A designação de Matriz Identidade está relacionada com a seguinte propriedade:

Se A é uma matriz de ordem $m \times n$ então $I_m A = A$ e $A I_n = A$

Se $m = n$, $I_n A = A I_n = A$

Inversa de uma Matriz

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem $\underline{\underline{n}}$. Se existir uma matriz X, de ordem $\underline{\underline{n}}$, tal que,

$$(*) \qquad XA = AX = I_n$$

, diz-se que A é <u>invertível</u>, ou <u>regular</u>, ou ainda, <u>não singular</u>.

Uma matriz X que verifique $(*)$ diz-se <u>inversa de A</u>.

Ex.: A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ é invertível pois, se $X = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

tem-se $XA = AX = I_2$, como se pode verificar.

Se $\underline{\underline{A}}$ for invertível, a sua inversa é única. Veja-se que, se X e Y fossem inversas de A, teríamos

$$XA = AX = I_n \quad \text{e} \quad YA = AY = I_n$$

Mas então $\quad YAX = (YA)X = I_n X = X$

$\qquad$ e $\quad YAX = Y(AX) = Y I_n = Y \qquad$ donde $X = Y$

Quando existe, a matriz inversa de $\underline{\underline{A}}$ é representada por A^{-1}.

Propriedades: Sejam A e B matrizes de ordem $\underline{\underline{n}}$ invertíveis. Então

(i) A^{-1} é invertível, sendo $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) AB é invertível, sendo $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Uma matriz quadrada não nula pode não ter inversa. Veja-se o exemplo que se segue.