

There's a house, away there to the left.

Let's go.- said Sylvie

It looks a very comfable house!- said Bruno

Alice's Adventures in Wonderland, Lewis Carroll

3. Espaços Vectoriais

- O Espaço \mathbb{R}^n .
- Definição de Espaço Vectorial
- Subespaço Vectorial
- Combinação linear
- Subespaço Gerado
- Independência Linear
- Base e dimensão
- Espaço das colunas de A , $R(A)$
- Espaço nulo ou núcleo, $N(A)$

Seja n um \mathbb{N} natural.

Recorde-se que

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n, \in \mathbb{R}\}$$

é o conjunto das sequências ordenadas de n números reais.

As sequências $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ representam-se por matrizes

colunas de n números reais $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, que se designam por **vectores**.

Este conjunto *algebrizado* com uma operação de **adição** e uma operação de **multiplicação por um escalar** constitui um **espaço vectorial**.

Os elementos de um espaço vectorial chamam-se **vectores**.

Os números reais são por vezes chamados **escalares**.

Seja n um \mathbb{N} natural.

Recorde-se que

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n, \in \mathbb{R}\}$$

é o conjunto das sequências ordenadas de n números reais.

As sequências $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ representam-se por matrizes

colunas de n números reais $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. que se designam por **vectores**.

Este conjunto *algebrizado* com uma operação de **adição** e uma operação de **multiplicação por um escalar** constitui um **espaço vectorial**.

Os elementos de um espaço vectorial chamam-se **vectores**.

Os números reais são por vezes chamados **escalares**.

Seja n um \mathbb{N} natural.

Recorde-se que

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n, \in \mathbb{R}\}$$

é o conjunto das sequências ordenadas de n números reais.

As sequências $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ representam-se por matrizes

colunas de n números reais $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. que se designam por **vectores**.

Este conjunto *algebrizado* com uma operação de **adição** e uma operação de **multiplicação por um escalar** constitui um **espaço vectorial**.

Os elementos de um espaço vectorial chamam-se **vectores**.

Os números reais são por vezes chamados **escalares**.

Exemplos de Espaços Vectoriais

- conjunto das matrizes de ordem $m \times n$,

- conjunto das matrizes colunas $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$,

- conjunto dos polinómios de coeficientes reais,

$$P = \{p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}\}$$

- conjunto das funções reais e contínuas,

- $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

- $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

- $C = \{(x, y, z) : x = y = z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Exemplos de Espaços Vectoriais

- conjunto das matrizes de ordem $m \times n$,

- conjunto das matrizes colunas $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$,

- conjunto dos polinómios de coeficientes reais,

$$P = \{p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}\}$$

- conjunto das funções reais e contínuas,

- $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

- $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

- $C = \{(x, y, z) : x = y = z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Exemplos de Espaços Vectoriais

- conjunto das matrizes de ordem $m \times n$,
- conjunto das matrizes colunas $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$,

- conjunto dos polinómios de coeficientes reais,

$$P = \{p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}\}$$

- conjunto das funções reais e contínuas,
- $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
- $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$
- $C = \{(x, y, z) : x = y = z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Exemplos de Espaços Vectoriais

- conjunto das matrizes de ordem $m \times n$,
- conjunto das matrizes colunas $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$,
- conjunto dos polinómios de coeficientes reais,

$$P = \{p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}\}$$

- conjunto das funções reais e contínuas,
- $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
- $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$
- $C = \{(x, y, z) : x = y = z, \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Definição de Espaço Vectorial

Seja V um conjunto.

Diz-se que V é um espaço vectorial real se estão definidas duas operações:

- **adição**, $+$, que associa a $x, y \in V$ um elemento $x + y \in V$,
- **multiplicação por um escalar**, \cdot , que associa a $\alpha \in \mathbb{R}$, e a cada $x \in V$ um elemento $\alpha x \in V$,

que gozam das seguintes propriedades:

Propriedades

Sejam x, y, z elementos quaisquer de V e α, β números reais. Então:

- (i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V, \quad$ [comutatividade da +]
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V, \quad$ [associatividade da +]
- (iii) existe um único elemento, representado por 0 , em V , tal
que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [0 é el^{to} neutro para +]
- (iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V ,
representado por $-x$ tal que:
 $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V, \quad$ [$-x$ é el^{to} simétrico de x]
- (v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$
- (vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (viii) $1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [1 é el^{to} neutro para \cdot]

Propriedades

Sejam x, y, z elementos quaisquer de V e α, β números reais. Então:

- (i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V, \quad$ [comutatividade da +]
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V, \quad$ [associatividade da +]
- (iii) existe um único elemento, representado por 0 , em V , tal
que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [0 é el^{to} neutro para +]
- (iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V ,
representado por $-x$ tal que:
 $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V, \quad$ [$-x$ é el^{to} simétrico de x]
- (v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$
- (vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (viii) $1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [1 é el^{to} neutro para \cdot]

Propriedades

Sejam x, y, z elementos quaisquer de V e α, β números reais. Então:

- (i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V, \quad$ [comutatividade da +]
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V, \quad$ [associatividade da +]
- (iii) existe um único elemento, representado por 0 , em V , tal
que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [0 é el^{to} neutro para +]
- (iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V ,
representado por $-x$ tal que:
 $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V, \quad$ [$-x$ é el^{to} simétrico de x]
- (v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$
- (vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (viii) $1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [1 é el^{to} neutro para \cdot]

Propriedades

Sejam x, y, z elementos quaisquer de V e α, β números reais. Então:

- (i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V,$ [comutatividade da +]
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V,$ [associatividade da +]
- (iii) existe um único elemento, representado por **0**, em V , tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V,$ [0 é el^{to} neutro para +]
- (iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V , representado por $-x$ tal que:
 $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V,$ [$-x$ é el^{to} simétrico de x]
- (v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$
- (vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (viii) $1.x = x.1 = x, \quad \forall x \in V,$ [1 é el^{to} neutro para \cdot]

Propriedades

Sejam x, y, z elementos quaisquer de V e α, β números reais. Então:

- (i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V, \quad$ [comutatividade da +]
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V, \quad$ [associatividade da +]
- (iii) existe um único elemento, representado por **0**, em V , tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [0 é el^{to} neutro para +]
- (iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V , representado por **-x** tal que:
 $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V, \quad$ [-x é el^{to} simétrico de x]
- (v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$
- (vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (viii) $1.x = x.1 = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [1 é el^{to} neutro para .]

Propriedades

Sejam x, y, z elementos quaisquer de V e α, β números reais. Então:

- (i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V, \quad$ [comutatividade da +]
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V, \quad$ [associatividade da +]
- (iii) existe um único elemento, representado por **0**, em V , tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [0 é el^{to} neutro para +]
- (iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V , representado por **-x** tal que:
 $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V, \quad$ [-x é el^{to} simétrico de x]
- (v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$
- (vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (viii) $1.x = x.1 = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [1 é el^{to} neutro para ·]

Propriedades

Sejam x, y, z elementos quaisquer de V e α, β números reais. Então:

- (i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V, \quad$ [comutatividade da +]
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V, \quad$ [associatividade da +]
- (iii) existe um único elemento, representado por **0**, em V , tal
que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [0 é el^{to} neutro para +]
- (iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V ,
representado por **-x** tal que:
 $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V, \quad$ [-x é el^{to} simétrico de x]
- (v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$
- (vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (viii) $1.x = x.1 = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [1 é el^{to} neutro para \cdot]

Propriedades

Sejam x, y, z elementos quaisquer de V e α, β números reais. Então:

- (i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V, \quad$ [comutatividade da +]
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V, \quad$ [associatividade da +]
- (iii) existe um único elemento, representado por **0**, em V , tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [0 é el^{to} neutro para +]
- (iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V , representado por **-x** tal que:
 $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V, \quad$ [-x é el^{to} simétrico de x]
- (v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$
- (vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (viii) $1.x = x.1 = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [1 é el^{to} neutro para .]

Propriedades

Sejam x, y, z elementos quaisquer de V e α, β números reais. Então:

- (i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V, \quad$ [comutatividade da +]
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V, \quad$ [associatividade da +]
- (iii) existe um único elemento, representado por **0**, em V , tal que: $x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [0 é el^{to} neutro para +]
- (iv) para todo $x \in V$ existe um único elemento em V , representado por **-x** tal que:
 $x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \forall x \in V, \quad$ [-x é el^{to} simétrico de x]
- (v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R},$
- (vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$
- (viii) $\mathbf{1} \cdot x = x \cdot \mathbf{1} = x, \quad \forall x \in V, \quad$ [1 é el^{to} neutro para \cdot]

um muito importante espaço vectorial real — \mathbb{R}^n

Como se definem as operações?

adição: $x = (x_i), y = (y_i)$, elementos de \mathbb{R}^n

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

multiplicação por um escalar: $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha x = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

que gozam das propriedades apresentadas no Teorema seguinte.

Teorema

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então:

- (i) $x + y = y + x$,
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- (iii) $x + 0 = 0 + x = x$,
- (iv) $x + (-x) = (-x) + x = 0$,
- (v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
- (vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- (vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
- (viii) $\mathbf{1} \cdot x = x \cdot \mathbf{1} = x$,

Diz-se que \mathbb{R}^n é um espaço vectorial real.

Os elementos de \mathbb{R}^n chamam-se vectores e, são normalmente representados por matrizes, tendo-se o

vector coluna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Teorema

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então:

- (i) $x + y = y + x$,
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- (iii) $x + 0 = 0 + x = x$,
- (iv) $x + (-x) = (-x) + x = 0$,
- (v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
- (vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- (vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
- (viii) $\mathbf{1} \cdot x = x \cdot \mathbf{1} = x$,

Diz-se que \mathbb{R}^n é um espaço vectorial real.

Os elementos de \mathbb{R}^n chamam-se vectores e, são normalmente representados por matrizes, tendo-se o

vector coluna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Demonstração: Demonstração apenas de (v)

Denotando $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e tendo-se $\alpha \in \mathbb{R}$, deduz-se

$$\begin{aligned}\alpha(x + y) &= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \dots, \alpha(x_n + y_n)) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \dots, \alpha y_n) \\ &= \alpha x + \alpha y\end{aligned}$$
□

Demonstração: Demonstração apenas de (v)

Denotando $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e tendo-se $\alpha \in \mathbb{R}$, deduz-se

$$\begin{aligned}\alpha(x + y) &= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \dots, \alpha(x_n + y_n)) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \dots, \alpha y_n) \\ &= \alpha x + \alpha y \quad \square\end{aligned}$$

outros importantes espaços vectoriais reais

$$R^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$R^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

\hookrightarrow Verificar que R^2 e R^3 são espaços vectoriais reais.

\hookrightarrow Verificar que alguns dos espaços vectoriais apresentados anteriormente são de facto espaços vectoriais.

Definição de Subespaço Vectorial

Definição

Seja U um subconjunto, não vazio, de um espaço vectorial real V .

U diz-se um **subespaço vectorial** de V , se:

- $x + y \in U, \quad \forall x, y \in U,$ [U é fechado para $+$]
- $\alpha x \in U, \quad \forall x \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$ [U é fechado para \cdot]

Exemplos

- O conj^{to} dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de \mathbb{R}^2 .
- O conj^{to} dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de \mathbb{R}^3 .

Definição de Subespaço Vectorial

Definição

Seja U um subconjunto, não vazio, de um espaço vectorial real V .

U diz-se um **subespaço vectorial** de V , se:

- $x + y \in U, \quad \forall x, y \in U,$ [U é fechado para $+$]
- $\alpha x \in U, \quad \forall x \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$ [U é fechado para \cdot]

Exemplos

- O conj^{to} dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de \mathbb{R}^2 .
- O conj^{to} dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de \mathbb{R}^3 .

Definição de Subespaço Vectorial

Definição

Seja U um subconjunto, não vazio, de um espaço vectorial real V .

U diz-se um **subespaço vectorial** de V , se:

- $x + y \in U, \quad \forall x, y \in U,$ [U é fechado para +]
- $\alpha x \in U, \quad \forall x \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$ [U é fechado para ·]

Exemplos

- O conj^{to} dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de \mathbb{R}^2 .
- O conj^{to} dos vectores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ é um subespaço vectorial real, de \mathbb{R}^3 .

... um conjunto que é um subespaço vectorial

Teorema

A intersecção de subespaços vectoriais de um espaço vectorial V é um subespaço de V .

(consideremos somente a intersecção de 2 subespaços; do mesmo modo se demonstrava para mais do 2 subespaços)

- Sejam X e Y dois subespaços de V , então, uma vez que X e Y são subespaços contêm o vector nulo, ou seja, $0 \in X$ e $0 \in Y$, logo $0 \in X \cap Y$; donde $X \cap Y \neq \emptyset$.
- Sejam $x, y \in (X \cap Y)$. Então $x, y \in X$ e $x, y \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $x + y \in X$ e $x + y \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $x + y \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.
- Seja $x \in (X \cap Y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $x \in X$ e $x \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $\alpha x \in X$ e $\alpha x \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $\alpha x \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.

... um conjunto que é um subespaço vectorial

Teorema

A intersecção de subespaços vectoriais de um espaço vectorial V é um subespaço de V .

(consideremos somente a intersecção de 2 subespaços; do mesmo modo se demonstrava para mais do 2 subespaços)

- Sejam X e Y dois subespaços de V , então, uma vez que X e Y são subespaços contêm o vector nulo, ou seja, $0 \in X$ e $0 \in Y$, logo $0 \in X \cap Y$; donde $X \cap Y \neq \emptyset$.
- Sejam $x, y \in (X \cap Y)$. Então $x, y \in X$ e $x, y \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $x + y \in X$ e $x + y \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $x + y \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.
- Seja $x \in (X \cap Y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $x \in X$ e $x \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $\alpha x \in X$ e $\alpha x \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $\alpha x \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.

... um conjunto que é um subespaço vectorial

Teorema

A intersecção de subespaços vectoriais de um espaço vectorial V é um subespaço de V .

(consideremos somente a intersecção de 2 subespaços; do mesmo modo se demonstrava para mais do 2 subespaços)

- Sejam X e Y dois subespaços de V , então, uma vez que X e Y são subespaços contêm o vector nulo, ou seja, $0 \in X$ e $0 \in Y$, logo $0 \in X \cap Y$; donde $X \cap Y \neq \emptyset$.

- Sejam $x, y \in (X \cap Y)$. Então $x, y \in X$ e $x, y \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $x + y \in X$ e $x + y \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $x + y \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.

- Seja $x \in (X \cap Y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $x \in X$ e $x \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $\alpha x \in X$ e $\alpha x \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $\alpha x \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.

... um conjunto que é um subespaço vectorial

Teorema

A intersecção de subespaços vectoriais de um espaço vectorial V é um subespaço de V .

(consideremos somente a intersecção de 2 subespaços; do mesmo modo se demonstrava para mais do 2 subespaços)

- Sejam X e Y dois subespaços de V , então, uma vez que X e Y são subespaços contêm o vector nulo, ou seja, $0 \in X$ e $0 \in Y$, logo $0 \in X \cap Y$; donde $X \cap Y \neq \emptyset$.
- Sejam $x, y \in (X \cap Y)$. Então $x, y \in X$ e $x, y \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $x + y \in X$ e $x + y \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $x + y \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.
- Seja $x \in (X \cap Y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $x \in X$ e $x \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $\alpha x \in X$ e $\alpha x \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $\alpha x \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.

... um conjunto que é um subespaço vectorial

Teorema

A intersecção de subespaços vectoriais de um espaço vectorial V é um subespaço de V .

(consideremos somente a intersecção de 2 subespaços; do mesmo modo se demonstrava para mais do 2 subespaços)

- Sejam X e Y dois subespaços de V , então, uma vez que X e Y são subespaços contêm o vector nulo, ou seja, $0 \in X$ e $0 \in Y$, logo $0 \in X \cap Y$; donde $X \cap Y \neq \emptyset$.
- Sejam $x, y \in (X \cap Y)$. Então $x, y \in X$ e $x, y \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $x + y \in X$ e $x + y \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $x + y \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.
- Seja $x \in (X \cap Y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $x \in X$ e $x \in Y$ e logo, porque X e Y são subespaços, $\alpha x \in X$ e $\alpha x \in Y$. Assim, por definição de intersecção de conjuntos, $\alpha x \in (X \cap Y)$, como queríamos mostrar.

... um conjunto que não é um subespaço vectorial

Em \mathbb{R}^2 , sejam X e Y dois subespaços reais definidos por:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = 0 \right\}$$

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = 0 \right\}$$

O conjunto $X \cup Y$ não é um subespaço vectorial real de \mathbb{R}^2 .

Note-se que, por exemplo,

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in X$$

$$\text{e } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Y,$$

$$\text{mas } a + b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin X \cup Y$$

$X \cup Y$ não é fechado relativamente à adição.

... um conjunto que não é um subespaço vectorial

Em \mathbb{R}^2 , sejam X e Y dois subespaços reais definidos por:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = 0 \right\}$$

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = 0 \right\}$$

O conjunto $X \cup Y$ não é um subespaço vectorial real de \mathbb{R}^2 .

Note-se que, por exemplo,

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in X$$

$$\text{e } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Y,$$

$$\text{mas } a + b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin X \cup Y$$

$X \cup Y$ não é fechado relativamente à adição.

... uma definição muito importante

Em \mathbb{R}^2 sejam $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Note-se que:

$$x = 5e_1 + 7e_2.$$

Diz-se que x é **combinação linear dos vectores** e_1 e e_2 .

Definição

Sejam x_1, x_2, \dots, x_n vectores de um espaço vectorial real V . Diz-se que $x \in V$ é **combinação linear** dos vectores x_1, x_2, \dots, x_n se

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

... uma definição muito importante

Em \mathbb{R}^2 sejam $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Note-se que:

$$x = 5e_1 + 7e_2.$$

Diz-se que x é **combinação linear dos vectores** e_1 e e_2 .

Definição

Sejam $x_1, x_2 \dots x_n$ vectores de um espaço vectorial real V . Diz-se que $x \in V$ é **combinação linear** dos vectores dos $x_1, x_2 \dots x_n$ se

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Exemplo Se $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ tem-se que:

$$x = \frac{1}{2}f_1 + \frac{7}{2}f_2,$$

ou seja

x é combinação linear dos vectores f_1 e f_2 .

... uma muito importante observação

Se x_1, x_2, \dots, x_n vectores de um espaço vectorial V .

Então U , o conjunto formado por todas as combinações lineares destes vectores, é um subespaço de V .

- U não é vazio, $0 = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n$

- se $u, v \in U$ tem-se

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

então

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$$

Logo $u + v$ é combinação linear de x_1, x_2, \dots, x_n , logo $u + v$ pertence a U .

- Tem-se também que

$$\alpha u = (\alpha \alpha_1)x_1 + (\alpha \alpha_2)x_2 + \dots + (\alpha \alpha_n)x_n$$

donde $\alpha u \in U$.

U é um subespaço vectorial de V

é o **subespaço gerado por** x_1, x_2, \dots, x_n

$$U = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$

... uma muito importante observação

Se x_1, x_2, \dots, x_n vectores de um espaço vectorial V .

Então U , o conjunto formado por todas as combinações lineares destes vectores, é um subespaço de V .

- U não é vazio, $0 = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n$

- se $u, v \in U$ tem-se

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

então

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$$

Logo $u + v$ é combinação linear de x_1, x_2, \dots, x_n , logo $u + v$ pertence a U .

- Tem-se também que

$$\alpha u = (\alpha \alpha_1)x_1 + (\alpha \alpha_2)x_2 + \dots + (\alpha \alpha_n)x_n$$

donde $\alpha u \in U$.

U é um subespaço vectorial de V

é o **subespaço gerado por** x_1, x_2, \dots, x_n

$$U = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$

... uma muito importante observação

Se x_1, x_2, \dots, x_n vectores de um espaço vectorial V .

Então U , o conjunto formado por todas as combinações lineares destes vectores, é um subespaço de V .

- U não é vazio, $0 = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n$
- se $u, v \in U$ tem-se

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

então

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$$

Logo $u + v$ é combinação linear de x_1, x_2, \dots, x_n , logo $u + v$ pertence a U .

- Tem-se também que

$$\alpha u = (\alpha \alpha_1)x_1 + (\alpha \alpha_2)x_2 + \dots + (\alpha \alpha_n)x_n$$

donde $\alpha u \in U$.

U é um subespaço vectorial de V
é o **subespaço gerado por** x_1, x_2, \dots, x_n
 $U = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$

... uma muito importante observação

Se x_1, x_2, \dots, x_n vectores de um espaço vectorial V .

Então U , o conjunto formado por todas as combinações lineares destes vectores, é um subespaço de V .

- U não é vazio, $0 = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n$
- se $u, v \in U$ tem-se

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

então

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$$

Logo $u + v$ é combinação linear de x_1, x_2, \dots, x_n , logo $u + v$ pertence a U .

- Tem-se também que

$$\alpha u = (\alpha \alpha_1)x_1 + (\alpha \alpha_2)x_2 + \dots + (\alpha \alpha_n)x_n$$

donde $\alpha u \in U$.

U é um subespaço vectorial de V
é o **subespaço gerado por** x_1, x_2, \dots, x_n
 $U = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$

... uma muito importante observação

Se x_1, x_2, \dots, x_n vectores de um espaço vectorial V .

Então U , o conjunto formado por todas as combinações lineares destes vectores, é um subespaço de V .

- U não é vazio, $0 = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n$
- se $u, v \in U$ tem-se

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

então

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$$

Logo $u + v$ é combinação linear de x_1, x_2, \dots, x_n , logo $u + v$ pertence a U .

- Tem-se também que

$$\alpha u = (\alpha \alpha_1)x_1 + (\alpha \alpha_2)x_2 + \dots + (\alpha \alpha_n)x_n$$

donde $\alpha u \in U$.

U é um subespaço vectorial de V
é o **subespaço gerado por** x_1, x_2, \dots, x_n
 $U = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$

... uma muito importante observação

Se x_1, x_2, \dots, x_n vectores de um espaço vectorial V .

Então U , o conjunto formado por todas as combinações lineares destes vectores, é um subespaço de V .

- U não é vazio, $0 = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n$
- se $u, v \in U$ tem-se

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

então

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$$

Logo $u + v$ é combinação linear de x_1, x_2, \dots, x_n , logo $u + v$ pertence a U .

- Tem-se também que

$$\alpha u = (\alpha \alpha_1)x_1 + (\alpha \alpha_2)x_2 + \dots + (\alpha \alpha_n)x_n$$

donde $\alpha u \in U$.

U é um subespaço vectorial de V
é o **subespaço gerado por** x_1, x_2, \dots, x_n

$$U = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$

Exemplo

O espaço gerado pelo vector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

subespaço de \mathbb{R}^2 cujos vectores têm a segunda componente nula.

Escrevemos: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Que vectores constituem um sistema de geradores de \mathbb{R}^2 ?

Seja $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
temos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

logo

$$\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$$

considerando $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Que subespaço geram os vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{tendo-se } S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Que subespaço geram os vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{tendo-se } S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Que subespaço geram os vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

tendo-se $S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

Que subespaço geram os vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{tendo-se } S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Teorema

Se a_1, a_2, \dots, a_n são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de a_1, a_2, \dots, a_n , então o subespaço gerado pelos vectores a_1, a_2, \dots, a_n coincide com o espaço gerado pelos vectores a_1, a_2, \dots, a_n, b .

Demonstração:

Seja $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ e $U' = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle$.

Vejamos que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

• $U \subset U'$

seja $x \in U$ então

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \\ &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + 0b \end{aligned}$$

logo $x \in U'$.

Teorema

Se a_1, a_2, \dots, a_n são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de a_1, a_2, \dots, a_n , então o subespaço gerado pelos vectores a_1, a_2, \dots, a_n coincide com o espaço gerado pelos vectores a_1, a_2, \dots, a_n, b .

Demonstração:

Seja $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ e $U' = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle$.

Vejamus que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

• $U \subset U'$

seja $x \in U$ então

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \\ &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + 0b \end{aligned}$$

logo $x \in U'$.

Teorema

Se a_1, a_2, \dots, a_n são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de a_1, a_2, \dots, a_n , então o subespaço gerado pelos vectores a_1, a_2, \dots, a_n coincide com o espaço gerado pelos vectores a_1, a_2, \dots, a_n, b .

Demonstração:

Seja $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ e $U' = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle$.

Vejamos que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

• $U \subset U'$

seja $x \in U$ então

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \\ &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + 0b \end{aligned}$$

logo $x \in U'$.

Teorema

Se a_1, a_2, \dots, a_n são vectores de um espaço vectorial V e se $b \in V$ é combinação linear de a_1, a_2, \dots, a_n , então o subespaço gerado pelos vectores a_1, a_2, \dots, a_n coincide com o espaço gerado pelos vectores a_1, a_2, \dots, a_n, b .

Demonstração:

Seja $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ e $U' = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle$.

Vejamos que $U = U'$, ou seja que, $U \subset U'$ e $U' \subset U$.

• $U \subset U'$

seja $x \in U$ então

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \\ &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + 0b \end{aligned}$$

logo $x \in U'$.

Seja $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ e $U' = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle$.

• $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$

mas b é combinação linear de a_1, a_2, \dots, a_n ,

ou seja $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$

donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} (\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_{n+1} \beta_1) a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1} \beta_2) a_2 + \dots + (\alpha_n + \alpha_{n+1} \beta_n) a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

Seja $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ e $U' = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle$.

• $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$

mas b é combinação linear de a_1, a_2, \dots, a_n ,

ou seja $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$

donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} (\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_{n+1} \beta_1) a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1} \beta_2) a_2 + \dots + (\alpha_n + \alpha_{n+1} \beta_n) a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

Seja $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ e $U' = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle$.

• $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$

mas b é combinação linear de a_1, a_2, \dots, a_n ,

ou seja $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$

donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} (\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_{n+1} \beta_1) a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1} \beta_2) a_2 + \dots + (\alpha_n + \alpha_{n+1} \beta_n) a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

Seja $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ e $U' = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle$.

• $U' \subset U$

seja $x \in U'$ então $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} b$

mas b é combinação linear de a_1, a_2, \dots, a_n ,

ou seja $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$

donde, se pode escrever

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} (\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_{n+1} \beta_1) a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1} \beta_2) a_2 + \dots + (\alpha_n + \alpha_{n+1} \beta_n) a_n \end{aligned}$$

logo $x \in U$.

... uma definição mesmo muito importante.

Definição

Os **vetores** x_1, x_2, \dots, x_n de um espaço vectorial V são **linearmente independentes** se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0_V$$

se verifica apenas quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Exemplo Os vectores $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 são linearmente independentes.

... uma definição mesmo muito importante.

Definição

Os vectores x_1, x_2, \dots, x_n de um espaço vectorial V são linearmente independentes se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0_V$$

se verifica apenas quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Exemplo Os vectores $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 são linearmente independentes.

Exemplo Os vectores $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 **não** são linearmente independentes.

Note-se que : $-2f_1 - 3f_2 + f_3 = \vec{0}$.

\hookrightarrow Os **vectores** de um espaço vectorial que não sejam linearmente independentes dizem-se **linearmente dependentes**.

Isto é, os vectores x_1, x_2, \dots, x_n dizem-se **linearmente dependentes** se existem escalares reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ não todos nulos tais que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots, \alpha_n x_n = 0$.

Exemplo

1. Os vectores e_1, e_2, e_3 de \mathbb{R}^3 são linearmente independentes. De facto, tem-se para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

2. Os vectores e_1, e_2 e $f = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^3 são linearmente dependentes. De facto, tem-se $2e_1 - 5e_2 - f = \bar{0}$

Exemplo

1. Os vectores e_1, e_2, e_3 de \mathbb{R}^3 são linearmente independentes. De facto, tem-se para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

2. Os vectores e_1, e_2 e $f = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^3 são linearmente dependentes. De facto, tem-se $2e_1 - 5e_2 - f = \bar{0}$

Teorema

Os vectores x_1, x_2, \dots, x_n de um espaço vectorial V são linearmente dependentes se e só se um dos vectores pode ser escrito como combinação linear dos restantes.

Demonstração:

(\Rightarrow)

Sejam x_1, x_2, \dots, x_n vectores linearmente dependentes. Então tem-se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

com, pelo menos um, dos coeficientes diferente de zero.

Suponhamos que $\alpha_1 \neq 0$.

Então podemos escrever:

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

logo x_1 é combinação linear dos restantes vectores.

Teorema

Os vectores x_1, x_2, \dots, x_n de um espaço vectorial V são linearmente dependentes se e só se um dos vectores pode ser escrito como combinação linear dos restantes.

Demonstração:

(\Rightarrow)

Sejam x_1, x_2, \dots, x_n vectores linearmente dependentes. Então tem-se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

com, pelo menos um, dos coeficientes diferente de zero.

Suponhamos que $\alpha_1 \neq 0$.

Então podemos escrever:

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

logo x_1 é combinação linear dos restantes vectores.

(\Leftarrow)

Sejam x_1, x_2, \dots, x_n vectores e, consideremos que pelo menos um deles, por exemplo x_1 é combinação linear dos restantes vectores; isto é:

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

tendo-se então

$$x_1 - \alpha_2 x_2 - \dots - \alpha_n x_n = 0$$

donde, se tem uma combinação linear nula com pelo menos um dos coeficientes (o de x_1) não nulo. Os vectores x_1, x_2, \dots, x_n são portanto linearmente dependentes.

algumas observações importantes.

1. Qualquer conjunto de vectores $\{0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, que contenha o vector nulo, é linearmente dependente uma vez que

$$0 = 1 \cdot 0 + 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n.$$

2. Um vector x é linearmente independente se e só se $x \neq 0$.
3. Se $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um conjunto de vectores linearmente independentes, então qualquer subconjunto de A é também linearmente independente.
4. Se $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um conjunto de vectores linearmente dependentes, então qualquer conjunto contendo A é também linearmente dependente.

algumas observações importantes.

Para matrizes $m \times n$, em escada de linhas tem-se:

1. as linhas não nulas são linearmente independentes em \mathbb{R}^n ,
2. o número de linhas independentes e o número de colunas independentes são ambos iguais à característica da matriz.

Uma definição muito importante.

Procurando combinar as noções de conjunto de vectores linearmente independentes e geradores obtemos a seguinte definição.

Definição

Os vectores x_1, x_2, \dots, x_n de um espaço vectorial V formam uma **base de V** se são linearmente independentes e geram V .

Exemplos:

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de \mathbb{R}^2 .

Os vectores constituem a **base canónica** de \mathbb{R}^2

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de \mathbb{R}^3 .

Os vectores constituem a **base canónica** de \mathbb{R}^3

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de \mathbb{R}^2 .

Uma definição muito importante.

Procurando combinar as noções de conjunto de vectores linearmente independentes e geradores obtemos a seguinte definição.

Definição

Os vectores x_1, x_2, \dots, x_n de um espaço vectorial V formam uma **base de** V se são linearmente independentes e geram V .

Exemplos:

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de \mathbb{R}^2 .

Os vectores constituem a **base canónica** de \mathbb{R}^2

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de \mathbb{R}^3 .

Os vectores constituem a **base canónica** de \mathbb{R}^3

- O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ constitui uma base de \mathbb{R}^2 .

Se um espaço vectorial V possui uma base com um número finito de elementos, então **todas as bases de V têm o mesmo número de elementos.**

Ao número de vectores de uma base de um espaço V , chama-se **dimensão do espaço V** e denota-se por **$\dim(V)$** .

- $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
- se $V = \{0\}$ então $\dim(V) = 0$.
- se $V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ então $\dim(V) = 2$.

note-se que $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

e que a e b , com $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, são linearmente independentes.

O próximo resultado mostra que, ao indicar uma base de um espaço vectorial, pode interessar também a ordem em que os vectores aparecem.

Teorema:

Seja (v_1, v_2, \dots, v_n) uma base ordenada de um espaço vectorial real V . Cada vector $v \in V$ pode ser escrito de uma única forma

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

como combinação linear dos vectores v_1, v_2, \dots, v_n . Os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são chamados as **coordenadas** de v relativamente à base (v_1, v_2, \dots, v_n) .

Demonstração: Seja $v \in V$. Como (v_1, v_2, \dots, v_n) é uma base de V , tem-se $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = V$ e, consequentemente, $v \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$.

Suponhamos que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n. \text{ Então}$$

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$

e, dado que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente, conclui-se que $(\alpha_i - \beta_i) = 0$ para todo o $i = 1, \dots, n$. Portanto $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

O próximo resultado mostra que, ao indicar uma base de um espaço vectorial, pode interessar também a ordem em que os vectores aparecem.

Teorema:

Seja (v_1, v_2, \dots, v_n) uma base ordenada de um espaço vectorial real V . Cada vector $v \in V$ pode ser escrito de uma única forma

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

como combinação linear dos vectores v_1, v_2, \dots, v_n . Os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são chamados as **coordenadas** de v relativamente à base (v_1, v_2, \dots, v_n) .

Demonstração: Seja $v \in V$ Como (v_1, v_2, \dots, v_n) é uma base de V , tem-se $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = V$ e, consequentemente, $v \in \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$.

Suponhamos que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n. \text{ Então}$$

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$

e, dado que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente, conclui-se que $(\alpha_i - \beta_i) = 0$ para todo o $i = 1, \dots, n$. Portanto $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

Exemplo:

1. As coordenadas do vector $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ relativamente à base canónica (e_1, e_2) de \mathbb{R}^2 são $-2, 7$. Por outro lado, as coordenadas de v em relação à base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ são **9, -11**.

2. As coordenadas do vector $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^n relativamente à base canónica (e_1, e_2, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n são a_1, a_2, \dots, a_n .

Note-se que dada uma base de um espaço vectorial V , qualquer vector de V fica bem determinado se conhecermos as suas coordenadas relativamente a essa base.

algumas observações importantes.

Teorema:

Seja V um espaço vectorial real de dimensão $n > 0$.

(i) Se v_1, \dots, v_n são vectores linearmente independentes de V , então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V .

[Ou seja, qualquer conjunto de n vectores linearmente independentes de V constitui uma base de V .]

(ii) Se v_1, \dots, v_k são vectores linearmente independentes de V em que $k \neq n$, então $k < n$ e existem vectores v_{k+1}, \dots, v_n tais que $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ é uma base de V .

[Em V , todo o conjunto de vectores linearmente independentes pode ser estendido a uma base.]

algumas observações importantes.

Teorema:

Seja V um espaço vectorial real de dimensão $n > 0$.

(i) Se v_1, \dots, v_n são vectores linearmente independentes de V , então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V .

[Ou seja, qualquer conjunto de n vectores linearmente independentes de V constitui uma base de V .]

(ii) Se v_1, \dots, v_k são vectores linearmente independentes de V em que $k \neq n$, então $k < n$ e existem vectores v_{k+1}, \dots, v_n tais que $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ é uma base de V .

[Em V , todo o conjunto de vectores linearmente independentes pode ser estendido a uma base.]

(iii) Se $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$, então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V .

[Qualquer conjunto de n vectores que geram V é uma base de V .]

(iv) Se $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = V$ em que $k \neq n$, então $k > n$ e existe um subconjunto próprio B de $\{v_1, \dots, v_k\}$ tal que B é uma base de V .

[Em V , todo o conjunto de geradores pode ser reduzido a uma base.]

(iii) Se $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$, então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V .

[Qualquer conjunto de n vectores que geram V é uma base de V .]

(iv) Se $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = V$ em que $k \neq n$, então $k > n$ e existe um subconjunto próprio B de $\{v_1, \dots, v_k\}$ tal que B é uma base de V .

[Em V , todo o conjunto de geradores pode ser reduzido a uma base.]

Espaço das Linhas e Espaço das Colunas de uma matriz

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$ e designemos por c_1, c_2, \dots, c_n as colunas da matriz A e por l_1, l_2, \dots, l_m as linhas de A .

Definição:

Designa-se por **espaço das colunas da matriz A** , $R(A)$, o subespaço de \mathbb{R}^n gerado pelas colunas da matriz A , isto é

$$R(A) = \langle c_1, c_2, \dots, c_n \rangle$$

O **espaço das linhas de A** é o subespaço de \mathbb{R}^m gerado por l_1, l_2, \dots, l_m . Note-se que o espaço das linhas de A é o espaço das colunas da matriz transposta de A e, por isso, é representado por $R(A^T)$. Portanto

$$R(A^T) = \langle l_1, l_2, \dots, l_m \rangle.$$

Espaço das Linhas e Espaço das Colunas de uma matriz

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$ e designemos por c_1, c_2, \dots, c_n as colunas da matriz A e por l_1, l_2, \dots, l_m as linhas de A .

Definição:

Designa-se por **espaço das colunas da matriz A** , $R(A)$, o subespaço de \mathbb{R}^m gerado pelas colunas da matriz A , isto é

$$R(A) = \langle c_1, c_2, \dots, c_n \rangle$$

O **espaço das linhas de A** é o subespaço de \mathbb{R}^n gerado por l_1, l_2, \dots, l_m . Note-se que o espaço das linhas de A é o espaço das colunas da matriz transposta de A e, por isso, é representado por $R(A^T)$. Portanto

$$R(A^T) = \langle l_1, l_2, \dots, l_m \rangle.$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ matriz de ordem 3×4 .

O espaço das colunas de A é o subespaço de \mathbb{R}^3 , tal que

$$\begin{aligned} R(A) &= \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle \\ &= \langle c_1, c_3 \rangle \text{ pois } c_2 = -2c_1 \text{ e } c_4 = c_1 + c_3 \\ &= \{ \alpha c_1 + \beta c_3 : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} \\ &= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ 4\alpha \\ -2\alpha + \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Note-se que $\dim(R(A)) = 2$ (c_1, c_3 são l.i. e por isso formam uma base de $R(A)$).

Teorema

Dada uma matriz A , seja U a matriz em escada que se obtém quando se aplica a A o algoritmo de eliminação de Gauss. Então,

- $\dim(R(A)) = \dim(R(A^T)) = \dim(R(U)) = \dim(R(U^T)) = c(A) = c(A^T)$
- Uma base de $R(A)$ é formada pelas colunas de A correspondentes às colunas de U que contêm os pivots.
- Uma base de $R(A^T)$ é formada pelas linhas não nulas de U .

Teorema

Dada uma matriz A , seja U a matriz em escada que se obtém quando se aplica a A o algoritmo de eliminação de Gauss. Então,

- $\dim(R(A)) = \dim(R(A^T)) = \dim(R(U)) = \dim(R(U^T)) = c(A) = c(A^T)$
- Uma base de $R(A)$ é formada pelas colunas de A correspondentes às colunas de U que contêm os pivots.
- Uma base de $R(A^T)$ é formada pelas linhas não nulas de U .

Teorema

Dada uma matriz A , seja U a matriz em escada que se obtém quando se aplica a A o algoritmo de eliminação de Gauss. Então,

- $\dim(R(A)) = \dim(R(A^T)) = \dim(R(U)) = \dim(R(U^T)) = c(A) = c(A^T)$
- Uma base de $R(A)$ é formada pelas colunas de A correspondentes às colunas de U que contêm os pivots.
- Uma base de $R(A^T)$ é formada pelas linhas não nulas de U .

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ a matriz do exemplo anterior e U , a matriz

em escada obtida de A dada por $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Dado que os pivots de U estão na primeira e terceira colunas, conclui-se que uma base de $R(A)$, subespaço de \mathbb{R}^3 , é formada pelas primeira e terceira colunas de A , como vimos no exemplo anterior.

- As linhas não nulas de U são a primeira e a segunda. Logo, uma base de

$R(A^T)$, subespaço de \mathbb{R}^4 , é $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

- $\dim(R(A)) = \dim(R(A^T)) = c(A) = 2$.

Aplicações a sistemas de equações lineares

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Designa-se por **espaço nulo**, ou *nulidade* de A , o espaço das soluções do sistema homogéneo $Ax = 0$.

Teorema

Seja $Ax = 0$ um sistema homogéneo de m equações a n incógnitas. O conjunto das soluções deste sistema, ou núcleo de A , constitui um subespaço linear de R^n .

Demonstração: As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n .

(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.

Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.

(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao conjunto das soluções do sistema homogéneo.

(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao conjunto das soluções do sistema homogéneo.

Demonstração: As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n .

(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.

Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.

(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao conjunto das soluções do sistema homogéneo.

(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao conjunto das soluções do sistema homogéneo.

Demonstração: As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n .

(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.

Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.

(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao conjunto das soluções do sistema homogéneo.

(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao conjunto das soluções do sistema homogéneo.

Demonstração: As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n .

(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.

Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.

(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao conjunto das soluções do sistema homogéneo.

(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao conjunto das soluções do sistema homogéneo.

Demonstração: As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n .

(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.

Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.

(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao conjunto das soluções do sistema homogéneo.

(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao conjunto das soluções do sistema homogéneo.

Demonstração: As soluções de $Ax = 0$ são soluções de R^n .

(i) provar que o subconjunto das soluções é não vazio.

Se o sistema é homogéneo, tem pelo menos a solução trivial, a solução nula.

(ii) sejam x e y soluções do sistema homogéneo, e vejamos se $x + y$ ainda é solução.

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

donde $x + y$ pertence ao conjunto das soluções do sistema homogéneo.

(ii) seja x solução do sistema homogéneo, e vejamos se αx ainda é solução.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha 0 = 0$$

donde αx pertence ao conjunto das soluções do sistema homogéneo.

Aplicações a sistemas de equações lineares

Tem-se então válido o seguinte teorema:

Teorema

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. A soma da característica de A com a dimensão do núcleo ou espaço nulo de A é igual a n isto é:

$$n = \dim(N(A)) + c(A)$$

Exemplo

Consideremos o sistema homogéneo $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

obtemos: $\begin{cases} x_2 = \frac{-1}{2}x_3 = -0.5x_3 \\ x_1 = -0.5x_3 - x_4 \end{cases}$

Escolhendo valores para x_3 e x_4 , por exemplo $x_3 = \alpha$ e $x_4 = \beta$ temos:

$$\begin{cases} x_1 = -0.5\alpha - \beta \\ x_2 = -0.5\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

donde, qualquer solução do sistema dado pode escrever-se como combinação linear dos vectores **a** e **b**.

Estes vectores, **a** e **b** são linearmente independentes, são por isso base, sendo a dimensão do subespaço das soluções do sistema homogéneo 2.

Teorema

Seja $Ax = b$ um sistema de equações lineares, sendo A uma matriz de ordem $m \times n$. Então são válidas as seguintes afirmações:

- O sistema $Ax = b$ é impossível se e só se b não pertence ao espaço das colunas de A ,
- O sistema $Ax = b$ é indeterminado se e só se b pertence ao espaço das colunas de A e estas são linearmente dependentes, isto é, a característica de A é inferior a n ;
- O sistema $Ax = b$ tem solução única se e só se b pertence ao espaço das colunas de A e estas são linearmente independentes, isto é, a característica de A é igual a n .

Proposição

Seja A uma matriz de ordem $n \times n$. então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) A é invertível,
- (ii) a característica de A é máxima (igual a n),
- (iii) as colunas de A geram \mathbb{R}^n ,
- (iv) as colunas de A são independentes,
- (v) as linhas de A geram \mathbb{R}^n ,
- (vi) as linhas de A são independentes.
- (vii) $N(A) = \{0\}$;
- (viii) O sistema $Ax = 0$ é possível e determinado.