$V \models \varphi \to v(\varphi)=1$ (V santisfaz a valoração, satisfaz uma fórmula) | Γ é consistente quando algum valoração satisfaz $v(\varphi)=1$

$V \models \Gamma \to V$ satisfaz todas as fórmulas de Γ

$\Gamma \models \varphi \to \varphi$ é consequência semântica, $V \models \Gamma \Rightarrow V \models \varphi$

$\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$ sse $v(\varphi)=1$ e $v(\varphi \to \psi)=1$ então $v(\psi)=1$

Conjunto inconsistente quando não há valoração que satisfaça. | $\varphi, p_0 \models \neg(p_1 \wedge p_2)$ $((\neg p_1 \wedge p_2)$ é Conseq. semântica de $\varphi, p_0)$. Tabela ou $v(\varphi)$

Teorema da correção: $\Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

Teorema da completude: $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$ | Teorema da adequação: $\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma \models \varphi$ → tab. verdade

L-Fórmulas e L-termos: Se existir termos de ambas as chavetas da definição de

Linguagem símbolos

$\overline{n}$ é nada. Se existir quantificadores nunca pode ser termo. Um termo não pode ter símbolos da segunda chaveta, apenas da primeira. Uma fórmula poderá ter elementos da primeira mas terá de estar relacionada com algum símbolo da segunda. Ter em atenção a aridade.

sequência de formação: $p_0, p_1, p_3, (p_1 \wedge p_0), (p_1 \wedge p_0) \vee p_3, ((p_1 \wedge p_0) \vee p_3) \vee p_0$.

$\mathbb{N} = 1, 2, 3$ | $\mathbb{Z} = -1, -5, 5$ | $\mathbb{Q} = \frac{1}{5}, \frac{3}{2}$ | $\mathbb{R} = \sqrt{3}, -\sqrt{2}, \pi$

$x[a] = a(x)$

$c[a] = c$

$f(t_1)[a] = \bar{f}(t_1[a])$

Regras DNP

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge_1 E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge_2 E \qquad \frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi} \neg I \qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot} \neg E \qquad \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee_1 I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee_2 I$$

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \sigma\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots \\ \sigma\end{array}}{\sigma} \vee E \qquad \frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots \\ \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi} \leftrightarrow_1 E \qquad \frac{\psi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi} \leftrightarrow_2 E$$

$$\frac{\bot}{\varphi} (\bot) \qquad \frac{\begin{array}{c}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi} (RAA)$$

1) $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$

2) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$

3) $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$ ... $\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$

4) $\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \neg\bot \Leftrightarrow \varphi$

5) $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$
$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$

6) $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\psi \vee \neg\psi$

7) $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$

i) $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

ii) $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

iii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi$
$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

iv) $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

vi) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \bot$

vii) $\bot \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$

Tautologia: $\models \varphi$, $v(\varphi)=1$ para toda valoração v. Contradição: $v(\varphi)=0$, para toda valoração v.

FND: $(l_{11} \wedge \ldots \wedge l_{1m_1}) \vee \ldots \vee (l_{n1} \wedge \ldots \wedge l_{nm_n})$ FNC: $(l_{11} \vee \ldots \vee l_{1m_1}) \wedge \ldots \wedge (l_{n1} \vee \ldots \vee l_{nm_n})$

1. Dizemos que φ é uma consequência semântica de Γ, e escrevemos $\Gamma \models \varphi$, quando, para toda a valoração v, se $v \models \Gamma$ então $v \models \varphi$. $\Gamma \models \varphi$ se e só se para toda a valoração v, se para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi)=1$, então $v(\varphi)=1$. | $\Gamma \vdash \varphi$ | φ diz-se derivável a partir de um conjunto de fórmulas a consequência semântica → conclusão é φ e o conjunto de fórmulas não canceladas pertencem a Γ.

φ diz-se teorema: $\vdash \varphi$ $((p_0 \wedge \neg p_1) \to \neg(p_0 \to p_1))$ é um teorema se existir uma derivação cuja conclusão é φ e não pode haver hipóteses não canceladas. | $\varphi, \psi \vdash \sigma$ se existir uma derivação cuja conclusão é σ e em que as hipóteses não canceladas são elementos de φ, ψ.

Complexidade lógica

$var: \mathcal{F}^{CP} \to \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$

$var(\bot)=\emptyset$; $var(p)=\{p\}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$

$var(\neg\varphi) = var(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$

$var(\varphi \square \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

$cl(\varphi)=0$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot\}$

$cl(\neg\varphi) = 1 + cl(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$

$cl(\varphi \square \psi) = 1 + \text{máximo}(cl(\varphi), cl(\psi))$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

Altura árvore sint: $alt(\varphi)=1$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot\}$

$alt(\neg\varphi) = 1 + alt(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$

$alt(\varphi \square \psi) = 1 + \max(alt(\varphi), alt(\psi))$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

Sub form: $subf(\varphi) = \{\varphi\}$, para todo $\varphi \in \mathcal{V}^{CP} \cup \{\bot\}$

$subf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup subf(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$

$subf(\varphi \square \psi) = \{\varphi \square \psi\} \cup subf(\varphi) \cup subf(\psi)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

$E = (\mathbb{Q}, -)$ $\bar{q}(n) = n^2$ para $n \in \mathbb{Q}$, $\bar{+}$ adição $\mathbb{Q}$, $\bar{P} = \mathbb{Q}^+ (\geq 0)$, $\bar{=}$ igualdade | $a(x_i) = i - 3$

Calcule: $(P(x_5) \wedge \exists x_3 (q(x_3) = 0 + x_5))[a]$. R: seja a' atribuição E. $\varphi[a']=1$ sse

$P(q(x_1))[a']=1$ e $(\neg \forall x_2 (0 = q(x_2))[a']=0$ sse $\bar{q}(a'(x_1)) \in \bar{P}$ e $\forall x_1 (0 = q(x_2))[a']=1$

sse $(a'(x_1))^2$ é positivo e $(0 = q(x_2))[a'(\overset{x_2}{d})]=1$ para todo $d \in dom E$

sse $(a'(x_1))^2 \geq 0$ e $d^2 = 0$ para todo $d \in \mathbb{Q}$, uma afirmação falsa

Lógica EI
Resolução exame 2012

1. $\Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$

(1) $p_n \in \Delta \quad (n \in \mathbb{N}_0)$
(2) $\varphi, \psi \in \Delta \Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \in \Delta$
(3) $\varphi, \psi \in \Delta \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \in \Delta$

a) Construa a árvore de formação $\sigma = ((p_1 \wedge p_0) \vee p_3) \vee p_0$

(a) Seq. de formação: $p_0, p_1, p_3, (p_1 \wedge p_0), (p_1 \wedge p_0) \vee p_3, ((p_1 \wedge p_0) \vee p_3) \vee p_0$

Defina por recursão estrutural $f : \Delta \to \mathbb{N}_0$ tal que corresponde o número $\max\{n \in \mathbb{N}_0 : p_n \text{ ocorre em } \varphi\}$

(b) $f : \Delta \to \mathbb{N}_0$ é definida, por recursão estrutural, do seguinte modo:
1) $f(p_n) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$;
2) $f(\varphi \square \psi) = \max(f(\varphi), f(\psi))$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee\}$, para todo $\varphi, \psi \in CP$.

c) Calcule recursivamente $f(\sigma)$.

(c)
$$\begin{aligned} f(\sigma) &= \max\big(f((p_1 \wedge p_0) \vee p_3), f(p_0)\big) \\ &= \max\big(\max(f(p_1 \wedge p_0), f(p_3)), 0\big) \\ &= \max\big(\max(\max(f(p_1), f(p_0)), 3), 0\big) \\ &= \max\big(\max(\max(1,0), 3), 0\big) \\ &= \max\big(\max(1,3), 0\big) \\ &= \max(3,0) = 3 \end{aligned}$$

d) Enuncie o princípio de indução estrutural para Δ.

(d) Seja $P(\varphi)$ uma propriedade sobre os elementos φ de Δ.
Se
1) $P(p_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$;
2) se $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ então $P(\varphi \wedge \psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \Delta$;
3) se $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ então $P(\varphi \vee \psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \Delta$;

então
$P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \Delta$

e) Seja v a valoração $v(p_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Prove por indução estrutural que, para toda a fórmula $\varphi \in \Delta$, $v(\varphi) = 1$

e) v tal que $v(p_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$

Seja $P(\varphi)$ a propriedade $v(\varphi) = 1$ (com $\varphi \in \Delta$).

(1) Seja $n \in \mathbb{N}_0$
Pela definição de v, $v(p_n) = 1$
Portanto, $P(p_n)$.

(2) Sejam $\varphi, \psi \in \Delta$ tais que $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ (H I).
Então, $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$. Temos, assim,
$v(\varphi \wedge \psi) = 1$, ou seja, $P(\varphi \wedge \psi)$.

(3) Sejam $\varphi, \psi \in \Delta$ tais que $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ (H I).
Então, $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$. Temos, assim,
$v(\varphi \vee \psi) = 1$, donde $P(\varphi \vee \psi)$

Por (1), (2), (3) e pelo princípio de Indução Estrutural, $P(\varphi)$ para todo $\varphi \in \Delta$

Conclua, a partir da alínea anterior, que não existe $\varphi \in \Delta$ tal que $\varphi \leftrightarrow \neg p_0$. Deduza ainda que $\{\wedge, \vee\}$ não é um conjunto completo de conetivos.

f) Consideremos a valoração v de e). Sabemos que $v(\varphi) = 1$, para todo $\varphi \in \Delta$.

Ora, $v(\neg p_0) = 1 - v(p_0) = 1 - 1 = 0$.

Portanto, para todo $\varphi \in \Delta$ $v(\varphi \leftrightarrow \neg p_0) = 0$.

Assim, $\varphi \not\Leftrightarrow \neg p_0$, para todo $\varphi \in \Delta$.

Para $\{\wedge, \vee\}$ ser um conjunto completo de conetivos,

teria de existir uma fórmula $\varphi \in \Delta$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \neg p_0$.
Logo, $\{\wedge, \vee\}$ não é um conj. completo de conetivos.

2. Verdadeiras ou Falsas

a) Se $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ é uma tautologia, então φ é consequência lógica de qualquer $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$

(a) Seja Γ um subconjunto de $\mathcal{F}^{CP}$

Queremos averiguar se $\Gamma \models \varphi$. Se v for uma valoração tal que $v \models \Gamma$ então, porque φ é tautologia, $v(\varphi) = 1$

Por isso, $\Gamma \models \varphi$ e a afirmação é verdadeira.

b) Existe $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ e $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ tais que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ são consistentes.

(b) Sejam $\Gamma = \{p_0\}$ e $\varphi = p_1$.

A valoração v tal que $v(p_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ satisfaz Γ e satisfaz φ. Logo, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é consistente.

A valoração v' tal que $v'(p_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ (com $n \in \mathbb{N}_0$) satisfaz Γ e satisfaz $\neg\varphi$. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente.

Assim, a afirmação é verdadeira.

3) Seja $\varphi = p_0 \leftrightarrow \neg p_0$ e $\psi = p_0 \to p_1$
a) Const. uma DNP mostrando $\varphi \vdash \psi$

3.
(a)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_0^{(1)} \qquad \dfrac{p_0^{(1)} \qquad p_0 \leftrightarrow \neg p_0}{\neg p_0}\,\leftrightarrow E}{\bot}\,\neg E}{p_1}\,(\bot)}{p_0 \to p_1}\,\to I^{(1)}$$

é uma derivação de $p_0 \to p_1$ a partir de $p_0 \leftrightarrow \neg p_0$ (a conclusão

b) Mostre que $\psi \nvdash \varphi$

é $p_0 \to p_1$ e a hipótese não cancelada é $p_0 \leftrightarrow \neg p_0$.)

(b) Pelo Teorema da Adequação, $\psi \nvdash \varphi$ se e só se $\psi \not\models \varphi$.

p_0	p_1	$\overset{\varphi}{p_0 \leftrightarrow \neg p_0}$	$\overset{\psi}{p_0 \to p_1}$	
1	1	0	1	←
1	0	0	0	
0	1	0	1	←
0	0	0	1	←

Pela tabela de verdade, podemos afirmar que existem valorações v tais que $v(\psi) = 1$ e $v(\varphi) = 0$ (linhas 1, 3 e 4).

Logo, $\psi \not\models \varphi$, donde $\psi \nvdash \varphi$

4. L linguagem $(\{f, \times\}, \{P, =\}, N)$
$N(f) = N(P) = 1 \quad N(\times) = 2 = N(=)$

Das seg. palavras apresente árv. formação das que pertencem $\mathcal{T}_L$ ou $\mathcal{F}_L$
i) $\times(\times(x_1, x_2), f(f(x_0)))$

(a)
(i) é L-termo, seq. de formação:
$x_0, x_1, x_2, f(x_0), f(f(x_0)), \times(x_1, x_2), \times(\times(x_1, x_2), f(f(x_0)))$

ii) $= (\times(x_1, x_2), f(f(x_0)))$

(ii) é L-fórmula, seq. de formação:
$= (\times(x_1, x_2), f(f(x_0)))$

iii) $f(x_1) \to f(x_2)$

(iii) nem $\mathcal{T}_L$ nem $\mathcal{F}_L$
$f(x_1) \in \mathcal{T}_L$
$f(x_2) \in \mathcal{T}_L$
$f(x_1) \to f(x_2) \notin \mathcal{F}_L$

b) $\sigma = \forall x_1 \exists x_2 (x_0 = f(x_2) \vee x_1 = x_0 \times x_2)$. Calcule $LIV(\sigma)$ e indique L-termos t e t' tais que x_0 seja substituível por t mas não seja por t'.

(b) $LIV(\sigma) = \{x_0\}$

x_0 tem ocorrências livres no alcance de $\forall x_1$ e $\exists x_2$

$R = \sqrt{/}\{x_0, x_1\}$
oc. livre / subs

Para que x_0 seja substituível por t, $x_1 \notin VAR(t)$ e $x_2 \notin VAR(t)$

Por exemplo, para $t = x_3$, x_0 é substituível por t em σ.

Para que x_0 não substituível por t' em σ, $x_1 \in VAR(t')$ ou $x_2 \in VAR(t')$

Basta tomar, por exemplo, $t' = x_1$

c) Qual o número de L-estruturas $E = (D, -)$ tais que $D = \{1,2,3\}$ e $\overline{=} = \{(d,d) : d \in D\}$?

(c)
$\overline{f} \quad D \to D$ funções $\to$ temos $(\#D)^{(\#D)}$ hipóteses

$\overline{\times} \quad D \times D \to D$ funções $\to$ temos $(\#D)^{\#(D \times D)}$ hipóteses

$\overline{P} \subseteq D \quad \to$ temos $2^{\#D}$ hipóteses

Assim, temos $3^3 \times 3^9 \times 2^3$ L-estruturas nessas condições

d) Seja $E = (\mathbb{R}, -)$ L-est.
$\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{f}(x) = \operatorname{sen}(x)$
$\overline{\times} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{\times}(x, y) = x \times y$
$\overline{P} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 1\}$
$\overline{=} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$

Para cada uma indique se L-fórmula é válida em E e se é universalmente válida.
i) $\forall x_0\, P(f(x_0) \times f(x_0))$
ii) $\forall x_0 \exists x_1\, x_0 = f(x_1)$

(d) Seja a uma atribuição em E.
(i) $(\forall x_0\, P(f(x_0) \times f(x_0)))[a] = 1$
sse para todo $d \in \mathbb{R}$ $\quad P(f(x_0) \times f(x_0))\left[a\binom{x_0}{d}\right] = 1$
sse para todo $d \in \mathbb{R}$ $\quad \overline{f}(d)\, \overline{\times}\, \overline{f}(d) \in \overline{P}$
sse para todo $d \in \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{sen}(d) \times \operatorname{sen}(d) \in \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 1\}$
sse para todo $d \in \mathbb{R}$ $\quad -1 \le \operatorname{sen}^2(d) \le 1$, uma afirmação verdadeira

Logo, $(\forall x_0\, P(f(x_0) \times f(x_0)))[a] = 1$
donde é válida em E.

A L-fórmula não é universalmente válida: basta pensar numa estrutura $E' = (\mathbb{R}, \sim)$ exatamente igual a E exceto em $\tilde{P} = \{x \in \mathbb{R} : -10 \le x \le -9\}$
(ou seja $\tilde{f} = \overline{f}$; $\tilde{\times} = \overline{\times}$)

$(\forall x_0\, P(f(x_0) \times f(x_0)))[a] = 1$
sse para todo $d \in \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{sen}^2(d) \in \{x \in \mathbb{R} : -10 \le x \le -9\}$
o que é falso.

Logo $(\forall x_0\, P(f(x_0) \times f(x_0)))[a] = 0$ e a fórmula não é universalmente válida.

(ii) Seja a atribuição em E.
Temos que $(\forall x_0 \exists x_1 (x_0 = f(x_1)))[a] = 1$ se e só se para todo $d_0 \in \mathbb{R}$ existe $d_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}(d_1) = d_0$.
Para $d_0 = 5$, sabemos que não existe $d_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}(d_1) = 5$.
Logo, $(\forall x_0 \exists x_1 (x_0 = f(x_1)))[a]_E = 0$ e a fórmula não é válida em E nem universalmente válida.

e) Indique $\varphi \in \mathcal{F}_L$ tal que φ seja instância de tautologia. Diga ainda se E é modelo de φ, e que E é a L-estrutura definida na alínea anterior

(e) $\varphi = (P(x_0) \vee \neg P(x_0))$ é instância de $p_0 \vee \neg p_0$, que é uma tautologia do CP (considerando uma instanciação i tal que $i(p_0) = P(x_0)$, temos que $i(p_0 \vee \neg p_0) = \varphi$.
Logo, φ é universalmente válida, pelo que E é modelo de φ