Regras de Introdução

$$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi\wedge\psi}\wedge I$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\rightarrow\psi}\rightarrow I$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\neg\varphi}\neg I$$

$$\dfrac{\varphi}{\varphi\vee\psi}\vee_1 I \qquad \dfrac{\psi}{\varphi\vee\psi}\vee_2 I$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\cancel{\varphi} & \cancel{\psi}\\ \vdots & \vdots\\ \psi & \varphi\end{array}}{\varphi\leftrightarrow\psi}\leftrightarrow I$$

$$\dfrac{\perp}{\varphi}(\perp)$$

Regras de Eliminação

$$\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\varphi\wedge\psi}{\psi}\wedge_2 E$$

φ admite derivação de ψ

Teorema $\exists$ sem hipóteses por cancelar

é uma derivação cuja conclusão ...
é o conjunto de hipóteses não canceladas
é um subconjunto de Γ, o que prova $\Gamma \vdash$ —

$$\dfrac{\varphi \quad \varphi\rightarrow\psi}{\psi}\rightarrow E$$

$$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}\neg E$$

$$\dfrac{\varphi\vee\psi \quad \begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \sigma\end{array} \quad \begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\vee E$$

$\neg(p_0 \wedge p_1) \vdash (p_0 \rightarrow \neg p_1)$
Pega-se no segundo e obtém-se o primeiro sem eliminar

$$\dfrac{\varphi \quad \varphi\leftrightarrow\psi}{\psi}\leftrightarrow_1 E \qquad \dfrac{\psi \quad \varphi\leftrightarrow\psi}{\varphi}\leftrightarrow_2 E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\varphi}(RAA)$$

$L = (F, R, N)$ aridade
Sendo Relação Predi

Teorema de Indução Estrutural em L-Termos

Seja $P(t)$ uma propriedade que depende de um L-termo t e suponhamos que:

1. para todo o $x \in \mathcal{V}$, $P(x)$ é válida;
2. para todo o $c \in \mathcal{C}$, $P(c)$ é válida;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para todos os $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$, se $P(t_1), \ldots, P(t_n)$ são válidas, então $P(f(t_1, ..., t_n))$ é válida.

Então $P(t)$ é válida, para todo o L-termo t.

0

Teorema de Recursão Estrutural para L-Termos

Sejam Y um conjunto, $g_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow Y$ e $g_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow Y$ funções e seja, para cada símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, $g_f : Y^n \rightarrow Y$ uma função. Então, existe uma e uma só função $G : \mathcal{T}_L \rightarrow Y$ tal que:

1. para todo o $x \in \mathcal{V}$, $G(x) = g_{\mathcal{V}}(x)$;
2. para todo o $c \in \mathcal{C}$, $G(c) = g_{\mathcal{C}}(c)$;
3. para todo o símbolo de função f, de aridade $n \geq 1$, e para quaisquer $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,
$$G(f(t_1, ..., t_n)) = g_f(G(t_1), ..., G(t_n)).$$

0 X

Teorema de Indução Estrutural em L-Fórmulas

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade que depende de uma L-fórmula φ, e suponhamos que:

1. $P(\perp)$ é válida;
2. para cada $\psi \in At_L$, $P(\psi)$ é válida;
3. para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$, se $P(\psi)$ é válida, então $P(\neg\psi)$ é válida;
4. para quaisquer $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$, se $P(\psi)$ e $P(\sigma)$ são válidas, então $P(\psi\square\sigma)$ é válida;
5. para quaisquer $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$, se $P(\psi)$ é válida, então $P(Q_x\psi)$ é válida.

Então $P(\varphi)$ é válida, para toda a L-fórmula φ.

X 0

Teorema de Recursão Estrutural em L-fórmulas

Sejam Y um conjunto e $y \in Y$ e sejam $g : At_L \rightarrow Y$, $g_\neg : Y \rightarrow Y$, $g_\square : Y \times Y \rightarrow Y$ (para cada $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$) e $g_Q : Y \rightarrow Y$ (para cada $Q \in \{\exists, \forall\}$) funções. Então, existe uma e uma só função $G : \mathcal{F}_L \rightarrow Y$ tal que:

1. $G(\perp) = y$;
2. para qualquer $\varphi \in At_L$, $G(\varphi) = g(\varphi)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}_L$, $G(\neg\varphi) = g_\neg(G(\varphi))$;
4. para quaisquer $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$,
$$G(\varphi\square\psi) = g_\square(G(\varphi), G(\psi));$$
5. para quaisquer $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathcal{F}_L$,
$$G(Q_x\varphi) = g_Q(G(\varphi)).$$

X 0

Indique (justificando) o conjunto das variáveis substituíveis pelo L-termo $x_2 - s(x_1)$ na L-fórmula:

$\forall x_1 (P(x_4) \rightarrow \exists x_0 \neg(x_0 < x_2 - s(x_1 - 0)))$

R: Sejam t e φ respectivamente o termo e a fórmula. O conjunto pedido é $V \setminus \{x_2, x_4\}$ onde V é o conjunto de todas as variáveis. Por um lado, quer x_2, quer x_4, têm, em φ, uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall x_1$. Como $x_1 \in Var(t)$, nem (x_2), nem (x_4) são substituíveis por t em φ. Por outro lado, nenhuma outra variável tem ocorrências livres em φ. Portanto, qualquer outra variável é substituível por t em φ.

Definição

A L-fórmula obtida por *substituição* numa L-fórmula φ de todas as ocorrências livres de uma variável x por um L-termo t, notada $\varphi[t/x]$, é definida por recursão estrutural em φ por:

1. $\perp[t/x] = \perp$;
2. para todo o símbolo de relação R, de aridade n, e para quaisquer $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,
$$R(t_1, ..., t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x]);$$
3. para todo o $\psi \in \mathcal{F}_L$, $(\neg\psi)[t/x] = \neg\psi[t/x]$;
4. para quaisquer $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$,
$$(\psi_1\square\psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x]\square\psi_2[t/x];$$
5. para quaisquer $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$,
$$(Q_y\psi)[t/x] = \begin{cases} Q_y\psi & \text{se } y = x \\ Q_y\psi[t/x] & \text{se } y \neq x. \end{cases}$$

X 0

Definição

Numa L-fórmula φ, uma ocorrência numa subfórmula atómica de φ de uma variável x diz-se

- *livre* quando essa ocorrência não está no alcance de nenhum quantificador Q_x (com $Q \in \{\exists, \forall\}$);
- *ligada*, caso contrário.

Denota-se

$LIV(\varphi)$ = {variáveis que têm ocorrências livres em φ};
$LIG(\varphi)$ = {variáveis que têm ocorrências ligadas em φ}.

X 0

Definição

Uma variável x diz-se *substituível* por um L-termo t numa L-fórmula φ, quando

- não existem ocorrências livres de x no alcance de Q_y, em que $Q \in \{\exists, \forall\}$ e $y \in VAR(t)$,

ou, equivalentemente, quando

- para toda a ocorrência livre de x em φ, se essa ocorrência está no alcance de Q_y, com $Q \in \{\exists, \forall\}$, então $y \notin VAR(t)$.

0 X

Calcular:
$(P(x_2) \wedge \exists x_1(s(x_1) < 0))[a]$
vero valor lógico de $P(x_2)$
$[\exists x_1 (s(x_1) < 0)][a] = 1$ sse existe $n_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $[s(x_1) < 0][a\binom{x_1}{n_1}] = 1$
sse existe $n_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $s(x_1)[a\binom{x_1}{n_1}]$ ...
continuar como se fosse as outras.

válida → se for fazer as contas como em cima através da estrutura em se
Universalmente válida → se é válida para todas as L-estruturas

Definição

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$ e seja $\varphi \in \mathcal{F}_L$ uma L-fórmula.

O *valor lógico de* φ *para a atribuição* a, denotado por $\varphi[a]_E$ ou simplesmente por $\varphi[a]$ (quando não há dúvidas quanto à L-estrutura em causa), é o elemento do conjunto $\{0, 1\}$ definido, por recursão estrutural em φ, como:

a) $\perp[a] = 0$;

b) Para todo o símbolo de relação R de aridade n e para todos os $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$,
$$R(t_1, \ldots, t_n)[a] = 1 \text{ se e só se } (t_1[a], \ldots, t_n[a]) \in \overline{R};$$

c) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$, $(\neg\psi)[a] = 1 - \psi[a]$;

0

Definição (Continuação)

d) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$, $(\psi \wedge \sigma)[a] = min\{\psi[a], \sigma[a]\}$;

e) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$, $(\psi \vee \sigma)[a] = max\{\psi[a], \sigma[a]\}$;

f) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$,
$(\psi \rightarrow \sigma)[a] = 0$ se e só se $\psi[a] = 1$ e $\sigma[a] = 0$;

g) Para quaisquer $\psi, \sigma \in \mathcal{F}_L$,
$(\psi \leftrightarrow \sigma)[a] = 1$ se e só se $\psi[a] = \sigma[a]$;

h) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$ e cada $x \in \mathcal{V}$,
$(\exists_x\psi)[a] = 1$ se e só se $\exists_{d\in D}\ \psi[a\binom{x}{d}] = 1$
se e só se $max\{\psi[a\binom{x}{d}] \mid d \in D\} = 1$;

i) Para cada $\psi \in \mathcal{F}_L$ e cada $x \in \mathcal{V}$,
$(\forall_x\psi)[a] = 1$ se e só se $\forall_{d\in D}\ \psi[a\binom{x}{d}] = 1$
se e só se $min\{\psi[a\binom{x}{d}] \mid d \in D\} = 1$.

0 X

Defina por recursão estrutural $f : \mathcal{T}_L \rightarrow \mathbb{N}_0$ nº ocorrências variável x_{2011} do seguinte modo
$f(x_i) = 1$ se $i = 2011$
$f(x_i) = 0$ se $i \neq 2011$
$f(0) = 0$
$f(s(t)) = f(t)$ para todo $t \in \mathcal{T}_L$
$f(t - t') = f(t) + f(t')$ para todo $t, t' \in \mathcal{T}_L$

(ii) A L-fórmula $P(x_2) \wedge \exists_{x_1}(s(x_1) < 0)$ é a conjunção das L-fórmulas $P(x_2)$ e $\exists_{x_1}(s(x_1) < 0)$. Tem-se portanto que

$$(P(x_2) \wedge \exists_{x_1}(s(x_1) < 0))[a] = \min\{P(x_2)[a], (\exists_{x_1}(s(x_1) < 0))[a]\}.$$

Ora, por um lado, $P(x_2)[a] = 1$ se e só se $(x_2)[a] \in \overline{P}$, se e só se $2 \in \overline{P}$. Como, de facto, 2 é um elemento do conjunto $\overline{P}$, deduz-se que $P(x_2)[a] = 1$.
Por outro lado,

$$\begin{array}{rll} (\exists_{x_1}(s(x_1) < 0))[a] = 1 & \text{sse} & \text{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } (s(x_1) < 0)[a\binom{x_1}{n_1}] = 1 \\ & \text{sse} & \text{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } s(x_1)[a\binom{x_1}{n_1}] \mathrel{\overline{<}} 0[a\binom{x_1}{n_1}] \\ & \text{sse} & \text{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \overline{s}(x_1[a\binom{x_1}{n_1}]) \mathrel{\overline{<}} \overline{0} \\ & \text{sse} & \text{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \overline{s}(n_1) \mathrel{\overline{<}} 0 \\ & \text{sse} & \text{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n_1 + 1 \mathrel{\overline{<}} 0. \end{array}$$

Dado que esta última afirmação é verdadeira (basta tomar, por exemplo, $n_1 = -2$), conclui-se que $(\exists_{x_1}(s(x_1) < 0))[a] = 1$.
Pode-se finalmente deduzir que

$$(P(x_2) \wedge \exists_{x_1}(s(x_1) < 0))[a] = \min\{P(x_2)[a], (\exists_{x_1}(s(x_1) < 0))[a]\} = \min\{1, 1\} = 1.$$

(b) Seja $\varphi = \neg P(x_0 - x_1) \rightarrow ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))$. Prove que:

(i) φ é válida em E;

(ii) φ não é universalmente válida.

R: (i) A L-fórmula φ é válida em E, ou seja $E \models \varphi$, se $\varphi[a]_E = 1$ para toda a atribuição a em E. Seja a uma atribuição qualquer em E. Tem-se

$$\begin{array}{rll} \varphi[a]_E = 1 & \text{sse} & (\neg P(x_0 - x_1))[a] = 0 \text{ ou } ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 1 \\ & \text{sse} & P(x_0 - x_1)[a] = 1 \text{ ou } (x_0 < x_1)[a] = 1 \text{ ou } (x_1 < x_0)[a] = 1 \\ & \text{sse} & (x_0 - x_1)[a] \in \overline{P} \text{ ou } x_0[a] \mathrel{\overline{<}} x_1[a] \text{ ou } x_1[a] \mathrel{\overline{<}} x_0[a] \\ & \text{sse} & a(x_0) \mathrel{\overline{-}} a(x_1) \in \overline{P} \text{ ou } a(x_0) \mathrel{\overline{<}} a(x_1) \text{ ou } a(x_1) \mathrel{\overline{<}} a(x_0). \end{array}$$

Suponhamos que $a(x_0) \mathrel{\overline{-}} a(x_1) \notin \overline{P}$. Então $a(x_0) \mathrel{\overline{-}} a(x_1) \neq 0$, donde $a(x_0) \neq a(x_1)$. Daqui resulta que $a(x_0) \mathrel{\overline{<}} a(x_1)$ ou $a(x_1) \mathrel{\overline{<}} a(x_0)$ e, portanto, $\varphi[a]_E = 1$. Como a é uma atribuição arbitrária em E conclui-se assim que φ é válida em E.

(ii) Seja $E' = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura em tudo idêntica a E salvo em $\overline{<}$ que é definida como sendo a relação de igualdade em $\mathbb{Z}$. Seja a a atribuição da alínea (a).
Tem-se $(\neg P(x_0 - x_1))[a] = 1$. De facto $(x_0 - x_1)[a] = -1 \notin \overline{P}$, donde $P(x_0 - x_1)[a] = 0$.
Verifiquemos, por outro lado, que $((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 0$. De facto, tem-se

$$\begin{array}{rll} ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 0 & \text{sse} & (x_0 < x_1)[a] = 0 \text{ e } (x_1 < x_0)[a] = 0 \\ & \text{sse} & (x_0[a], x_1[a]) \notin \overline{<} \text{ e } (x_1[a], x_0[a]) \notin \overline{<} \\ & \text{sse} & (0, 1) \notin \overline{<} \text{ e } (1, 0) \notin \overline{<} \\ & \text{sse} & 0 \neq 1 \text{ e } 1 \neq 0 \end{array}$$

afirmação esta que é, evidentemente, válida. Logo $\varphi[a]_{E'} = 0$ e, portanto, a L-fórmula φ não é válida na L-estrutura E', donde não é universalmente válida.

Lema

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$. Então,

i) $E \models (\exists_x\varphi)[a]$ se e só se $\exists_{d\in D}\ E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

ii) $E \models (\forall_x\varphi)[a]$ se e só se $\forall_{d\in D}\ E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

iii) $E \not\models (\exists_x\varphi)[a]$ se e só se $\forall_{d\in D}\ E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

iv) $E \not\models (\forall_x\varphi)[a]$ se e só se $\exists_{d\in D}\ E \not\models \varphi[a\binom{x}{d}]$.

0

Teorema

Sejam φ e ψ duas L-fórmulas e sejam x e y duas variáveis. As seguintes afirmações são válidas:

i) $\neg\forall_x\varphi \Leftrightarrow \exists_x\neg\varphi$

i') $\neg\exists_x\varphi \Leftrightarrow \forall_x\neg\varphi$

ii) $\forall_x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall_x\varphi \wedge \forall_x\psi$

ii') $\models \exists_x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi)$
$\not\models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi) \rightarrow \exists_x(\varphi \wedge \psi)$

iii) $\models (\forall_x\varphi \vee \forall_x\psi) \rightarrow \forall_x(\varphi \vee \psi)$
$\not\models \forall_x(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\forall_x\varphi \vee \forall_x\psi)$

iii') $\exists_x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists_x\varphi \vee \exists_x\psi$

iv) $\forall_x\forall_y\varphi \Leftrightarrow \forall_y\forall_x\varphi$

iv') $\exists_x\exists_y\varphi \Leftrightarrow \exists_y\exists_x\varphi$

v) $\models \exists_x\forall_y\varphi \rightarrow \forall_y\exists_x\varphi$

v') $\not\models \forall_x\exists_y\varphi \rightarrow \exists_y\forall_x\varphi$

vi) $\forall_x\varphi \Leftrightarrow \varphi$ se $x \notin LIV(\varphi)$

vi') $\exists_x\varphi \Leftrightarrow \varphi$ se $x \notin LIV(\varphi)$

vii) $\forall_x\varphi \Leftrightarrow \forall_y\varphi[y/x]$ se (*)

vii') $\exists_x\varphi \Leftrightarrow \exists_y\varphi[y/x]$ se (*)

(*) $y \notin LIV(\varphi)$ e x é substituível por y em φ

X

Definição

Seja a uma atribuição numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$ e seja $\varphi \in \mathcal{F}_L$ uma L-fórmula. Diz-se que:

- E *satisfaz* φ para a atribuição a, e escreve-se $E \models \varphi[a]$, se o valor lógico de φ em E para a é 1, i.e., se $\varphi[a]_E = 1$.
- E *não satisfaz* φ para a atribuição a, e escreve-se $E \not\models \varphi[a]$, se $\varphi[a]_E = 0$.

0

(c) Indique (justificando) uma L-fórmula universalmente válida

R: A fórmula $\psi = P(x_1) \vee \neg P(x_1)$ é uma L-fórmula universalmente válida. Para justificar esta afirmação basta notar que ψ é uma instância da fórmula $\varphi = p_0 \vee \neg p_0$ do cálculo proposicional (pois $\psi = \varphi[P(x_1)/p_0]$) e φ é uma tautologia (como é já sabido).

(d) Para cada uma das seguintes afirmações, indique (sem justificar) uma L-fórmula que a represente:

(i) Todo o número é menor do que algum número par.

(ii) A diferença de quaisquer dois números pares é par.

R: (i) $\forall_{x_0}\exists_{x_1}(P(x_1) \wedge (x_0 < x_1))$.

Recursão estrutural

- Considere a função $nv: F^{CP} \to \mathbb{N}_0$ tal que para cada $\varphi \in F^{CP}$, $nv(\varphi)$ é o numero de ocorrencias de variaveis em φ

(a) Defina a função nv por recursão estrutural

- $nv(p_i) = 1$ $\quad \square \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$
- $nv(\bot) = 0$ $\quad \varphi, \psi \in F^{CP}$
- $nv(\neg\varphi) = nv(\varphi)$
- $nv(\varphi \,\square\, \psi) = nv(\varphi) + nv(\psi)$

Complexidade lógica

- para cada p_i $i \in \mathbb{N}_0$, $R(p_i) = 0$
- $R(\bot) = 0$
- para cada $\varphi \in F^{CP}$ $R(\neg\varphi) = 1 + R(\varphi)$
- para quaisquer $\varphi, \psi \in F^{CP}$

$c)\ (R \varphi \vee \psi) = 1 + \max\{R(\varphi), R(\psi)\}$

$h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$

Valorações:

$v(\bot) = 0$

$v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$

$v(\varphi \vee \psi) = \max\{v(\varphi), v(\psi)\}$

$v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\}$

$v(\varphi \to \psi) = 0$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$

$v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$

Sendo φ uma formula $v(\varphi)$ é chamado o valor lógico de φ para a valoração v.

Indução Estrutural

IR ao regras em cima e fazer

Enunciar o teorema

R: Seja $P(u)$ um propriedade, com $u \in G$

(I) $P(1)$ é verdadeira

(II) para todo $u \in G$, se $P(u)$ é verdadeiro então $P(00u)$ também é verdadeiro

(III) Para todo $u \in G$, se $P(u)$ é verdadeiro então $P(u1)$ também

Então: para todo $u \in G$, $P(u)$ é verdade

Consistente ou inconsistente $v \nvDash \Gamma$

(existe uma valoração que satisfaz)

O conjunto $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_1 \to p_0, \bot \vee p_0\}$ é consistente pois, como vimos nos ex. ant é satisfeito para toda a valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$

O conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \bot, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente. De facto, seja v uma valoração qualquer e suponhamos que $v(p_4 \to \bot) = 1$. Então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$

Portanto $v \nvDash \Gamma_3$ para toda a valoração v.

$\Gamma \subseteq \Delta$

Se Δ é cons. então Γ é cons

Se Γ é incons. então Δ é incons.

Provar por Indução estrutural

Defina-se $P(\varphi)$ sse $f(\varphi) = 0$. Pelo Principio de Indução Estrutural para F^{CP}, basta demonstrar as afirmações (I) - (IV) seguintes:

(I) $P(p_i)$ $(i \in \mathbb{N}_0)$

(II) $P(\bot)$

(III) Para todo $\varphi \in F^{CP}$, se $P(\varphi)$ então $P(\neg\varphi)$

(IV) para todo $\varphi, \psi \in F^{CP}$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, se $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ então $P(\varphi \,\square\, \psi)$

Passemos à demonstração destas afirmações

(I) $f(p_i) = 0$ por (i) na def de f

(II) $f(\bot) = 0$ por (ii) na def de f

(III) Seja $\varphi \in F^{CP}$ tal que $f(\varphi) = 0$ (HI) Então:

$f(\neg\varphi) = f(\varphi)^2$ (por iii) na def de f

$= 0^2$ (por HI)

$= 0$

(IV) Sejam φ e $\psi \in F^{CP}$ tais que $f(\varphi) = f(\psi) = 0$ (HI). Então:

$f(\varphi \,\square\, \psi) = f(\varphi) \times f(\psi)$ (por iv, na def de f)

$= 0 \times 0$ (por HI)

$= 0$

FND e FNC (Primeiro calcular o FNC e depois FND)

① Eliminar as ocorrencias de $\leftrightarrow$, $\to$, $\bot$

- $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow (\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1)$
- $\varphi_1 \to \varphi_2 \Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$
- $\bot \Leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_0$

Leis de De Morgan

$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

② Mover negações que se encontram fora das conjunções, disjunções, para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan

③ Eliminar duplas negações

④ Aplicar a distributividade entre conjunções e disjunções