

# 5. Determinantes

*Twinkle, twinkle, little bat!  
How I wonder what you're at!  
Up above the world you fly,  
Like a teatray in the sky.  
Twinkle, twinkle little bat!  
How I wonder what you're at!*

*Lewis Carroll's, Alice's Adventures in Wonderland.*

## Definição

Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ , o **determinante de  $A$**  representa-se por  $\det(A)$  ou  $|A|$ , e é um número definido por:

- se  $n = 1$ , isto é  $A = (a_{11})$  então  $\det(A) = a_{11}$ ,
- se  $n > 1$ , então

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(M_{1n})$$

onde  $M_{1j}$  denota a matriz  $n - 1$  obtida de  $A$  retirando-lhe a linha 1 e a coluna  $j$ .

## Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\det A = |A| = 2 \times 3 - 1 \times (-4) = 10$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}, |B| = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (4 \times 9 - 0) - 3(-2 \times 9 - 0 \times 3) + 2(-2 \times 0 - 4 \times 3) \\ &= 36 + 54 - 24 = 66 \end{aligned}$$

## Definição

Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ .

Ao  $\det(M_{ij})$  chama-se **menor principal de  $A$** .

A  $(-1)^{i+j} \det(M_{ij})$  chama-se **complemento algébrico** do elemento  $a_{ij}$  de  $A$ .

**Exemplo** Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$  o complemento algébrico de 9, que está na 3ª linha e 3ª coluna é

$$(-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 10$$

**Note-se** que o valor do determinante de uma matriz é determinado por um desenvolvimento que envolve elementos da 1ª e os seus complementos algébricos. Prova-se que o valor do determinante de uma matriz pode ser obtido considerando o **desenvolvimento segundo qualquer linha ou coluna da matriz**

## Teorema de Laplace

Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz de ordem  $n$ . Então

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{(k+j)} a_{kj} \det(M_{kj}), \quad (1 \leq k \leq n)$$

ou

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{(i+l)} a_{il} \det(M_{il}), \quad (1 \leq l \leq n)$$

**Exemplo** Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  tem-se, fazendo o

desenvolvimento segundo a 1ª coluna:

$$\det(A) = +1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + 0 + 0 - 1 \times \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \dots = 18$$

# Propriedades

- Se  $D = (d_{ij})$  é uma matriz diagonal, de ordem  $n$ , então  $\det D = d_{11} \times \cdots \times d_{nn}$ .  
Consequentemente  $\det(I_n) = 1$ .
- Se  $A = (A_{ij})$  é uma matriz triangular, de ordem  $n$ , então  $\det A = a_{11} \times \cdots \times a_{nn}$ .

## Teorema

Seja  $A = (A_{ij})$  uma matriz de ordem  $n$ . Então  $\det(A^T) = \det(A)$ .

## Teorema

Seja  $A = (A_{ij})$  uma matriz de ordem  $n$ . Se todos os elementos de uma linha e/ou coluna são iguais a zero então  $\det(A) = 0$ .

## Teorema

Seja  $B$  resulta de  $A$  por multiplicação dos elementos de uma linha ou coluna de  $A$  por um  $\alpha$ , então  $\det(B) = \alpha \det(A)$ .

## Teorema

Se  $A$  é uma matriz de ordem  $n$ , então  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ .

### Teorema

Se  $B$  resulta de  $A$  por troca de duas linhas ou duas colunas então  $\det(B) = -\det(A)$ .

### Teorema

Se  $A$  é uma matriz de ordem  $n$ . Se  $B$  resulta de  $A$  adicionando a uma linha (coluna) um múltiplo de outra linha (coluna), então  $\det(B) = \det(A)$ .

### Teorema

Sejam  $A$  e  $B$  matrizes de ordem  $n$ .  
Então  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

### Teorema

Sejam  $A$  é uma matriz de ordem  $n$ . Se  $A$  é invertível então:

$$\det(A) \neq 0,$$

$$\text{tendo-se } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

## cálculos com determinantes

Pode calcular-se eficientemente o valor do determinante de uma matriz, usando eliminação Gaussiana.

Sabendo que:

- \* o valor do determinante de uma matriz, não se altera se for realizada a operação de substituição de uma linha pela sua soma com outra previamente multiplicada por um número,

- \* o valor do determinante de uma matriz "troca" de sinal se forem trocadas duas linhas,

tem-se que, realizando uma sequência finita de operações elementares sobre uma matriz, sendo a matriz  $A = (a_{ij})$ , de ordem  $n$ , transformada na **matriz**  $U = (u_{ij})$  **triangular superior**, vem:

$$\det(A) = (-1)^l u_{11} u_{22} \dots u_{nn}$$

sendo  $l$  o número de trocas de linhas efectuadas.

## Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} =$$
$$= -1 \times 2 \times (-10) = 20$$



## resolver sistemas - regra de Cramer

### Teorema

Seja  $Ax = b$  um sistema de  $n$  equações em  $n$  incógnitas. Então:

- (i) se  $\det(A) \neq 0$  o sistema  $Ax = b$  tem solução única,
- (ii) se  $\det(A) \neq 0$  a solução  $x = (x_i)$  pode ser obtida de

$$x_i = \frac{\det(A^{(i)})}{\det(A)}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

em que  $A^{(i)}$  denota a matriz  $A$  **substituindo a coluna  $i$  pelo vector  $b$**  dos termos independentes.

### Exemplo

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = -1 \\ -x + z = -1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A^{(1)} = 3, \quad \det A^{(2)} = -3, \quad \det A^{(3)} = 2$$

$$x_{(1)} = \frac{3}{1} = 3, \quad x_{(2)} = \frac{-3}{1} = -3, \quad x_{(3)} = \frac{2}{1} = 2$$

## uma nova matriz - matriz Adjunta

### Definição

Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . Seja  $c_{ij}$  o complemento algébrico do elemento  $a_{ij}$  de  $A$ . A transposta da matriz quadrada, de ordem  $n$ , cujo elemento na posição  $(i, j)$  é  $c_{ij}$  chama-se **matriz adjunta de  $A$**  e representa-se por  $Adj(A)$ , isto é:

$$Adj(A) = (c_{ij})^T$$

### Exemplo

Seja  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  e calculemos a matriz adjunta de  $A$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

### Teorema

Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ .

(i) A matriz  $A$  é invertível se e só se  $|A| \neq 0$ .

(ii) Se  $A$  é invertível tem-se

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)$$

### Exemplo

Seja  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ , tendo-se  $|A| = 9$ , calculemos a matriz inversa de  $A$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & 0 & -1/9 \\ 1/9 & 0 & 2/9 \\ -1/9 & -1 & -2/9 \end{pmatrix}$$