I. DETERMINANTES

O determinante de uma matriz quadrada é um número.

Podem ser usados para discutir e resolver sistemas de equações lineares e para calcular valores próprios de matrizes (cap. V)

Definição: (existem outras definições) Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz de ordem $\underline{\underline{n}}$. O determinante de $\underline{\underline{A}}$ representa-se por $\det(A)$ ou $|A|$ e é definido por:

- se $n=1$, i.e., $A=(a_{11})$ então $\det(A)=a_{11}$
- se $n>1$ então

$$\boxed{\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}\det(M_{1n})}$$

onde M_{1j} denota a matriz de ordem $n-1$ que resulta de $\underline{\underline{A}}$ retirando-lhe a 1ª linha e a coluna j.

Ex.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 1\times(-4) - 2\times 3 = -4-6 = -10$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det(B) = 1\times\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - 1\times\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 0\times\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1\times(2\times(-2) - 1\times 0) - 1\times(-1\times(-2) - 1\times 3)$$

$$= -4+1 = -3$$

Definição: Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz de ordem $\underline{\underline{n}}$ e M_{ij} a matriz de ordem $\underline{\underline{n-1}}$ que se obtém de $\underline{\underline{A}}$ retirando-lhe a linha $\underline{\underline{i}}$ e a coluna $\underline{\underline{j}}$.

Chama-se <u>menor do elemento a_{ij} de A</u> ao $\boxed{\det(M_{ij})}$ e

chama-se <u>complemento algébrico do elemento a_{ij} de A</u> a $\boxed{(-1)^{i+j}\det(M_{ij})}$

Ex.: O complemento algébrico do elemento $\underline{\underline{2}}$ (1ª linha, 2ª coluna) da matriz $\underline{\underline{A}}$ acima é $(-1)^{1+2}\times\det(3) = -3$

O complemento algébrico do el.to $\underline{\underline{3}}$ (3ª linha, 1ª coluna) na matriz B acima é $(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^4\times(1\times 1 - 0\times 2) = 1$

NOTA: Pela definição, o determinante de uma matriz é calculado através de um desenvolvimento envolvendo os elementos da 1ª linha e respectivos complementos algébricos. Contudo, o determinante também pode ser obtido com um desenvolvimento semelhante ao longo de qualquer coluna ou linha da matriz.