10.)

a)

i) $x - y = 0 \Rightarrow x = y$ $\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} \in V_3$

$2y + z = 0 \Rightarrow z = -2y$

ii) $y + z = 0 \Rightarrow y = -z \quad y = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_2$

$y - z = 0 \Rightarrow -2z = 0 \quad z = 0$

b.) i.) $a \in V_2$ $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

satisfaz as condições dos 2 vetores

$\Rightarrow x = 0$

$z = 0$

$a \in V_2 \cap V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$a \in V_4$ $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

logo $V_2 \cap V_4$ é subespaço $\mathbb{R}^3$.
(A intersecção é sempre um subespaço).

ii)

V_3 $\begin{pmatrix} a \\ a \\ -2a \end{pmatrix}$

V_2 $\begin{pmatrix} b \\ a \\ a \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a \\ a \\ -2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a \\ -2a \end{pmatrix} \notin V_2 \cup V_3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \notin V_2 \cup V_3$

logo $V_2 \cup V_3$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

iii) V_2 $\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

V_1 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_2 \in V_1$ e assim $V_2 \cup V_1 = V_1$ e de acordo com o enunciado V_1 é subespaço logo $V_2 \cup V_1$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.