a-bi))/(a^2+b^2) \\ &= (a^2 - abi + abi - b^2 i^2)/(a^2+b^2) \\ &= (a^2+b^2)/(a^2+b^2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Alguns métodos de prova

Exemplo 1.26 (continuação)

[Prova de unicidade] Admitamos que y é um número complexo tal que $zy = 1$; vamos mostrar que y é igual a x. Multiplicando os dois lados da equação $zy = 1$ por x temos $(zy)x = x$. Como a multiplicação de números complexos é associativa e comutativa, a última igualdade equivale a $(zx)y = x$. Como $zx = 1$, concluímos que $y = x$.$\square$

Prova de falsidade por contra-exemplo

A prova de falsidade de uma proposição do tipo "$\forall_x\, p(x)$" passa por mostrar que existe um elemento u do universo de quantificação tal que $p(u)$ é falsa. Neste caso, diz-se que o elemento u é um **contra-exemplo** para a proposição "$\forall_x\, p(x)$".

Exemplo 1.27

É simples provar a falsidade da afirmação

"Para todo o número natural primo n, $2^n - 1$ é primo."

De facto, o número $n = 11$ é um contra-exemplo para esta afirmação, pois $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$.