Por um resultado anterior (cap. III), a matriz $A-\lambda I$ do sistema não é invertível. Mas uma matriz é não invertível (ou singular) se e só se o seu determinante é nulo.

Os valores próprios de uma matriz A são as raízes da equação

$$\underbrace{\det(A-\lambda I)}_{\text{polinómio característico de } A} = 0 \rightarrow \text{Equação Característica de } A.$$

Ex.: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eq. característica: $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 3\left(0-3(2-\lambda)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 9(2-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 9\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-4) = 0$$

Os valores próprios da matriz A são as raízes da equação característica $(2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-4)=0$, i.e., $\lambda=2$, $\lambda=-2$ e $\lambda=4$.

Se A é uma matriz quadrada de ordem n, o seu polinómio característico é de grau n. Os valores próprios de A são os zeros do polinómio característico, pelo que, A terá n valores próprios.

Se um valor próprio ocorre k vezes diz-se que tem multiplicidade de k. Se $k=1$ trata-se de um valor próprio simples. Se $k>1$ trata-se de um valor próprio múltiplo.

Da definição decorre que, se λ é valor próprio de A, os vectores próprios associados a A verificam

$$(A-\lambda I)\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \quad \text{e} \quad \underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$$