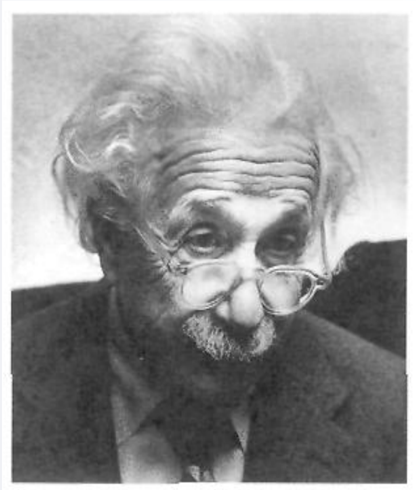
Tópicos de Física Moderna
LEI – 2011 / 2012 – 2º semestre

Teresa Viseu (regente)

5º congresso Internacional de Física, Bruxelas (1927)

A Relatividade de Galileu a Einstein



1. Relatividade restrita

- Introdução
- 1.1. Revisão da transformação de Galileu
- 1.2. Experiência de Michelson e Morley
- 1.3. Postulados da relatividade restrita
- 1.4. Transformação de Lorentz
- 1.5. Algumas consequências da transformação de Lorentz
- 1.5.1. Dilatação do tempo
- 1.5.2. Contracção de comprimentos
- 1.5.3. Transformação da velocidade
- 1.5.4. Transformação da aceleração
- 1.6. Dinâmica Relativista
- 1.6.1. Momento Linear Relativístico
- 1.6.2. Energia total Relativística
- 1.6.3. Relação entre momento linear e energia
- 1.6.4. Transformação do momento linera e da energia

1. Relatividade restrita - Introdução

- Física da Antiguidade – Gregos – Aristóteles – os corpos têm um "sítio natural" e movem-se para esse sítio natural. A Física de Aristóteles sobrevive até ao século XVII (durante 20 séculos!)

- Física Clássica – mecânica Newtoniana; eletromagnetismo de Maxwell; termodinâmica; teoria cinética dos gases...

A Física é uma ciência experimental – baseia-se em medidas (comprimentos e tempos). O grande desenvolvimento da Física a partir do séc. XVII está associado ao desenvolvimento das técnicas de medição, como por exemplo a invenção do relógio de precisão. Se já se podem medir comprimentos e intervalos de tempo com precisão a Física já se pode desenvolver.

Relógios de Sol, relógios de areia, relógios de água já existiam no Antigo Egipto (Antiguidade). O primeiro relógio mecânico surge no séc. XIV. Em 1581 Galileu inventou o primeiro relógio de pêndulo. Em 1761 John Harrison inventa o "relógio de precisão".

1. Relatividade restrita - Introdução

- Física Clássica – grande desenvolvimento no final do séc. XIX!

Grandes nomes como Galileu, Kepler, Newton, Maxwell, ...

No final do séc. XIX QUASE todos os resultados experimentais conhecidos podiam ser explicados!

Havia apenas dois problemas:

- o falhanço na explicação da "radiação do corpo negro" pela termodinâmica clássica;
- o resultado inexplicável da experiência de Michelson-Morley que contradiz a relatividade clássica de Galileu.

Na viragem para o século XX dá-se uma grande revolução na Física

1. Relatividade restrita - Introdução

- **Física Moderna** – grande desenvolvimento no início do séc. XX!

As teorias são "ousadamente" (sensacionalmente) diferentes de tudo o que se tinha visto até aí...

Dois pilares importantes:

Teoria da Relatividade (restrita e geral)

Teoria Quântica (suas aplicações ao átomo e ao núcleo)

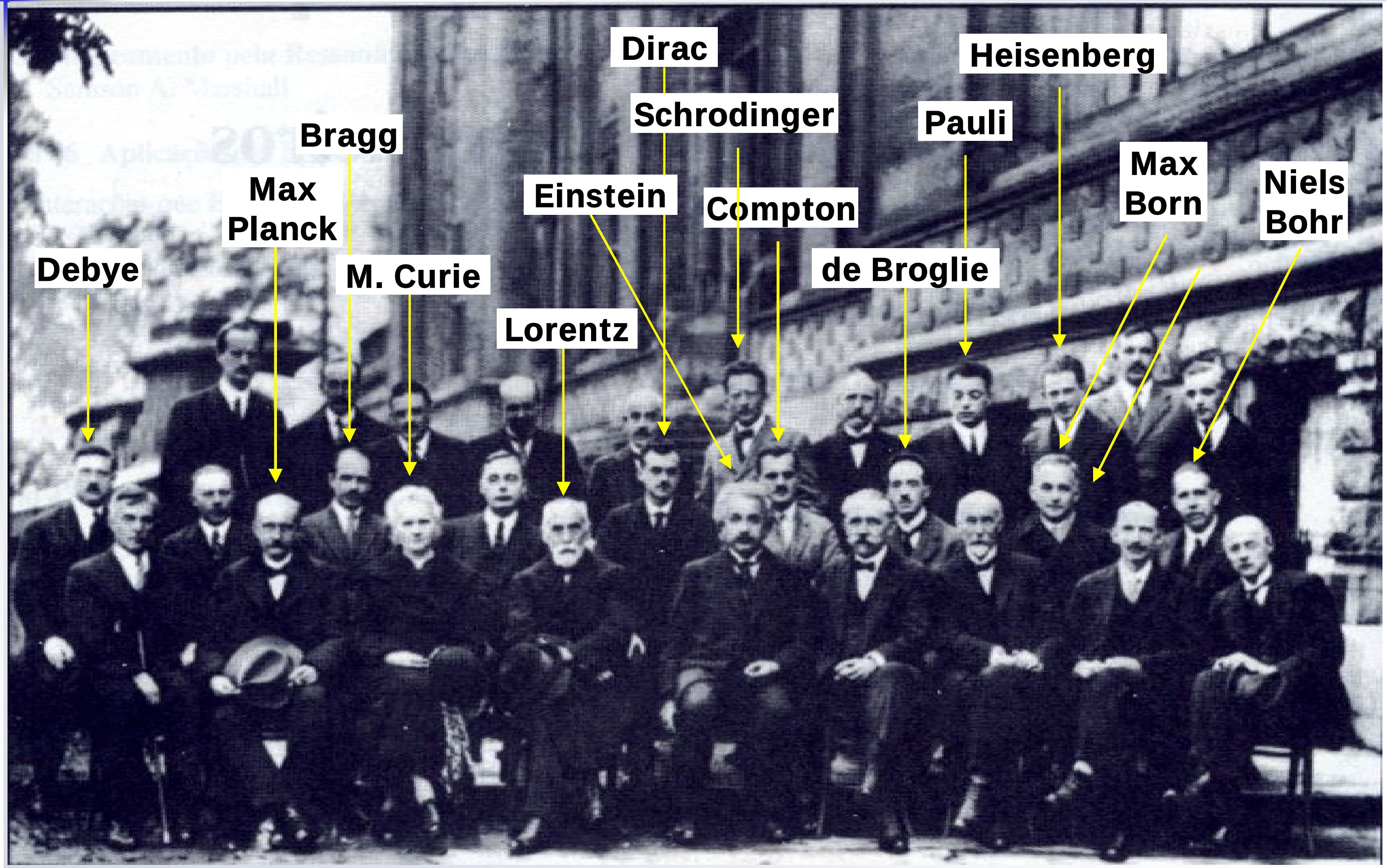
Grandes nomes como Einstein, Planck, Eisenberg, Bohr, Schrodinger, E. Fermi, M. Curie ...

- **Física Contemporânea** – o problema inicial da Física Moderna foi a unificação dos dois pilares que a sustentam: na Mecânica Relativista o espaço-tempo é contínuo, enquanto que na Mecânica Quântica a realidade é discreta... (Teoria da Eletrodinâmica Quântica(1948)– Richard Feynman)

Física das partículas elementares, Física das baixas temperaturas, ...

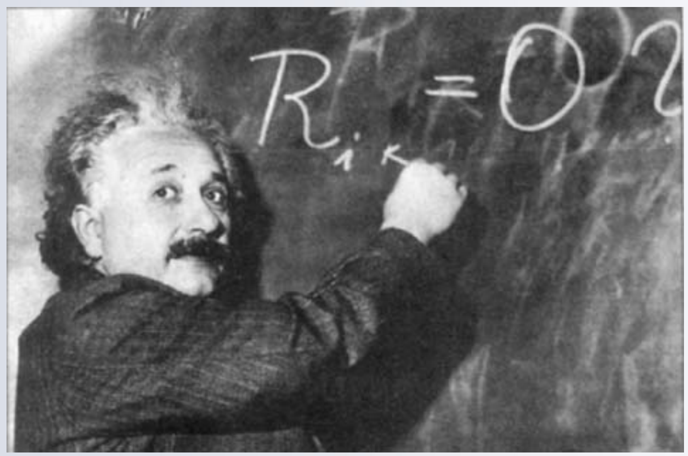
Os “arquitetos” da Física Moderna
5º congresso Internacional de Física, Bruxelas (1927)

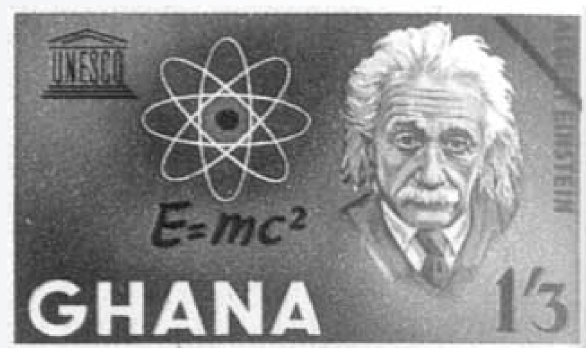
Nesta fotografia estão 15 prémios Nobel da Física e três da Química!!!



1. Relatividade restrita - Introdução

Albert Einstein: 14 Março 1879, Ulm, Württemberg, Alemanha
18 Abril 1955, Princeton, New Jersey, EUA





1.1 Relatividade restrita – Transformação de Galileu

A relatividade foi surgindo ao longo da História da Ciência – um mesmo fenómeno é percebido de forma diferente em diferentes referenciais, isto é por diferentes observadores.

Qualquer Teoria de Relatividade pretende transformar (obter as equações de transformação) a descrição de um mesmo fenómeno em diferentes referenciais.

A primeira Teoria de Relatividade foi introduzida na Física Clássica por Galileu.

Galileu constata que não há referenciais absolutos.

A transformação de Galileu relaciona as leis de Newton em dois referenciais de inércia – a relatividade de Galileu baseia-se, portanto, na Mecânica de Newton.

Postulado da Teoria de Relatividade de Galileu – as Leis de Newton do movimento são as mesmas em qualquer referencial de inércia.

1.1 Relatividade restrita – Transformação de Galileu

O que é um referencial de inércia?

É um sistema de referência em que é válido o princípio da inércia: *se a resultante das forças que actuam sobre uma partícula for nula a sua velocidade* $\vec{V}$ *mantém-se constante.*

Se o princípio da inércia não for válido temos então um *referencial acelerado*.

Mas existirão "verdadeiros" referenciais de inércia ?

Terra ?? gira em torno do seu eixo com $\omega = {}^{2\pi}\!/_{24}\ horas$

gira em torno do Sol com $\omega = {}^{2\pi}\!/_{365}\ dias$

Sistema Solar ?? roda em relação à Galáxia

Galáxia ?? move-se com aceleração relativamente ao centro do conjunto local de galáxias.

1.1 Relatividade restrita – Transformação de Galileu

O que é um referencial de inércia?

O referencial absoluto não existe!

O que existe ...

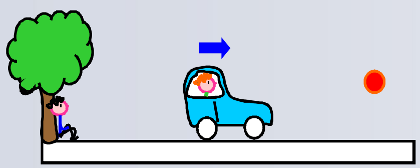
são regiões relativamente isoladas onde as acelerações podem ser desprezadas. Os referenciais ligados a essas regiões podem ser considerados, aproximadamente, referenciais de inércia.

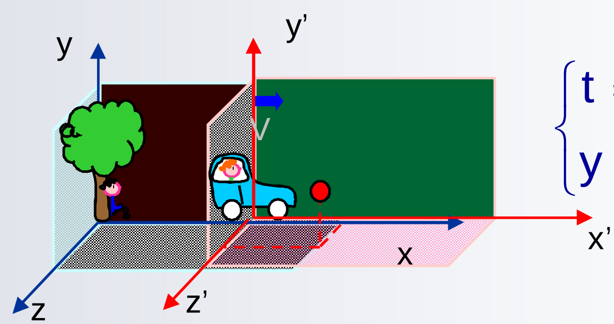
A Terra pode, para a maior parte das aplicações ser considerada um referencial de inércia.

Qualquer sistema, movendo-se com velocidade constante relativamente a um referencial de inércia, é também um referencial de inércia.

1.1 *Relatividade restrita – Transformação de Galileu*

O homem que está debaixo da árvore e o condutor do carro, que se move com velocidade constante ***V***, observam uma bola vermelha. O movimento da bola, descrito por cada um dos observadores é diferente. Como podemos comparar as duas observações?





$$\begin{cases} t = t' & z = z' \\ y = y' & x = x' + vt \end{cases}$$

1) Carro = sistema S'; Árvore = sistema S; bola = objecto
2) Cada sistema deve ter o seu referencial. Para simplificar o problema escolhem-se eixos paralelos para S e S'. Para facilitar ainda mais escolhem-se os eixos X e X' paralelos à velocidade do sistema S' (do carro, em linguagem corrente).
3) Houve um instante em que a origem do sistema S' coincidiu com a origem do sistema S (em linguagem corrente: houve um momento em que o carro passou pela árvore) – esse é o instante t=0. Por outro lado vamos supor que o tempo para ambos os observadores é o mesmo.

1.1 Relatividade restrita – Transformação de Galileu

Analisemos então a Transformação de Galileu

$$\begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Transformação de coordenadas de Galileu (1.1)

Derivando, em ordem a *t*, tem-se

$$\begin{cases} v_x = v'_x + V \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \\ t = t' \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_x = v_x - V \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \\ t' = t \end{cases}$$

Transformação de Galileu para as velocidades (1.2)

Derivando de novo em ordem a *t* $\Longrightarrow$ $a = a'$

A lei de Newton, válida em S, $\sum \vec{F} = ma$ é assim também válida em S', $\sum \vec{F} = ma'$ sendo $\vec{F} = \vec{F}'$

A lei da conservação da quantidade de movimento (momento linear) também se verifica, sendo

$$\Delta \vec{p} = m\,\Delta v = 0$$

$$\Delta \vec{p}' = m\,\Delta v' = m\,\Delta v = 0$$

1.1 Relatividade restrita – Transformação de Galileu

Veja-se o exemplo de um passageiro que, dentro de um autocarro em movimento uniforme com velocidade V, se levanta e se dirige para a porta:

Dentro do autocarro, referencial S’, o passageiro percorre a distância x’, enquanto o autocarro percorre a distância x, no mesmo tempo.

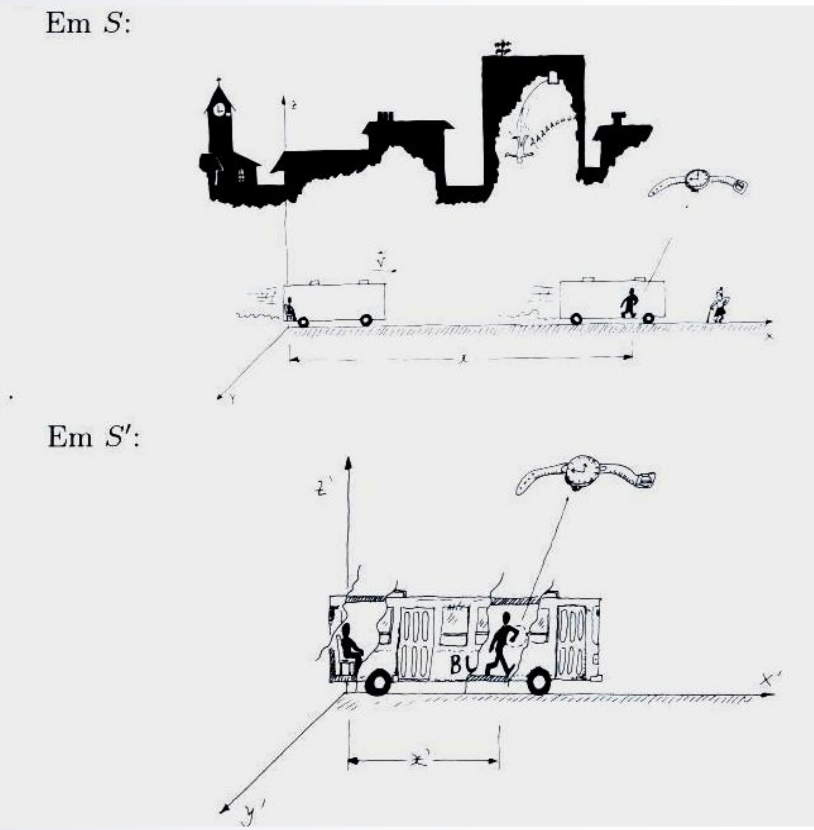
Como é que se relaciona x’ com x?

$x = x' + Vt$ ou $x' = x - Vt$

Derivando em ordem a t

$v = v' + V$ ou $v' = v - V$

E derivando de novo $a = a'$



1.1 Relatividade restrita – Transformação de Galileu

Consequências da Transformação de Galileu

1) Existe relatividade no espaço ($x \neq x'$) mas o tempo é absoluto ($t = t'$)
2) As distâncias espaciais são invariantes, $\Delta \boldsymbol{x} = \Delta \boldsymbol{x}'$

As leis de Newton da Mecânica não se alteram quando fazemos uma transformação de Galileu. As leis de Newton são **invariantes** perante uma transformação de Galileu.

Mas, se aplicarmos a transformação de Galileu às equações de Maxwell do eletromagnetismo, a sua forma matemática muda ! As leis de Maxwell **não** são **invariantes** perante uma transformação de Galileu.

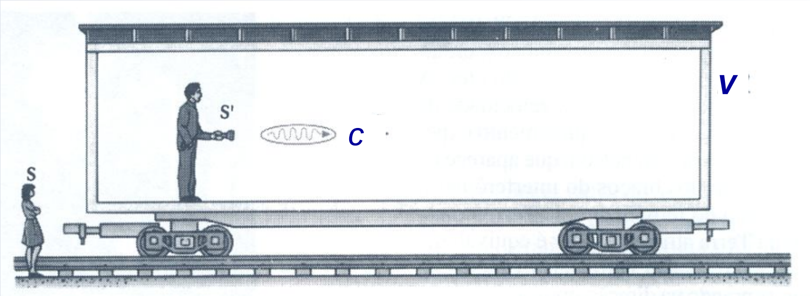
Se admitirmos que as leis do eletromagnetismo são as mesmas em todos os referenciais de inércia, aparece imediatamente um paradoxo com a velocidade da luz!

Segundo as equações de Maxwell a velocidade da luz é sempre $\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ *= 3.00 x 10* ^{8} *m/s. A aplicação da transformada de Galileu para as velocidades contradiz este resultado!*

1.1 Relatividade restrita – Transformação de Galileu

Consequências da Transformação de Galileu

*Consideremos um pulso luminoso emitido por um observador que está dentro de um comboio que viaja com velocidade constante **V**. O pulso luminoso teria a velocidade c para o observador em S' e a velocidade (c+**V**) para o observador em S.*



(1) Ou a transformação de Galileu para a adição de velocidades está incorrecta e então teremos que abandonar os princípios de comprimento absoluto e tempo absoluto;

(2) Ou as leis do eletromagnetismo não são as mesmas em todos os referenciais de inércia e então existe um referencial privilegiado em que a velocidade da luz é c e nos outros referenciais, que se movem relativamente a esse, será maior ou menor que c.

1.1 Relatividade restrita – Transformação de Galileu

Consequências da Transformação de Galileu

No século XIX a adição Galileana de velocidades parecia de pedra e cal, pois podia ser confirmada experimentalmente.

No século XIX, a existência de ondas implicava a existência de um meio para a sua propagação – ondas mecânicas **(pense-se no exemplo das ondas sonoras).**

No início do século XIX são feitas experiências que indubitavelmente estabelecem a **natureza ondulatória da radiação** – experiências de **Thomas Young** (1773-1829) **–** princípio da sobreposição e estudo dos fenómenos de interferência.

É **Thomas Young** que propõe pela primeira vez, em 1817, que as ondas associadas à radiação têm um **caráter transversal** (dois campos que oscilam transversalmente um ao outro e à direção de propagação da radiação). A polarização aparece então associada à direção da oscilação.

A luz, tal como o som e todos os fenómenos ondulatórios, pode dar origem a **fenómenos de interferência e de difracção**

Os conceitos associados à natureza ondulatória da radiação vão ser abordados duma forma um pouco mais sistemática no próximo capítulo.

1.1 Relatividade restrita – Transformação de Galileu

Consequências da Transformação de Galileu

No século XIX as ondas eletromagnéticas previstas pelas equações de Maxwell propagar-se-iam no então chamado éter luminífero.

Este éter teria propriedades estranhas: *não teria massa mas teria propriedades elásticas* (permitia “perceber“ a experiência da campânula...)

O éter estaria presente em toda a parte, até no vácuo. Tudo se devia propagar com uma determinada velocidade em relação ao éter (tal como o som se propaga no ar). Admitindo a existência do éter as propriedades da luz seriam idênticas às do som.

Foi assumido que as equações de Maxwell eram válidas para um sistema de referência que estivesse em repouso relativamente ao éter

$\rightarrow$ conceito de referencial absoluto do éter

Em alternativa poderia pôr-se a hipótese da propagação da REM se dar na ausência de qualquer meio material .... *(muito estranho na época ...)*

1.2 Experiência de Michelson-Morley

O conceito de referencial absoluto do éter tinha de ser verificado, mas não era uma tarefa fácil porque a velocidade de propagação da luz é muito elevada ...

No referencial do éter seria $c \approx 3 \times 10^8$ m/s (de acordo com os valores então conhecidos $\rightarrow$ Fizeau 1849). Então, em qualquer outro sistema de referência, em movimento de translação uniforme em relação ao primeiro, a velocidade de propagação da luz seria diferente, de acordo com a transformação de Galileu.

Em 1881 Michelson e Morley imaginaram uma experiência que iria finalmente provar a existência do éter e do referencial absoluto! (ou não...)

O referencial da Terra move-se com grande velocidade relativamente ao Sol (referencial absoluto) – considerando o raio médio da órbita da Terra em torno do Sol $R \approx 1.5 \times 10^{11}$ m e $\omega = {}^{2\pi}\!/_{365\ dias}$ obtém-se para velocidade média da Terra em relação ao Sol cerca de 3×10^4 m/s!

Usando este facto Michelson e Morley tentaram medir a dependência da velocidade de propagação da luz do observador!

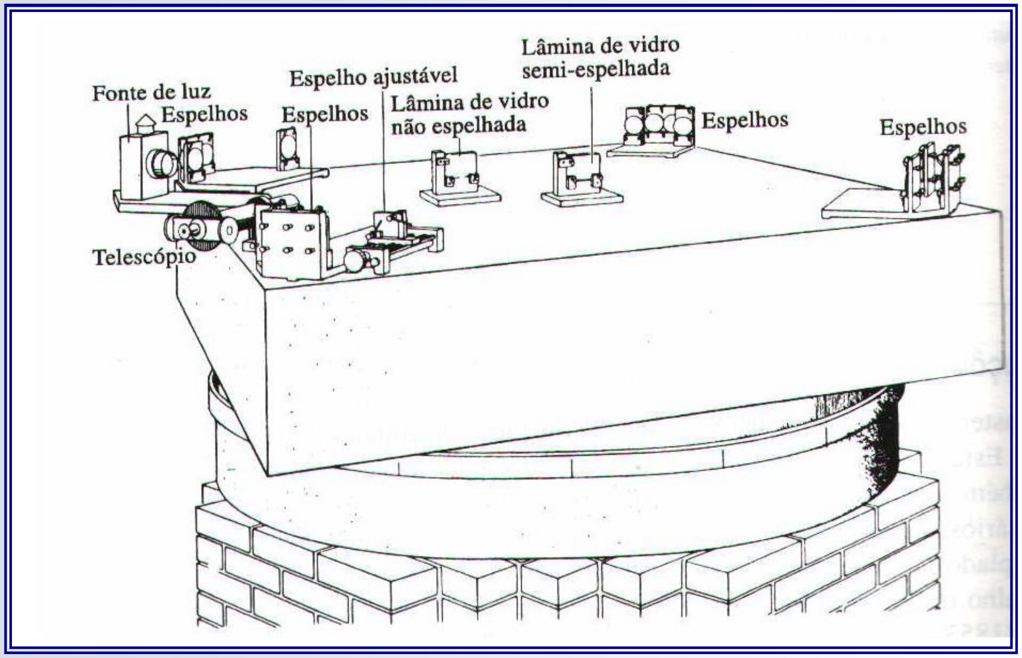
Para isso propuseram-se medir a velocidade da luz, em duas direções perpendiculares, num referencial fixo relativamente à Terra (o éter move-se-ia neste referencial).

1.2 Experiência de Michelson-Morley

Objectivo da experiência: detectar a influência do referencial de observação no módulo da velocidade da luz.

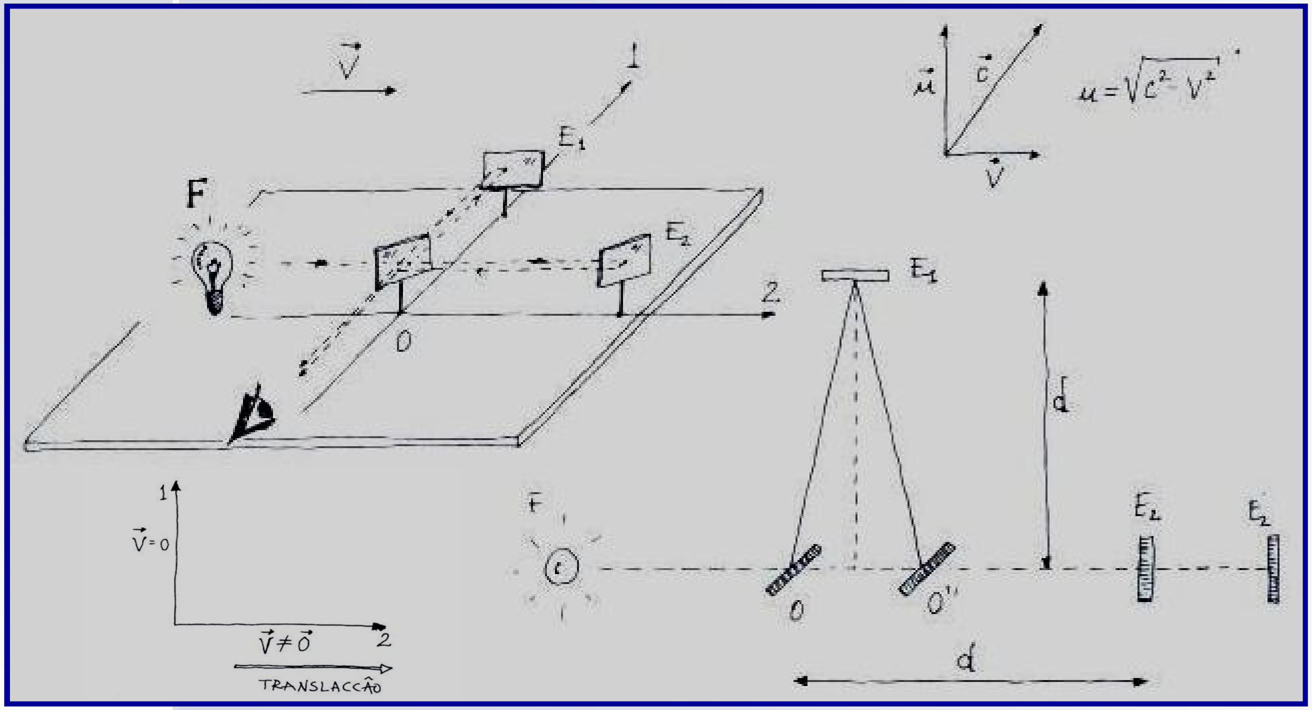
Previsão: de acordo com a transformação de Galileu seria de esperar que a velocidade da luz, em relação à Terra, variasse com a direção em que é medida.

Resultado: a velocidade da luz é igual em duas direções perpendiculares num sistema de referência que, supostamente, está em movimento em relação ao éter.



1.2 Experiência de Michelson-Morley

O interferómetro está orientado com o braço (2) na direção do movimento de translação da Terra ($V = 3\text{x}10^4$ m/s). Nesta experiência $d = 10$ m e $\lambda = 6\text{x}10^{-7}$ m



Na direção do movimento

$$t_2 = \frac{d}{c-v} + \frac{d}{c+v} = \frac{2cd}{c^2 - v^2} =$$

$$= \frac{2d/c}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2d}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \approx \frac{2d}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Na direção perpendicular ao movimento

$$t_1 = \frac{2d}{\left(c^2 - v^2\right)^{1/2}} = \frac{2d}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{2d}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Logo $\Delta t = \dfrac{d}{c}\dfrac{V^2}{c^2}$

Teorema da Binomial: $(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots$
($x << 1$)

(1.3)

A reter: vai-nos ser muito útil em várias situações

1.2 Experiência de Michelson-Morley

Esta diferença de tempo $\Delta t = \frac{d}{c}\frac{V^2}{c^2}$ (diferença no percurso da radiação de cerca de 200nm) entre os dois feixes daria origem a uma diferença de fase, que provocaria uma figura de interferência. Esta figura de interferência seria deslocada quando se rodasse o interferómetro de 90º. O interferómetro tinha resolução suficiente para detetar este deslocamento.

Apesar disso não se observou nenhum deslocamento das franjas de interferência!!!

O resultado obtido foi completamente inesperado! Poucas experiências terão sido tantas vezes repetidas e em condições tão diferentes, mas nunca foi detetado nenhum desvio no padrão de interferência. Tudo se passa como se, para a luz, não se aplicasse a soma vetorial de velocidades da transformação de Galileu !!!

Cai assim por terra a suposição de que a vel. da luz seria *c* no referencial do éter e diferente de *c* noutros referenciais de inércia (hipótese (2) do slide 15)

Fica então de pé a outra hipótese:

A transformação clássica de coordenadas de Galileu não estar correcta !!!

1.3 Postulados da Relatividade Restrita

Todo o cenário está montado para que o génio que foi Albert Einstein resolva o problema publicando, em 1905, a sua Teoria da Relatividade Restrita (TRR).

Está comprovada experimentalmente a invariância da velocidade da luz em relação a referenciais inerciais, contrariando a lei da adição de velocidades de Galileu.

É necessária uma nova transformação de coordenadas de espaço-tempo, compatível com este novo conceito...

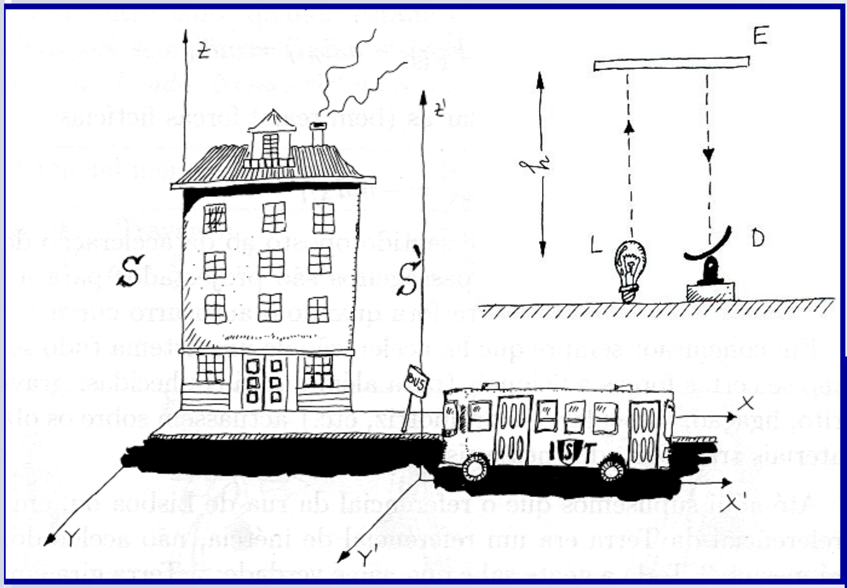
Os postulados de Einstein da TRR:

1º postulado – Todas as Leis da Física devem ser as mesmas em todos os referencias de inércia. (Isto deve ser verdade quer para a mecânica quer para o eletromagnetismo).

2º Postulado - A velocidade da luz no vácuo é constante ($c \approx 3x10^8$ m/s) independentemente da velocidade da fonte ou do observador.

1.3 Postulados da Relatividade Restrita

Consideremos os dois referenciais da figura, um ligado à Terra e o outro ao autocarro. Imaginemos que, no interior do autocarro, se acende uma lâmpada *L* emitindo um sinal que é refletido num espelho *E* no teto do autocarro e detetado em *D*, novamente no chão do autocarro. Vamos supor que *L* e *D* são praticamente coincidentes. O autocarro desloca-se com velocidade *V*.

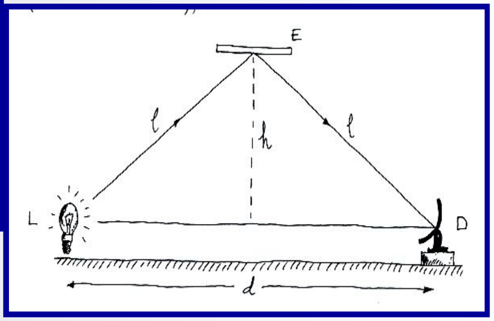


Em S' (ref. do autocarro) o tempo, ***t'***, que decorre desde que o raio de luz é emitido até que é detectado, é

$$t' = \frac{h}{c} + \frac{h}{c} = \frac{2h}{c}$$

Em S (ref. da rua) o tempo, ***t***, que decorre entre a emissão e a detecção é:

$$t = \frac{l}{c} + \frac{l}{c} = \frac{2l}{c}$$



Como $l > h$,
será $t > t'$

É fácil ver pela figura que $l^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$

Como $d = V\,t$, então $\left(\frac{1}{2}c\,t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}V\,t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\,t'\right)^2$ e finalmente $\boxed{t = \frac{t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}}$ $\boxed{t > t'}$

(1.4)

1.3 Postulados da Relatividade Restrita
Consequências – Dilatação do Tempo

Acabámos de chegar a uma consequência desconcertante, mas que advém simplesmente da constância da velocidade da luz em referencias de inércia animados de movimento relativo de translação uniforme.

A consequência desconcertante é que $\boxed{t > t'}$

(Classicamente, o tempo no referencial S seria $t = \frac{2l}{\sqrt{V^2 + c^2}}$ de acordo com a lei da adição de velocidades de Galileu, o que, feitas as contas, resultaria em t = t')

No referencial em repouso relativamente aos acontecimentos, (S'), (onde lâmpada, espelho e detetor estão em repouso relativo), o intervalo de tempo medido é mínimo. Este tempo chama-se *tempo próprio ($t' = t_0$)*

Em qualquer outro referencial de inércia o intervalo de tempo medido é necessariamente maior – este é o fenómeno da *Dilatação do Tempo*.

Analisando a expressão da dilatação do tempo, $\boxed{t = \frac{t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}}$ vê-se que no limite, quando V/c << 1, ou seja V << c, tem-se $t \approx t'$, recuperando-se o conceito de tempo absoluto inerente à transformação de Galileu.

1.3 Postulados da Relatividade Restrita Consequências – Simultaneidade

Como consequência dos postulados de Einstein o conceito de simultaneidade torna-se relativo (depende do sistema de referência, genericamente $t \neq t'$)

A simultaneidade não tem significado absoluto.

Simultaneidade segundo Einstein:

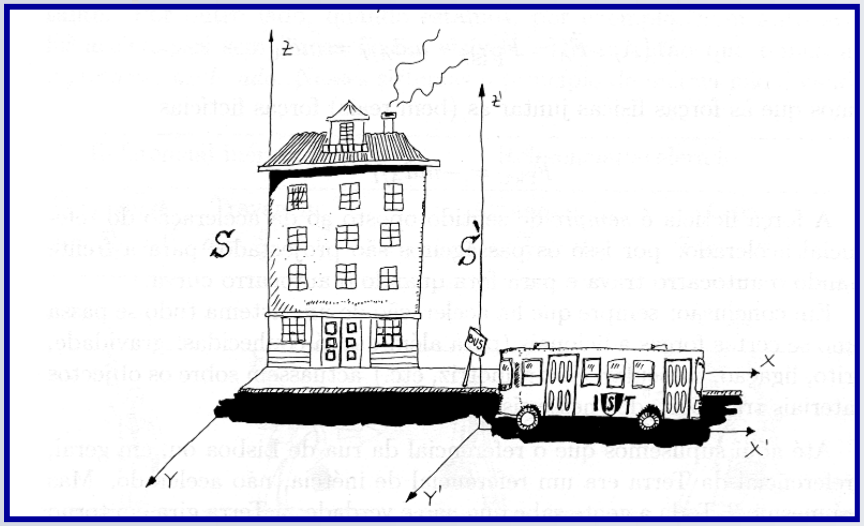
Dois eventos que ocorrem em dois pontos diferentes (X_1 e X_2) são simultâneos se, sinais luminosos emitidos nos instantes dos eventos, por cada um deles, chegarem ao mesmo tempo ao ponto que está a meia distância (seja X_0) *entre X_1 e X_2.*

Para um observador em movimento relativamente a X_0 os acontecimentos ocorridos em X_1 e X_2 não são simultâneos.

$$\boxed{t = \frac{t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \qquad \boxed{t = \gamma t'} \qquad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

1.3 Postulados da Relatividade Restrita
Consequências – Contração do Espaço

Tentemos agora calcular o comprimento de uma régua nos dois referenciais S e S'.



Para isso usamos uma lâmpada numa extremidade da régua e um espelho na outra e medimos o tempo que a luz leva a fazer o trajeto.

No referencial S', em relação ao qual a régua está parada

$$t' = \frac{2L'}{c} \quad \Leftrightarrow \quad 2L' = c\,t'$$

No referencial S, em relação ao qual a régua, a lâmpada e o espelho se movem com velocidade V, o tempo que o feixe demora a atingir o espelho, t_1, é o tempo que leva a percorrer o comprimento *L* da régua mais a distância que o autocarro andou.

$$t_1 = \frac{L + V\,t_1}{c} = \frac{L}{c - V}$$

Para percorrer o espaço do espelho até ao detetor demora o tempo

$$t_2 = \frac{L - V\,t_2}{c} = \frac{L}{c + V}$$

O tempo total será então $t = t_1 + t_2 = \dfrac{2c\,L}{c^2 - V^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2L = c\,t\,(1 - V^2/c^2)$

1.3 Postulados da Relatividade Restrita
Consequências – Contração do Espaço

Acabámos de chegar às relações $L' = \frac{c\,t'}{2}$ e $L = \frac{c\,t}{2}(1 - V^2/c^2)$

Como já sabemos a relação entre os intervalos de tempo medidos em S e em S', facilmente se obtém a relação entre *L* e *L'*

$$L = \frac{c}{2}\frac{t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}(1 - V^2/c^2) = \frac{c\,t'}{2}(1 - V^2/c^2)^{1/2}$$

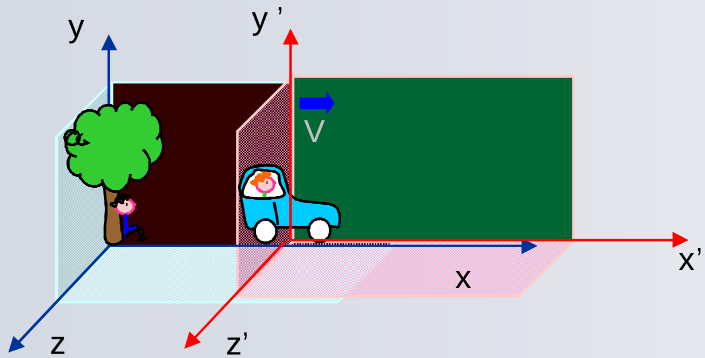
$$L = L'\sqrt{1 - V^2/c^2}$$ verificando-se então que $\boxed{L' > L}$ (1.5)

Esta é outra consequência desconcertante, mas que advém, uma vez mais, apenas da constância da velocidade da luz em referencias de inércia animados de movimento relativo de translação uniforme.

No referencial que está em repouso relativamente aos acontecimentos, referencial próprio (onde lâmpada, espelho e detector estão em repouso relativo), o comprimento medido ($L_0 = L'$) é máximo. Este é o fenómeno da Contracção do Espaço.

1.4 Transformação de Lorentz

Falta chegar a uma lei de transformação de coordenadas entre os referencias S e S', que esteja de acordo com os postulados de Einstein – Lei de transformação equivalente à de Galileu, mas válida na Teoria da Relatividade Restrita.



S e S' são referenciais de inércia;
Carro = sistema S'; Árvore = sistema S;
S' move-se com velocidade V_x em relação a S;
No instante t = t' = 0 temos O $\equiv$ O'; nesse instante é emitido um sinal luminoso por uma fonte pontual em repouso em O.

Pressupostos: O módulo da velocidade de propagação da luz é invariante;
A luz emitida propaga-se por ondas esféricas

A equação da onda esférica, num dado instante, será da forma

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (= R^2) & \text{no referencial S} \quad (1.6) \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 & \text{no referencial S'} \quad (1.7) \end{cases}$$

1.4 Transformação de Lorentz

Aplicando a transformação de Galileu ***(x = x'+Vt)*** a (1.6) verifica-se de imediato que ela não serve, pois $x'^2 + 2x'Vt' + V^2t'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$ é diferente de (1.7)

A transformação pretendida tem que:

- Reduzir-se à transformação de Galileu no limite das baixas velocidades, V<<c
- Ser linear em x e em t porque temos uma esfera que se expande com velocidade constante
- Anular os termos $(2x'Vt' + V^2t'^2)$, logo t ≠ t'

A transformação pretendida deverá então ser da forma:

$$\begin{cases} x' = K\,(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = Pt - Qx \end{cases} \qquad (1.8)$$

em que *K, P e Q* são constantes a determinar

e transformar (1.6) em (1.7) mantendo invariante a velocidade da luz

1.4 Transformação de Lorentz

Substituindo as equações (1.8) em (1.7) obtém-se

$$\left(K^2 - Q^2 c^2\right) x^2 + y^2 + z^2 + \left(K^2 V^2 - P^2 c^2\right) t^2 - 2\left(K^2 V - P Q c^2\right) x\, t = 0$$

Para que esta expressão se transforme em **($x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$)** é necessário que:

$$\left(K^2 - Q^2 c^2\right) = 1$$
$$\left(P^2 c^2 - K^2 V^2\right) = c^2$$
$$\left(K^2 V - P Q c^2\right) = 0$$

Ou seja $$K = P = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$ e $$Q = K \frac{V}{c^2}$$

Obtidos os valores numéricos dos coeficientes *K, P e Q,* vamos introduzi-los em (1.8) e obter finalmente a Transformação de Lorentz

1.4 Transformação de Lorentz

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Ou

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma (x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \end{aligned}} \qquad (1.9)$$

com $\boxed{\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}}$

As equações da Transformação de Lorentz deixam invariantes as equações de onda (1.6) e (1.7) e reduzem-se à Transformação de Galileu para V << c ($V/c \to 0$)

A transformada "inversa" é dada por ➡
atendendo a que S se move com velocidade –V em relação a S'

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma (x' + Vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right) \end{aligned}} \qquad (1.9')$$

Estas equações permitem achar as coordenadas de um acontecimento no referencial S, supondo-o descrito em S'

1.4 Transformação de Lorentz

Na transformação de Galileu a distância espacial é invariante:

$$\left| \vec{r}_2{}' - \vec{r}_1{}' \right|^2 = \left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right|^2$$

Como consequência da transformação de Lorentz quer o intervalo de tempo entre dois acontecimentos quer o espaço medido, dependem do referencial, como já vimos.

Na transformação de Lorentz é a grandeza espaço-tempo que é a mesma para todos os observadores – a esta grandeza invariante chama-se intervalo de Lorentz, $(\Delta Lz)^2$.

$$(\Delta Lz)^2 = (c\,\Delta t)^2 - (\Delta r)^2 = (c\,\Delta t')^2 - (\Delta r')^2$$

A este "espaço" (não Euclideano) chama-se Espaço de Minkowski.

A invariância do espaço-tempo significa que o tempo não pode ser separado do respetivo espaço. O espaço e o tempo fazem parte de uma mesma entidade, o espaço-tempo, que tem 4 dimensões (quadri-vetor).

O tempo medido no referencial próprio corresponde diretamente ao intervalo de Lorentz, porque no referencial próprio o intervalo de tempo mede-se no mesmo ponto

$$x'_2 = x'_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta r' = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta Lz)^2 = (c\,\Delta t')^2$$

1.5.1 Transformação de Lorentz - consequências

Já vimos que, em consequência do postulado de Einstein, o facto de a velocidade da luz no vácuo ser constante independentemente da velocidade da fonte ou do observador, leva a resultados desconcertantes:

1. No referencial em repouso relativamente aos acontecimentos, referencial próprio, o intervalo de tempo medido é mínimo. Este tempo chama-se *tempo próprio* (t_0). Em qualquer outro referencial de inércia o intervalo de tempo medido é necessariamente maior ($t = \gamma\, t_0$) – este é o fenómeno da *Dilatação do Tempo*. (slide 25)

2. No referencial que está em repouso relativamente aos acontecimentos, referencial próprio, o comprimento medido (L_0) é máximo. Em qualquer outro referencial de inércia o comprimento medido é necessariamente menor ($L = L_0 / \gamma$). Este é o fenómeno da *Contracção do Espaço*. (slide 28)

1.5.1 Transformação de Lorentz - consequências

Estes resultados (dilatação do tempo e contração do espaço) podem agora ser obtidos diretamente a partir da Transformação de Lorentz :

1. Consideremos que o referencial que está em repouso relativamente aos acontecimentos, referencial próprio, é o referencial S'. Então $\Delta t' = \Delta t_0$. Como neste referencial os acontecimentos ocorrem no mesmo ponto, isto é $\Delta x' = 0$, então, usando a relação $$t = \gamma\left(t' + \frac{V x'}{c^2}\right)$$

conclui-se que $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ (1.4) - *Dilatação dos intervalos de Tempo.*

A consequência é que, como $\Delta t > \Delta t_0$, todos os relógios em movimento em relação ao referencial próprio, atrasam-se.

1.5.1 Transformação de Lorentz - consequências

- Uma confirmação experimental da dilatação do tempo foi obtida em 1971 por J. C. Hafele e R. E. Keating. Relógios de césio, com uma precisão de 10^{-9}s, foram transportados à volta do mundo em aviões a jato, permanecendo 45 horas no ar. Embora as contas não sejam fáceis nem diretas, os relógios a bordo dos aviões atrasaram-se em relação aos que ficaram em Terra, de acordo com as previsões da Teoria da Relatividade.

- A dilatação do tempo é também confirmada todos os dias pelo facto de serem detetadas à superfície da Terra partículas subatómicas, chamadas muões. Estas partículas formam-se na alta atmosfera, por interações com outras partículas muito energéticas, a uma altitude de cerca de 10 000 metros. Apesar do tempo de vida dos muões ser muito curto, da ordem de 2.2×10^{-6} s, muitas destas partículas são detetadas à superfície da Terra.

1.5.2 Transformação de Lorentz - consequências

Também directamente a partir da Transformação de Lorentz se pode obter a contracção dos comprimentos:

2. Continuando a considerar que o referencial que está em repouso relativamente aos acontecimentos, referencial próprio, é o referencial S', então $L' = L_0$, *comprimento próprio*. Num outro referencial de inércia que esteja em movimento de translação uniforme relativamente ao referencial próprio, o comprimento medido será $L = x_2 - x_1$ (medindo-se, x_2 e x_1 no mesmo instante... ou seja $\Delta t = 0$).

Então, usando a relação $x' = \gamma(x - V\,t)$

conclui-se que $\Delta x' = \gamma\,\Delta x$

ou seja $L_0 = \gamma L$ ou $L = L_0 / \gamma$ (1.5)

fenómeno a que se chama *Contracção do Comprimento.*

1.5.2 Transformação de Lorentz - consequências

- A consequência imediata é que, como $L < L_0$, a componente do comprimento de um objeto ao longo da direção do movimento do objecto parece sempre mais curta para um observador que esteja em movimento relativamente ao objecto.

- As componentes das dimensões do objeto nas direções perpendiculares à direção do movimento relativo não sofrem qualquer alteração, pois nessas direções a transformação é trivial, sendo $\Delta y' = \Delta y$ e $\Delta z' = \Delta z$.

- Quer a contracção do espaço quer a dilatação do tempo só são percetíveis para velocidades muito próximas da velocidade da luz, como se vê pelo exemplo junto

$V = 0.9c$	$\gamma = 2.294$	$\Delta t = 2.294\,\Delta t_0$	$L = L_0/2.294$
$V = 10^{-3}c$ (3×10^5 m/s)	$\gamma = 1.0000005$	$\Delta t = 1.0000005\Delta t_0$	$L = L_0/1.0000005$

1.5.3 Transformação da Velocidade

- Se as componentes da velocidade de uma dada partícula, no referencial S, forem v_x, v_y e v_z, quais serão as componentes da velocidade da partícula num referencial S' que se move com velocidade $\vec{V} = V\,\hat{i}$ relativamente ao primeiro?

No referencial S :

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

No referencial S' :

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{dx'}{dt'} \\ v'_y = \dfrac{dy'}{dt'} \\ v'_z = \dfrac{dz'}{dt'} \end{cases}$$

- Procuram-se então as equações de transformação da velocidade em relatividade restrita, usando a transformada de Lorentz

1.5.3 Transformação da Velocidade

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{(x'+Vt')}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right] = \dfrac{\dfrac{dx'}{dt}+V\dfrac{dt'}{dt}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \dfrac{\dfrac{dx'}{dt'}\dfrac{dt'}{dt}+V\dfrac{dt'}{dt}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \dfrac{(v'_x+V)\dfrac{dt'}{dt}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\[2em] v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{dy'}{dt'}\dfrac{dt'}{dt} \\[2em] v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz'}{dt} = \dfrac{dz'}{dt'}\dfrac{dt'}{dt} \end{cases}$$

Falta apenas obter $\dfrac{dt'}{dt}$ o que é fácil usando a transformação de Lorentz para o tempo

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{dt/dt'} = \frac{1}{\dfrac{d}{dt'}\left(\dfrac{t'+Vx'/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)} = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\dfrac{V}{c^2}v'_x}$$

1.5.3 Transformação da Velocidade

Substituindo dt'/dt nas expressões anteriores obtêm-se finalmente as relações conhecidas por Transformações de Lorentz para as velocidades, que podem ser escritas nas duas formas atendendo a que S' se move com velocidade V em relação a S, e S se move com velocidade –V em relação a S'.

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + \dfrac{V}{c^2} v'_x} \\[2ex] v_y = \dfrac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \dfrac{V}{c^2} v'_x} \\[2ex] v_z = \dfrac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \dfrac{V}{c^2} v'_x} \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - V}{1 - \dfrac{V}{c^2} v_x} \\[2ex] v'_y = \dfrac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \dfrac{V}{c^2} v_x} \\[2ex] v'_z = \dfrac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \dfrac{V}{c^2} v_x} \end{cases} \qquad (1.10)$$

Se V <<c obtêm-se, como seria de esperar, as Transformações de Galileu para as velocidades

$$\begin{cases} v_x = v'_x + V \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases} \qquad \begin{cases} v'_x = v_x - V \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \qquad (1.2)$$

1.5.4 Transformação da Aceleração

A invariância da velocidade da luz (em todos os referenciais em movimento relativo uniforme) destrói a invariância da aceleração relativamente a esses mesmos referenciais, como acontecia na relatividade Clássica de Galileu.

Mostrar que: $$a'_x = \frac{a_x\left(1-V^2/c^2\right)^{3/2}}{\left(1-\frac{V}{c^2}v_x\right)^3}$$

Os dois observadores medem acelerações diferentes ao contrário do que acontece com a transformação de Galileu.

1.6 Dinâmica Relativista

- Usando a teoria da relatividade restrita vimos como se altera a descrição de um dado movimento, deduzindo as leis de transformação de velocidades entre referenciais inerciais (cinemática relativista).

- Como consequência da lei de transformação de velocidades, verifica-se que $a'_x \neq a_x$ (contrariamente ao que acontecia com a transformação de Galileu) o que faz antecipar uma nova dinâmica relativista.

De acordo com a TRR a segunda lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, não é um invariante.

- Esta lei não impõe limite para a velocidade, contrariamente à TRR, porque, qualquer força F constante, aceleraria uma partícula até uma velocidade infinita ... desde que atuasse durante muito tempo.

Os conceitos fundamentais da dinâmica, e que portanto terão que ser válidos em qualquer teoria de relatividade, são:

1. Princípio de Conservação do Momento Linear ($\vec{p}$)
2. Princípio de Conservação da Energia (E)

1.6.1 Momento Linear Relativístico

- Na Mecânica Clássica há conservação do momento linear, fazendo-se

$$p = mv$$

- Na Mecânica Relativista deve também haver conservação do momento linear, em consequência de estarmos a considerar que o espaço é isotrópico, no entanto, como vamos ver a seguir, se continuarmos a considerar $\vec{p} = m\vec{v}$ esta lei de conservação não se verifica.

- Logo, na Mecânica Relativista, temos de encontrar uma nova definição de momento linear, sendo então $p \neq mv$, mas $p \approx mv$ quando $V << c$

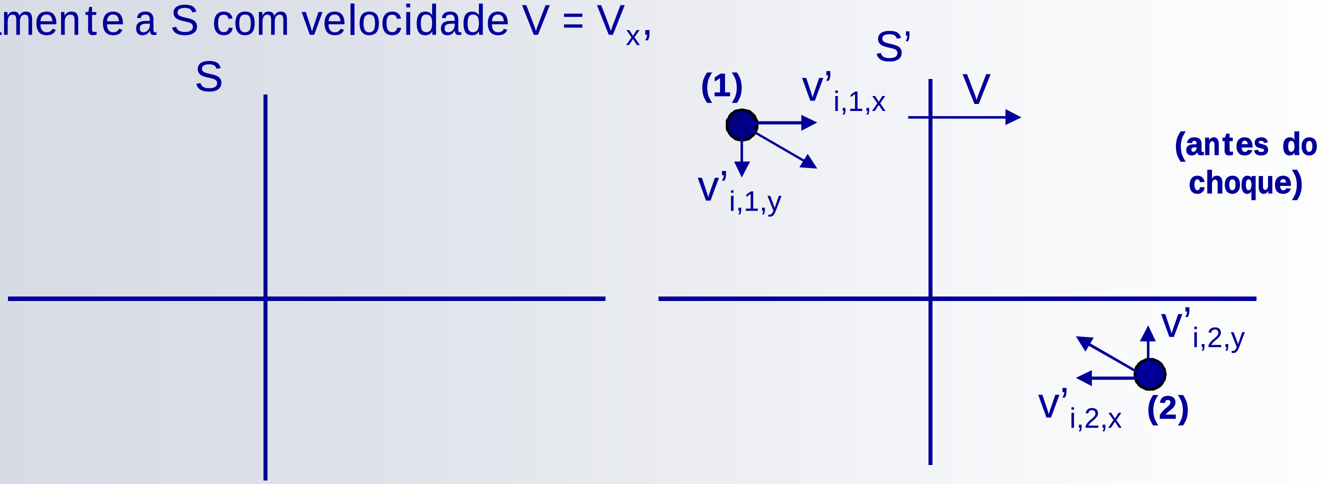
- Como vamos ver a seguir, a nova definição de momento linear, o chamado Momento Linear Relativístico, é

$$\boxed{\vec{p} = \gamma\, m\vec{v}}$$

1.6.1 Momento Linear Relativístico

- Vamos considerar um choque elástico entre duas partículas idênticas. Vamos estudar este choque do ponto de vista de dois observadores cada um no seu referencial de inércia.

- Considerem-se os referencias S e S'. Como se mostra na figura junta, S' move-se relativamente a S com velocidade $\vec{V} = V_x$,

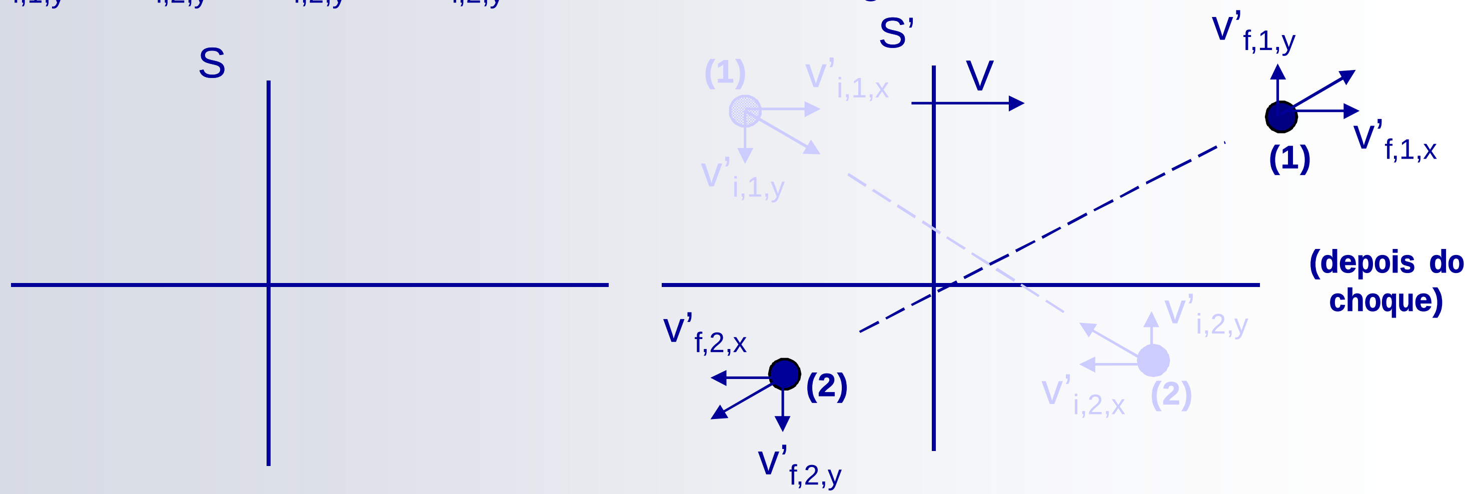


No referencial S' as partículas (1) e (2) têm velocidades iniciais que só diferem em sentido, isto é $v'_{i,1,x} = - v'_{i,2,x}$ e $v'_{i,1,y} = -v'_{i,2,y}$ e portanto o momento linear do sistema antes do choque, é nulo

$$\begin{cases} p'_{i,x} = m\, v'_{i,1,x} - m\, v'_{i,2,x} = 0 \\ p'_{i,y} = -m\, v'_{i,1,y} + m\, v'_{i,2,y} = 0 \end{cases}$$

1.6.1 Momento Linear Relativístico

➢ Como o choque é elástico ou as componentes das velocidades segundo x' mantêm-se constantes, $v'_{i,1,x} = v'_{f,1,x} = -v'_{i,2,x} = -v'_{f,2,x}$, e as componentes segundo y ' trocam de sinal, $-v'_{i,1,y} = v'_{f,2,y} = v'_{i,2,y} = -v'_{f,2,y}$, como se vê na figura, ou o contrário.

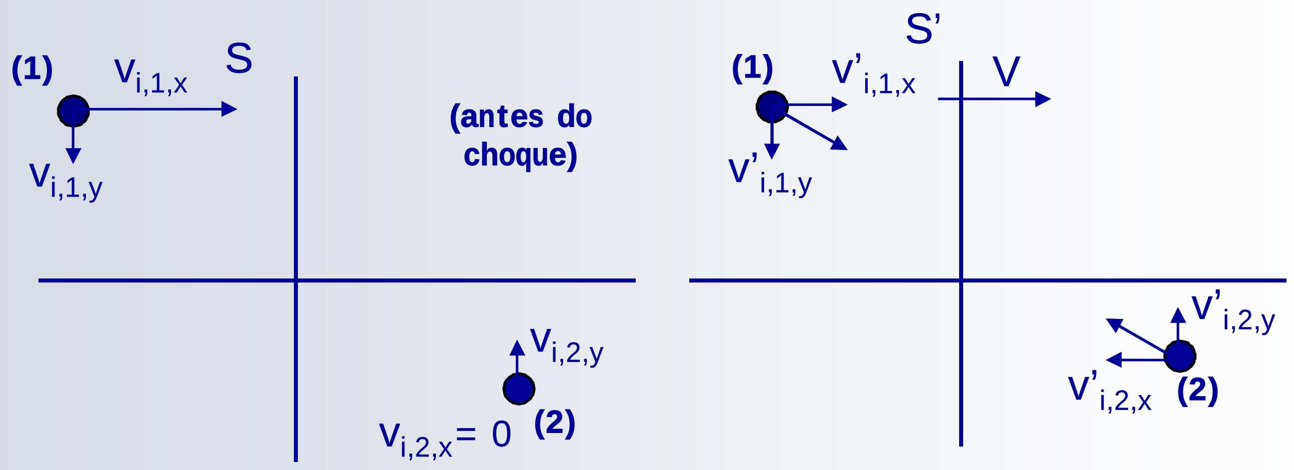


No referencial S' o momento linear do sistema, depois do choque, continua a ser nulo

$$\begin{cases} p'_{f,x} = m\,v'_{f,1,x} - m\,v'_{f,2,x} = 0 \\ p'_{f,y} = m\,v'_{f,1,y} - m\,v'_{f,2,y} = 0 \end{cases}$$

1.6.1 Momento Linear Relativístico

- Vamos agora ver como é que o mesmo choque é descrito por um observador em S, admitindo que S' se move em relação a S com velocidade $V = v'_{i,1,x} = -v'_{i,2,x}$, isto é, a partícula (2) não tem componente de velocidade segundo x, no referencial S.

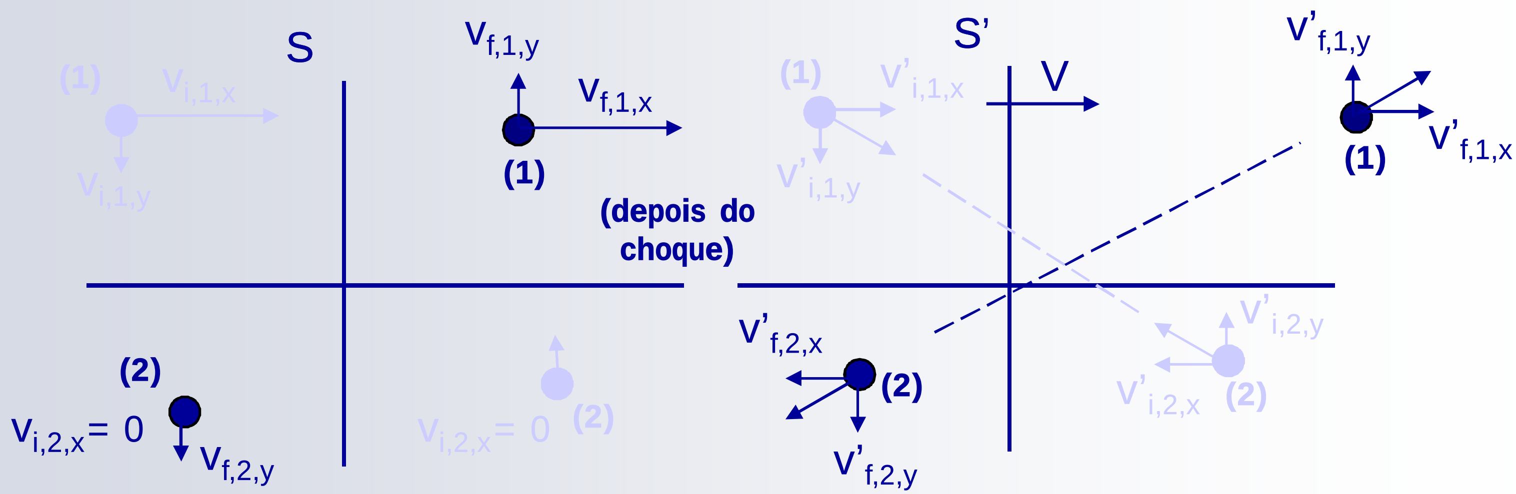


- No referencial S o momento linear do sistema, antes do choque, é

$$\begin{cases} p_{i,x} = m\,v_{i,1,x} + 0 \\ p_{i,y} = -m\,v_{i,1,y} + m\,v_{i,2,y} \end{cases}$$

1.6.1 Momento Linear Relativístico

- Depois do choque a situação é a ilustrada na figura junta em que as componentes da velocidade segundo x se mantêm ($v_{i,1,x} = v_{f,1,x}$) e as componentes segundo y trocam de sinal ($v_{i,1,y} = -v_{f,1,y}$ e $v_{i,2,y} = -v_{f,2,y}$)



- No referencial S o momento linear do sistema, depois do choque, é

$$\begin{cases} p_{f,x} = m\, v_{f,1,x} + 0 \\ p_{f,y} = m\, v_{f,1,y} - m\, v_{f,2,y} \end{cases}$$

1.6.1 *Momento Linear Relativístico*

Analisemos o que se passa com a componente y do momento linear, no referencial S

$$\Delta\, p_y = p_{f,y} - p_{i,y} = m\, v_{f,1,y} + m\, v_{i,1,y} - m\, v_{f,2,y} - m\, v_{i,2,y}$$

Como $\quad |v_{i,1,y}| = |v_{f,1,y}| \quad$ e $\quad |v_{i,2,y}| = |v_{f,2,y}|$

então $\quad \boxed{\Delta\, p_y = 2\, m\, v_{1,y} - 2\, m\, v_{2,y}} \quad$ (A)

Segundo a Mecânica Clássica (Relatividade de Galileu), as componentes em y da velocidade são as mesmas entre referenciais de inércia, isto é $v'_y = v_y$.

Como em S' $|v'_{1,y}| = |v'_{2,y}|$ então também em S $|v_{1,y}| = |v_{2,y}|$ e verifica-se a conservação do momento linear.

Segundo a Teoria da Relatividade Restrita de Einstein, $v'_y \neq v_y$ e a aplicação da transformação de Lorentz a $v_{1,y}$ e a $v_{2,y}$ permite concluir, como vamos ver, que $|v_{1,y}| \neq |v_{2,y}|$. Portanto, ou não se verifica a conservação do momento linear entre referenciais de inércia, ou então $\vec{p} \neq m\vec{v}$.

1.6.1 Momento Linear Relativístico

Apliquemos então a Transformação de Lorentz (ver eq. 1.10) a $v_{1,y}$ e a $v_{2,y}$.

$$v'_{1,y} = \frac{v_{1,y}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-\frac{V}{c^2}v_{1,x}} \qquad v'_{2,y} = \frac{v_{2,y}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-0}$$

$v_{2,x} = 0$

Admitindo como anteriormente que $|v'_{1,y}| = |v'_{2,y}|$ verifica-se então que

$$\boxed{v_{2,y} = \frac{v_{1,y}}{1-\frac{v_{1,x}V}{c^2}}} \qquad \text{(B)}$$

Então, fazendo $\vec{p} = m\,\vec{v}$ e $\vec{p}\,' = m\,\vec{v}\,'$ verifica-se que, se o momento linear é conservado em S' não o é em S. Logo, para que exista conservação do momento linear entre referenciais de inércia, é necessário redefinir esta grandeza.

1.6.1 Momento Linear Relativístico massa e energia

Retomemos a relação (A) $\Delta p_y = 2 m v_{1,y} - 2 m v_{2,y}$

Na física clássica se $m'_1 = m'_2$, então $m_1 = m_2$.

Vamos, para já sem discutir o significado físico do que estamos a fazer, admitir que possa não ser assim e que m_1 possa ser diferente de m_2

Tem-se então, usando (B), $$m_1 = \frac{m_2}{1 - \frac{v_{1,x} V}{c^2}}$$

Sabendo que $V = v'_{1,x}$ e usando de novo a transformação de Lorentz, tem-se

$$v'_{1,x} = \frac{v_{1,x} - V}{1 - \frac{v_{1,x} V}{c^2}} = V$$ que permite escrever $$-v_{1,x} \frac{V^2}{c^2} + 2V - v_{1,x} = 0$$

e finalmente, pela fórmula resolvente, obter $$V = \frac{1 - \sqrt{1 - (v_{1,x} / c)^2}}{v_{1,x} / c^2}$$

Então a relação entre m_1 e m_2 fica $$\boxed{m_1 = \frac{m_2}{\sqrt{1 - (v_{1,x} / c)^2}}} \qquad \text{(C)}$$

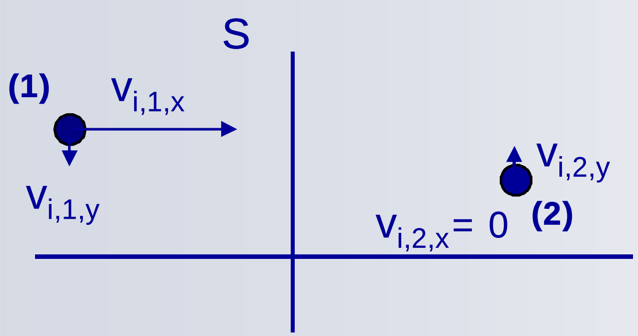
1.6.1 Momento Linear Relativístico massa e energia

Tentemos então atribuir significado físico a m_1 e m_2.

Na situação considerada, em que as partículas (1) e (2) se movem ambas com uma determinada velocidade, obtivemos a relação

$$m_1 = \frac{m_2}{\sqrt{1-(v_{1,x}/c)^2}}$$

Vamos agora supor que $v_{1,y}$ e $v_{2,y}$ são ambas muito pequenas, tanto antes como depois do choque. A partícula (1) aproxima-se da (2) e efectua um choque rasante. A partícula (2) estava e permanece quase parada.



Consideremos então que m_2 é a massa m da partícula (2) que está em repouso. A m_1 chamemos m_{rel}.

Então $$\boxed{m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1-(V/c)^2}}} \qquad (1.11)$$

Nota: m_{rel} não é a massa da partícula; apenas representa o seu conteúdo energético expresso em kg, como veremos adiante

1.6.1 Momento Linear Relativístico massa e energia

A relação entre m_{rel} e m, que acabámos de deduzir sugere a seguinte definição para o momento linear relativista

$$\boxed{\vec{p} = m_{rel}\,\vec{v} = \frac{m}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\,\vec{v} = \gamma\, m\, \vec{v}} \qquad (1.12)$$

A definição relativista de momento linear ($\vec{p}$) na relação (1.12) resulta numa nova expressão para a força ($\vec{F}$), uma vez que

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}(\gamma\, m\, \vec{v}) = m\,\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)} \qquad (1.13)$$

$$\boxed{m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1-(V/c)^2}}}$$

A relação entre $\mathbf{m_{rel}}$ e **m**, que acabámos de deduzir implica que uma partícula com massa **m** finita, não pode ter velocidade igual ou maior do que c, pois quando $V \rightarrow c$, o conteúdo energético da partícula, $\mathbf{m_{rel}} \rightarrow \infty$. Assim, c é a velocidade limite para uma partícula com massa.

1.6.2 Energia total Relativística

Suponhamos agora que uma partícula de massa **m**, sofre a ação de uma força $\vec{F} = F_x \hat{i}$, que faz variar a sua velocidade desde zero até $\vec{v}$.

Como se sabe, a variação da energia cinética, K, da partícula é igual ao trabalho realizado pela força $\vec{F}$

$$K = \int_0^v F_x \, dx = \int_0^v \frac{dp}{dt} dx = \int_0^v \frac{dp}{dv} \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} dx$$

$$= \int_0^v \frac{dp}{dv} v \, dv = \int_0^v \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} v \, dv$$

$$K = \left(\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - 1 \right) mc^2 \qquad \boxed{K = \frac{mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - mc^2}$$

1.6.2 Energia total Relativística

Acabámos de chegar à expressão relativista da energia cinética que, uma vez mais, se deve reduzir à expressão clássica no limite das baixas velocidades.

$$K = \frac{m c^2}{(1 - v^2 / c^2)^{1/2}} - m c^2 = m c^2 \left((1 - v^2 / c^2)^{-1/2} - 1 \right) \approx m c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v^2}$$

Como sabemos a energia total (E) de uma partícula é a soma da sua energia em repouso com a sua energia cinética, $\boxed{E = E_0 + K}$

Então, sendo $K = \dfrac{m c^2}{(1 - v^2 / c^2)^{1/2}} - m c^2 = m_{rel}\, c^2 - m c^2$

obtém-se $m_{rel}\, c^2 = m c^2 + K$ $\qquad \boxed{m_{rel} = E / c^2}$

(1.14)

$$\boxed{E = m c^2 + K} \qquad \boxed{E = E_0 + K}$$

1.6.3 Relação entre momento linear e energia

A relação de equivalência massa-energia a que acabámos de chegar, por aplicação do princípio de conservação do momento linear e da relação entre o trabalho de uma força e a sua variação de energia cinética, é largamente comprovada nas reacções nucleares e em vários outros processos que envolvem partículas muito energéticas – produção de pares , aniquilação de radiação ou radiação de aniquilação - entre outros.

A massa, apenas como conteúdo de matéria, é um invariante $\boxed{m = E_0 / c^2}$

A massa relativista ou massa-energia (energia expressa em kg) (massa + conteúdo energético) depende da velocidade

$$\boxed{m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1-(V/c)^2}}}$$

A inércia de um corpo depende do seu conteúdo energético, logo de **E** (de $\mathbf{m_{rel}}$). As partículas em movimento têm mais energia, mais inércia, mas a mesma massa.

1.6.3 Relação entre momento linear e energia

- Em 1948, numa carta a Lincoln Barnett, Einstein escreveu:

"It is not good to introduce the concept of the mass $M = \gamma m$ of a body for which no clear definition can be given. It is better to introduce no other mass than "the rest mass", m. Instead of introducing M it is better to mention the expression for the momentum and energy of a body in motion, $\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{m}^2 \boldsymbol{c}^4 + \boldsymbol{p}^2 \boldsymbol{c}^2$

- Os modernos livros de física partilham a mesma opinião (o conceito de massa relativista esteve muito em uso nas décadas de 50 a 80, mas tem sido progressivamente abandonado)

"If you see "relativistic mass" in your first-year physics textbook, complain! There is no reason for books to teach obsolete terminology. The "relativistic mass" of an object is really just the same as its energy and there isn't any reason to have another word for energy: "energy" is a perfectly good word. The mass of an object is a fundamental and an invariant property and one for which we do need a word".

1.6.3 Relação entre momento linear e energia

Como o próprio Einstein afirma, para uma partícula em movimento, a relação que preferencialmente se deve apresentar, porque não contém nenhuma ambiguidade, é a relação entre a energia total da partícula e o seu momento linear, que se obtém facilmente a partir das relações anteriores,

$$p = m_{rel} V = \frac{mV}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} = \gamma mV \qquad (1.12)$$

$$E = m_{rel} c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} = \gamma mc^2 \qquad (1.14)$$

elevando ao quadrado e eliminando V entre as duas.

por (1.14) tem-se $1-\frac{V^2}{c^2} = \frac{m^2c^4}{E^2}$ $\qquad \frac{V^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2c^4}{E^2}$ $\qquad \frac{V^2}{c^2} = \frac{p^2c^2}{E^2}$

e substituindo em (1.12) dá $\boxed{E^2 = m^2c^4 + p^2c^2}$ $\quad \boxed{E^2 = E_0^2 + p^2c^2}$ $\quad$ (1.15)

1.6.3 Relação entre momento linear e energia

Consequências imediatas da relação (1.15)

- Se $v = 0$, $p = 0$ (partícula em repouso), então $\boxed{E = E_0 = m c^2}$ (1.16)

- Se $m = 0$ (fotão, neutrino), $\boxed{E = p c}$

  ou seja $p = E / c$ e $\boxed{p = h \nu / c}$ (1.17)

- Viu-se anteriormente, pelas relações (1.12) e (1.14), que $\dfrac{V}{c} = \dfrac{p c}{E}$,

  então, se $m = 0$ e $E = p c$, verifica-se que $V = c$, ou seja qualquer "partícula" de massa nula move-se sempre à velocidade da luz.

1.6.4 Transformação do momento linear e da energia

Suponhamos uma partícula de massa $\boldsymbol{m}$ que se move ao longo do eixo OX com velocidade $\boldsymbol{v_x}$ no referencial **S** e $\boldsymbol{v}$' no referencial **S'. S'** move-se relativamente a **S** com velocidade **V** segundo x. Então podemos escrever

No referencial S

$$p_x = \frac{m\,v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p_y = 0$$

$$p_z = 0$$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

No referencial S'

$$p'_x = \frac{m\,v'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$$

$$p'_y = 0$$

$$p'_z = 0$$

$$E' = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$$

1.6.4 Transformação do momento linear e da energia

Usando a transformação da velocidade de Lorentz, é possível obter as seguintes relações de transformação (ver pormenores em *Modern Physics*, P.A.Tipler, R.A. Llewellyn)

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V E'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad p'_x = \frac{p_x - \frac{V E'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$p_y = p'_y \qquad p'_y = p_y \qquad (1.16)$$

$$p_z = p'_z \qquad p'_z = p_z$$

$$E = \frac{E' + V p'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad E' = \frac{E - V p_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$