Valores e Vectores Próprios

Def.: Seja A uma matriz quadrada. Se um vector $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$ e um número λ são tais que $A\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x}$, então diz-se que $\underset{\sim}{x}$ é vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $\underset{\sim}{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ veja-se que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{u}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{u}}$

i.e., $A\underset{\sim}{u} = 2\underset{\sim}{u}$ Logo $\underset{\sim}{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é vector próprio de A associado ao valor próprio 2 de A

NOTA: Um vector próprio está associado apenas a um valor próprio

mas, a um valor próprio estão associados uma infinidade de vectores próprios.

Se $\underset{\sim}{x}$ é vector próprio de A associado ao valor próprio λ, então

$\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$ e $A\underset{\sim}{x} = \lambda\underset{\sim}{x}$. Mas, considerando $\alpha\underset{\sim}{x}$ $(\alpha \neq 0)$

tem-se $A(\alpha\underset{\sim}{x}) = \alpha(A\underset{\sim}{x}) = \alpha(\lambda\underset{\sim}{x}) = \lambda(\alpha\underset{\sim}{x})$, ou seja,

$\alpha\underset{\sim}{x}$ é também vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

Teorema: Seja A uma matriz quadrada. Então, λ é valor próprio de A se e só se $\det(A - \lambda I) = 0$

Dem.: λ é valor próprio de A sse

$$A\underset{\sim}{x} = \lambda\underset{\sim}{x} \quad \text{para algum } \underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$A\underset{\sim}{x} - \lambda\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{(A - \lambda I)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}}_{\text{sistema homogéneo com soluções além da nula}} \quad \text{para algum } \underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$$