Lic. Engenharia Informática
LÓGICA EI
2. Cálculo Proposicional da Lógica Clássica

Luís Pinto

Dep. Matemática e Aplicações
Universidade do Minho

2010/2011

O que é uma proposição?

Frase declarativa, que pode ser verdadeira ou falsa.

Objectivos do Cálculo Proposicional ...

analisar proposições e sistematizar argumentos (raciocínios)

Interessa o modo como uma proposição é composta a partir de proposições mais simples. Como elementos de ligação entre proposições temos o *e*, o *ou*, a *implicação* (*se...então*), a *equivalência* (*se e só se*) e a *negação*, que serão designados por *conectivos*.
Um argumento pode ser representado por uma sequência de proposições

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n, \phi$$

em que as n primeiras são as premissas e a última é a conclusão.

O que é uma proposição?

Frase declarativa, que pode ser verdadeira ou falsa.

Objectivos do Cálculo Proposicional ...

analisar proposições e sistematizar argumentos (raciocínios)

Interessa o modo como uma proposição é composta a partir de proposições mais simples. Como elementos de ligação entre proposições temos o *e*, o *ou*, a *implicação* (*se...então*), a *equivalência* (*se e só se*) e a *negação*, que serão designados por *conectivos*.
Um argumento pode ser representado por uma sequência de proposições

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n, \phi$$

em que as n primeiras são as premissas e a última é a conclusão.

O que é uma proposição?

Frase declarativa, que pode ser verdadeira ou falsa.

Objectivos do Cálculo Proposicional ...

analisar proposições e sistematizar argumentos (raciocínios)

Interessa o modo como uma proposição é composta a partir de proposições mais simples. Como elementos de ligação entre proposições temos o *e*, o *ou*, a *implicação* (*se...então*), a *equivalência* (*se e só se*) e a *negação*, que serão designados por *conectivos*.

Um argumento pode ser representado por uma sequência de proposições

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n, \phi$$

em que as n primeiras são as premissas e a última é a conclusão.

O que é uma proposição?

Frase declarativa, que pode ser verdadeira ou falsa.

Objectivos do Cálculo Proposicional ...

analisar proposições e sistematizar argumentos (raciocínios)

Interessa o modo como uma proposição é composta a partir de proposições mais simples. Como elementos de ligação entre proposições temos o *e*, o *ou*, a *implicação* (*se...então*), a *equivalência* (*se e só se*) e a *negação*, que serão designados por *conectivos*.

Um argumento pode ser representado por uma sequência de proposições

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n, \phi$$

em que as n primeiras são as premissas e a última é a conclusão.

O que é uma proposição?

Frase declarativa, que pode ser verdadeira ou falsa.

Objectivos do Cálculo Proposicional ...

analisar proposições e sistematizar argumentos (raciocínios)

Interessa o modo como uma proposição é composta a partir de proposições mais simples. Como elementos de ligação entre proposições temos o *e*, o *ou*, a *implicação* (*se...então*), a *equivalência* (*se e só se*) e a *negação*, que serão designados por *conectivos*.

Um argumento pode ser representado por uma sequência de proposições

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \phi$$

em que as n primeiras são as premissas e a última é a conclusão.

O que é uma proposição?

Frase declarativa, que pode ser verdadeira ou falsa.

Objectivos do Cálculo Proposicional ...

analisar proposições e sistematizar argumentos (raciocínios)

Interessa o modo como uma proposição é composta a partir de proposições mais simples. Como elementos de ligação entre proposições temos o *e*, o *ou*, a *implicação* (*se...então*), a *equivalência* (*se e só se*) e a *negação*, que serão designados por *conectivos*.

Um argumento pode ser representado por uma sequência de proposições

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \phi$$

em que as n primeiras são as premissas e a última é a conclusão.

O que é uma proposição?

Frase declarativa, que pode ser verdadeira ou falsa.

Objectivos do Cálculo Proposicional ...

analisar proposições e sistematizar argumentos (raciocínios)

Interessa o modo como uma proposição é composta a partir de proposições mais simples. Como elementos de ligação entre proposições temos o *e*, o *ou*, a *implicação* (*se...então*), a *equivalência* (*se e só se*) e a *negação*, que serão designados por *conectivos*.

Um argumento pode ser representado por uma sequência de proposições

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n, \phi$$

em que as n primeiras são as premissas e a última é a conclusão.

Sintaxe

Definir formalmente uma linguagem, que represente uma parte significativa da linguagem natural.

Qual é o objectivo do ponto de vista semântico?

Interpretar proposições associando-lhes o valor verdade ou o valor falso, atendendo à forma como é composta a proposição a partir de proposições elementares (ou atómicas).
Identificar argumentos válidos, ou seja, que preservam o valor verdade.

Qual é o objectivo do ponto de vista sintáctico-dedutivo?

Identificar um conjunto de regras racionais básicas, que traduzam princípios fundamentais comuns a diversas áreas do conhecimento, e formalizar o processo dedutivo com base nessas regras.

Sintaxe

Definir formalmente uma linguagem, que represente uma parte significativa da linguagem natural.

Qual é o objectivo do ponto de vista semântico?

Interpretar proposições associando-lhes o valor verdade ou o valor falso, atendendo à forma como é composta a proposição a partir de proposições elementares (ou atómicas).
Identificar argumentos válidos, ou seja, que preservam o valor verdade.

Qual é o objectivo do ponto de vista sintáctico-dedutivo?

Identificar um conjunto de regras racionais básicas, que traduzam princípios fundamentais comuns a diversas áreas do conhecimento, e formalizar o processo dedutivo com base nessas regras.

Sintaxe

Definir formalmente uma linguagem, que represente uma parte significativa da linguagem natural.

Qual é o objectivo do ponto de vista semântico?

Interpretar proposições associando-lhes o valor verdade ou o valor falso, atendendo à forma como é composta a proposição a partir de proposições elementares (ou atómicas).

Identificar argumentos válidos, ou seja, que preservam o valor verdade.

Qual é o objectivo do ponto de vista sintáctico-dedutivo?

Identificar um conjunto de regras racionais básicas, que traduzam princípios fundamentais comuns a diversas áreas do conhecimento, e formalizar o processo dedutivo com base nessas regras.

Sintaxe

Definir formalmente uma linguagem, que represente uma parte significativa da linguagem natural.

Qual é o objectivo do ponto de vista semântico?

Interpretar proposições associando-lhes o valor verdade ou o valor falso, atendendo à forma como é composta a proposição a partir de proposições elementares (ou atómicas).
Identificar argumentos válidos, ou seja, que preservam o valor verdade.

Qual é o objectivo do ponto de vista sintáctico-dedutivo?

Identificar um conjunto de regras racionais básicas, que traduzam princípios fundamentais comuns a diversas áreas do conhecimento, e formalizar o processo dedutivo com base nessas regras.

Sintaxe

Definir formalmente uma linguagem, que represente uma parte significativa da linguagem natural.

Qual é o objectivo do ponto de vista semântico?

Interpretar proposições associando-lhes o valor verdade ou o valor falso, atendendo à forma como é composta a proposição a partir de proposições elementares (ou atómicas).
Identificar argumentos válidos, ou seja, que preservam o valor verdade.

Qual é o objectivo do ponto de vista sintáctico-dedutivo?

Identificar um conjunto de regras racionais básicas, que traduzam princípios fundamentais comuns a diversas áreas do conhecimento, e formalizar o processo dedutivo com base nessas regras.

Sintaxe

Definir formalmente uma linguagem, que represente uma parte significativa da linguagem natural.

Qual é o objectivo do ponto de vista semântico?

Interpretar proposições associando-lhes o valor verdade ou o valor falso, atendendo à forma como é composta a proposição a partir de proposições elementares (ou atómicas).

Identificar argumentos válidos, ou seja, que preservam o valor verdade.

Qual é o objectivo do ponto de vista sintáctico-dedutivo?

Identificar um conjunto de regras racionais básicas, que traduzam princípios fundamentais comuns a diversas áreas do conhecimento, e formalizar o processo dedutivo com base nessas regras.

Alfabeto do Cálculo Proposicional

Definição

O alfabeto do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{A}^{CP}$, é o conjunto constituído por:

- $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de símbolos, designados variáveis proposicionais, que formam o conjunto $\mathcal{V}^{CP}$;
- os conectivos (ou símbolos lógicos): $\perp$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (respectivamente, absurdo, negação, disjunção, conjunção, implicação e equivalência);
- os símbolos (e) designados símbolos auxiliares.

Definição

O alfabeto do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{A}^{CP}$, é o conjunto constituído por:

- $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de símbolos, designados variáveis proposicionais, que formam o conjunto $\mathcal{V}^{CP}$;
- os conectivos (ou símbolos lógicos): $\perp$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (respectivamente, absurdo, negação, disjunção, conjunção, implicação e equivalência);
- os símbolos (e) designados símbolos auxiliares.

Definição

O alfabeto do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{A}^{CP}$, é o conjunto constituído por:

- $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de símbolos, designados variáveis proposicionais, que formam o conjunto $\mathcal{V}^{CP}$;
- os conectivos (ou símbolos lógicos): $\perp$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (respectivamente, absurdo, negação, disjunção, conjunção, implicação e equivalência);
- os símbolos (e) designados símbolos auxiliares.

Definição

O alfabeto do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{A}^{CP}$, é o conjunto constituído por:

- $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de símbolos, designados variáveis proposicionais, que formam o conjunto $\mathcal{V}^{CP}$;
- os conectivos (ou símbolos lógicos): $\bot$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (respectivamente, absurdo, negação, disjunção, conjunção, implicação e equivalência);
- os símbolos (e) designados símbolos auxiliares.

Definição

O alfabeto do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{A}^{CP}$, é o conjunto constituído por:

- $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de símbolos, designados variáveis proposicionais, que formam o conjunto $\mathcal{V}^{CP}$;
- os conectivos (ou símbolos lógicos): $\perp$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (respectivamente, absurdo, negação, disjunção, conjunção, implicação e equivalência);
- os símbolos (e) designados símbolos auxiliares.

Definição

A linguagem do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{F}^{CP}$, é o conjunto definido indutivamente sobre $(\mathcal{A}^{CP})^*$ pelas seguintes regras:

- $\dfrac{}{p_j \in \mathcal{F}^{CP}}\, p_j$ para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$;
- $\dfrac{}{\perp \in \mathcal{F}^{CP}}\, \perp$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\neg$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\vee$, $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\wedge$,

  $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\rightarrow$, $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\leftrightarrow$.

Os elementos de $\mathcal{F}^{CP}$ são chamados fórmulas (ou proposições) do Cálculo Proposicional.

Definição

A linguagem do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{F}^{CP}$, é o conjunto definido indutivamente sobre $(\mathcal{A}^{CP})^*$ pelas seguintes regras:

- $\dfrac{}{p_j \in \mathcal{F}^{CP}}\ p_j$ para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$;
- $\dfrac{}{\perp \in \mathcal{F}^{CP}}\ \perp$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_{\neg}$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_{\vee}$, $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_{\wedge}$,

  $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_{\rightarrow}$, $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\ f_{\leftrightarrow}$.

Os elementos de $\mathcal{F}^{CP}$ são chamados fórmulas (ou proposições) do Cálculo Proposicional.

Definição

A linguagem do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{F}^{CP}$, é o conjunto definido indutivamente sobre $(\mathcal{A}^{CP})^*$ pelas seguintes regras:

- $\dfrac{}{p_j \in \mathcal{F}^{CP}}\, p_j$ para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$;
- $\dfrac{}{\perp \in \mathcal{F}^{CP}}\, \perp$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_{\neg}$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_{\vee}$, $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_{\wedge}$,

  $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_{\rightarrow}$, $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_{\leftrightarrow}$.

Os elementos de $\mathcal{F}^{CP}$ são chamados fórmulas (ou proposições) do Cálculo Proposicional.

Definição

A linguagem do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{F}^{CP}$, é o conjunto definido indutivamente sobre $(\mathcal{A}^{CP})^*$ pelas seguintes regras:

- $\dfrac{}{p_j \in \mathcal{F}^{CP}}\, p_j$ para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$;
- $\dfrac{}{\perp \in \mathcal{F}^{CP}}\, \perp$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_{\neg}$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_{\vee}$, $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_{\wedge}$,

  $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \to \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_{\to}$, $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_{\leftrightarrow}$.

Os elementos de $\mathcal{F}^{CP}$ são chamados fórmulas (ou proposições) do Cálculo Proposicional.

Definição

A linguagem do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{F}^{CP}$, é o conjunto definido indutivamente sobre $(\mathcal{A}^{CP})^*$ pelas seguintes regras:

- $\dfrac{}{p_j \in \mathcal{F}^{CP}}\, p_j$ para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$;
- $\dfrac{}{\perp \in \mathcal{F}^{CP}}\, \perp$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\neg$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\vee$, $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\wedge$,

  $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\rightarrow$, $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\leftrightarrow$.

Os elementos de $\mathcal{F}^{CP}$ são chamados fórmulas (ou proposições) do Cálculo Proposicional.

Definição

A linguagem do Cálculo Proposicional, que se denota por $\mathcal{F}^{CP}$, é o conjunto definido indutivamente sobre $(\mathcal{A}^{CP})^*$ pelas seguintes regras:

- $\dfrac{}{p_j \in \mathcal{F}^{CP}}\, p_j$ para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$;
- $\dfrac{}{\bot \in \mathcal{F}^{CP}}\, \bot$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\neg$;
- $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\vee$, $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\wedge$,

  $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \to \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\to$, $\dfrac{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \quad \psi \in \mathcal{F}^{CP}}{(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}}\, f_\leftrightarrow$.

Os elementos de $\mathcal{F}^{CP}$ são chamados fórmulas (ou proposições) do Cálculo Proposicional.

Exemplos

- $(p_1 \vee p_3) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \to (\neg p_4)) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $(p_2 \vee \wedge \bot) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

Será que $\neg(p_2 \wedge \bot) \to \neg p_4 \in \mathcal{F}^{CP}$? Que leituras poderia ter?

Os parêntesis servem para uma leitura não ambígua das fórmulas, mas para simplificar a escrita (e sem criar ambiguidade) convencionamos que os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações podem ser omitidos.

Assim, $\neg(p_2 \wedge \bot) \to \neg p_4$ representa $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \to (\neg p_4))$ e, abusando da linguagem, será também chamada uma fórmula.

Exemplos

- $(p_1 \vee p_3) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \rightarrow (\neg p_4)) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $(p_2 \vee \wedge \bot) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

Será que $\neg(p_2 \wedge \bot) \rightarrow \neg p_4 \in \mathcal{F}^{CP}$? Que leituras poderia ter?

Os parêntesis servem para uma leitura não ambígua das fórmulas, mas para simplificar a escrita (e sem criar ambiguidade) convencionamos que os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações podem ser omitidos.

Assim, $\neg(p_2 \wedge \bot) \rightarrow \neg p_4$ representa $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \rightarrow (\neg p_4))$ e, abusando da linguagem, será também chamada uma fórmula.

Exemplos

- $(p_1 \vee p_3) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \rightarrow (\neg p_4)) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $(p_2 \vee \wedge \bot) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

Será que $\neg(p_2 \wedge \bot) \rightarrow \neg p_4 \in \mathcal{F}^{CP}$? Que leituras poderia ter?

Os parêntesis servem para uma leitura não ambígua das fórmulas, mas para simplificar a escrita (e sem criar ambiguidade) convencionamos que os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações podem ser omitidos.

Assim, $\neg(p_2 \wedge \bot) \rightarrow \neg p_4$ representa $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \rightarrow (\neg p_4))$ e, abusando da linguagem, será também chamada uma fórmula.

Exemplos

- $(p_1 \lor p_3) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $((\neg(p_2 \land \bot)) \to (\neg p_4)) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $(p_2 \lor \land \bot) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

Será que $\neg(p_2 \land \bot) \to \neg p_4 \in \mathcal{F}^{CP}$? Que leituras poderia ter?

Os parêntesis servem para uma leitura não ambígua das fórmulas, mas para simplificar a escrita (e sem criar ambiguidade) convencionamos que os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações podem ser omitidos.

Assim, $\neg(p_2 \land \bot) \to \neg p_4$ representa $((\neg(p_2 \land \bot)) \to (\neg p_4))$ e, abusando da linguagem, será também chamada uma fórmula.

Exemplos

- $(p_1 \vee p_3) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \to (\neg p_4)) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $(p_2 \vee \wedge\bot) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

Será que $\neg(p_2 \wedge \bot) \to \neg p_4 \in \mathcal{F}^{CP}$? Que leituras poderia ter?

Os parêntesis servem para uma leitura não ambígua das fórmulas, mas para simplificar a escrita (e sem criar ambiguidade) convencionamos que os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações podem ser omitidos.

Assim, $\neg(p_2 \wedge \bot) \to \neg p_4$ representa $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \to (\neg p_4))$ e, abusando da linguagem, será também chamada uma fórmula.

Exemplos

- $(p_1 \vee p_3) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \rightarrow (\neg p_4)) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $(p_2 \vee \wedge\bot) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

Será que $\neg(p_2 \wedge \bot) \rightarrow \neg p_4 \in \mathcal{F}^{CP}$? Que leituras poderia ter?

Os parêntesis servem para uma leitura não ambígua das fórmulas, mas para simplificar a escrita (e sem criar ambiguidade) convencionamos que os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações podem ser omitidos.

Assim, $\neg(p_2 \wedge \bot) \rightarrow \neg p_4$ representa $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \rightarrow (\neg p_4))$ e, abusando da linguagem, será também chamada uma fórmula.

Exemplos

- $(p_1 \vee p_3) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \to (\neg p_4)) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $(p_2 \vee \wedge \bot) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

Será que $\neg(p_2 \wedge \bot) \to \neg p_4 \in \mathcal{F}^{CP}$? Que leituras poderia ter?

Os parêntesis servem para uma leitura não ambígua das fórmulas, mas para simplificar a escrita (e sem criar ambiguidade) convencionamos que os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações podem ser omitidos.

Assim, $\neg(p_2 \wedge \bot) \to \neg p_4$ representa $((\neg(p_2 \wedge \bot)) \to (\neg p_4))$ e, abusando da linguagem, será também chamada uma fórmula.

Exemplos

- $(p_1 \vee p_3) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $((\neg(p_2 \wedge \perp)) \rightarrow (\neg p_4)) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $(p_2 \vee \wedge\perp) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

Será que $\neg(p_2 \wedge \perp) \rightarrow \neg p_4 \in \mathcal{F}^{CP}$? Que leituras poderia ter?

Os parêntesis servem para uma leitura não ambígua das fórmulas, mas para simplificar a escrita (e sem criar ambiguidade) convencionamos que os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações podem ser omitidos.

Assim, $\neg(p_2 \wedge \perp) \rightarrow \neg p_4$ representa $((\neg(p_2 \wedge \perp)) \rightarrow (\neg p_4))$ e, abusando da linguagem, será também chamada uma fórmula.

Exemplos

- $(p_1 \vee p_3) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $((\neg(p_2 \wedge \perp)) \rightarrow (\neg p_4)) \in \mathcal{F}^{CP}$;
- $(p_2 \vee \wedge\perp) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

Será que $\neg(p_2 \wedge \perp) \rightarrow \neg p_4 \in \mathcal{F}^{CP}$? Que leituras poderia ter?

Os parêntesis servem para uma leitura não ambígua das fórmulas, mas para simplificar a escrita (e sem criar ambiguidade) convencionamos que os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações podem ser omitidos.

Assim, $\neg(p_2 \wedge \perp) \rightarrow \neg p_4$ representa $((\neg(p_2 \wedge \perp)) \rightarrow (\neg p_4))$ e, abusando da linguagem, será também chamada uma fórmula.

Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade relativa aos elementos $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e suponhamos que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p_j)$;
2. $P(\perp)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ implica $P(\neg\varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ implicam
   a) $P(\varphi \vee \psi)$,
   b) $P(\varphi \wedge \psi)$,
   c) $P(\varphi \rightarrow \psi)$,
   d) $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Então $P(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade relativa aos elementos $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e suponhamos que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p_j)$;
2. $P(\perp)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ implica $P(\neg\varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ implicam
   a) $P(\varphi \vee \psi)$,
   b) $P(\varphi \wedge \psi)$,
   c) $P(\varphi \rightarrow \psi)$,
   d) $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Então $P(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade relativa aos elementos $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e suponhamos que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p_j)$;
2. $P(\bot)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ implica $P(\neg\varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ implicam
   a) $P(\varphi \vee \psi)$,
   b) $P(\varphi \wedge \psi)$,
   c) $P(\varphi \to \psi)$,
   d) $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Então $P(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade relativa aos elementos $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e suponhamos que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p_j)$;
2. $P(\perp)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ implica $P(\neg\varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ implicam
   a) $P(\varphi \vee \psi)$,
   b) $P(\varphi \wedge \psi)$,
   c) $P(\varphi \to \psi)$,
   d) $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Então $P(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade relativa aos elementos $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e suponhamos que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p_j)$;
2. $P(\perp)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ implica $P(\neg\varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ implicam
   a) $P(\varphi \vee \psi)$,
   b) $P(\varphi \wedge \psi)$,
   c) $P(\varphi \rightarrow \psi)$,
   d) $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Então $P(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade relativa aos elementos $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e suponhamos que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p_j)$;
2. $P(\perp)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ implica $P(\neg\varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ implicam
   a) $P(\varphi \vee \psi)$,
   b) $P(\varphi \wedge \psi)$,
   c) $P(\varphi \rightarrow \psi)$,
   d) $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Então $P(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade relativa aos elementos $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e suponhamos que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p_j)$;
2. $P(\perp)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ implica $P(\neg\varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ implicam
   a) $P(\varphi \vee \psi)$,
   b) $P(\varphi \wedge \psi)$,
   c) $P(\varphi \rightarrow \psi)$,
   d) $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Então $P(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade relativa aos elementos $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e suponhamos que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p_j)$;
2. $P(\perp)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ implica $P(\neg\varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ implicam
   a) $P(\varphi \vee \psi)$,
   b) $P(\varphi \wedge \psi)$,
   c) $P(\varphi \rightarrow \psi)$,
   d) $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Então $P(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade relativa aos elementos $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e suponhamos que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p_j)$;
2. $P(\perp)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ implica $P(\neg\varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ implicam
   a) $P(\varphi \vee \psi)$,
   b) $P(\varphi \wedge \psi)$,
   c) $P(\varphi \to \psi)$,
   d) $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Então $P(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade relativa aos elementos $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e suponhamos que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p_j)$;
2. $P(\perp)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ implica $P(\neg\varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ implicam
   a) $P(\varphi \vee \psi)$,
   b) $P(\varphi \wedge \psi)$,
   c) $P(\varphi \rightarrow \psi)$,
   d) $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Então $P(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Seja $P(\varphi)$ uma propriedade relativa aos elementos $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e suponhamos que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p_j)$;
2. $P(\perp)$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ implica $P(\neg\varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ implicam
   a) $P(\varphi \vee \psi)$,
   b) $P(\varphi \wedge \psi)$,
   c) $P(\varphi \rightarrow \psi)$,
   d) $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Então $P(\varphi)$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Proposição

A definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ apresentada atrás é determinista.

Demonstração.

A demonstração efectua-se mostrando que cada fórmula de $\mathcal{F}^{CP}$ admite uma única árvore de formação, o que requer a utilização do Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$. $\square$

Definição

Uma subfórmula de uma fórmula φ é um sub-objecto de φ.

Proposição

A definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ apresentada atrás é determinista.

Demonstração.

A demonstração efectua-se mostrando que cada fórmula de $\mathcal{F}^{CP}$ admite uma única árvore de formação, o que requer a utilização do Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$. □

Definição

Uma subfórmula de uma fórmula φ é um sub-objecto de φ.

Proposição

A definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ apresentada atrás é determinista.

Demonstração.

A demonstração efectua-se mostrando que cada fórmula de $\mathcal{F}^{CP}$ admite uma única árvore de formação, o que requer a utilização do Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$. □

Definição

Uma subfórmula de uma fórmula φ é um sub-objecto de φ.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\rightarrow}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ funções de $Y^2 \times (F^{CP})^2$ em Y e $\overline{f_\neg}$ uma função de $Y \times F^{CP}$ em Y. Então, existe e é única a função $g : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow Y$ tal que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $g(p_i) = y_i$;
2. $g(\perp) = y$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $g(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(g(\varphi), \varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $g(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(g(\varphi), g(\psi), \varphi, \psi)$,
   b) $g(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(g(\varphi), g(\psi), \varphi, \psi)$,
   c) $g(\varphi \rightarrow \psi) = \overline{f_\rightarrow}(g(\varphi), g(\psi), \varphi, \psi)$,
   d) $g(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(g(\varphi), g(\psi), \varphi, \psi)$.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\to}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ funções de $Y^2 \times (F^{CP})^2$ em Y e $\overline{f_\neg}$ uma função de $Y \times F^{CP}$ em Y. Então, existe e é única a função $g : \mathcal{F}^{CP} \to Y$ tal que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $g(p_i) = y_i$;
2. $g(\perp) = y$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $g(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(g(\varphi), \varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $g(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(g(\varphi), g(\psi), \varphi, \psi)$,
   b) $g(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(g(\varphi), g(\psi), \varphi, \psi)$,
   c) $g(\varphi \to \psi) = \overline{f_\to}(g(\varphi), g(\psi), \varphi, \psi)$,
   d) $g(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(g(\varphi), g(\psi), \varphi, \psi)$.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\rightarrow}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ funções de $Y^2 \times (F^{CP})^2$ em Y e $\overline{f_\neg}$ uma função de $Y \times F^{CP}$ em Y. Então, existe e é única a função $\mathfrak{g} : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow Y$ tal que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $\mathfrak{g}(p_i) = y_i$;
2. $\mathfrak{g}(\perp) = y$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\mathfrak{g}(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(\mathfrak{g}(\varphi), \varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $\mathfrak{g}(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   b) $\mathfrak{g}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   c) $\mathfrak{g}(\varphi \rightarrow \psi) = \overline{f_\rightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   d) $\mathfrak{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\rightarrow}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ funções de $Y^2 \times (F^{CP})^2$ em Y e $\overline{f_\neg}$ uma função de $Y \times F^{CP}$ em Y. Então, existe e é única a função $\mathfrak{g} : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow Y$ tal que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $\mathfrak{g}(p_i) = y_i$;
2. $\mathfrak{g}(\perp) = y$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\mathfrak{g}(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(\mathfrak{g}(\varphi), \varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $\mathfrak{g}(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   b) $\mathfrak{g}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   c) $\mathfrak{g}(\varphi \rightarrow \psi) = \overline{f_\rightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   d) $\mathfrak{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\rightarrow}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ funções de $Y^2 \times (F^{CP})^2$ em Y e $\overline{f_\neg}$ uma função de $Y \times F^{CP}$ em Y. Então, existe e é única a função $\mathfrak{g} : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow Y$ tal que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $\mathfrak{g}(p_i) = y_i$;
2. $\mathfrak{g}(\perp) = y$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\mathfrak{g}(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(\mathfrak{g}(\varphi), \varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $\mathfrak{g}(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   b) $\mathfrak{g}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   c) $\mathfrak{g}(\varphi \rightarrow \psi) = \overline{f_\rightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   d) $\mathfrak{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\rightarrow}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ funções de $Y^2 \times (F^{CP})^2$ em Y e $\overline{f_\neg}$ uma função de $Y \times F^{CP}$ em Y. Então, existe e é única a função $\mathfrak{g} : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow Y$ tal que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $\mathfrak{g}(p_i) = y_i$;
2. $\mathfrak{g}(\bot) = y$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\mathfrak{g}(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(\mathfrak{g}(\varphi), \varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $\mathfrak{g}(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   b) $\mathfrak{g}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   c) $\mathfrak{g}(\varphi \rightarrow \psi) = \overline{f_\rightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   d) $\mathfrak{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\rightarrow}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ funções de $Y^2 \times (F^{CP})^2$ em Y e $\overline{f_\neg}$ uma função de $Y \times F^{CP}$ em Y. Então, existe e é única a função $\mathfrak{g} : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow Y$ tal que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $\mathfrak{g}(p_i) = y_i$;
2. $\mathfrak{g}(\perp) = y$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\mathfrak{g}(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(\mathfrak{g}(\varphi), \varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $\mathfrak{g}(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   b) $\mathfrak{g}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   c) $\mathfrak{g}(\varphi \rightarrow \psi) = \overline{f_\rightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   d) $\mathfrak{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\rightarrow}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ funções de $Y^2 \times (F^{CP})^2$ em Y e $\overline{f_\neg}$ uma função de $Y \times F^{CP}$ em Y. Então, existe e é única a função $\mathfrak{g} : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow Y$ tal que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $\mathfrak{g}(p_i) = y_i$;
2. $\mathfrak{g}(\perp) = y$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\mathfrak{g}(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(\mathfrak{g}(\varphi), \varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $\mathfrak{g}(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   b) $\mathfrak{g}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   c) $\mathfrak{g}(\varphi \rightarrow \psi) = \overline{f_\rightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   d) $\mathfrak{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\rightarrow}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ funções de $Y^2 \times (F^{CP})^2$ em Y e $\overline{f_\neg}$ uma função de $Y \times F^{CP}$ em Y. Então, existe e é única a função $\mathfrak{g} : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow Y$ tal que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $\mathfrak{g}(p_i) = y_i$;
2. $\mathfrak{g}(\perp) = y$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\mathfrak{g}(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(\mathfrak{g}(\varphi), \varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $\mathfrak{g}(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   b) $\mathfrak{g}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   c) $\mathfrak{g}(\varphi \rightarrow \psi) = \overline{f_\rightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   d) $\mathfrak{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\rightarrow}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ funções de $Y^2 \times (F^{CP})^2$ em Y e $\overline{f_\neg}$ uma função de $Y \times F^{CP}$ em Y. Então, existe e é única a função $\mathfrak{g} : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow Y$ tal que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $\mathfrak{g}(p_i) = y_i$;
2. $\mathfrak{g}(\perp) = y$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\mathfrak{g}(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(\mathfrak{g}(\varphi), \varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $\mathfrak{g}(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   b) $\mathfrak{g}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   c) $\mathfrak{g}(\varphi \rightarrow \psi) = \overline{f_\rightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   d) $\mathfrak{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\rightarrow}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ funções de $Y^2 \times (F^{CP})^2$ em Y e $\overline{f_\neg}$ uma função de $Y \times F^{CP}$ em Y. Então, existe e é única a função $\mathfrak{g} : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow Y$ tal que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $\mathfrak{g}(p_i) = y_i$;
2. $\mathfrak{g}(\perp) = y$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\mathfrak{g}(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(\mathfrak{g}(\varphi), \varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $\mathfrak{g}(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   b) $\mathfrak{g}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   c) $\mathfrak{g}(\varphi \rightarrow \psi) = \overline{f_\rightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   d) $\mathfrak{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$.

Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$

Sejam Y um conjunto, $y, y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ uma sequência infinita (numerável) de elementos de Y. Sejam $\overline{f_\vee}$, $\overline{f_\wedge}$, $\overline{f_\rightarrow}$ e $\overline{f_\leftrightarrow}$ funções de $Y^2 \times (F^{CP})^2$ em Y e $\overline{f_\neg}$ uma função de $Y \times F^{CP}$ em Y. Então, existe e é única a função $\mathfrak{g} : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow Y$ tal que:

1. para qualquer $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $\mathfrak{g}(p_i) = y_i$;
2. $\mathfrak{g}(\bot) = y$;
3. para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\mathfrak{g}(\neg\varphi) = \overline{f_\neg}(\mathfrak{g}(\varphi), \varphi)$;
4. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $\mathfrak{g}(\varphi \vee \psi) = \overline{f_\vee}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   b) $\mathfrak{g}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f_\wedge}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   c) $\mathfrak{g}(\varphi \rightarrow \psi) = \overline{f_\rightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$,
   d) $\mathfrak{g}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \overline{f_\leftrightarrow}(\mathfrak{g}(\varphi), \mathfrak{g}(\psi), \varphi, \psi)$.

Exemplos

O conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula ψ pode ser definido como sendo $var(\psi)$ em que $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é a função tal que :

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $var(p_i) = \{p_i\}$;
2. $var(\perp) = \emptyset$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   b) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   c) $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   d) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Tal definição de var diz-se uma definição por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Exemplos

O conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula ψ pode ser definido como sendo $var(\psi)$ em que $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é a função tal que :

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $var(p_i) = \{p_i\}$;
2. $var(\perp) = \emptyset$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   b) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   c) $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   d) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Tal definição de var diz-se uma definição por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Exemplos

O conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula ψ pode ser definido como sendo $var(\psi)$ em que $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é a função tal que :

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $var(p_i) = \{p_i\}$;
2. $var(\perp) = \emptyset$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   b) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   c) $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   d) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Tal definição de var diz-se uma definição por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Exemplos

O conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula ψ pode ser definido como sendo $var(\psi)$ em que $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é a função tal que :

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $var(p_i) = \{p_i\}$;
2. $var(\perp) = \emptyset$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   b) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   c) $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   d) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Tal definição de var diz-se uma definição por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Exemplos

O conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula ψ pode ser definido como sendo $var(\psi)$ em que $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é a função tal que :

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $var(p_i) = \{p_i\}$;
2. $var(\bot) = \emptyset$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   b) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   c) $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   d) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Tal definição de var diz-se uma definição por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Exemplos

O conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula ψ pode ser definido como sendo $var(\psi)$ em que $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é a função tal que :

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $var(p_i) = \{p_i\}$;
2. $var(\perp) = \emptyset$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   b) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   c) $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   d) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Tal definição de var diz-se uma definição por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Exemplos

O conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula ψ pode ser definido como sendo $var(\psi)$ em que $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é a função tal que :

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $var(p_i) = \{p_i\}$;
2. $var(\perp) = \emptyset$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   b) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   c) $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   d) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Tal definição de var diz-se uma definição por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Exemplos

O conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula ψ pode ser definido como sendo $var(\psi)$ em que $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é a função tal que :

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $var(p_i) = \{p_i\}$;
2. $var(\perp) = \emptyset$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   - a) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   - b) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   - c) $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   - d) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Tal definição de var diz-se uma definição por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Exemplos

O conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula ψ pode ser definido como sendo $var(\psi)$ em que $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é a função tal que :

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $var(p_i) = \{p_i\}$;
2. $var(\perp) = \emptyset$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   b) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   c) $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   d) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Tal definição de var diz-se uma definição por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Exemplos

O conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula ψ pode ser definido como sendo $var(\psi)$ em que $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é a função tal que :

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $var(p_i) = \{p_i\}$;
2. $var(\perp) = \emptyset$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   b) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   c) $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   d) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Tal definição de *var* diz-se uma definição por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Exemplos

O conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula ψ pode ser definido como sendo $var(\psi)$ em que $var : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}^{CP})$ é a função tal que :

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $var(p_i) = \{p_i\}$;
2. $var(\perp) = \emptyset$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $var(\neg\varphi) = var(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $var(\varphi \vee \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   b) $var(\varphi \wedge \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   c) $var(\varphi \rightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$,
   d) $var(\varphi \leftrightarrow \psi) = var(\varphi) \cup var(\psi)$.

Tal definição de var diz-se uma definição por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$.

Exemplos

A complexidade lógica de uma fórmula ψ é um número $r(\psi)$ em que a função $r : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $r(p_i) = 0$;
2. $r(\perp) = 0$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $r(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   b) $r(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   c) $r(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   d) $r(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$.

Exemplos

A complexidade lógica de uma fórmula ψ é um número $r(\psi)$ em que a função $r : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $r(p_i) = 0$;
2. $r(\perp) = 0$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $r(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   b) $r(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   c) $r(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   d) $r(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$.

Exemplos

A complexidade lógica de uma fórmula ψ é um número $r(\psi)$ em que a função $r : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $r(p_i) = 0$;
2. $r(\perp) = 0$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,

   a) $r(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,

   b) $r(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,

   c) $r(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,

   d) $r(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$.

Exemplos

A complexidade lógica de uma fórmula ψ é um número $r(\psi)$ em que a função $r : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $r(p_i) = 0$;
2. $r(\perp) = 0$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $r(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   b) $r(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   c) $r(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   d) $r(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$.

Exemplos

A complexidade lógica de uma fórmula ψ é um número $r(\psi)$ em que a função $r : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $r(p_i) = 0$;
2. $r(\perp) = 0$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $r(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   b) $r(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   c) $r(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   d) $r(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$.

Exemplos

A complexidade lógica de uma fórmula ψ é um número $r(\psi)$ em que a função $r : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $r(p_i) = 0$;
2. $r(\perp) = 0$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $r(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   b) $r(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   c) $r(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   d) $r(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$.

Exemplos

A complexidade lógica de uma fórmula ψ é um número $r(\psi)$ em que a função $r : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $r(p_i) = 0$;
2. $r(\perp) = 0$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,

   a) $r(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,

   b) $r(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,

   c) $r(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,

   d) $r(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$.

Exemplos

A complexidade lógica de uma fórmula ψ é um número $r(\psi)$ em que a função $r : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $r(p_i) = 0$;
2. $r(\perp) = 0$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $r(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   b) $r(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   c) $r(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   d) $r(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$.

Exemplos

A complexidade lógica de uma fórmula ψ é um número $r(\psi)$ em que a função $r : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $r(p_i) = 0$;
2. $r(\perp) = 0$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $r(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   b) $r(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   c) $r(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,
   d) $r(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$.

Exemplos

A complexidade lógica de uma fórmula ψ é um número $r(\psi)$ em que a função $r : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $r(p_i) = 0$;
2. $r(\perp) = 0$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $r(\neg\varphi) = 1 + r(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,

   a) $r(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,

   b) $r(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,

   c) $r(\varphi \to \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$,

   d) $r(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{r(\varphi), r(\psi)\}$.

Exemplos

A cada fórmula $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ pode associar-se uma árvore $T(\psi)$, designada a árvore de parsing de ψ, do seguinte modo:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $T(p_i) = \bullet\, p_i$;
2. $T(\bot) = \bullet\, \bot$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

   $T(\neg\varphi) =$

4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para qualquer $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

   $T(\varphi \square \psi) =$

Exemplos

A cada fórmula $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ pode associar-se uma árvore $T(\psi)$, designada a árvore de parsing de ψ, do seguinte modo:

Exemplos

A cada fórmula $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ pode associar-se uma árvore $T(\psi)$, designada a árvore de parsing de ψ, do seguinte modo:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $T(p_i) = \ \bullet p_i$;
2. $T(\perp) = \ \bullet\perp$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   $$T(\neg\varphi) = \qquad ;$$
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para qualquer $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
   $$T(\varphi\square\psi) = \qquad .$$

Exemplos

A cada fórmula $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ pode associar-se uma árvore $T(\psi)$, designada a árvore de parsing de ψ, do seguinte modo:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $T(p_i) = \ \bullet p_i$;
2. $T(\perp) = \ \bullet\perp$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,
$$T(\neg\varphi) = \qquad ;$$
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para qualquer $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
$$T(\varphi\square\psi) = \qquad .$$

Exemplos

A cada fórmula $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ pode associar-se uma árvore $T(\psi)$, designada a árvore de parsing de ψ, do seguinte modo:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $T(p_i) = \ \bullet p_i$;
2. $T(\perp) = \ \bullet\perp$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,
$$T(\neg\varphi) = \begin{array}{c} \bullet\neg \\ | \\ T(\varphi) \end{array} \quad ;$$
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para qualquer $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
$$T(\varphi \square \psi) = \quad .$$

Exemplos

A cada fórmula $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ pode associar-se uma árvore $T(\psi)$, designada a árvore de parsing de ψ, do seguinte modo:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $T(p_i) = \;\bullet p_i$;
2. $T(\perp) = \;\bullet\perp$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,
$$T(\neg\varphi) = \begin{array}{c} \bullet\neg \\ | \\ T(\varphi) \end{array} \quad ;$$
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para qualquer $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
$$T(\varphi\square\psi) = \begin{array}{ccc} & \bullet\square & \\ / & & \backslash \\ T(\varphi) & & T(\psi) \end{array} \quad .$$

Exemplos

A altura de uma fórmula ψ é um número $h(\psi)$ em que a função $h : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $h(p_i) = 1$;
2. $h(\perp) = 1$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,

   a) $h(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,

   b) $h(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,

   c) $h(\varphi \to \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,

   d) $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$.

Exemplos

A altura de uma fórmula ψ é um número $h(\psi)$ em que a função $h : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $h(p_i) = 1$;
2. $h(\perp) = 1$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $h(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   b) $h(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   c) $h(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   d) $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$.

Exemplos

A altura de uma fórmula ψ é um número $h(\psi)$ em que a função $h : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $h(p_i) = 1$;
2. $h(\perp) = 1$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,

   a) $h(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,

   b) $h(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,

   c) $h(\varphi \to \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,

   d) $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$.

Exemplos

A altura de uma fórmula ψ é um número $h(\psi)$ em que a função $h : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $h(p_i) = 1$;
2. $h(\perp) = 1$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $h(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   b) $h(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   c) $h(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   d) $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$.

Exemplos

A altura de uma fórmula ψ é um número $h(\psi)$ em que a função $h : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $h(p_i) = 1$;
2. $h(\perp) = 1$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,

   a) $h(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,

   b) $h(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,

   c) $h(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,

   d) $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$.

Exemplos

A altura de uma fórmula ψ é um número $h(\psi)$ em que a função $h : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $h(p_i) = 1$;
2. $h(\perp) = 1$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $h(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   b) $h(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   c) $h(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   d) $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$.

Exemplos

A altura de uma fórmula ψ é um número $h(\psi)$ em que a função $h : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $h(p_i) = 1$;
2. $h(\perp) = 1$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $h(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   b) $h(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   c) $h(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   d) $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$.

Exemplos

A altura de uma fórmula ψ é um número $h(\psi)$ em que a função $h : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $h(p_i) = 1$;
2. $h(\perp) = 1$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $h(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   b) $h(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   c) $h(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   d) $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$.

Exemplos

A altura de uma fórmula ψ é um número $h(\psi)$ em que a função $h : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $h(p_i) = 1$;
2. $h(\perp) = 1$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,

   a) $h(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,

   b) $h(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,

   c) $h(\varphi \to \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,

   d) $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$.

Exemplos

A altura de uma fórmula ψ é um número $h(\psi)$ em que a função $h : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ se define por:

1. para cada $p_i \in \mathcal{V}^{CP}$, $h(p_i) = 1$;
2. $h(\perp) = 1$;
3. para cada $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $h(\neg\varphi) = 1 + h(\varphi)$;
4. para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $h(\varphi \vee \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   b) $h(\varphi \wedge \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   c) $h(\varphi \to \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$,
   d) $h(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 + \max\{h(\varphi), h(\psi)\}$.

Definição

Seja ψ uma fórmula do Cálculo Proposicional e seja p_i uma variável proposicional. A função

$$\begin{array}{rccc} [\psi/p_i]: & \mathcal{F}^{CP} & \rightarrow & \mathcal{F}^{CP} \\ & \varphi & \mapsto & \varphi[\psi/p_i] \end{array}$$

onde $\varphi[\psi/p_i]$ representa a fórmula obtida de φ pela ***substituição*** de todas as ocorrências de p_i por ψ, é definida por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$ como a única função tal que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $\quad p_n[\psi/p_i] = \begin{cases} \psi & \text{se} \quad n = i \\ p_n & \text{se} \quad n \neq i \end{cases}$;
2. $\perp[\psi/p_i] = \perp$;
3. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\quad (\neg\varphi)[\psi/p_i] = (\neg\varphi[\psi/p_i])$;
4. Para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

$$(\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p_i] = (\varphi_1[\psi/p_i] \square \varphi_2[\psi/p_i]).$$

Definição

Seja ψ uma fórmula do Cálculo Proposicional e seja p_i uma variável proposicional. A função

$$\begin{array}{rccc} [\psi/p_i]: & \mathcal{F}^{CP} & \to & \mathcal{F}^{CP} \\ & \varphi & \mapsto & \varphi[\psi/p_i] \end{array}$$

onde $\varphi[\psi/p_i]$ representa a fórmula obtida de φ pela ***substituição*** de todas as ocorrências de p_i por ψ, é definida por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$ como a única função tal que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $p_n[\psi/p_i] = \begin{cases} \psi & \text{se } n = i \\ p_n & \text{se } n \neq i \end{cases}$;
2. $\perp[\psi/p_i] = \perp$;
3. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $(\neg\varphi)[\psi/p_i] = (\neg\varphi[\psi/p_i])$;
4. Para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\square \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$,

$$(\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p_i] = (\varphi_1[\psi/p_i] \square \varphi_2[\psi/p_i]).$$

Definição

Seja ψ uma fórmula do Cálculo Proposicional e seja p_i uma variável proposicional. A função

$$\begin{array}{rccc} [\psi/p_i]: & \mathcal{F}^{CP} & \to & \mathcal{F}^{CP} \\ & \varphi & \mapsto & \varphi[\psi/p_i] \end{array}$$

onde $\varphi[\psi/p_i]$ representa a fórmula obtida de φ pela ***substituição*** de todas as ocorrências de p_i por ψ, é definida por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$ como a única função tal que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $\quad p_n[\psi/p_i] = \begin{cases} \psi & \text{se} \quad n = i \\ p_n & \text{se} \quad n \neq i \end{cases}$;
2. $\perp[\psi/p_i] = \perp$;
3. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\quad (\neg\varphi)[\psi/p_i] = (\neg\varphi[\psi/p_i])$;
4. Para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Box \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$,
$$(\varphi_1 \Box \varphi_2)[\psi/p_i] = (\varphi_1[\psi/p_i] \Box \varphi_2[\psi/p_i]).$$

Definição

Seja ψ uma fórmula do Cálculo Proposicional e seja p_i uma variável proposicional. A função

$$\begin{array}{rccc} [\psi/p_i]: & \mathcal{F}^{CP} & \to & \mathcal{F}^{CP} \\ & \varphi & \mapsto & \varphi[\psi/p_i] \end{array}$$

onde $\varphi[\psi/p_i]$ representa a fórmula obtida de φ pela ***substituição*** de todas as ocorrências de p_i por ψ, é definida por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$ como a única função tal que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $\quad p_n[\psi/p_i] = \begin{cases} \psi & \text{se } n = i \\ p_n & \text{se } n \neq i \end{cases}$;
2. $\bot[\psi/p_i] = \bot$;
3. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\quad (\neg\varphi)[\psi/p_i] = (\neg\varphi[\psi/p_i])$;
4. Para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Box \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$,

$$(\varphi_1 \Box \varphi_2)[\psi/p_i] = (\varphi_1[\psi/p_i] \Box \varphi_2[\psi/p_i]).$$

Definição

Seja ψ uma fórmula do Cálculo Proposicional e seja p_i uma variável proposicional. A função

$$\begin{array}{rccc} [\psi/p_i]: & \mathcal{F}^{CP} & \to & \mathcal{F}^{CP} \\ & \varphi & \mapsto & \varphi[\psi/p_i] \end{array}$$

onde $\varphi[\psi/p_i]$ representa a fórmula obtida de φ pela ***substituição*** de todas as ocorrências de p_i por ψ, é definida por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$ como a única função tal que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $p_n[\psi/p_i] = \begin{cases} \psi & \text{se } n = i \\ p_n & \text{se } n \neq i \end{cases}$;
2. $\perp[\psi/p_i] = \perp$;
3. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $(\neg\varphi)[\psi/p_i] = (\neg\varphi[\psi/p_i])$;
4. Para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\square \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$,

$$(\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p_i] = (\varphi_1[\psi/p_i] \square \varphi_2[\psi/p_i]).$$

Definição

Seja ψ uma fórmula do Cálculo Proposicional e seja p_i uma variável proposicional. A função

$$\begin{array}{rccc} [\psi/p_i]: & \mathcal{F}^{CP} & \rightarrow & \mathcal{F}^{CP} \\ & \varphi & \mapsto & \varphi[\psi/p_i] \end{array}$$

onde $\varphi[\psi/p_i]$ representa a fórmula obtida de φ pela ***substituição*** de todas as ocorrências de p_i por ψ, é definida por recursão estrutural em $\mathcal{F}^{CP}$ como a única função tal que:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $p_n[\psi/p_i] = \begin{cases} \psi & \text{se } n = i \\ p_n & \text{se } n \neq i \end{cases}$;
2. $\perp[\psi/p_i] = \perp$;
3. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $(\neg\varphi)[\psi/p_i] = (\neg\varphi[\psi/p_i])$;
4. Para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
   $$(\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p_i] = (\varphi_1[\psi/p_i] \square \varphi_2[\psi/p_i]).$$

Exemplo

Consideremos a fórmula $\psi = p_0 \to p_2$. A substituição da variável p_1 por ψ na fórmula $\varphi = ((\neg p_2) \wedge (p_1 \vee \bot))$ é a fórmula

$$\varphi[\psi/p_1] = (\neg p_2 \wedge (p_1 \vee \bot))[\psi/p_1]$$

Exemplo

Consideremos a fórmula $\psi = p_0 \to p_2$. A substituição da variável p_1 por ψ na fórmula $\varphi = ((\neg p_2) \wedge (p_1 \vee \bot))$ é a fórmula

$$\varphi[\psi/p_1] \quad = \quad (\neg p_2 \wedge (p_1 \vee \bot))[\psi/p_1]$$

Exemplo

Consideremos a fórmula $\psi = p_0 \rightarrow p_2$. A substituição da variável p_1 por ψ na fórmula $\varphi = ((\neg p_2) \wedge (p_1 \vee \bot))$ é a fórmula

$$\begin{aligned} \varphi[\psi/p_1] &= (\neg p_2 \wedge (p_1 \vee \bot))[\psi/p_1] \\ &= (\neg p_2)[\psi/p_1] \wedge (p_1 \vee \bot)[\psi/p_1] \end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos a fórmula $\psi = p_0 \to p_2$. A substituição da variável p_1 por ψ na fórmula $\varphi = ((\neg p_2) \land (p_1 \lor \bot))$ é a fórmula

$$\begin{aligned}
\varphi[\psi/p_1] &= (\neg p_2 \land (p_1 \lor \bot))[\psi/p_1] \\
&= (\neg p_2)[\psi/p_1] \land (p_1 \lor \bot)[\psi/p_1] \\
&= \neg p_2[\psi/p_1] \land (p_1[\psi/p_1] \lor \bot[\psi/p_1])
\end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos a fórmula $\psi = p_0 \to p_2$. A substituição da variável p_1 por ψ na fórmula $\varphi = ((\neg p_2) \wedge (p_1 \vee \bot))$ é a fórmula

$$\begin{aligned}
\varphi[\psi/p_1] &= (\neg p_2 \wedge (p_1 \vee \bot))[\psi/p_1] \\
&= (\neg p_2)[\psi/p_1] \wedge (p_1 \vee \bot)[\psi/p_1] \\
&= \neg p_2[\psi/p_1] \wedge (p_1[\psi/p_1] \vee \bot[\psi/p_1]) \\
&= \neg p_2 \wedge (\psi \vee \bot)
\end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos a fórmula $\psi = p_0 \to p_2$. A substituição da variável p_1 por ψ na fórmula $\varphi = ((\neg p_2) \wedge (p_1 \vee \bot))$ é a fórmula

$$\begin{aligned}
\varphi[\psi/p_1] &= (\neg p_2 \wedge (p_1 \vee \bot))[\psi/p_1] \\
&= (\neg p_2)[\psi/p_1] \wedge (p_1 \vee \bot)[\psi/p_1] \\
&= \neg p_2[\psi/p_1] \wedge (p_1[\psi/p_1] \vee \bot[\psi/p_1]) \\
&= \neg p_2 \wedge (\psi \vee \bot) \\
&= \neg p_2 \wedge ((p_0 \to p_2) \vee \bot).
\end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos a fórmula $\psi = p_0 \to p_2$. A substituição da variável p_1 por ψ na fórmula $\varphi = ((\neg p_2) \wedge (p_1 \vee \perp))$ é a fórmula

$$\begin{aligned}
\varphi[\psi/p_1] &= (\neg p_2 \wedge (p_1 \vee \perp))[\psi/p_1] \\
&= (\neg p_2)[\psi/p_1] \wedge (p_1 \vee \perp)[\psi/p_1] \\
&= \neg p_2[\psi/p_1] \wedge (p_1[\psi/p_1] \vee \perp[\psi/p_1]) \\
&= \neg p_2 \wedge (\psi \vee \perp) \\
&= \neg p_2 \wedge ((p_0 \to p_2) \vee \perp).
\end{aligned}$$

E qual é o resultado da substituição da variável p_0 por ψ na fórmula φ? Como se explica o valor encontrado?

Proposição

Para todas as fórmulas φ e ψ e para toda a variável proposicional p, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$.

Demonstração.

Por indução estrutural na fórmula φ,i.e. demonstrando, por aplicação do Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{\mathcal{CP}}$, que é válida para qualquer fórmula φ a propriedade $P(\varphi)$ dada por: "para toda a fórmula ψ e para toda a variável proposicional p, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$". $\square$

Proposição

Para todas as fórmulas φ e ψ e para toda a variável proposicional p, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$.

Demonstração.

Por indução estrutural na fórmula φ, i.e. demonstrando, por aplicação do Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{\mathcal{CP}}$, que é válida para qualquer fórmula φ a propriedade $P(\varphi)$ dada por: "para toda a fórmula ψ e para toda a variável proposicional p, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$". $\square$

Proposição

Para todas as fórmulas φ e ψ e para toda a variável proposicional *p*, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$.

Demonstração.

Por indução estrutural na fórmula φ,i.e. demonstrando, por aplicação do Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{\mathcal{CP}}$, que é válida para qualquer fórmula φ a propriedade $P(\varphi)$ dada por: "para toda a fórmula ψ e para toda a variável proposicional *p*, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$". □

Proposição

Para todas as fórmulas φ e ψ e para toda a variável proposicional p, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$.

Demonstração.

Por indução estrutural na fórmula φ,i.e. demonstrando, por aplicação do Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{\mathcal{CP}}$, que é válida para qualquer fórmula φ a propriedade $P(\varphi)$ dada por: "para toda a fórmula ψ e para toda a variável proposicional p, se $p \notin var(\varphi)$, então $\varphi[\psi/p] = \varphi$". $\square$

Definição

Os valores lógicos do Cálculo Proposicional são os símbolos:

- 1 (ou V, ou verdade);
- 0 (ou F, ou falsidade).

As proposições podem ser verdadeiras ou falsas. Ou seja, podemos atribuir a uma proposição o valor lógico 1 ou 0. Quando se aplica a uma proposição φ o conectivo negação obtém-se a proposição $\neg\varphi$ de valor lógico oposto: isto é,

- se φ tem valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 0;
- se φ tem valor lógico 0, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 1.

E o que acontece relativamente aos conectivos $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$?

Definição

Os valores lógicos do Cálculo Proposicional são os símbolos:

- 1 (ou V, ou verdade);
- 0 (ou F, ou falsidade).

As proposições podem ser verdadeiras ou falsas. Ou seja, podemos atribuir a uma proposição o valor lógico 1 ou 0.
Quando se aplica a uma proposição φ o conectivo negação obtém-se a proposição $\neg\varphi$ de valor lógico oposto: isto é,

- se φ tem valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 0;
- se φ tem valor lógico 0, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 1.

E o que acontece relativamente aos conectivos $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$?

Definição

Os valores lógicos do Cálculo Proposicional são os símbolos:

- 1 (ou V, ou verdade);
- 0 (ou F, ou falsidade).

As proposições podem ser verdadeiras ou falsas. Ou seja, podemos atribuir a uma proposição o valor lógico 1 ou 0.
Quando se aplica a uma proposição φ o conectivo negação obtém-se a proposição $\neg\varphi$ de valor lógico oposto: isto é,

- se φ tem valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 0;
- se φ tem valor lógico 0, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 1.

E o que acontece relativamente aos conectivos $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$?

Definição

Os valores lógicos do Cálculo Proposicional são os símbolos:

- 1 (ou V, ou verdade);
- 0 (ou F, ou falsidade).

As proposições podem ser verdadeiras ou falsas. Ou seja, podemos atribuir a uma proposição o valor lógico 1 ou 0. Quando se aplica a uma proposição φ o conectivo negação obtém-se a proposição $\neg\varphi$ de valor lógico oposto: isto é,

- se φ tem valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 0;
- se φ tem valor lógico 0, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 1.

E o que acontece relativamente aos conectivos $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$?

Definição

Os valores lógicos do Cálculo Proposicional são os símbolos:

- 1 (ou V, ou verdade);
- 0 (ou F, ou falsidade).

As proposições podem ser verdadeiras ou falsas. Ou seja, podemos atribuir a uma proposição o valor lógico 1 ou 0.
Quando se aplica a uma proposição φ o conectivo negação obtém-se a proposição $\neg\varphi$ de valor lógico oposto: isto é,

- se φ tem valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 0;
- se φ tem valor lógico 0, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 1.

E o que acontece relativamente aos conectivos $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$?

Definição

Os valores lógicos do Cálculo Proposicional são os símbolos:

- 1 (ou V, ou verdade);
- 0 (ou F, ou falsidade).

As proposições podem ser verdadeiras ou falsas. Ou seja, podemos atribuir a uma proposição o valor lógico 1 ou 0. Quando se aplica a uma proposição φ o conectivo negação obtém-se a proposição $\neg\varphi$ de valor lógico oposto: isto é,

- se φ tem valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 0;
- se φ tem valor lógico 0, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 1.

E o que acontece relativamente aos conectivos $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$?

Definição

Os valores lógicos do Cálculo Proposicional são os símbolos:

- 1 (ou V, ou verdade);
- 0 (ou F, ou falsidade).

As proposições podem ser verdadeiras ou falsas. Ou seja, podemos atribuir a uma proposição o valor lógico 1 ou 0. Quando se aplica a uma proposição φ o conectivo negação obtém-se a proposição $\neg\varphi$ de valor lógico oposto: isto é,

- se φ tem valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 0;
- se φ tem valor lógico 0, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 1.

E o que acontece relativamente aos conectivos $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$?

Definição

Os valores lógicos do Cálculo Proposicional são os símbolos:

- 1 (ou V, ou verdade);
- 0 (ou F, ou falsidade).

As proposições podem ser verdadeiras ou falsas. Ou seja, podemos atribuir a uma proposição o valor lógico 1 ou 0.
Quando se aplica a uma proposição φ o conectivo negação obtém-se a proposição $\neg\varphi$ de valor lógico oposto: isto é,

- se φ tem valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 0;
- se φ tem valor lógico 0, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 1.

E o que acontece relativamente aos conectivos $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$?

Definição

Os valores lógicos do Cálculo Proposicional são os símbolos:

- 1 (ou V, ou verdade);
- 0 (ou F, ou falsidade).

As proposições podem ser verdadeiras ou falsas. Ou seja, podemos atribuir a uma proposição o valor lógico 1 ou 0. Quando se aplica a uma proposição φ o conectivo negação obtém-se a proposição $\neg\varphi$ de valor lógico oposto: isto é,

- se φ tem valor lógico 1, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 0;
- se φ tem valor lógico 0, então $\neg\varphi$ tem o valor lógico 1.

E o que acontece relativamente aos conectivos $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$?

Definição

Uma valoração é uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \{0, 1\}$ tal que, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\perp) = 0$;
b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;
c) $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
d) $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
e) $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;
f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$.

Sendo φ uma fórmula, $v(\varphi)$ é chamado o valor lógico de φ para a valoração v.

Definição

Uma valoração é uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \{0, 1\}$ tal que, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\perp) = 0$;

b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;

c) $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;

d) $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;

e) $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;

f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$.

Sendo φ uma fórmula, $v(\varphi)$ é chamado o valor lógico de φ para a valoração v.

Definição

Uma valoração é uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \to \{0, 1\}$ tal que, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\perp) = 0$;

b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;

c) $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;

d) $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;

e) $v(\varphi \to \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;

f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$.

Sendo φ uma fórmula, $v(\varphi)$ é chamado o valor lógico de φ para a valoração v.

Definição

Uma valoração é uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \to \{0, 1\}$ tal que, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\perp) = 0$;

b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;

c) $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;

d) $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;

e) $v(\varphi \to \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;

f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$.

Sendo φ uma fórmula, $v(\varphi)$ é chamado o valor lógico de φ para a valoração v.

Definição

Uma valoração é uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \to \{0, 1\}$ tal que, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\perp) = 0$;

b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;

c) $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;

d) $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;

e) $v(\varphi \to \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;

f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$.

Sendo φ uma fórmula, $v(\varphi)$ é chamado o valor lógico de φ para a valoração v.

Definição

Uma valoração é uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \to \{0, 1\}$ tal que, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\bot) = 0$;

b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;

c) $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;

d) $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;

e) $v(\varphi \to \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;

f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$.

Sendo φ uma fórmula, $v(\varphi)$ é chamado o valor lógico de φ para a valoração v.

Definição

Uma valoração é uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \to \{0, 1\}$ tal que, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\perp) = 0$;
b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;
c) $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
d) $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
e) $v(\varphi \to \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;
f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$.

Sendo φ uma fórmula, $v(\varphi)$ é chamado o valor lógico de φ para a valoração v.

Definição

Uma valoração é uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \to \{0,1\}$ tal que, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\perp) = 0$;
b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;
c) $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
d) $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
e) $v(\varphi \to \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;
f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$.

Sendo φ uma fórmula, $v(\varphi)$ é chamado o valor lógico de φ para a valoração v.

Definição

Uma valoração é uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \{0, 1\}$ tal que, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$:

a) $v(\perp) = 0$;
b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$;
c) $v(\varphi \vee \psi) = max\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
d) $v(\varphi \wedge \psi) = min\{v(\varphi), v(\psi)\}$;
e) $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ se e só se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$;
f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ se e só se $v(\varphi) = v(\psi)$.

Sendo φ uma fórmula, $v(\varphi)$ é chamado o valor lógico de φ para a valoração v.

Observação

Na definição anterior de valoração v, a condição b), relativa ao conectivo $\neg$, pode ser representada pela seguinte tabela:

$v(\varphi)$	$v(\neg\varphi)$
1	0
0	1

As condições c)-f), relativas aos conectivos $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, poderiam ser representadas pela seguinte tabela:

$v(\varphi)$	$v(\psi)$	$v(\varphi\vee\psi)$	$v(\varphi\wedge\psi)$	$v(\varphi\rightarrow\psi)$	$v(\varphi\leftrightarrow\psi)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Observação

Na definição anterior de valoração v, a condição b), relativa ao conectivo $\neg$, pode ser representada pela seguinte tabela:

$v(\varphi)$	$v(\neg\varphi)$
1	0
0	1

As condições c)-f), relativas aos conectivos $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, poderiam ser representadas pela seguinte tabela:

$v(\varphi)$	$v(\psi)$	$v(\varphi\vee\psi)$	$v(\varphi\wedge\psi)$	$v(\varphi\rightarrow\psi)$	$v(\varphi\leftrightarrow\psi)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Observação

Na definição anterior de valoração v, a condição b), relativa ao conectivo $\neg$, pode ser representada pela seguinte tabela:

$v(\varphi)$	$v(\neg\varphi)$
1	0
0	1

As condições c)-f), relativas aos conectivos $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, poderiam ser representadas pela seguinte tabela:

$v(\varphi)$	$v(\psi)$	$v(\varphi\vee\psi)$	$v(\varphi\wedge\psi)$	$v(\varphi\rightarrow\psi)$	$v(\varphi\leftrightarrow\psi)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

O resultado seguinte mostra que uma valoração v fica completamente ***determinada*** pelo valor lógico que toma nas variáveis proposicionais.

Proposição

Seja $g : \mathcal{V}^{CP} \to \{0, 1\}$ uma função. Então, ***existe uma única*** valoração v tal que $v(p_i) = g(p_i)$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração.

Aplicação imediata do Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$. (Como?) □

O resultado seguinte mostra que uma valoração v fica completamente ***determinada*** pelo valor lógico que toma nas variáveis proposicionais.

Proposição

Seja $g : \mathcal{V}^{CP} \to \{0, 1\}$ uma função. Então, ***existe uma única*** valoração v tal que $v(p_i) = g(p_i)$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração.

Aplicação imediata do Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$. (Como?) □

O resultado seguinte mostra que uma valoração v fica completamente ***determinada*** pelo valor lógico que toma nas variáveis proposicionais.

Proposição

Seja $g : \mathcal{V}^{CP} \to \{0,1\}$ uma função. Então, ***existe uma única*** valoração v tal que $v(p_i) = g(p_i)$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração.

Aplicação imediata do Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$. (Como?) $\square$

O resultado seguinte mostra que uma valoração v fica completamente ***determinada*** pelo valor lógico que toma nas variáveis proposicionais.

Proposição

Seja $g : \mathcal{V}^{CP} \to \{0,1\}$ uma função. Então, ***existe uma única*** valoração v tal que $v(p_i) = g(p_i)$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração.

Aplicação imediata do Teorema de Recursão Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$. (Como?) $\square$

Exemplo

Seja v_1 a única valoração tal que $v_1(p_i) = 1$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$,

e seja v_2 a única valoração tal que $v_2(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Determinemos o valor lógico da fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \rightarrow \neg p_3$ para a valoração v_1. Tem-se

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_3 \wedge \perp) = 1 \text{ e } v_1(\neg p_3) = 0 \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_1(p_3 \wedge \perp) = min\{v_1(p_3), v_1(\perp)\} = min\{1, 0\} = 0$. Assim, conclui-se que $v_1(\varphi) = 1$.

Exercício: verificar que $v_2(\varphi) = 1$.

(continua)

Exemplo

Seja v_1 a única valoração tal que $v_1(p_i) = 1$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$, e seja v_2 a única valoração tal que $v_2(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Determinemos o valor lógico da fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \bot) \rightarrow \neg p_3$ para a valoração v_1. Tem-se

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_3 \wedge \bot) = 1 \text{ e } v_1(\neg p_3) = 0 \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_1(p_3 \wedge \bot) = min\{v_1(p_3), v_1(\bot)\} = min\{1, 0\} = 0$. Assim, conclui-se que $v_1(\varphi) = 1$.

Exercício: verificar que $v_2(\varphi) = 1$.

(continua)

Exemplo

Seja v_1 a única valoração tal que $v_1(p_i) = 1$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$, e seja v_2 a única valoração tal que $v_2(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Determinemos o valor lógico da fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \bot) \rightarrow \neg p_3$ para a valoração v_1. Tem-se

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_3 \wedge \bot) = 1 \text{ e } v_1(\neg p_3) = 0 \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_1(p_3 \wedge \bot) = min\{v_1(p_3), v_1(\bot)\} = min\{1, 0\} = 0$. Assim, conclui-se que $v_1(\varphi) = 1$.

Exercício: verificar que $v_2(\varphi) = 1$.

(continua)

Exemplo

Seja v_1 a única valoração tal que $v_1(p_i) = 1$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$, e seja v_2 a única valoração tal que $v_2(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Determinemos o valor lógico da fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \bot) \to \neg p_3$ para a valoração v_1. Tem-se

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_3 \wedge \bot) = 1 \text{ e } v_1(\neg p_3) = 0 \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_1(p_3 \wedge \bot) = min\{v_1(p_3), v_1(\bot)\} = min\{1, 0\} = 0$. Assim, conclui-se que $v_1(\varphi) = 1$.

Exercício: verificar que $v_2(\varphi) = 1$.

(continua)

Exemplo

Seja v_1 a única valoração tal que $v_1(p_i) = 1$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$, e seja v_2 a única valoração tal que $v_2(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Determinemos o valor lógico da fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \rightarrow \neg p_3$ para a valoração v_1. Tem-se

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_3 \wedge \perp) = 1 \text{ e } v_1(\neg p_3) = 0 \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_1(p_3 \wedge \perp) = min\{v_1(p_3), v_1(\perp)\} = min\{1, 0\} = 0$. Assim, conclui-se que $v_1(\varphi) = 1$.

Exercício: verificar que $v_2(\varphi) = 1$.

(continua)

Exemplo

Seja v_1 a única valoração tal que $v_1(p_i) = 1$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$, e seja v_2 a única valoração tal que $v_2(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Determinemos o valor lógico da fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \bot) \rightarrow \neg p_3$ para a valoração v_1. Tem-se

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_3 \wedge \bot) = 1 \text{ e } v_1(\neg p_3) = 0 \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_1(p_3 \wedge \bot) = min\{v_1(p_3), v_1(\bot)\} = min\{1, 0\} = 0$. Assim, conclui-se que $v_1(\varphi) = 1$.

Exercício: verificar que $v_2(\varphi) = 1$.

(continua)

Exemplo

Seja v_1 a única valoração tal que $v_1(p_i) = 1$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$, e seja v_2 a única valoração tal que $v_2(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Determinemos o valor lógico da fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \to \neg p_3$ para a valoração v_1. Tem-se

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_3 \wedge \perp) = 1 \text{ e } v_1(\neg p_3) = 0 \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_1(p_3 \wedge \perp) = min\{v_1(p_3), v_1(\perp)\} = min\{1, 0\} = 0$. Assim, conclui-se que $v_1(\varphi) = 1$.

Exercício: verificar que $v_2(\varphi) = 1$.

(continua)

Exemplo

Seja v_1 a única valoração tal que $v_1(p_i) = 1$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$, e seja v_2 a única valoração tal que $v_2(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Determinemos o valor lógico da fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \to \neg p_3$ para a valoração v_1. Tem-se

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_3 \wedge \perp) = 1 \text{ e } v_1(\neg p_3) = 0 \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_1(p_3 \wedge \perp) = min\{v_1(p_3), v_1(\perp)\} = min\{1, 0\} = 0$. Assim, conclui-se que $v_1(\varphi) = 1$.

Exercício: verificar que $v_2(\varphi) = 1$.

(continua)

Exemplo

Seja v_1 a única valoração tal que $v_1(p_i) = 1$ para todo o $i \in \mathbb{N}_0$, e seja v_2 a única valoração tal que $v_2(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$

Determinemos o valor lógico da fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \to \neg p_3$ para a valoração v_1. Tem-se

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_3 \wedge \perp) = 1 \text{ e } v_1(\neg p_3) = 0 \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_1(p_3 \wedge \perp) = min\{v_1(p_3), v_1(\perp)\} = min\{1, 0\} = 0$. Assim, conclui-se que $v_1(\varphi) = 1$.

Exercício: verificar que $v_2(\varphi) = 1$.

(continua)

Exemplo (continuação)

Consideremos agora a fórmula $\psi = p_4 \leftrightarrow (\neg p_4 \vee p_1)$ e calculemos o valor lógico de ψ para a valoração v_2. Tem-se

$$v_2(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_2(p_4) = v_2(\neg p_4 \vee p_1) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_2(p_4) = 1$, enquanto que

$$\begin{aligned} v_2(\neg p_4 \vee p_1) &= max\{v_2(\neg p_4), v_2(p_1)\} \\ &= max\{1 - v_2(p_4), 0\} \\ &= max\{1 - 1, 0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que $v_2(\psi) = 0$.

Exercício: verificar que $v_1(\psi) = 1$.

Exemplo (continuação)

Consideremos agora a fórmula $\psi = p_4 \leftrightarrow (\neg p_4 \vee p_1)$ e calculemos o valor lógico de ψ para a valoração v_2. Tem-se

$$v_2(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_2(p_4) = v_2(\neg p_4 \vee p_1) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_2(p_4) = 1$, enquanto que

$$\begin{aligned} v_2(\neg p_4 \vee p_1) &= max\{v_2(\neg p_4), v_2(p_1)\} \\ &= max\{1 - v_2(p_4), 0\} \\ &= max\{1 - 1, 0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que $v_2(\psi) = 0$.

Exercício: verificar que $v_1(\psi) = 1$.

Exemplo (continuação)

Consideremos agora a fórmula $\psi = p_4 \leftrightarrow (\neg p_4 \vee p_1)$ e calculemos o valor lógico de ψ para a valoração v_2. Tem-se

$$v_2(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_2(p_4) = v_2(\neg p_4 \vee p_1) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_2(p_4) = 1$, enquanto que

$$\begin{aligned} v_2(\neg p_4 \vee p_1) &= max\{v_2(\neg p_4), v_2(p_1)\} \\ &= max\{1 - v_2(p_4), 0\} \\ &= max\{1 - 1, 0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que $v_2(\psi) = 0$.

Exercício: verificar que $v_1(\psi) = 1$.

Exemplo (continuação)

Consideremos agora a fórmula $\psi = p_4 \leftrightarrow (\neg p_4 \vee p_1)$ e calculemos o valor lógico de ψ para a valoração v_2. Tem-se

$$v_2(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_2(p_4) = v_2(\neg p_4 \vee p_1) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_2(p_4) = 1$, enquanto que

$$\begin{aligned} v_2(\neg p_4 \vee p_1) &= max\{v_2(\neg p_4), v_2(p_1)\} \\ &= max\{1 - v_2(p_4), 0\} \\ &= max\{1 - 1, 0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que $v_2(\psi) = 0$.

Exercício: verificar que $v_1(\psi) = 1$.

Exemplo (continuação)

Consideremos agora a fórmula $\psi = p_4 \leftrightarrow (\neg p_4 \vee p_1)$ e calculemos o valor lógico de ψ para a valoração v_2. Tem-se

$$v_2(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_2(p_4) = v_2(\neg p_4 \vee p_1) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_2(p_4) = 1$, enquanto que

$$\begin{aligned} v_2(\neg p_4 \vee p_1) &= max\{v_2(\neg p_4), v_2(p_1)\} \\ &= max\{1 - v_2(p_4), 0\} \\ &= max\{1 - 1, 0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que $v_2(\psi) = 0$.

Exercício: verificar que $v_1(\psi) = 1$.

Exemplo (continuação)

Consideremos agora a fórmula $\psi = p_4 \leftrightarrow (\neg p_4 \vee p_1)$ e calculemos o valor lógico de ψ para a valoração v_2. Tem-se

$$v_2(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_2(p_4) = v_2(\neg p_4 \vee p_1) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ora, $v_2(p_4) = 1$, enquanto que

$$\begin{aligned} v_2(\neg p_4 \vee p_1) &= max\{v_2(\neg p_4), v_2(p_1)\} \\ &= max\{1 - v_2(p_4), 0\} \\ &= max\{1 - 1, 0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que $v_2(\psi) = 0$.

Exercício: verificar que $v_1(\psi) = 1$.

Definição

Uma fórmula φ diz-se uma:

- ***tautologia***, e escreve-se $\models \varphi$, se $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v.
- ***contradição*** se $v(\varphi) = 0$ para toda a valoração v.

Exemplo

A fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \to \neg p_3$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, se v é uma valoração qualquer, tem-se

$$v(p_3 \wedge \perp) = min\{v(p_3), v(\perp)\} = min\{v(p_3), 0\} = 0.$$

Logo $\boxed{v(\varphi) = 1}$, pois ter-se-ia $v(\varphi) = 0$ se e só se $v(p_3 \wedge \perp) = 1$ e $v(\neg p_3) = 0$.

Exercício: dê exemplos de contradições.

Definição

Uma fórmula φ diz-se uma:

- ***tautologia***, e escreve-se $\models \varphi$, se $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v.
- ***contradição*** se $v(\varphi) = 0$ para toda a valoração v.

Exemplo

A fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \to \neg p_3$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, se v é uma valoração qualquer, tem-se

$$v(p_3 \wedge \perp) = min\{v(p_3), v(\perp)\} = min\{v(p_3), 0\} = 0.$$

Logo $\boxed{v(\varphi) = 1}$, pois ter-se-ia $v(\varphi) = 0$ se e só se $v(p_3 \wedge \perp) = 1$ e $v(\neg p_3) = 0$.

Exercício: dê exemplos de contradições.

Definição

Uma fórmula φ diz-se uma:

- ***tautologia***, e escreve-se $\models \varphi$, se $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v.
- ***contradição*** se $v(\varphi) = 0$ para toda a valoração v.

Exemplo

A fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \bot) \to \neg p_3$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, se v é uma valoração qualquer, tem-se

$$v(p_3 \wedge \bot) = min\{v(p_3), v(\bot)\} = min\{v(p_3), 0\} = 0.$$

Logo $\boxed{v(\varphi) = 1}$, pois ter-se-ia $v(\varphi) = 0$ se e só se $v(p_3 \wedge \bot) = 1$ e $v(\neg p_3) = 0$.

Exercício: dê exemplos de contradições.

Definição

Uma fórmula φ diz-se uma:

- ***tautologia***, e escreve-se $\models \varphi$, se $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v.
- ***contradição*** se $v(\varphi) = 0$ para toda a valoração v.

Exemplo

A fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \bot) \rightarrow \neg p_3$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, se v é uma valoração qualquer, tem-se

$$v(p_3 \wedge \bot) = min\{v(p_3), v(\bot)\} = min\{v(p_3), 0\} = 0.$$

Logo $\boxed{v(\varphi) = 1}$, pois ter-se-ia $v(\varphi) = 0$ se e só se $v(p_3 \wedge \bot) = 1$ e $v(\neg p_3) = 0$.

Exercício: dê exemplos de contradições.

Definição

Uma fórmula φ diz-se uma:

- ***tautologia***, e escreve-se $\models \varphi$, se $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v.
- ***contradição*** se $v(\varphi) = 0$ para toda a valoração v.

Exemplo

A fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \to \neg p_3$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, se v é uma valoração qualquer, tem-se

$$v(p_3 \wedge \perp) = min\{v(p_3), v(\perp)\} = min\{v(p_3), 0\} = 0.$$

Logo $\boxed{v(\varphi) = 1}$, pois ter-se-ia $v(\varphi) = 0$ se e só se $v(p_3 \wedge \perp) = 1$ e $v(\neg p_3) = 0$.

Exercício: dê exemplos de contradições.

Definição

Uma fórmula φ diz-se uma:

- ***tautologia***, e escreve-se $\models \varphi$, se $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v.
- ***contradição*** se $v(\varphi) = 0$ para toda a valoração v.

Exemplo

A fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \to \neg p_3$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, se v é uma valoração qualquer, tem-se

$$v(p_3 \wedge \perp) = min\{v(p_3), v(\perp)\} = min\{v(p_3), 0\} = 0.$$

Logo $\boxed{v(\varphi) = 1}$, pois ter-se-ia $v(\varphi) = 0$ se e só se $v(p_3 \wedge \perp) = 1$ e $v(\neg p_3) = 0$.

Exercício: dê exemplos de contradições.

Definição

Uma fórmula φ diz-se uma:

- ***tautologia***, e escreve-se $\models \varphi$, se $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v.
- ***contradição*** se $v(\varphi) = 0$ para toda a valoração v.

Exemplo

A fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \to \neg p_3$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, se v é uma valoração qualquer, tem-se

$$v(p_3 \wedge \perp) = min\{v(p_3), v(\perp)\} = min\{v(p_3), 0\} = 0.$$

Logo $\boxed{v(\varphi) = 1}$, pois ter-se-ia $v(\varphi) = 0$ se e só se $v(p_3 \wedge \perp) = 1$ e $v(\neg p_3) = 0$.

Exercício: dê exemplos de contradições.

Definição

Uma fórmula φ diz-se uma:

- ***tautologia***, e escreve-se $\models \varphi$, se $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v.
- ***contradição*** se $v(\varphi) = 0$ para toda a valoração v.

Exemplo

A fórmula $\varphi = (p_3 \wedge \perp) \to \neg p_3$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, se v é uma valoração qualquer, tem-se

$$v(p_3 \wedge \perp) = min\{v(p_3), v(\perp)\} = min\{v(p_3), 0\} = 0.$$

Logo $\boxed{v(\varphi) = 1}$, pois ter-se-ia $v(\varphi) = 0$ se e só se $v(p_3 \wedge \perp) = 1$ e $v(\neg p_3) = 0$.

Exercício: dê exemplos de contradições.

O resultado seguinte mostra que o valor lógico de uma dada fórmula φ para uma dada valoração v depende apenas do valor lógico das variáveis que ocorrem em φ.

Proposição

Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula. Se $v_1(p_i) = v_2(p_i)$ para todas as variáveis $p_i \in var(\varphi)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Demonstração.

A demonstração efectua-se usando o Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$ [Exercício]. □

O resultado seguinte mostra que o valor lógico de uma dada fórmula φ para uma dada valoração v depende apenas do valor lógico das variáveis que ocorrem em φ.

Proposição

Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula. Se $v_1(p_i) = v_2(p_i)$ para todas as variáveis $p_i \in var(\varphi)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Demonstração.

A demonstração efectua-se usando o Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$ [Exercício]. □

O resultado seguinte mostra que o valor lógico de uma dada fórmula φ para uma dada valoração v depende apenas do valor lógico das variáveis que ocorrem em φ.

Proposição

Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula. Se $v_1(p_i) = v_2(p_i)$ para todas as variáveis $p_i \in var(\varphi)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Demonstração.

A demonstração efectua-se usando o Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$ [Exercício]. □

O resultado seguinte mostra que o valor lógico de uma dada fórmula φ para uma dada valoração v depende apenas do valor lógico das variáveis que ocorrem em φ.

Proposição

Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula. Se $v_1(p_i) = v_2(p_i)$ para todas as variáveis $p_i \in var(\varphi)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Demonstração.

A demonstração efectua-se usando o Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$ [Exercício]. □

O resultado seguinte mostra que o valor lógico de uma dada fórmula φ para uma dada valoração v depende apenas do valor lógico das variáveis que ocorrem em φ.

Proposição

Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula. Se $v_1(p_i) = v_2(p_i)$ para todas as variáveis $p_i \in var(\varphi)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Demonstração.

A demonstração efectua-se usando o Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$ [Exercício]. $\square$

Resulta da proposição anterior que o cálculo do valor lógico de uma dada fórmula φ, para as várias valorações possíveis, pode ser apresentado numa ***tabela de verdade***. Esta tabela é formada por:

- uma coluna para cada uma das subfórmulas de φ;
- uma linha para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem na fórmula φ.

Note-se que, dado que a cada variável proposicional se pode atribuir um de dois valores possíveis (1 ou 0), a tabela de verdade de uma fórmula com n variáveis tem 2^n linhas.

Tabela de verdade de uma fórmula

Resulta da proposição anterior que o cálculo do valor lógico de uma dada fórmula φ, para as várias valorações possíveis, pode ser apresentado numa ***tabela de verdade***. Esta tabela é formada por:

- uma coluna para cada uma das subfórmulas de φ;
- uma linha para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem na fórmula φ.

Note-se que, dado que a cada variável proposicional se pode atribuir um de dois valores possíveis (1 ou 0), a tabela de verdade de uma fórmula com n variáveis tem 2^n linhas.

Resulta da proposição anterior que o cálculo do valor lógico de uma dada fórmula φ, para as várias valorações possíveis, pode ser apresentado numa ***tabela de verdade***. Esta tabela é formada por:

- uma coluna para cada uma das subfórmulas de φ;
- uma linha para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem na fórmula φ.

Note-se que, dado que a cada variável proposicional se pode atribuir um de dois valores possíveis (1 ou 0), a tabela de verdade de uma fórmula com n variáveis tem 2^n linhas.

Resulta da proposição anterior que o cálculo do valor lógico de uma dada fórmula φ, para as várias valorações possíveis, pode ser apresentado numa ***tabela de verdade***. Esta tabela é formada por:

- uma coluna para cada uma das subfórmulas de φ;
- uma linha para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem na fórmula φ.

Note-se que, dado que a cada variável proposicional se pode atribuir um de dois valores possíveis (1 ou 0), a tabela de verdade de uma fórmula com n variáveis tem 2^n linhas.

Exemplo

Seja φ a fórmula $(p_0 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_0)$. A tabela de verdade de φ é a seguinte.

p_0	p_2	$\neg p_0$	$\neg p_2$	$p_0 \rightarrow p_2$	$\neg p_2 \rightarrow \neg p_0$	φ
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

A análise da última coluna da tabela (onde é apresentado o valor lógico de φ para todas as valorações possíveis) permite concluir que a fórmula φ é uma tautologia, uma vez que φ é verdadeira para qualquer valoração.

Exemplo

Seja φ a fórmula $(p_0 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_0)$. A tabela de verdade de φ é a seguinte.

p_0	p_2	$\neg p_0$	$\neg p_2$	$p_0 \to p_2$	$\neg p_2 \to \neg p_0$	φ
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

A análise da última coluna da tabela (onde é apresentado o valor lógico de φ para todas as valorações possíveis) permite concluir que a fórmula φ é uma tautologia, uma vez que φ é verdadeira para qualquer valoração.

Exemplo

Seja φ a fórmula $(p_0 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_0)$. A tabela de verdade de φ é a seguinte.

p_0	p_2	$\neg p_0$	$\neg p_2$	$p_0 \to p_2$	$\neg p_2 \to \neg p_0$	φ
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

A análise da última coluna da tabela (onde é apresentado o valor lógico de φ para todas as valorações possíveis) permite concluir que a fórmula φ é uma tautologia, uma vez que φ é verdadeira para qualquer valoração.

Definição

Uma fórmula φ diz-se ***logicamente equivalente*** a uma fórmula ψ, e escreve-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Ou seja, tem-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ se $v(\varphi) = v(\psi)$ para toda a valoração v.

Exemplo 1

Tem-se
$$p_0 \to p_2 \Leftrightarrow \neg p_2 \to \neg p_0$$
pois, como vimos no exemplo anterior, a fórmula
$$(p_0 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_0)$$
é uma tautologia. Mais geralmente, pode-se mostrar que
$$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\psi \to \neg\varphi$$
para todas as fórmulas φ e ψ.

Esta equivalência lógica é muito útil pois é ela que permite as ***"demonstrações por contra-recíproco"***. Ou seja, quando se quer provar uma proposição do tipo "se φ, então ψ", pode-se provar alternativamente a proposição "se $\neg\psi$, então $\neg\varphi$".

Definição

Uma fórmula φ diz-se ***logicamente equivalente*** a uma fórmula ψ, e escreve-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Ou seja, tem-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ se $v(\varphi) = v(\psi)$ para toda a valoração v.

Exemplo 1

Tem-se
$$p_0 \to p_2 \Leftrightarrow \neg p_2 \to \neg p_0$$
pois, como vimos no exemplo anterior, a fórmula
$$(p_0 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_0)$$
é uma tautologia. Mais geralmente, pode-se mostrar que
$$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\psi \to \neg\varphi$$
para todas as fórmulas φ e ψ.

Esta equivalência lógica é muito útil pois é ela que permite as ***"demonstrações por contra-recíproco"***. Ou seja, quando se quer provar uma proposição do tipo "se φ, então ψ", pode-se provar alternativamente a proposição "se $\neg\psi$, então $\neg\varphi$".

Definição

Uma fórmula φ diz-se ***logicamente equivalente*** a uma fórmula ψ, e escreve-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Ou seja, tem-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ se $v(\varphi) = v(\psi)$ para toda a valoração v.

Exemplo 1

Tem-se
$$p_0 \to p_2 \Leftrightarrow \neg p_2 \to \neg p_0$$
pois, como vimos no exemplo anterior, a fórmula
$$(p_0 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_0)$$
é uma tautologia. Mais geralmente, pode-se mostrar que
$$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\psi \to \neg\varphi$$
para todas as fórmulas φ e ψ.

Esta equivalência lógica é muito útil pois é ela que permite as ***"demonstrações por contra-recíproco"***. Ou seja, quando se quer provar uma proposição do tipo "se φ, então ψ", pode-se provar alternativamente a proposição "se $\neg\psi$, então $\neg\varphi$".

Definição

Uma fórmula φ diz-se ***logicamente equivalente*** a uma fórmula ψ, e escreve-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Ou seja, tem-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ se $v(\varphi) = v(\psi)$ para toda a valoração v.

Exemplo 1

Tem-se
$$p_0 \to p_2 \Leftrightarrow \neg p_2 \to \neg p_0$$
pois, como vimos no exemplo anterior, a fórmula
$$(p_0 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_0)$$
é uma tautologia. Mais geralmente, pode-se mostrar que
$$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\psi \to \neg\varphi$$
para todas as fórmulas φ e ψ.

Esta equivalência lógica é muito útil pois é ela que permite as ***"demonstrações por contra-recíproco"***. Ou seja, quando se quer provar uma proposição do tipo "se φ, então ψ", pode-se provar alternativamente a proposição "se $\neg\psi$, então $\neg\varphi$".

Definição

Uma fórmula φ diz-se ***logicamente equivalente*** a uma fórmula ψ, e escreve-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Ou seja, tem-se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ se $v(\varphi) = v(\psi)$ para toda a valoração v.

Exemplo 1

Tem-se
$$p_0 \to p_2 \Leftrightarrow \neg p_2 \to \neg p_0$$
pois, como vimos no exemplo anterior, a fórmula
$$(p_0 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_0)$$
é uma tautologia. Mais geralmente, pode-se mostrar que
$$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\psi \to \neg\varphi$$
para todas as fórmulas φ e ψ.

Esta equivalência lógica é muito útil pois é ela que permite as ***“demonstrações por contra-recíproco”***. Ou seja, quando se quer provar uma proposição do tipo “se φ, então ψ”, pode-se provar alternativamente a proposição “se $\neg\psi$, então $\neg\varphi$”.

Exemplo 2

Para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

$$\perp \Leftrightarrow \varphi \land \neg\varphi.$$

De facto, consideremos a fórmula $\psi = \perp \leftrightarrow (\varphi \land \neg\varphi)$. A tabela de verdade de ψ (simplificada, pois faltam as colunas relativas às subfórmulas de φ) é

$\perp$	φ	$\neg\varphi$	$\varphi \land \neg\varphi$	$\perp \leftrightarrow (\varphi \land \neg\varphi)$
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

donde se pode concluir que ψ é uma tautologia, uma vez que o seu valor lógico é 1 para qualquer valoração.

Exemplo 2

Para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

$$\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi.$$

De facto, consideremos a fórmula $\psi = \perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$. A tabela de verdade de ψ (simplificada, pois faltam as colunas relativas às subfórmulas de φ) é

$\perp$	φ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$\perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

donde se pode concluir que ψ é uma tautologia, uma vez que o seu valor lógico é 1 para qualquer valoração.

Exemplo 2

Para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

$$\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi.$$

De facto, consideremos a fórmula $\psi = \perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$. A tabela de verdade de ψ (simplificada, pois faltam as colunas relativas às subfórmulas de φ) é

$\perp$	φ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$\perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

donde se pode concluir que ψ é uma tautologia, uma vez que o seu valor lógico é 1 para qualquer valoração.

Exemplo 2

Para toda a fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

$$\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi.$$

De facto, consideremos a fórmula $\psi = \perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$. A tabela de verdade de ψ (simplificada, pois faltam as colunas relativas às subfórmulas de φ) é

$\perp$	φ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$\perp \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

donde se pode concluir que ψ é uma tautologia, uma vez que o seu valor lógico é 1 para qualquer valoração.

Proposição

A relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}^{CP}$. Ou seja, para todas as fórmulas $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, tem-se:

i) $\varphi \Leftrightarrow \varphi$;

ii) se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\psi \Leftrightarrow \varphi$;

iii) se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e $\psi \Leftrightarrow \sigma$, então $\varphi \Leftrightarrow \sigma$.

Demonstração.

Exercício. □

Proposição

A relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}^{CP}$. Ou seja, para todas as fórmulas $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, tem-se:

i) $\varphi \Leftrightarrow \varphi$;

ii) se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\psi \Leftrightarrow \varphi$;

iii) se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e $\psi \Leftrightarrow \sigma$, então $\varphi \Leftrightarrow \sigma$.

Demonstração.

Exercício. □

Proposição

A relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}^{CP}$. Ou seja, para todas as fórmulas $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, tem-se:

i) $\varphi \Leftrightarrow \varphi$;

ii) se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\psi \Leftrightarrow \varphi$;

iii) se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e $\psi \Leftrightarrow \sigma$, então $\varphi \Leftrightarrow \sigma$.

Demonstração.

Exercício. □

Proposição

Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

i) $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$,
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$, ... (associatividade)

ii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$, ... (comutatividade)

iii) $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (idempotência)

iv) $\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \neg\perp \Leftrightarrow \varphi$, ... (elemento neutro)

v) $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$,
$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$, ... (distributividade)

vi) $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, ... (leis de De Morgan)

vii) $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (lei da dupla negação)

Proposição

Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

i) $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$,
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$, ... (associatividade)

ii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$, ... (comutatividade)

iii) $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (idempotência)

iv) $\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \neg\perp \Leftrightarrow \varphi$, ... (elemento neutro)

v) $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$,
$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$, ... (distributividade)

vi) $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, ... (leis de De Morgan)

vii) $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (lei da dupla negação)

Proposição

Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

i) $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$,
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$, ... (associatividade)

ii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$, ... (comutatividade)

iii) $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (idempotência)

iv) $\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \neg\perp \Leftrightarrow \varphi$, ... (elemento neutro)

v) $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$,
$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$, ... (distributividade)

vi) $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, ... (leis de De Morgan)

vii) $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (lei da dupla negação)

Proposição

Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

i) $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$,
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$, ... (associatividade)

ii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$, ... (comutatividade)

iii) $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (idempotência)

iv) $\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \neg\perp \Leftrightarrow \varphi$, ... (elemento neutro)

v) $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$,
$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$, ... (distributividade)

vi) $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, ... (leis de De Morgan)

vii) $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (lei da dupla negação)

Proposição

Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

i) $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$,
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$, ... (associatividade)

ii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$, ... (comutatividade)

iii) $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (idempotência)

iv) $\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \neg\bot \Leftrightarrow \varphi$, ... (elemento neutro)

v) $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$,
$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$, ... (distributividade)

vi) $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, ... (leis de De Morgan)

vii) $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (lei da dupla negação)

Proposição

Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

i) $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$,
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$, ... (associatividade)

ii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$, ... (comutatividade)

iii) $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (idempotência)

iv) $\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi$, $\varphi \wedge \neg\perp \Leftrightarrow \varphi$, ... (elemento neutro)

v) $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$,
$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$, ... (distributividade)

vi) $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, ... (leis de De Morgan)

vii) $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (lei da dupla negação)

Proposição

Para quaisquer $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

i) $(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$,
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$, ... (associatividade)

ii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\quad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$, ... (comutatividade)

iii) $\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$, $\quad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (idempotência)

iv) $\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi$, $\quad \varphi \wedge \neg\perp \Leftrightarrow \varphi$, ... (elemento neutro)

v) $\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$,
$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$, ... (distributividade)

vi) $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, ... (leis de De Morgan)

vii) $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, ... (lei da dupla negação)

Demonstração.

Exercício. □

Dado que a disjunção e a conjunção são associativas, utilizaremos as notações

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n \quad \text{e} \quad \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, para representar o resultado de aplicações sucessivas, respectivamente, da disjunção e da conjunção às fórmulas $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_n$, independentemente da forma como elas são agrupadas. Caso $n = 1$, as notações acima representam simplesmente a fórmula φ_1.

Demonstração.

Exercício. $\square$

Dado que a disjunção e a conjunção são associativas, utilizaremos as notações

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n \quad \text{e} \quad \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, para representar o resultado de aplicações sucessivas, respectivamente, da disjunção e da conjunção às fórmulas $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_n$, independentemente da forma como elas são agrupadas. Caso $n = 1$, as notações acima representam simplesmente a fórmula φ_1.

Demonstração.

Exercício. $\square$

Dado que a disjunção e a conjunção são associativas, utilizaremos as notações

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n \quad \text{e} \quad \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, para representar o resultado de aplicações sucessivas, respectivamente, da disjunção e da conjunção às fórmulas $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_n$, independentemente da forma como elas são agrupadas. Caso $n = 1$, as notações acima representam simplesmente a fórmula φ_1.

Demonstração.

Exercício. $\square$

Dado que a disjunção e a conjunção são associativas, utilizaremos as notações

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n \quad \text{e} \quad \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, para representar o resultado de aplicações sucessivas, respectivamente, da disjunção e da conjunção às fórmulas $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_n$, independentemente da forma como elas são agrupadas. Caso $n = 1$, as notações acima representam simplesmente a fórmula φ_1.

O resultado seguinte mostra que, usando a equivalência lógica, é possível "definir os conectivos uns à custa dos outros". Veremos mais tarde que desta forma é possível "eliminar" alguns dos conectivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

i) $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$,

ii) $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$,

iii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi$, $\quad \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,

v) $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,

vi) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \perp$,

vii) $\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$.

O resultado seguinte mostra que, usando a equivalência lógica, é possível "definir os conectivos uns à custa dos outros". Veremos mais tarde que desta forma é possível "eliminar" alguns dos conectivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

i) $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)$,

ii) $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \lor \psi$,

iii) $\varphi \lor \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi, \quad \varphi \lor \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \land \neg\psi)$,

v) $\varphi \land \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \lor \neg\psi)$,

vi) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \perp$,

vii) $\perp \Leftrightarrow \varphi \land \neg\varphi$.

O resultado seguinte mostra que, usando a equivalência lógica, é possível "definir os conectivos uns à custa dos outros". Veremos mais tarde que desta forma é possível "eliminar" alguns dos conectivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

i) $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$,

ii) $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$,

iii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi$, $\quad \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,

v) $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,

vi) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \perp$,

vii) $\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$.

O resultado seguinte mostra que, usando a equivalência lógica, é possível "definir os conectivos uns à custa dos outros". Veremos mais tarde que desta forma é possível "eliminar" alguns dos conectivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

i) $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$,

ii) $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$,

iii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi$, $\quad \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,

v) $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,

vi) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \bot$,

vii) $\bot \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$.

O resultado seguinte mostra que, usando a equivalência lógica, é possível "definir os conectivos uns à custa dos outros". Veremos mais tarde que desta forma é possível "eliminar" alguns dos conectivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

i) $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$,

ii) $\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$,

iii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \rightarrow \psi$, $\quad \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,

v) $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,

vi) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \perp$,

vii) $\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$.

O resultado seguinte mostra que, usando a equivalência lógica, é possível "definir os conectivos uns à custa dos outros". Veremos mais tarde que desta forma é possível "eliminar" alguns dos conectivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

i) $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$,

ii) $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$,

iii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi$, $\quad \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,

v) $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,

vi) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \perp$,

vii) $\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$.

O resultado seguinte mostra que, usando a equivalência lógica, é possível "definir os conectivos uns à custa dos outros". Veremos mais tarde que desta forma é possível "eliminar" alguns dos conectivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

i) $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$,

ii) $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$,

iii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi$, $\quad \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,

v) $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,

vi) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \bot$,

vii) $\bot \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$.

O resultado seguinte mostra que, usando a equivalência lógica, é possível "definir os conectivos uns à custa dos outros". Veremos mais tarde que desta forma é possível "eliminar" alguns dos conectivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

i) $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$,

ii) $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$,

iii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \to \psi$, $\quad \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,

v) $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,

vi) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \to \perp$,

vii) $\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$.

Teorema (Generalização)

Sejam φ e ψ duas fórmulas e p_i uma variável proposicional. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p_i]$ também é uma tautologia.

Demonstração.

Dada uma valoração v qualquer, seja v' a valoração definida, para cada variável proposicional p_n, por

$$v'(p_n) = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } p_n = p_i, \\ v(p_n) & \text{se } p_n \neq p_i. \end{cases}$$

Prova-se (Exercício 3.7) que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_i])$.
Logo, se φ é uma tautologia, então $v'(\varphi) = 1$, donde se deduz que $v(\varphi[\psi/p_i]) = 1$.
Dado que v é uma valoração qualquer, conclui-se que $\varphi[\psi/p_i]$ é uma tautologia. □

Teorema (Generalização)

Sejam φ e ψ duas fórmulas e p_i uma variável proposicional. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p_i]$ também é uma tautologia.

Demonstração.

Dada uma valoração v qualquer, seja v' a valoração definida, para cada variável proposicional p_n, por

$$v'(p_n) = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } p_n = p_i, \\ v(p_n) & \text{se } p_n \neq p_i. \end{cases}$$

Prova-se (Exercício 3.7) que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_i])$.
Logo, se φ é uma tautologia, então $v'(\varphi) = 1$, donde se deduz que $v(\varphi[\psi/p_i]) = 1$.
Dado que v é uma valoração qualquer, conclui-se que $\varphi[\psi/p_i]$ é uma tautologia. □

Teorema (Generalização)

Sejam φ e ψ duas fórmulas e p_i uma variável proposicional. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p_i]$ também é uma tautologia.

Demonstração.

Dada uma valoração v qualquer, seja v' a valoração definida, para cada variável proposicional p_n, por

$$v'(p_n) = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } p_n = p_i, \\ v(p_n) & \text{se } p_n \neq p_i. \end{cases}$$

Prova-se (Exercício 3.7) que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_i])$.

Logo, se φ é uma tautologia, então $v'(\varphi) = 1$, donde se deduz que $v(\varphi[\psi/p_i]) = 1$.

Dado que v é uma valoração qualquer, conclui-se que $\varphi[\psi/p_i]$ é uma tautologia. $\square$

Teorema (Generalização)

Sejam φ e ψ duas fórmulas e p_i uma variável proposicional. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p_i]$ também é uma tautologia.

Demonstração.

Dada uma valoração v qualquer, seja v' a valoração definida, para cada variável proposicional p_n, por

$$v'(p_n) = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } p_n = p_i, \\ v(p_n) & \text{se } p_n \neq p_i. \end{cases}$$

Prova-se (Exercício 3.7) que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_i])$.
Logo, se φ é uma tautologia, então $v'(\varphi) = 1$, donde se deduz que $v(\varphi[\psi/p_i]) = 1$.
Dado que v é uma valoração qualquer, conclui-se que $\varphi[\psi/p_i]$ é uma tautologia. $\square$

Teorema (Generalização)

Sejam φ e ψ duas fórmulas e p_i uma variável proposicional. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p_i]$ também é uma tautologia.

Demonstração.

Dada uma valoração v qualquer, seja v' a valoração definida, para cada variável proposicional p_n, por

$$v'(p_n) = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } p_n = p_i, \\ v(p_n) & \text{se } p_n \neq p_i. \end{cases}$$

Prova-se (Exercício 3.7) que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_i])$.
Logo, se φ é uma tautologia, então $v'(\varphi) = 1$, donde se deduz que $v(\varphi[\psi/p_i]) = 1$.
Dado que v é uma valoração qualquer, conclui-se que $\varphi[\psi/p_i]$ é uma tautologia. $\square$

Teorema (Generalização)

Sejam φ e ψ duas fórmulas e p_i uma variável proposicional. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p_i]$ também é uma tautologia.

Demonstração.

Dada uma valoração v qualquer, seja v' a valoração definida, para cada variável proposicional p_n, por

$$v'(p_n) = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } p_n = p_i, \\ v(p_n) & \text{se } p_n \neq p_i. \end{cases}$$

Prova-se (Exercício 3.7) que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_i])$.
Logo, se φ é uma tautologia, então $v'(\varphi) = 1$, donde se deduz que $v(\varphi[\psi/p_i]) = 1$.
Dado que v é uma valoração qualquer, conclui-se que $\varphi[\psi/p_i]$ é uma tautologia. $\square$

Teorema (Substituição)

Sejam ψ_1 e ψ_2 duas fórmulas e seja p_i uma variável proposicional. Então
$\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ se e só se para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, e mostremos, usando o Príncípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, que

$$\text{para todo } \varphi \in \mathcal{F}^{CP},\ \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i].$$

Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ seja $P(\varphi)$: $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

1. $P(p_j)$ é a condição $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   i) Se $j = i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = \psi_1$ e $p_j[\psi_2/p_i] = \psi_2$. Dado que por hipótese $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, tem-se $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   ii) Se $j \neq i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = p_j = p_j[\psi_2/p_i]$. Dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva, deduz-se que $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.

   A condição $P(p_j)$ é portanto verdadeira.

Teorema (Substituição)

Sejam ψ_1 e ψ_2 duas fórmulas e seja p_i uma variável proposicional. Então $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ se e só se para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, e mostremos, usando o Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, que

$$\text{para todo } \varphi \in \mathcal{F}^{CP},\ \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i].$$

Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ seja $P(\varphi)$: $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

1. $P(p_j)$ é a condição $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   i) Se $j = i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = \psi_1$ e $p_j[\psi_2/p_i] = \psi_2$. Dado que por hipótese $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, tem-se $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   ii) Se $j \neq i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = p_j = p_j[\psi_2/p_i]$. Dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva, deduz-se que $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.

   A condição $P(p_j)$ é portanto verdadeira.

Teorema (Substituição)

Sejam ψ_1 e ψ_2 duas fórmulas e seja p_i uma variável proposicional. Então $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ se e só se para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, e mostremos, usando o Príncípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, que

$$\text{para todo } \varphi \in \mathcal{F}^{CP},\ \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i].$$

Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ seja $P(\varphi)$: $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

1. $P(p_j)$ é a condição $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   i) Se $j = i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = \psi_1$ e $p_j[\psi_2/p_i] = \psi_2$. Dado que por hipótese $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, tem-se $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   ii) Se $j \neq i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = p_j = p_j[\psi_2/p_i]$. Dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva, deduz-se que $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.

   A condição $P(p_j)$ é portanto verdadeira.

Teorema (Substituição)

Sejam ψ_1 e ψ_2 duas fórmulas e seja p_i uma variável proposicional. Então
$\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ se e só se para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, e mostremos, usando o Príncípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, que

$$\text{para todo } \varphi \in \mathcal{F}^{CP},\ \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i].$$

Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ seja $P(\varphi)$: $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

1. $P(p_j)$ é a condição $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   i) Se $j = i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = \psi_1$ e $p_j[\psi_2/p_i] = \psi_2$. Dado que por hipótese $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, tem-se $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   ii) Se $j \neq i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = p_j = p_j[\psi_2/p_i]$. Dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva, deduz-se que $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.

   A condição $P(p_j)$ é portanto verdadeira.

Teorema (Substituição)

Sejam ψ_1 e ψ_2 duas fórmulas e seja p_i uma variável proposicional. Então
$\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ se e só se para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, e mostremos, usando o Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, que

$$\text{para todo } \varphi \in \mathcal{F}^{CP},\ \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i].$$

Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ seja $P(\varphi)$: $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

1. $P(p_j)$ é a condição $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   i) Se $j = i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = \psi_1$ e $p_j[\psi_2/p_i] = \psi_2$. Dado que por hipótese $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, tem-se $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   ii) Se $j \neq i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = p_j = p_j[\psi_2/p_i]$. Dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva, deduz-se que $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.

   A condição $P(p_j)$ é portanto verdadeira.

Teorema (Substituição)

Sejam ψ_1 e ψ_2 duas fórmulas e seja p_i uma variável proposicional. Então
$\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ se e só se para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, e mostremos, usando o Príncípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, que

$$\text{para todo } \varphi \in \mathcal{F}^{CP}, \ \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i].$$

Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ seja $P(\varphi)$: $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

1. $P(p_j)$ é a condição $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   - i) Se $j = i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = \psi_1$ e $p_j[\psi_2/p_i] = \psi_2$. Dado que por hipótese $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, tem-se $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   - ii) Se $j \neq i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = p_j = p_j[\psi_2/p_i]$. Dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva, deduz-se que $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.

   A condição $P(p_j)$ é portanto verdadeira.

Teorema (Substituição)

Sejam ψ_1 e ψ_2 duas fórmulas e seja p_i uma variável proposicional. Então
$\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ se e só se para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, e mostremos, usando o Príncípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, que

$$\text{para todo } \varphi \in \mathcal{F}^{CP},\ \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i].$$

Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ seja $P(\varphi)$: $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

1. $P(p_j)$ é a condição $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   - i) Se $j = i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = \psi_1$ e $p_j[\psi_2/p_i] = \psi_2$. Dado que por hipótese $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, tem-se $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   - ii) Se $j \neq i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = p_j = p_j[\psi_2/p_i]$. Dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva, deduz-se que $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.

   A condição $P(p_j)$ é portanto verdadeira.

Teorema (Substituição)

Sejam ψ_1 e ψ_2 duas fórmulas e seja p_i uma variável proposicional. Então
$\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ se e só se para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, e mostremos, usando o Príncípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, que

$$\text{para todo } \varphi \in \mathcal{F}^{CP},\ \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i].$$

Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ seja $P(\varphi)$: $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

1. $P(p_j)$ é a condição $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   i) Se $j = i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = \psi_1$ e $p_j[\psi_2/p_i] = \psi_2$. Dado que por hipótese $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, tem-se $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   ii) Se $j \neq i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = p_j = p_j[\psi_2/p_i]$. Dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva, deduz-se que $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.

   A condição $P(p_j)$ é portanto verdadeira.

Teorema (Substituição)

Sejam ψ_1 e ψ_2 duas fórmulas e seja p_i uma variável proposicional. Então
$\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ se e só se para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, e mostremos, usando o Princípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, que

$$\text{para todo } \varphi \in \mathcal{F}^{CP},\ \varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i].$$

Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ seja $P(\varphi)$: $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

1. $P(p_j)$ é a condição $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   i) Se $j = i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = \psi_1$ e $p_j[\psi_2/p_i] = \psi_2$. Dado que por hipótese $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, tem-se $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   ii) Se $j \neq i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = p_j = p_j[\psi_2/p_i]$. Dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva, deduz-se que $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.

A condição $P(p_j)$ é portanto verdadeira.

Teorema (Substituição)

Sejam ψ_1 e ψ_2 duas fórmulas e seja p_i uma variável proposicional. Então
$\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ se e só se para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, e mostremos, usando o Príncípio de Indução Estrutural para $\mathcal{F}^{CP}$, que

para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

Para cada fórmula $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ seja $P(\varphi)$: $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$.

1. $P(p_j)$ é a condição $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   - i) Se $j = i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = \psi_1$ e $p_j[\psi_2/p_i] = \psi_2$. Dado que por hipótese $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, tem-se $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.
   - ii) Se $j \neq i$, então $p_j[\psi_1/p_i] = p_j = p_j[\psi_2/p_i]$. Dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva, deduz-se que $p_j[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_j[\psi_2/p_i]$.

   A condição $P(p_j)$ é portanto verdadeira.

Demonstração (continuação).

2. $P(\bot)$, isto é, $\bot[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \bot[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\bot[\psi_1/p_i] = \bot = \bot[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então

$$v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i])$$
$$\stackrel{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]).$$

   Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. $\square$

Demonstração (continuação).

2. $P(\perp)$, isto é, $\perp[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \perp[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então
$$\begin{aligned} v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) &= v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i]) \\ &\overset{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]). \end{aligned}$$
Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. □

Demonstração (continuação).

2. $P(\perp)$, isto é, $\perp[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \perp[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então
$$v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i])$$
$$\overset{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]).$$
Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. $\Box$

Demonstração (continuação).

2. $P(\perp)$, isto é, $\perp[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \perp[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então
$$\begin{aligned} v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) &= v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i]) \\ &\stackrel{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]). \end{aligned}$$
Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. $\square$

Demonstração (continuação).

2. $P(\perp)$, isto é, $\perp[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \perp[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então
$$v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i])$$
$$\overset{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]).$$
Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \square \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. $\square$

Demonstração (continuação).

2. $P(\perp)$, isto é, $\perp[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \perp[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então
$$v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i])$$
$$\overset{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]).$$
Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \square \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. □

Demonstração (continuação).

2. $P(\perp)$, isto é, $\perp[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \perp[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então

$$v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i])$$
$$\overset{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]).$$

   Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \square \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. $\square$

Demonstração (continuação).

2. $P(\perp)$, isto é, $\perp[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \perp[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então
$$v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i])$$
$$\overset{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]).$$
Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\Box \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. $\Box$

Demonstração (continuação).

2. $P(\bot)$, isto é, $\bot[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \bot[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\bot[\psi_1/p_i] = \bot = \bot[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então
$$v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i])$$
$$\overset{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]).$$
Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. $\Box$

Demonstração (continuação).

2. $P(\perp)$, isto é, $\perp[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \perp[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então
$$v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i])$$
$$\overset{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]).$$
Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. $\square$

Demonstração (continuação).

2. $P(\perp)$, isto é, $\perp[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \perp[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então
$$v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i])$$
$$\overset{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]).$$
Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \square \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$.

Demonstração (continuação).

2. $P(\perp)$, isto é, $\perp[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \perp[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então
$$v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i])$$
$$\stackrel{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]).$$
Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \square \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$.

Demonstração (continuação).

2. $P(\perp)$, isto é, $\perp[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \perp[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então
$$\begin{aligned} v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) &= v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i]) \\ &\overset{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]). \end{aligned}$$
Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \Box \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$.

Demonstração (continuação).

2. $P(\perp)$, isto é, $\perp[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \perp[\psi_2/p_i]$, é verdadeira pois $\perp[\psi_1/p_i] = \perp = \perp[\psi_2/p_i]$ e $\Leftrightarrow$ é uma relação reflexiva.
3. Seja φ uma fórmula e suponhamos, por hipótese de indução (HI), que $P(\varphi)$ é válida, ou seja, que se tem $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Queremos provar que se verifica $P(\neg\varphi)$, ou seja, que a fórmula $\sigma = (\neg\varphi)[\psi_1/p_i] \leftrightarrow (\neg\varphi)[\psi_2/p_i]$ é uma tautologia. Seja v uma valoração qualquer. Então
$$v((\neg\varphi)[\psi_1/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_1/p_i]) = 1 - v(\varphi[\psi_1/p_i])$$
$$\stackrel{HI}{=} 1 - v(\varphi[\psi_2/p_i]) = v(\neg\varphi[\psi_2/p_i]) = v((\neg\varphi)[\psi_2/p_i]).$$
Logo, $v(\sigma) = 1$ o que prova que σ é uma tautologia.
4. Se $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ são verdadeiras e $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $P(\varphi_1 \square \varphi_2)$ é verdadeira [Exercício].

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow \varphi[\psi_2/p_i]$. Então, tomando em particular $\varphi = p_i$, tem-se $p_i[\psi_1/p_i] \Leftrightarrow p_i[\psi_2/p_i]$, ou seja, por definição de substituição, $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$. $\square$

Em linguagem informal, o que o Teorema da Substituição diz é que “numa fórmula pode-se substituir uma parte por uma parte equivalente que se obtém uma fórmula equivalente à inicial”.

Exemplo

Sejam φ e ψ duas fórmulas. Então,

$$\neg(\varphi \to \psi) \quad \Leftrightarrow \quad \neg(\neg\varphi \vee \psi)$$

Em linguagem informal, o que o Teorema da Substituição diz é que “numa fórmula pode-se substituir uma parte por uma parte equivalente que se obtém uma fórmula equivalente à inicial”.

Exemplo

Sejam φ e ψ duas fórmulas. Então,

$$\neg(\varphi \to \psi) \quad \Leftrightarrow \quad \neg(\neg\varphi \lor \psi)$$

Em linguagem informal, o que o Teorema da Substituição diz é que "numa fórmula pode-se substituir uma parte por uma parte equivalente que se obtém uma fórmula equivalente à inicial".

Exemplo

Sejam φ e ψ duas fórmulas. Então,

$\neg(\varphi \to \psi) \quad \Leftrightarrow \quad \neg(\neg\varphi \vee \psi)$ pois $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$ e portanto pelo Teorema da Substituição $(\neg p_i)[\varphi \to \psi / p_i] \Leftrightarrow (\neg p_i)[\neg\varphi \vee \psi / p_i]$

Em linguagem informal, o que o Teorema da Substituição diz é que “numa fórmula pode-se substituir uma parte por uma parte equivalente que se obtém uma fórmula equivalente à inicial”.

Exemplo

Sejam φ e ψ duas fórmulas. Então,

$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \quad \Leftrightarrow \quad \neg(\neg\varphi \vee \psi)$ pois $\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$ e portanto pelo Teorema da Substituição $(\neg p_i)[\varphi \rightarrow \psi / p_i] \Leftrightarrow (\neg p_i)[\neg\varphi \vee \psi / p_i]$

$\Leftrightarrow \quad \neg\neg\varphi \wedge \neg\psi$ por uma das leis de De Morgan

Em linguagem informal, o que o Teorema da Substituição diz é que "numa fórmula pode-se substituir uma parte por uma parte equivalente que se obtém uma fórmula equivalente à inicial".

Exemplo

Sejam φ e ψ duas fórmulas. Então,

$\neg(\varphi \to \psi)$	$\Leftrightarrow$	$\neg(\neg\varphi \vee \psi)$	pois $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$ e portanto pelo Teorema da Substituição $(\neg p_i)[\varphi \to \psi / p_i] \Leftrightarrow (\neg p_i)[\neg\varphi \vee \psi / p_i]$
	$\Leftrightarrow$	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi$	por uma das leis de De Morgan
	$\Leftrightarrow$	$\varphi \wedge \neg\psi$	pelo Teorema da Substituição pois, pela lei da dupla negação, $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$.

Recordemos que, por um resultado anterior, é possível “eliminar” alguns dos conectivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Definição

Um conjunto $A \subseteq \{\perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ de conectivos diz-se completo quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que: (i) $\varphi \Leftrightarrow \psi$; e (ii) todos os conectivos de ψ pertencem a A.

É claro que o conjunto $\{\perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ de todos os conectivos é completo. Quais são os conjuntos completos minimais?

Teorema

Os conjuntos de conectivos $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ e $\{\perp, \rightarrow\}$ são completos.

Recordemos que, por um resultado anterior, é possível "eliminar" alguns dos conectivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Definição

Um conjunto $A \subseteq \{\bot, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ de conectivos diz-se completo quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que: (i) $\varphi \Leftrightarrow \psi$; e (ii) todos os conectivos de ψ pertencem a A.

É claro que o conjunto $\{\bot, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ de todos os conectivos é completo. Quais são os conjuntos completos minimais?

Teorema

Os conjuntos de conectivos $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ e $\{\bot, \rightarrow\}$ são completos.

Recordemos que, por um resultado anterior, é possível "eliminar" alguns dos conectivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Definição

Um conjunto $A \subseteq \{\perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ de conectivos diz-se completo quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que: (i) $\varphi \Leftrightarrow \psi$; e (ii) todos os conectivos de ψ pertencem a A.

É claro que o conjunto $\{\perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ de todos os conectivos é completo. Quais são os conjuntos completos minimais?

Teorema

Os conjuntos de conectivos $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ e $\{\perp, \rightarrow\}$ são completos.

Recordemos que, por um resultado anterior, é possível "eliminar" alguns dos conectivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Definição

Um conjunto $A \subseteq \{\perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ de conectivos diz-se completo quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que: (i) $\varphi \Leftrightarrow \psi$; e (ii) todos os conectivos de ψ pertencem a A.

É claro que o conjunto $\{\perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ de todos os conectivos é completo. Quais são os conjuntos completos minimais?

Teorema

Os conjuntos de conectivos $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ e $\{\perp, \rightarrow\}$ são completos.

Recordemos que, por um resultado anterior, é possível "eliminar" alguns dos conectivos, no sentido em que qualquer fórmula é logicamente equivalente a outra em que tais conectivos não são usados.

Definição

Um conjunto $A \subseteq \{\perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ de conectivos diz-se completo quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que: (i) $\varphi \Leftrightarrow \psi$; e (ii) todos os conectivos de ψ pertencem a A.

É claro que o conjunto $\{\perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ de todos os conectivos é completo. Quais são os conjuntos completos minimais?

Teorema

Os conjuntos de conectivos $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ e $\{\perp, \rightarrow\}$ são completos.

Demonstração.

Mostremos, por exemplo, que $\{\neg, \vee\}$ é completo. Para tal seja $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ a única função tal que:

1. para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $f(p_j) = p_j$;
2. $f(\perp) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$,
   b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   c) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi))$,
   d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi)))$.

Pode-se verificar (exercício) que, para toda a fórmula φ, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e todos os conectivos de $f(\varphi)$ pertencem a $\{\neg, \vee\}$. Conclui-se assim que este conjunto de conectivos é completo. □

Demonstração.

Mostremos, por exemplo, que $\{\neg, \vee\}$ é completo. Para tal seja $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ a única função tal que:

1. para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $f(p_j) = p_j$;
2. $f(\bot) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$,
   b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   c) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi))$,
   d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi)))$.

Pode-se verificar (exercício) que, para toda a fórmula φ, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e todos os conectivos de $f(\varphi)$ pertencem a $\{\neg, \vee\}$. Conclui-se assim que este conjunto de conectivos é completo. □

Demonstração.

Mostremos, por exemplo, que $\{\neg, \vee\}$ é completo. Para tal seja $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ a única função tal que:

1. para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $f(p_j) = p_j$;
2. $f(\bot) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$,
   b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   c) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi))$,
   d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi)))$.

Pode-se verificar (exercício) que, para toda a fórmula φ, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e todos os conectivos de $f(\varphi)$ pertencem a $\{\neg, \vee\}$. Conclui-se assim que este conjunto de conectivos é completo. □

Demonstração.

Mostremos, por exemplo, que $\{\neg, \vee\}$ é completo. Para tal seja $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ a única função tal que:

1. para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $f(p_j) = p_j$;
2. $f(\perp) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$,
   b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   c) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi))$,
   d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi)))$.

Pode-se verificar (exercício) que, para toda a fórmula φ, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e todos os conectivos de $f(\varphi)$ pertencem a $\{\neg, \vee\}$. Conclui-se assim que este conjunto de conectivos é completo. □

Demonstração.

Mostremos, por exemplo, que $\{\neg, \vee\}$ é completo. Para tal seja $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ a única função tal que:

1. para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $f(p_j) = p_j$;
2. $f(\bot) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$,
   b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   c) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi))$,
   d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi)))$.

Pode-se verificar (exercício) que, para toda a fórmula φ, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e todos os conectivos de $f(\varphi)$ pertencem a $\{\neg, \vee\}$. Conclui-se assim que este conjunto de conectivos é completo. □

Demonstração.

Mostremos, por exemplo, que $\{\neg, \vee\}$ é completo. Para tal seja $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ a única função tal que:

1. para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $f(p_j) = p_j$;
2. $f(\perp) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$,
   b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   c) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi))$,
   d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi)))$.

Pode-se verificar (exercício) que, para toda a fórmula φ, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e todos os conectivos de $f(\varphi)$ pertencem a $\{\neg, \vee\}$. Conclui-se assim que este conjunto de conectivos é completo. □

Demonstração.

Mostremos, por exemplo, que $\{\neg, \vee\}$ é completo. Para tal seja $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ a única função tal que:

1. para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $f(p_j) = p_j$;
2. $f(\perp) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$,
   b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   c) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi))$,
   d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi)))$.

Pode-se verificar (exercício) que, para toda a fórmula φ, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e todos os conectivos de $f(\varphi)$ pertencem a $\{\neg, \vee\}$. Conclui-se assim que este conjunto de conectivos é completo. □

Demonstração.

Mostremos, por exemplo, que $\{\neg, \vee\}$ é completo. Para tal seja $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ a única função tal que:

1. para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $f(p_j) = p_j$;
2. $f(\bot) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$,
   b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   c) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi))$,
   d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi)))$.

Pode-se verificar (exercício) que, para toda a fórmula φ, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e todos os conectivos de $f(\varphi)$ pertencem a $\{\neg, \vee\}$. Conclui-se assim que este conjunto de conectivos é completo. □

Demonstração.

Mostremos, por exemplo, que $\{\neg, \vee\}$ é completo. Para tal seja $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ a única função tal que:

1. para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $f(p_j) = p_j$;
2. $f(\bot) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$,
   b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   c) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi))$,
   d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi)))$.

Pode-se verificar (exercício) que, para toda a fórmula φ, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e todos os conectivos de $f(\varphi)$ pertencem a $\{\neg, \vee\}$. Conclui-se assim que este conjunto de conectivos é completo. □

Demonstração.

Mostremos, por exemplo, que $\{\neg, \vee\}$ é completo. Para tal seja $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ a única função tal que:

1. para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $f(p_j) = p_j$;
2. $f(\perp) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$,
   b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   c) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi))$,
   d) $f(\varphi \to \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi)))$.

Pode-se verificar (exercício) que, para toda a fórmula φ, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e todos os conectivos de $f(\varphi)$ pertencem a $\{\neg, \vee\}$. Conclui-se assim que este conjunto de conectivos é completo. □

Demonstração.

Mostremos, por exemplo, que $\{\neg, \vee\}$ é completo. Para tal seja $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ a única função tal que:

1. para cada $p_j \in \mathcal{V}^{CP}$, $f(p_j) = p_j$;
2. $f(\perp) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$;
3. para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$,
   a) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$,
   b) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   c) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi))$,
   d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi)$,
   e) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi)))$.

Pode-se verificar (exercício) que, para toda a fórmula φ, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e todos os conectivos de $f(\varphi)$ pertencem a $\{\neg, \vee\}$. Conclui-se assim que este conjunto de conectivos é completo. $\square$

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = (\neg p_1 \wedge p_2) \to \perp$. Da demonstração do teorema anterior, deduz-se que φ é logicamente equivalente à fórmula

$$f(\varphi) = \neg f(\neg p_1 \wedge p_2) \vee f(\perp)$$

que usa apenas conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$. Alternativamente, poderia deduzir-se pelo Teorema da Substituição,

donde, dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação transitiva, $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0)$ é uma fórmula logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = (\neg p_1 \wedge p_2) \to \perp$. Da demonstração do teorema anterior, deduz-se que φ é logicamente equivalente à fórmula

$$f(\varphi) \quad = \quad \neg f(\neg p_1 \wedge p_2) \vee f(\perp)$$

que usa apenas conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$. Alternativamente, poderia deduzir-se pelo Teorema da Substituição,

donde, dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação transitiva, $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0)$ é uma fórmula logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = (\neg p_1 \wedge p_2) \to \perp$. Da demonstração do teorema anterior, deduz-se que φ é logicamente equivalente à fórmula

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \neg f(\neg p_1 \wedge p_2) \vee f(\perp) \\ &= \neg\neg(\neg f(\neg p_1) \vee \neg f(p_2)) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \end{aligned}$$

que usa apenas conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$. Alternativamente, poderia deduzir-se pelo Teorema da Substituição,

donde, dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação transitiva, $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0)$ é uma fórmula logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = (\neg p_1 \wedge p_2) \to \perp$. Da demonstração do teorema anterior, deduz-se que φ é logicamente equivalente à fórmula

$$\begin{array}{rcl} f(\varphi) & = & \neg f(\neg p_1 \wedge p_2) \vee f(\perp) \\ & = & \neg\neg(\neg f(\neg p_1) \vee \neg f(p_2)) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ & = & \neg\neg(\neg\neg f(p_1) \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \end{array}$$

que usa apenas conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$. Alternativamente, poderia deduzir-se pelo Teorema da Substituição,

donde, dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação transitiva, $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0)$ é uma fórmula logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = (\neg p_1 \wedge p_2) \to \bot$. Da demonstração do teorema anterior, deduz-se que φ é logicamente equivalente à fórmula

$$
\begin{aligned}
f(\varphi) &= \neg f(\neg p_1 \wedge p_2) \vee f(\bot) \\
&= \neg\neg(\neg f(\neg p_1) \vee \neg f(p_2)) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\
&= \neg\neg(\neg\neg f(p_1) \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\
&= \neg\neg(\neg\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0)
\end{aligned}
$$

que usa apenas conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$. Alternativamente, poderia deduzir-se pelo Teorema da Substituição,

donde, dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação transitiva, $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0)$ é uma fórmula logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = (\neg p_1 \wedge p_2) \to \bot$. Da demonstração do teorema anterior, deduz-se que φ é logicamente equivalente à fórmula

$$\begin{aligned}
f(\varphi) &= \neg f(\neg p_1 \wedge p_2) \vee f(\bot) \\
&= \neg\neg(\neg f(\neg p_1) \vee \neg f(p_2)) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\
&= \neg\neg(\neg\neg f(p_1) \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\
&= \neg\neg(\neg\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0)
\end{aligned}$$

que usa apenas conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$. Alternativamente, poderia deduzir-se pelo Teorema da Substituição,

$$\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \neg(\neg p_1 \wedge p_2) \vee \bot$$

donde, dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação transitiva, $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0)$ é uma fórmula logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = (\neg p_1 \wedge p_2) \to \perp$. Da demonstração do teorema anterior, deduz-se que φ é logicamente equivalente à fórmula

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \neg f(\neg p_1 \wedge p_2) \vee f(\perp) \\ &= \neg\neg(\neg f(\neg p_1) \vee \neg f(p_2)) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ &= \neg\neg(\neg\neg f(p_1) \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ &= \neg\neg(\neg\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \end{aligned}$$

que usa apenas conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$. Alternativamente, poderia deduzir-se pelo Teorema da Substituição,

$$\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \neg(\neg p_1 \wedge p_2) \vee \perp$$

donde, dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação transitiva, $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0)$ é uma fórmula logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = (\neg p_1 \wedge p_2) \to \bot$. Da demonstração do teorema anterior, deduz-se que φ é logicamente equivalente à fórmula

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \neg f(\neg p_1 \wedge p_2) \vee f(\bot) \\ &= \neg\neg(\neg f(\neg p_1) \vee \neg f(p_2)) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ &= \neg\neg(\neg\neg f(p_1) \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ &= \neg\neg(\neg\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \end{aligned}$$

que usa apenas conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$. Alternativamente, poderia deduzir-se pelo Teorema da Substituição,

$$\begin{aligned} \varphi &\Leftrightarrow \neg(\neg p_1 \wedge p_2) \vee \bot \\ &\Leftrightarrow (\neg\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \end{aligned}$$

donde, dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação transitiva, $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0)$ é uma fórmula logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = (\neg p_1 \wedge p_2) \to \bot$. Da demonstração do teorema anterior, deduz-se que φ é logicamente equivalente à fórmula

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \neg f(\neg p_1 \wedge p_2) \vee f(\bot) \\ &= \neg\neg(\neg f(\neg p_1) \vee \neg f(p_2)) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ &= \neg\neg(\neg\neg f(p_1) \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ &= \neg\neg(\neg\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \end{aligned}$$

que usa apenas conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$. Alternativamente, poderia deduzir-se pelo Teorema da Substituição,

$$\begin{aligned} \varphi &\Leftrightarrow \neg(\neg p_1 \wedge p_2) \vee \bot \\ &\Leftrightarrow (\neg\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ &\Leftrightarrow p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \end{aligned}$$

donde, dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação transitiva, $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0)$ é uma fórmula logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = (\neg p_1 \wedge p_2) \to \bot$. Da demonstração do teorema anterior, deduz-se que φ é logicamente equivalente à fórmula

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \neg f(\neg p_1 \wedge p_2) \vee f(\bot) \\ &= \neg\neg(\neg f(\neg p_1) \vee \neg f(p_2)) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ &= \neg\neg(\neg\neg f(p_1) \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ &= \neg\neg(\neg\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \end{aligned}$$

que usa apenas conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$. Alternativamente, poderia deduzir-se pelo Teorema da Substituição,

$$\begin{aligned} \varphi &\Leftrightarrow \neg(\neg p_1 \wedge p_2) \vee \bot \\ &\Leftrightarrow (\neg\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \\ &\Leftrightarrow p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0) \end{aligned}$$

donde, dado que $\Leftrightarrow$ é uma relação transitiva, $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_0 \vee \neg p_0)$ é uma fórmula logicamente equivalente a φ.

Definição

- As variáveis proposicionais, p_i, e as negações de variáveis proposicionais, $\neg p_i$, são chamadas (fórmulas) ***literais***.
- Fórmulas do tipo
  - i) $(\ell_{11} \vee \cdots \vee \ell_{1m_1}) \wedge \cdots \wedge (\ell_{n1} \vee \cdots \vee \ell_{nm_n})$
  - ii) $(\ell_{11} \wedge \cdots \wedge \ell_{1m_1}) \vee \cdots \vee (\ell_{n1} \wedge \cdots \wedge \ell_{nm_n})$

  onde os ℓ_{ij} são literais e $n, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, são chamadas, respectivamente, ***formas normais conjuntivas*** (FNC) e ***formas normais disjuntivas*** (FND).

Exemplos

1) Um literal ℓ é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e uma forma normal disjuntiva (basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $\ell_{11} = \ell$, na definição de formas normais).

Definição

- As variáveis proposicionais, p_i, e as negações de variáveis proposicionais, $\neg p_i$, são chamadas (fórmulas) ***literais***.
- Fórmulas do tipo

  i) $(\ell_{11} \vee \cdots \vee \ell_{1m_1}) \wedge \cdots \wedge (\ell_{n1} \vee \cdots \vee \ell_{nm_n})$

  ii) $(\ell_{11} \wedge \cdots \wedge \ell_{1m_1}) \vee \cdots \vee (\ell_{n1} \wedge \cdots \wedge \ell_{nm_n})$

  onde os ℓ_{ij} são literais e $n, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, são chamadas, respectivamente, ***formas normais conjuntivas*** (FNC) e ***formas normais disjuntivas*** (FND).

Exemplos

1) Um literal ℓ é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e uma forma normal disjuntiva (basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $\ell_{11} = \ell$, na definição de formas normais).

Definição

- As variáveis proposicionais, p_i, e as negações de variáveis proposicionais, $\neg p_i$, são chamadas (fórmulas) ***literais***.
- Fórmulas do tipo
  i) $(\ell_{11} \vee \cdots \vee \ell_{1m_1}) \wedge \cdots \wedge (\ell_{n1} \vee \cdots \vee \ell_{nm_n})$
  ii) $(\ell_{11} \wedge \cdots \wedge \ell_{1m_1}) \vee \cdots \vee (\ell_{n1} \wedge \cdots \wedge \ell_{nm_n})$

  onde os ℓ_{ij} são literais e $n, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, são chamadas, respectivamente, ***formas normais conjuntivas*** (FNC) e ***formas normais disjuntivas*** (FND).

Exemplos

1) Um literal ℓ é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e uma forma normal disjuntiva (basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $\ell_{11} = \ell$, na definição de formas normais).

Definição

- As variáveis proposicionais, p_i, e as negações de variáveis proposicionais, $\neg p_i$, são chamadas (fórmulas) ***literais***.
- Fórmulas do tipo
  i) $(\ell_{11} \vee \cdots \vee \ell_{1m_1}) \wedge \cdots \wedge (\ell_{n1} \vee \cdots \vee \ell_{nm_n})$
  ii) $(\ell_{11} \wedge \cdots \wedge \ell_{1m_1}) \vee \cdots \vee (\ell_{n1} \wedge \cdots \wedge \ell_{nm_n})$

  onde os ℓ_{ij} são literais e $n, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, são chamadas, respectivamente, ***formas normais conjuntivas*** (FNC) e ***formas normais disjuntivas*** (FND).

Exemplos

1) Um literal ℓ é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e uma forma normal disjuntiva (basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $\ell_{11} = \ell$, na definição de formas normais).

Definição

- As variáveis proposicionais, p_i, e as negações de variáveis proposicionais, $\neg p_i$, são chamadas (fórmulas) ***literais***.
- Fórmulas do tipo

  i) $(\ell_{11} \vee \cdots \vee \ell_{1m_1}) \wedge \cdots \wedge (\ell_{n1} \vee \cdots \vee \ell_{nm_n})$

  ii) $(\ell_{11} \wedge \cdots \wedge \ell_{1m_1}) \vee \cdots \vee (\ell_{n1} \wedge \cdots \wedge \ell_{nm_n})$

  onde os ℓ_{ij} são literais e $n, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, são chamadas, respectivamente, ***formas normais conjuntivas*** (FNC) e ***formas normais disjuntivas*** (FND).

Exemplos

1) Um literal ℓ é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e uma forma normal disjuntiva (basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $\ell_{11} = \ell$, na definição de formas normais).

Exemplos

2) A fórmula $\neg p_0 \wedge p_5 \wedge \neg p_5$ é simultaneamente uma
   - FNC ($n = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{21} = p_5$ e $\ell_{31} = \neg p_5$)
   - FND ($n = 1$, $m_1 = 3$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{12} = p_5$ e $\ell_{13} = \neg p_5$).

   A fórmula $p_0 \vee \neg p_2$ é também uma FNC e uma FND.

   Em geral, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.

3) A fórmula $(\neg p_3 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee p_2)$ é uma FNC, mas **não é** uma FND.

4) A fórmula $\neg(p_2 \wedge p_1 \wedge p_0) \vee \neg p_1$ **não é** uma FNC **nem** uma FND.

Exemplos

2) A fórmula $\neg p_0 \wedge p_5 \wedge \neg p_5$ é simultaneamente uma
   - FNC ($n = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{21} = p_5$ e $\ell_{31} = \neg p_5$)
   - FND ($n = 1$, $m_1 = 3$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{12} = p_5$ e $\ell_{13} = \neg p_5$).

   A fórmula $p_0 \vee \neg p_2$ é também uma FNC e uma FND.

   Em geral, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.

3) A fórmula $(\neg p_3 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee p_2)$ é uma FNC, mas **não é** uma FND.

4) A fórmula $\neg(p_2 \wedge p_1 \wedge p_0) \vee \neg p_1$ **não é** uma FNC **nem** uma FND.

Exemplos

2) A fórmula $\neg p_0 \wedge p_5 \wedge \neg p_5$ é simultaneamente uma
   - FNC ($n = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{21} = p_5$ e $\ell_{31} = \neg p_5$)
   - FND ($n = 1$, $m_1 = 3$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{12} = p_5$ e $\ell_{13} = \neg p_5$).

   A fórmula $p_0 \vee \neg p_2$ é também uma FNC e uma FND.

   Em geral, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.

3) A fórmula $(\neg p_3 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee p_2)$ é uma FNC, mas **não é** uma FND.

4) A fórmula $\neg(p_2 \wedge p_1 \wedge p_0) \vee \neg p_1$ **não é** uma FNC **nem** uma FND.

Exemplos

2) A fórmula $\neg p_0 \wedge p_5 \wedge \neg p_5$ é simultaneamente uma
   - FNC ($n = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{21} = p_5$ e $\ell_{31} = \neg p_5$)
   - FND ($n = 1$, $m_1 = 3$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{12} = p_5$ e $\ell_{13} = \neg p_5$).

   A fórmula $p_0 \vee \neg p_2$ é também uma FNC e uma FND.

   Em geral, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.

3) A fórmula $(\neg p_3 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee p_2)$ é uma FNC, mas **não é** uma FND.

4) A fórmula $\neg(p_2 \wedge p_1 \wedge p_0) \vee \neg p_1$ **não é** uma FNC **nem** uma FND.

Exemplos

2) A fórmula $\neg p_0 \wedge p_5 \wedge \neg p_5$ é simultaneamente uma
   - FNC ($n = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{21} = p_5$ e $\ell_{31} = \neg p_5$)
   - FND ($n = 1$, $m_1 = 3$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{12} = p_5$ e $\ell_{13} = \neg p_5$).

   A fórmula $p_0 \vee \neg p_2$ é também uma FNC e uma FND.

   Em geral, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.

3) A fórmula $(\neg p_3 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee p_2)$ é uma FNC, mas **não é** uma FND.

4) A fórmula $\neg(p_2 \wedge p_1 \wedge p_0) \vee \neg p_1$ **não é** uma FNC **nem** uma FND.

Exemplos

2) A fórmula $\neg p_0 \wedge p_5 \wedge \neg p_5$ é simultaneamente uma
   - FNC ($n = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{21} = p_5$ e $\ell_{31} = \neg p_5$)
   - FND ($n = 1$, $m_1 = 3$, $\ell_{11} = \neg p_0$, $\ell_{12} = p_5$ e $\ell_{13} = \neg p_5$).

   A fórmula $p_0 \vee \neg p_2$ é também uma FNC e uma FND.

   Em geral, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.
3) A fórmula $(\neg p_3 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee p_2)$ é uma FNC, mas **não é** uma FND.
4) A fórmula $\neg(p_2 \wedge p_1 \wedge p_0) \vee \neg p_1$ **não é** uma FNC **nem** uma FND.

Teorema

Para cada fórmula φ, existem uma forma normal conjuntiva φ^c e uma forma normal disjuntiva φ^d tais que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

1ª Demonstração.

FNC's e FND's logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar as ocorrências dos conectivos $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ e $\perp$, utilizando as equivalências lógicas

$$\begin{aligned} \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 &\Leftrightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1), \\ \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 &\Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2, \\ \perp &\Leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_0. \end{aligned}$$

2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção. □

Teorema

Para cada fórmula φ, existem uma forma normal conjuntiva φ^c e uma forma normal disjuntiva φ^d tais que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

1ª Demonstração.

FNC's e FND's logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar as ocorrências dos conectivos $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ e $\perp$, utilizando as equivalências lógicas

$$\begin{aligned} \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 &\Leftrightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1), \\ \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 &\Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2, \\ \perp &\Leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_0. \end{aligned}$$

2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção.

Teorema

Para cada fórmula φ, existem uma forma normal conjuntiva φ^c e uma forma normal disjuntiva φ^d tais que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

1ª Demonstração.

FNC's e FND's logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar as ocorrências dos conectivos $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ e $\perp$, utilizando as equivalências lógicas

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1),\\
\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \neg\varphi_1 \vee \varphi_2,\\
\perp \quad &\Leftrightarrow \quad p_0 \wedge \neg p_0.
\end{aligned}$$

2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção. □

Teorema

Para cada fórmula φ, existem uma forma normal conjuntiva φ^c e uma forma normal disjuntiva φ^d tais que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

1ª Demonstração.

FNC's e FND's logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar as ocorrências dos conectivos $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ e $\perp$, utilizando as equivalências lógicas
$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 & \Leftrightarrow & (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1), \\ \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 & \Leftrightarrow & \neg\varphi_1 \vee \varphi_2, \\ \perp & \Leftrightarrow & p_0 \wedge \neg p_0. \end{array}$$
2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção.

Teorema

Para cada fórmula φ, existem uma forma normal conjuntiva φ^c e uma forma normal disjuntiva φ^d tais que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

1ª Demonstração.

FNC's e FND's logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar as ocorrências dos conectivos $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ e $\perp$, utilizando as equivalências lógicas

$$\begin{aligned} \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 &\Leftrightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1), \\ \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 &\Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2, \\ \perp &\Leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_0. \end{aligned}$$

2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção.

Teorema

Para cada fórmula φ, existem uma forma normal conjuntiva φ^c e uma forma normal disjuntiva φ^d tais que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

1ª Demonstração.

FNC's e FND's logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar as ocorrências dos conectivos $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ e $\perp$, utilizando as equivalências lógicas

$$\begin{aligned}\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 &\Leftrightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1),\\ \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 &\Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2,\\ \perp &\Leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_0.\end{aligned}$$

2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção.

Teorema

Para cada fórmula φ, existem uma forma normal conjuntiva φ^c e uma forma normal disjuntiva φ^d tais que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

1ª Demonstração.

FNC's e FND's logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar as ocorrências dos conectivos $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ e $\perp$, utilizando as equivalências lógicas

$$\begin{aligned} \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 &\Leftrightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1), \\ \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 &\Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2, \\ \perp &\Leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_0. \end{aligned}$$

2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção. □

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = p_2 \vee (\bot \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_0))$. Tem-se

$$\varphi \quad \Leftrightarrow \quad p_2 \vee (\neg\bot \vee (p_1 \wedge \neg p_0))$$

Logo, $\varphi^d = p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)$ é uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a φ. Tem-se ainda,

donde a fórmula $\varphi^c = (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0)$ é uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = p_2 \vee (\perp \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_0))$. Tem-se

$$\varphi \quad \Leftrightarrow \quad p_2 \vee (\neg\perp \vee (p_1 \wedge \neg p_0))$$

Logo, $\varphi^d = p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)$ é uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a φ. Tem-se ainda,

donde a fórmula $\varphi^c = (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0)$ é uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = p_2 \vee (\perp \to (p_1 \wedge \neg p_0))$. Tem-se

$$\begin{aligned} \varphi &\Leftrightarrow p_2 \vee (\neg\perp \vee (p_1 \wedge \neg p_0)) \\ &\Leftrightarrow p_2 \vee \neg(p_0 \wedge \neg p_0) \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \end{aligned}$$

Logo, $\varphi^d = p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)$ é uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a φ. Tem-se ainda,

donde a fórmula $\varphi^c = (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0)$ é uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = p_2 \vee (\perp \to (p_1 \wedge \neg p_0))$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\varphi &\Leftrightarrow p_2 \vee (\neg\perp \vee (p_1 \wedge \neg p_0)) \\
&\Leftrightarrow p_2 \vee \neg(p_0 \wedge \neg p_0) \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\
&\Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee \neg\neg p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)
\end{aligned}$$

Logo, $\varphi^d = p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)$ é uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a φ. Tem-se ainda,

donde a fórmula $\varphi^c = (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0)$ é uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = p_2 \vee (\perp \to (p_1 \wedge \neg p_0))$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\varphi &\Leftrightarrow p_2 \vee (\neg\perp \vee (p_1 \wedge \neg p_0)) \\
&\Leftrightarrow p_2 \vee \neg(p_0 \wedge \neg p_0) \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\
&\Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee \neg\neg p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\
&\Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0).
\end{aligned}$$

Logo, $\varphi^d = p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)$ é uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a φ. Tem-se ainda,

donde a fórmula $\varphi^c = (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0)$ é uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = p_2 \vee (\perp \to (p_1 \wedge \neg p_0))$. Tem-se

$$\begin{array}{rcl} \varphi & \Leftrightarrow & p_2 \vee (\neg\perp \vee (p_1 \wedge \neg p_0)) \\ & \Leftrightarrow & p_2 \vee \neg(p_0 \wedge \neg p_0) \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\ & \Leftrightarrow & p_2 \vee \neg p_0 \vee \neg\neg p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\ & \Leftrightarrow & p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0). \end{array}$$

Logo, $\varphi^d = p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)$ é uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a φ. Tem-se ainda,

donde a fórmula $\varphi^c = (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0)$ é uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = p_2 \vee (\perp \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_0))$. Tem-se

$$\begin{aligned} \varphi & \Leftrightarrow p_2 \vee (\neg\perp \vee (p_1 \wedge \neg p_0)) \\ & \Leftrightarrow p_2 \vee \neg(p_0 \wedge \neg p_0) \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\ & \Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee \neg\neg p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\ & \Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0). \end{aligned}$$

Logo, $\varphi^d = p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)$ é uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a φ. Tem-se ainda,

$$\varphi \Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)$$

donde a fórmula $\varphi^c = (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0)$ é uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = p_2 \vee (\perp \to (p_1 \wedge \neg p_0))$. Tem-se

$$\begin{aligned}\varphi &\Leftrightarrow p_2 \vee (\neg\perp \vee (p_1 \wedge \neg p_0)) \\ &\Leftrightarrow p_2 \vee \neg(p_0 \wedge \neg p_0) \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\ &\Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee \neg\neg p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\ &\Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0).\end{aligned}$$

Logo, $\varphi^d = p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)$ é uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a φ. Tem-se ainda,

$$\varphi \Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)$$

donde a fórmula $\varphi^c = (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0)$ é uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = p_2 \vee (\perp \to (p_1 \wedge \neg p_0))$. Tem-se

$$\begin{aligned}\varphi &\Leftrightarrow p_2 \vee (\neg\perp \vee (p_1 \wedge \neg p_0)) \\ &\Leftrightarrow p_2 \vee \neg(p_0 \wedge \neg p_0) \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\ &\Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee \neg\neg p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\ &\Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0).\end{aligned}$$

Logo, $\varphi^d = p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)$ é uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a φ. Tem-se ainda,

$$\begin{aligned}\varphi &\Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\ &\Leftrightarrow (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee \neg p_0)\end{aligned}$$

donde a fórmula $\varphi^c = (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0)$ é uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a φ.

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = p_2 \vee (\perp \to (p_1 \wedge \neg p_0))$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\varphi &\Leftrightarrow p_2 \vee (\neg\perp \vee (p_1 \wedge \neg p_0)) \\
&\Leftrightarrow p_2 \vee \neg(p_0 \wedge \neg p_0) \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\
&\Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee \neg\neg p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\
&\Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0).
\end{aligned}$$

Logo, $\varphi^d = p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0)$ é uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente a φ. Tem-se ainda,

$$\begin{aligned}
\varphi &\Leftrightarrow p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \\
&\Leftrightarrow (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee \neg p_0) \\
&\Leftrightarrow (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0),
\end{aligned}$$

donde a fórmula $\varphi^c = (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee \neg p_0 \vee p_0)$ é uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente a φ.

2ª Demonstração.

Uma demonstração alternativa do teorema pode ser feita recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ. Vejamos como obter uma FND, φ^d, logicamente equivalente a φ.

- Se φ é uma **contradição**, toma-se $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$.
- Senão, suponhamos, sem perda de generalidade, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as variáveis que ocorrem em φ. A tabela de verdade de φ pode ser representada na seguinte forma:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha $i \rightarrow$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$.

2ª Demonstração.

Uma demonstração alternativa do teorema pode ser feita recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ. Vejamos como obter uma FND, φ^d, logicamente equivalente a φ.

- Se φ é uma **contradição**, toma-se $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$.
- Senão, suponhamos, sem perda de generalidade, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as variáveis que ocorrem em φ. A tabela de verdade de φ pode ser representada na seguinte forma:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha i $\rightarrow$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$.

2ª Demonstração.

Uma demonstração alternativa do teorema pode ser feita recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ. Vejamos como obter uma FND, φ^d, logicamente equivalente a φ.

- Se φ é uma **contradição**, toma-se $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$.
- Senão, suponhamos, sem perda de generalidade, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as variáveis que ocorrem em φ. A tabela de verdade de φ pode ser representada na seguinte forma:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha i $\rightarrow$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$.

2ª Demonstração.

Uma demonstração alternativa do teorema pode ser feita recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ. Vejamos como obter uma FND, φ^d, logicamente equivalente a φ.

- Se φ é uma **contradição**, toma-se $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$.
- Senão, suponhamos, sem perda de generalidade, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as variáveis que ocorrem em φ. A tabela de verdade de φ pode ser representada na seguinte forma:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha $i \rightarrow$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$.

2ª Demonstração.

Uma demonstração alternativa do teorema pode ser feita recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ. Vejamos como obter uma FND, φ^d, logicamente equivalente a φ.

- Se φ é uma **contradição**, toma-se $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$.
- Senão, suponhamos, sem perda de generalidade, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as variáveis que ocorrem em φ. A tabela de verdade de φ pode ser representada na seguinte forma:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha i $\rightarrow$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$.

2ª Demonstração.

Uma demonstração alternativa do teorema pode ser feita recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ. Vejamos como obter uma FND, φ^d, logicamente equivalente a φ.

- Se φ é uma **contradição**, toma-se $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$.
- Senão, suponhamos, sem perda de generalidade, que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as variáveis que ocorrem em φ. A tabela de verdade de φ pode ser representada na seguinte forma:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha i $\rightarrow$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para $j \in \{1, \ldots, n\}$.

2ª Demonstração (continuação).

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.$$

Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0. Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Então φ^d é uma FND e, por construção,

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi^d.$$

Exercício: Determinar, recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ, uma FNC, φ^c, logicamente equivalente a φ. □

2ª Demonstração (continuação).

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.$$

Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0. Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Então φ^d é uma FND e, por construção,

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi^d.$$

Exercício: Determinar, recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ, uma FNC, φ^c, logicamente equivalente a φ. □

2ª Demonstração (continuação).

Para cada $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.$$

Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0. Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \dots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Então φ^d é uma FND e, por construção,

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi^d.$$

Exercício: Determinar, recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ, uma FNC, φ^c, logicamente equivalente a φ.

2ª Demonstração (continuação).

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.$$

Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0. Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Então φ^d é uma FND e, por construção,

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi^d.$$

Exercício: Determinar, recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ, uma FNC, φ^c, logicamente equivalente a φ. $\square$

2ª Demonstração (continuação).

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.$$

Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0. Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Então φ^d é uma FND e, por construção,

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi^d.$$

Exercício: Determinar, recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ, uma FNC, φ^c, logicamente equivalente a φ. □

2ª Demonstração (continuação).

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.$$

Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0. Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Então φ^d é uma FND e, por construção,

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi^d.$$

Exercício: Determinar, recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ, uma FNC, φ^c, logicamente equivalente a φ. □

2ª Demonstração (continuação).

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.$$

Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0. Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Então φ^d é uma FND e, por construção,

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi^d.$$

Exercício: Determinar, recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ, uma FNC, φ^c, logicamente equivalente a φ. □

2ª Demonstração (continuação).

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.$$

Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0. Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Então φ^d é uma FND e, por construção,

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi^d.$$

Exercício: Determinar, recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ, uma FNC, φ^c, logicamente equivalente a φ. □

2ª Demonstração (continuação).

Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

e seja

$$\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}.$$

Note-se que o valor lógico na linha i da tabela de verdade de β_i é 1 enquanto que em todas as outras linhas é 0. Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se

$$\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}.$$

Então φ^d é uma FND e, por construção,

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi^d.$$

Exercício: Determinar, recorrendo à **tabela de verdade** da fórmula φ, uma FNC, φ^c, logicamente equivalente a φ. $\square$

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = ((p_3 \rightarrow p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)) \wedge p_2$.
Denotemos por ψ a subfórmula $(p_3 \rightarrow p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)$ de φ. A tabela de verdade de φ é

	p_1	p_2	p_3	$\perp$	$\neg p_1$	$p_3 \rightarrow p_1$	$\neg p_1 \leftrightarrow \perp$	ψ	φ
linha 1 $\rightarrow$	1	1	1	0	0	1	1	1	1
linha 2 $\rightarrow$	1	1	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	0	1	1	1	0
	1	0	0	0	0	1	1	1	0
	0	1	1	0	1	0	0	0	0
linha 6 $\rightarrow$	0	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	1	0

As linhas para as quais φ tem valor lógico 1 são a 1ª, a 2ª e a 6ª. Portanto uma FND logicamente equivalente a φ é

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3).$$

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = ((p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \bot)) \wedge p_2$. Denotemos por ψ a subfórmula $(p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \bot)$ de φ. A tabela de verdade de φ é

	p_1	p_2	p_3	$\bot$	$\neg p_1$	$p_3 \to p_1$	$\neg p_1 \leftrightarrow \bot$	ψ	φ
linha 1 $\to$	1	1	1	0	0	1	1	1	1
linha 2 $\to$	1	1	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	0	1	1	1	0
	1	0	0	0	0	1	1	1	0
	0	1	1	0	1	0	0	0	0
linha 6 $\to$	0	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	1	0

As linhas para as quais φ tem valor lógico 1 são a 1^a, a 2^a e a 6^a. Portanto uma FND logicamente equivalente a φ é

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3).$$

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = ((p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \bot)) \wedge p_2$. Denotemos por ψ a subfórmula $(p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \bot)$ de φ. A tabela de verdade de φ é

	p_1	p_2	p_3	$\bot$	$\neg p_1$	$p_3 \to p_1$	$\neg p_1 \leftrightarrow \bot$	ψ	φ
linha 1 $\to$	1	1	1	0	0	1	1	1	1
linha 2 $\to$	1	1	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	0	1	1	1	0
	1	0	0	0	0	1	1	1	0
	0	1	1	0	1	0	0	0	0
linha 6 $\to$	0	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	1	0

As linhas para as quais φ tem valor lógico 1 são a 1ª, a 2ª e a 6ª. Portanto uma FND logicamente equivalente a φ é

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3).$$

Exemplo

Consideremos a fórmula $\varphi = ((p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \bot)) \wedge p_2$. Denotemos por ψ a subfórmula $(p_3 \to p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \bot)$ de φ. A tabela de verdade de φ é

	p_1	p_2	p_3	$\bot$	$\neg p_1$	$p_3 \to p_1$	$\neg p_1 \leftrightarrow \bot$	ψ	φ
linha 1 $\to$	1	1	1	0	0	1	1	1	1
linha 2 $\to$	1	1	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	0	0	1	1	1	0
	1	0	0	0	0	1	1	1	0
	0	1	1	0	1	0	0	0	0
linha 6 $\to$	0	1	0	0	1	1	0	1	1
	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	0	1	0

As linhas para as quais φ tem valor lógico 1 são a 1^a, a 2^a e a 6^a. Portanto uma FND logicamente equivalente a φ é

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3).$$

Definição

Seja v uma valoração.

- Diz-se que v ***satisfaz uma fórmula*** φ, e escreve-se $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$.
- Diz-se que v ***não satisfaz uma fórmula*** φ, e escreve-se $v \not\models \varphi$, quando $v(\varphi) = 0$.
- Diz-se que v ***satisfaz um conjunto de fórmulas*** Γ, e escreve-se $v \models \Gamma$, quando para todo $\varphi \in \Gamma$ $v(\varphi) = 1$.
- Diz-se que v ***não satisfaz um conjunto de fórmulas*** Γ, e escreve-se $v \not\models \Gamma$, se existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$.

Definição

Seja v uma valoração.

- Diz-se que v ***satisfaz uma fórmula*** φ, e escreve-se $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$.
- Diz-se que v ***não satisfaz uma fórmula*** φ, e escreve-se $v \not\models \varphi$, quando $v(\varphi) = 0$.
- Diz-se que v ***satisfaz um conjunto de fórmulas*** Γ, e escreve-se $v \models \Gamma$, quando para todo $\varphi \in \Gamma$ $v(\varphi) = 1$.
- Diz-se que v ***não satisfaz um conjunto de fórmulas*** Γ, e escreve-se $v \not\models \Gamma$, se existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$.

Definição

Seja v uma valoração.

- Diz-se que v ***satisfaz uma fórmula*** φ, e escreve-se $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$.
- Diz-se que v ***não satisfaz uma fórmula*** φ, e escreve-se $v \not\models \varphi$, quando $v(\varphi) = 0$.
- Diz-se que v ***satisfaz um conjunto de fórmulas*** Γ, e escreve-se $v \models \Gamma$, quando para todo $\varphi \in \Gamma$ $v(\varphi) = 1$.
- Diz-se que v ***não satisfaz um conjunto de fórmulas*** Γ, e escreve-se $v \not\models \Gamma$, se existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$.

Definição

Seja v uma valoração.

- Diz-se que v ***satisfaz uma fórmula*** φ, e escreve-se $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$.
- Diz-se que v ***não satisfaz uma fórmula*** φ, e escreve-se $v \not\models \varphi$, quando $v(\varphi) = 0$.
- Diz-se que v ***satisfaz um conjunto de fórmulas*** Γ, e escreve-se $v \models \Gamma$, quando para todo $\varphi \in \Gamma$ $v(\varphi) = 1$.
- Diz-se que v ***não satisfaz um conjunto de fórmulas*** Γ, e escreve-se $v \not\models \Gamma$, se existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$.

Definição

Seja v uma valoração.

- Diz-se que v ***satisfaz uma fórmula*** φ, e escreve-se $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$.
- Diz-se que v ***não satisfaz uma fórmula*** φ, e escreve-se $v \not\models \varphi$, quando $v(\varphi) = 0$.
- Diz-se que v ***satisfaz um conjunto de fórmulas*** Γ, e escreve-se $v \models \Gamma$, quando para todo $\varphi \in \Gamma$ $v(\varphi) = 1$.
- Diz-se que v ***não satisfaz um conjunto de fórmulas*** Γ, e escreve-se $v \not\models \Gamma$, se existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$.

Exemplos

1) Seja v uma valoração tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$.

   1.1 Então, $v \models \neg p_2 \wedge p_0$ e $v \not\models p_0 \leftrightarrow p_2$.

   1.2 Consideremos os conjuntos
   $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0, \bot \vee p_0\}$ e $\Gamma_2 = \{p_0 \to p_2, \bot \vee p_0\}$.
   Então

   - $v \models \Gamma_1$ pois $v(p_0 \wedge \neg p_2) = v(p_2 \to p_0) = v(\bot \vee p_0) = 1$.
   - $v \not\models \Gamma_2$ já que $v(p_0 \to p_2) = 0$.

2) $v \models \emptyset$ para toda a valoração v.

Exemplos

1) Seja v uma valoração tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$.
   1.1 Então, $v \models \neg p_2 \wedge p_0$ e $v \not\models p_0 \leftrightarrow p_2$.
   1.2 Consideremos os conjuntos $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0, \perp \vee p_0\}$ e $\Gamma_2 = \{p_0 \to p_2, \perp \vee p_0\}$. Então
      - $v \models \Gamma_1$ pois $v(p_0 \wedge \neg p_2) = v(p_2 \to p_0) = v(\perp \vee p_0) = 1$.
      - $v \not\models \Gamma_2$ já que $v(p_0 \to p_2) = 0$.
2) $v \models \emptyset$ para toda a valoração v.

Exemplos

1) Seja v uma valoração tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$.
   1.1 Então, $v \models \neg p_2 \wedge p_0$ e $v \not\models p_0 \leftrightarrow p_2$.
   1.2 Consideremos os conjuntos
   $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0, \perp \vee p_0\}$ e $\Gamma_2 = \{p_0 \to p_2, \perp \vee p_0\}$.
   Então
   - $v \models \Gamma_1$ pois $v(p_0 \wedge \neg p_2) = v(p_2 \to p_0) = v(\perp \vee p_0) = 1$.
   - $v \not\models \Gamma_2$ já que $v(p_0 \to p_2) = 0$.

2) $v \models \emptyset$ para toda a valoração v.

Exemplos

1) Seja v uma valoração tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$.
   1.1 Então, $v \models \neg p_2 \wedge p_0$ e $v \not\models p_0 \leftrightarrow p_2$.
   1.2 Consideremos os conjuntos
   $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0, \perp \vee p_0\}$ e $\Gamma_2 = \{p_0 \to p_2, \perp \vee p_0\}$.
   Então
   - $v \models \Gamma_1$ pois $v(p_0 \wedge \neg p_2) = v(p_2 \to p_0) = v(\perp \vee p_0) = 1$.
   - $v \not\models \Gamma_2$ já que $v(p_0 \to p_2) = 0$.
2) $v \models \emptyset$ para toda a valoração v.

Exemplos

1) Seja v uma valoração tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$.
   1.1 Então, $v \models \neg p_2 \wedge p_0$ e $v \not\models p_0 \leftrightarrow p_2$.
   1.2 Consideremos os conjuntos
   $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0, \bot \vee p_0\}$ e $\Gamma_2 = \{p_0 \to p_2, \bot \vee p_0\}$.
   Então
   - $v \models \Gamma_1$ pois $v(p_0 \wedge \neg p_2) = v(p_2 \to p_0) = v(\bot \vee p_0) = 1$.
   - $v \not\models \Gamma_2$ já que $v(p_0 \to p_2) = 0$.

2) $v \models \emptyset$ para toda a valoração v.

Exemplos

1) Seja v uma valoração tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$.

   1.1 Então, $v \models \neg p_2 \wedge p_0$ e $v \not\models p_0 \leftrightarrow p_2$.

   1.2 Consideremos os conjuntos
   $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0, \bot \vee p_0\}$ e $\Gamma_2 = \{p_0 \to p_2, \bot \vee p_0\}$.
   Então
   - $v \models \Gamma_1$ pois $v(p_0 \wedge \neg p_2) = v(p_2 \to p_0) = v(\bot \vee p_0) = 1$.
   - $v \not\models \Gamma_2$ já que $v(p_0 \to p_2) = 0$.

2) $v \models \emptyset$ para toda a valoração v.

Definição

Um conjunto Γ de fórmulas diz-se:

- ***(semanticamente)* consistente** se existe alguma valoração que o satisfaça.
- ***(semanticamente)* inconsistente** se não é consistente, i.e., se $v \not\models \Gamma$ para toda a valoração v.

Exemplos

1) O conjunto $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \rightarrow p_0, \perp \vee p_0\}$ é consistente pois, como vimos nos exemplos anteriores, Γ_1 é satisfeito por toda a valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$.
2) O conjunto $\Gamma_2 = \{p_0 \rightarrow p_2, \perp \vee p_0\}$ dos exemplos anteriores também é consistente já que Γ_2 é satisfeito por qualquer valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 1$.

Definição

Um conjunto Γ de fórmulas diz-se:

- ***(semanticamente) consistente*** se existe alguma valoração que o satisfaça.
- ***(semanticamente) inconsistente*** se não é consistente, i.e., se $v \not\models \Gamma$ para toda a valoração v.

Exemplos

1) O conjunto $\Gamma_1 = \{p_0 \land \neg p_2, p_2 \to p_0, \perp \lor p_0\}$ é consistente pois, como vimos nos exemplos anteriores, Γ_1 é satisfeito por toda a valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$.
2) O conjunto $\Gamma_2 = \{p_0 \to p_2, \perp \lor p_0\}$ dos exemplos anteriores também é consistente já que Γ_2 é satisfeito por qualquer valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 1$.

Definição

Um conjunto Γ de fórmulas diz-se:

- ***(semanticamente) consistente*** se existe alguma valoração que o satisfaça.
- ***(semanticamente) inconsistente*** se não é consistente, i.e., se $v \not\models \Gamma$ para toda a valoração v.

Exemplos

1) O conjunto $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \rightarrow p_0, \perp \vee p_0\}$ é consistente pois, como vimos nos exemplos anteriores, Γ_1 é satisfeito por toda a valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$.

2) O conjunto $\Gamma_2 = \{p_0 \rightarrow p_2, \perp \vee p_0\}$ dos exemplos anteriores também é consistente já que Γ_2 é satisfeito por qualquer valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 1$.

Definição

Um conjunto Γ de fórmulas diz-se:

- ***(semanticamente) consistente*** se existe alguma valoração que o satisfaça.
- ***(semanticamente) inconsistente*** se não é consistente, i.e., se $v \not\models \Gamma$ para toda a valoração v.

Exemplos

1) O conjunto $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \rightarrow p_0, \perp \vee p_0\}$ é consistente pois, como vimos nos exemplos anteriores, Γ_1 é satisfeito por toda a valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$.
2) O conjunto $\Gamma_2 = \{p_0 \rightarrow p_2, \perp \vee p_0\}$ dos exemplos anteriores também é consistente já que Γ_2 é satisfeito por qualquer valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 1$.

Definição

Um conjunto Γ de fórmulas diz-se:

- ***(semanticamente) consistente*** se existe alguma valoração que o satisfaça.
- ***(semanticamente) inconsistente*** se não é consistente, i.e., se $v \not\models \Gamma$ para toda a valoração v.

Exemplos

1) O conjunto $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_0, \perp \vee p_0\}$ é consistente pois, como vimos nos exemplos anteriores, Γ_1 é satisfeito por toda a valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$.
2) O conjunto $\Gamma_2 = \{p_0 \to p_2, \perp \vee p_0\}$ dos exemplos anteriores também é consistente já que Γ_2 é satisfeito por qualquer valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 1$.

Definição

Um conjunto Γ de fórmulas diz-se:

- ***(semanticamente) consistente*** se existe alguma valoração que o satisfaça.
- ***(semanticamente) inconsistente*** se não é consistente, i.e., se $v \not\models \Gamma$ para toda a valoração v.

Exemplos

1) O conjunto $\Gamma_1 = \{p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \rightarrow p_0, \perp \vee p_0\}$ é consistente pois, como vimos nos exemplos anteriores, Γ_1 é satisfeito por toda a valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 0$.
2) O conjunto $\Gamma_2 = \{p_0 \rightarrow p_2, \perp \vee p_0\}$ dos exemplos anteriores também é consistente já que Γ_2 é satisfeito por qualquer valoração v tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_2) = 1$.

Exemplos

3) O conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \bot, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente. De facto, seja v uma valoração qualquer e suponhamos que $v(p_4 \to \bot) = 1$. Então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$. Portanto, $v \not\models \Gamma_3$ para toda a valoração v.

Proposição

Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas tais que $\Gamma \subseteq \Delta$.

i) Se Δ é consistente, então Γ é consistente.

ii) Se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Demonstração.

É uma consequência imediata da definição de consistência semântica. (Exercício.) □

Exemplos

3) O conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \perp, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente. De facto, seja v uma valoração qualquer e suponhamos que $v(p_4 \to \perp) = 1$. Então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$. Portanto, $v \not\models \Gamma_3$ para toda a valoração v.

Proposição

Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas tais que $\Gamma \subseteq \Delta$.

i) Se Δ é consistente, então Γ é consistente.

ii) Se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Demonstração.

É uma consequência imediata da definição de consistência semântica. (Exercício.) □

Exemplos

3) O conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \bot, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente. De facto, seja v uma valoração qualquer e suponhamos que $v(p_4 \to \bot) = 1$. Então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$. Portanto, $v \not\models \Gamma_3$ para toda a valoração v.

Proposição

Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas tais que $\Gamma \subseteq \Delta$.

i) Se Δ é consistente, então Γ é consistente.

ii) Se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Demonstração.

É uma consequência imediata da definição de consistência semântica. (Exercício.) □

Exemplos

3) O conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \bot, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente. De facto, seja v uma valoração qualquer e suponhamos que $v(p_4 \to \bot) = 1$. Então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$. Portanto, $v \not\models \Gamma_3$ para toda a valoração v.

Proposição

Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas tais que $\Gamma \subseteq \Delta$.

i) Se Δ é consistente, então Γ é consistente.

ii) Se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Demonstração.

É uma consequência imediata da definição de consistência semântica. (Exercício.) $\square$

Exemplos

3) O conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \perp, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente. De facto, seja v uma valoração qualquer e suponhamos que $v(p_4 \to \perp) = 1$. Então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$. Portanto, $v \not\models \Gamma_3$ para toda a valoração v.

Proposição

Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas tais que $\Gamma \subseteq \Delta$.

i) Se Δ é consistente, então Γ é consistente.

ii) Se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Demonstração.

É uma consequência imediata da definição de consistência semântica. (Exercício.) $\square$

Exemplos

3) O conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \bot, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente. De facto, seja v uma valoração qualquer e suponhamos que $v(p_4 \to \bot) = 1$. Então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$. Portanto, $v \not\models \Gamma_3$ para toda a valoração v.

Proposição

Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas tais que $\Gamma \subseteq \Delta$.

i) Se Δ é consistente, então Γ é consistente.

ii) Se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Demonstração.

É uma consequência imediata da definição de consistência semântica. (Exercício.) □

Exemplos

3) O conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \perp, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente. De facto, seja v uma valoração qualquer e suponhamos que $v(p_4 \to \perp) = 1$. Então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$. Portanto, $v \not\models \Gamma_3$ para toda a valoração v.

Proposição

Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas tais que $\Gamma \subseteq \Delta$.

i) Se Δ é consistente, então Γ é consistente.

ii) Se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Demonstração.

É uma consequência imediata da definição de consistência semântica. (Exercício.) □

Exemplos

3) O conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \bot, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente. De facto, seja v uma valoração qualquer e suponhamos que $v(p_4 \to \bot) = 1$. Então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$. Portanto, $v \not\models \Gamma_3$ para toda a valoração v.

Proposição

Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas tais que $\Gamma \subseteq \Delta$.

i) Se Δ é consistente, então Γ é consistente.

ii) Se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Demonstração.

É uma consequência imediata da definição de consistência semântica. (Exercício.) □

Exemplos

3) O conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \bot, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente. De facto, seja v uma valoração qualquer e suponhamos que $v(p_4 \to \bot) = 1$. Então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$. Portanto, $v \not\models \Gamma_3$ para toda a valoração v.

Proposição

Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas tais que $\Gamma \subseteq \Delta$.

i) Se Δ é consistente, então Γ é consistente.

ii) Se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Demonstração.

É uma consequência imediata da definição de consistência semântica. (Exercício.) $\square$

Exemplos

3) O conjunto $\Gamma_3 = \{p_4 \to \perp, p_4 \wedge p_0\}$ é inconsistente. De facto, seja v uma valoração qualquer e suponhamos que $v(p_4 \to \perp) = 1$. Então $v(p_4) = 0$, donde $v(p_4 \wedge p_0) = 0$. Portanto, $v \not\models \Gamma_3$ para toda a valoração v.

Proposição

Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas tais que $\Gamma \subseteq \Delta$.

i) Se Δ é consistente, então Γ é consistente.

ii) Se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Demonstração.

É uma consequência imediata da definição de consistência semântica. (Exercício.) $\square$

Definição

Sejam φ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Diz-se que φ é uma ***consequência semântica*** de Γ, e escreve-se $\Gamma \models \varphi$, quando para toda a valoração v,

se v satisfaz Γ, então v satisfaz φ,

ou seja, se para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.

Notação

Sendo $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas, escreveremos em geral

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

ii) $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

iii) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Definição

Sejam φ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Diz-se que φ é uma ***consequência semântica*** de Γ, e escreve-se $\Gamma \models \varphi$, quando para toda a valoração v,

se v satisfaz Γ, então v satisfaz φ,

ou seja, se para todo $\psi \in \Gamma$ $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.

Notação

Sendo $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas, escreveremos em geral

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

ii) $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

iii) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Definição

Sejam φ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Diz-se que φ é uma ***consequência semântica*** de Γ, e escreve-se $\Gamma \models \varphi$, quando para toda a valoração v,

se v satisfaz Γ, então v satisfaz φ,

ou seja, se para todo $\psi \in \Gamma \quad v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.

Notação

Sendo $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas, escreveremos em geral

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

ii) $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

iii) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Definição

Sejam φ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Diz-se que φ é uma ***consequência semântica*** de Γ, e escreve-se $\Gamma \models \varphi$, quando para toda a valoração v,

se v satisfaz Γ, então v satisfaz φ,

ou seja, se para todo $\psi \in \Gamma \;\; v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.

Notação

Sendo $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas, escreveremos em geral

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

ii) $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

iii) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Definição

Sejam φ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Diz-se que φ é uma ***consequência semântica*** de Γ, e escreve-se $\Gamma \models \varphi$, quando para toda a valoração v,

se v satisfaz Γ, então v satisfaz φ,

ou seja, se para todo $\psi \in \Gamma \;\; v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.

Notação

Sendo $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas, escreveremos em geral

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

ii) $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

iii) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Definição

Sejam φ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Diz-se que φ é uma ***consequência semântica*** de Γ, e escreve-se $\Gamma \models \varphi$, quando para toda a valoração v,

se v satisfaz Γ, então v satisfaz φ,

ou seja, se para todo $\psi \in \Gamma \quad v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.

Notação

Sendo $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas, escreveremos em geral

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

ii) $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

iii) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Definição

Sejam φ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Diz-se que φ é uma ***consequência semântica*** de Γ, e escreve-se $\Gamma \models \varphi$, quando para toda a valoração v,

se v satisfaz Γ, então v satisfaz φ,

ou seja, se para todo $\psi \in \Gamma \;\; v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.

Notação

Sendo $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas, escreveremos em geral

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

ii) $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

iii) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Definição

Sejam φ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Diz-se que φ é uma ***consequência semântica*** de Γ, e escreve-se $\Gamma \models \varphi$, quando para toda a valoração v,

se v satisfaz Γ, então v satisfaz φ,

ou seja, se para todo $\psi \in \Gamma \;\; v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.

Notação

Sendo $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas, escreveremos em geral

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

ii) $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

iii) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Definição

Sejam φ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Diz-se que φ é uma ***consequência semântica*** de Γ, e escreve-se $\Gamma \models \varphi$, quando para toda a valoração v,

se v satisfaz Γ, então v satisfaz φ,

ou seja, se para todo $\psi \in \Gamma \quad v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.

Notação

Sendo $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas, escreveremos em geral

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

ii) $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

iii) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$.

Exemplos

Sejam φ e ψ fórmulas.

1) $\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$.
De facto, para cada valoração v, se $v(\varphi) = v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 1$.

2) $\varphi, \varphi \to \psi \models \psi$.
Basta notar que, para qualquer valoração v, se $v(\varphi) = v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

3) $\varphi \to \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$.

4) $\emptyset \models \varphi \vee \neg\varphi$.

Exemplos

Sejam φ e ψ fórmulas.

1) $\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$.
De facto, para cada valoração v, se $v(\varphi) = v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 1$.

2) $\varphi, \varphi \to \psi \models \psi$.
Basta notar que, para qualquer valoração v, se $v(\varphi) = v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

3) $\varphi \to \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$.

4) $\emptyset \models \varphi \vee \neg\varphi$.

Exemplos

Sejam φ e ψ fórmulas.

1) $\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$.
   De facto, para cada valoração v, se $v(\varphi) = v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 1$.

2) $\varphi, \varphi \to \psi \models \psi$.
   Basta notar que, para qualquer valoração v, se $v(\varphi) = v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

3) $\varphi \to \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$.

4) $\emptyset \models \varphi \vee \neg\varphi$.

Exemplos

Sejam φ e ψ fórmulas.

1) $\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$.
De facto, para cada valoração v, se $v(\varphi) = v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 1$.

2) $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \models \psi$.
Basta notar que, para qualquer valoração v, se $v(\varphi) = v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

3) $\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$.

4) $\emptyset \models \varphi \vee \neg\varphi$.

Exemplos

Sejam φ e ψ fórmulas.

1) $\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$.
   De facto, para cada valoração v, se $v(\varphi) = v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 1$.

2) $\varphi, \varphi \to \psi \models \psi$.
   Basta notar que, para qualquer valoração v, se $v(\varphi) = v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

3) $\varphi \to \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$.

4) $\emptyset \models \varphi \vee \neg\varphi$.

Exemplos

Sejam φ e ψ fórmulas.

1) $\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$.
De facto, para cada valoração v, se $v(\varphi) = v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 1$.

2) $\varphi, \varphi \to \psi \models \psi$.
Basta notar que, para qualquer valoração v, se $v(\varphi) = v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

3) $\varphi \to \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$.

4) $\emptyset \models \varphi \vee \neg\varphi$.

Exemplos

Sejam φ e ψ fórmulas.

1) $\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$.
   De facto, para cada valoração v, se $v(\varphi) = v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 1$.

2) $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \models \psi$.
   Basta notar que, para qualquer valoração v, se $v(\varphi) = v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

3) $\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \models \neg\varphi$.

4) $\emptyset \models \varphi \vee \neg\varphi$.

Consequência semântica

Proposição

Seja φ uma fórmula. Então,

$$\models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \emptyset \models \varphi.$$

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que φ é uma tautologia. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Em particular, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Ou seja, $\emptyset \models \varphi$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Mas toda a valoração satisfaz o conjunto vazio. Logo, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Portanto φ é uma tautologia. □

Consequência semântica

Proposição

Seja φ uma fórmula. Então,

$$\models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \emptyset \models \varphi.$$

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que φ é uma tautologia. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Em particular, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Ou seja, $\emptyset \models \varphi$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Mas toda a valoração satisfaz o conjunto vazio. Logo, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Portanto φ é uma tautologia. $\square$

Proposição

Seja φ uma fórmula. Então,

$$\models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \emptyset \models \varphi.$$

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que φ é uma tautologia. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Em particular, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Ou seja, $\emptyset \models \varphi$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Mas toda a valoração satisfaz o conjunto vazio. Logo, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Portanto φ é uma tautologia. □

Proposição

Seja φ uma fórmula. Então,

$$\models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \emptyset \models \varphi.$$

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que φ é uma tautologia. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Em particular, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Ou seja, $\emptyset \models \varphi$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Mas toda a valoração satisfaz o conjunto vazio. Logo, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Portanto φ é uma tautologia.

Proposição

Seja φ uma fórmula. Então,

$$\models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \emptyset \models \varphi.$$

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que φ é uma tautologia. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Em particular, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Ou seja, $\emptyset \models \varphi$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Mas toda a valoração satisfaz o conjunto vazio. Logo, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Portanto φ é uma tautologia. □

Proposição

Seja φ uma fórmula. Então,

$$\models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \emptyset \models \varphi.$$

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que φ é uma tautologia. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Em particular, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Ou seja, $\emptyset \models \varphi$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Mas toda a valoração satisfaz o conjunto vazio. Logo, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Portanto φ é uma tautologia.

□

Proposição

Seja φ uma fórmula. Então,

$$\models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \emptyset \models \varphi.$$

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que φ é uma tautologia. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Em particular, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Ou seja, $\emptyset \models \varphi$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Mas toda a valoração satisfaz o conjunto vazio. Logo, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Portanto φ é uma tautologia. $\square$

Proposição

Seja φ uma fórmula. Então,

$$\models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \emptyset \models \varphi.$$

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que φ é uma tautologia. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Em particular, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Ou seja, $\emptyset \models \varphi$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Mas toda a valoração satisfaz o conjunto vazio. Logo, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Portanto φ é uma tautologia.

$\square$

Proposição

Seja φ uma fórmula. Então,

$$\models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \emptyset \models \varphi.$$

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que φ é uma tautologia. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Em particular, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Ou seja, $\emptyset \models \varphi$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Mas toda a valoração satisfaz o conjunto vazio. Logo, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Portanto φ é uma tautologia. $\square$

Proposição

Seja φ uma fórmula. Então,

$$\models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \emptyset \models \varphi.$$

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos primeiro que φ é uma tautologia. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Em particular, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Ou seja, $\emptyset \models \varphi$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$. Então $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz $\emptyset$. Mas toda a valoração satisfaz o conjunto vazio. Logo, $v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v. Portanto φ é uma tautologia. $\square$

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

iv) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

v) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício. $\square$

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

iv) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

v) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

iv) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

v) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício. $\square$

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

iv) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

v) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício. □

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

iv) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

v) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício. □

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

iv) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

v) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

iv) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

v) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.
ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.
iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.
iv) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.
v) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

iv) $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

v) Se $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.
ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.
iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.
iv) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.
v) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

iv) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

v) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

iv) $\Gamma \models \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

v) Se $\Gamma \models \varphi \to \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

ii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

iii) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Gamma, \Delta \models \psi$.

iv) $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \models \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

v) Se $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Demonstração.

i) Consideremos $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que $v \models \Gamma$. Então, $v(\sigma) = 1$ para toda a fórmula $\sigma \in \Gamma$. Em particular, dado que $\varphi \in \Gamma$ por hipótese, tem-se $v(\varphi) = 1$. Portanto $\Gamma \models \varphi$.

ii)-v) Exercício. $\square$

Proposição

Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$.

ii) $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$.

iii) $\models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi$.

Demonstração.

"*ii*) $\iff$ *iii*)" é um caso particular da alínea iv) do resultado anterior.

"*i*) $\iff$ *ii*)" é um caso particular da equivalência

$$\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$$

onde Γ é um conjunto qualquer de fórmulas. Esta equivalência pode ser demonstrada por indução sobre n (exercício). $\square$

Proposição

Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$.

ii) $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$.

iii) $\models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$.

Demonstração.

"*ii*) $\Longleftrightarrow$ *iii*)" é um caso particular da alínea iv) do resultado anterior.

"*i*) $\Longleftrightarrow$ *ii*)" é um caso particular da equivalência

$$\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$$

onde Γ é um conjunto qualquer de fórmulas. Esta equivalência pode ser demonstrada por indução sobre n (exercício). $\square$

Proposição

Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$.

ii) $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$.

iii) $\models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi$.

Demonstração.

"*ii*) $\Longleftrightarrow$ *iii*)" é um caso particular da alínea iv) do resultado anterior.

"*i*) $\Longleftrightarrow$ *ii*)" é um caso particular da equivalência

$$\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$$

onde Γ é um conjunto qualquer de fórmulas. Esta equivalência pode ser demonstrada por indução sobre n (exercício). □

Proposição

Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$.

ii) $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$.

iii) $\models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi$.

Demonstração.

"*ii*) $\Longleftrightarrow$ *iii*)" é um caso particular da alínea iv) do resultado anterior.

"*i*) $\Longleftrightarrow$ *ii*)" é um caso particular da equivalência

$$\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$$

onde Γ é um conjunto qualquer de fórmulas. Esta equivalência pode ser demonstrada por indução sobre n (exercício).

Proposição

Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$.

ii) $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$.

iii) $\models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$.

Demonstração.

"*ii*) $\iff$ *iii*)" é um caso particular da alínea iv) do resultado anterior.

"*i*) $\iff$ *ii*)" é um caso particular da equivalência

$$\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$$

onde Γ é um conjunto qualquer de fórmulas. Esta equivalência pode ser demonstrada por indução sobre *n* (exercício). □

Proposição

Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$.
ii) $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$.
iii) $\models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$.

Demonstração.

"*ii*) $\Longleftrightarrow$ *iii*)" é um caso particular da alínea iv) do resultado anterior.

"*i*) $\Longleftrightarrow$ *ii*)" é um caso particular da equivalência

$$\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$$

onde Γ é um conjunto qualquer de fórmulas. Esta equivalência pode ser demonstrada por indução sobre n (exercício). □

Proposição

Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$.

ii) $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$.

iii) $\models (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \varphi$.

Demonstração.

"*ii*) $\iff$ *iii*)" é um caso particular da alínea iv) do resultado anterior.

"*i*) $\iff$ *ii*)" é um caso particular da equivalência

$$\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \quad \text{se e só se} \quad \Gamma, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \varphi$$

onde Γ é um conjunto qualquer de fórmulas. Esta equivalência pode ser demonstrada por indução sobre n (exercício). $\square$

Proposição (Redução ao Absurdo)

Seja φ uma fórmula e seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma \models \varphi$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, ou seja, que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, $v \models \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$, donde $v(\varphi) = 0$. Por hipótese $\Gamma \models \varphi$. Logo, dado que $v \models \Gamma$, pode-se concluir que $v(\varphi) = 1$. Tem-se portanto simultaneamente $v(\varphi) = 0$ e $v(\varphi) = 1$, o que é um absurdo, pois v é uma função. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ tem que ser semanticamente inconsistente.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente. Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $v(\neg\varphi) = 1$ e $v \models \Gamma$, donde $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. □

Proposição (Redução ao Absurdo)

Seja φ uma fórmula e seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma \models \varphi$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, ou seja, que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, $v \models \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$, donde $v(\varphi) = 0$. Por hipótese $\Gamma \models \varphi$. Logo, dado que $v \models \Gamma$, pode-se concluir que $v(\varphi) = 1$. Tem-se portanto simultaneamente $v(\varphi) = 0$ e $v(\varphi) = 1$, o que é um absurdo, pois v é uma função. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ tem que ser semanticamente inconsistente.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente. Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $v(\neg\varphi) = 1$ e $v \models \Gamma$, donde $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. □

Proposição (Redução ao Absurdo)

Seja φ uma fórmula e seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma \models \varphi$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, ou seja, que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, $v \models \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$, donde $v(\varphi) = 0$. Por hipótese $\Gamma \models \varphi$. Logo, dado que $v \models \Gamma$, pode-se concluir que $v(\varphi) = 1$. Tem-se portanto simultaneamente $v(\varphi) = 0$ e $v(\varphi) = 1$, o que é um absurdo, pois v é uma função. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ tem que ser semanticamente inconsistente.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente. Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $v(\neg\varphi) = 1$ e $v \models \Gamma$, donde $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. $\square$

Proposição (Redução ao Absurdo)

Seja φ uma fórmula e seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma \models \varphi$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, ou seja, que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, $v \models \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$, donde $v(\varphi) = 0$. Por hipótese $\Gamma \models \varphi$. Logo, dado que $v \models \Gamma$, pode-se concluir que $v(\varphi) = 1$. Tem-se portanto simultaneamente $v(\varphi) = 0$ e $v(\varphi) = 1$, o que é um absurdo, pois v é uma função. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ tem que ser semanticamente inconsistente.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente. Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $v(\neg\varphi) = 1$ e $v \models \Gamma$, donde $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. $\square$

Proposição (Redução ao Absurdo)

Seja φ uma fórmula e seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma \models \varphi$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, ou seja, que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, $v \models \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$, donde $v(\varphi) = 0$. Por hipótese $\Gamma \models \varphi$. Logo, dado que $v \models \Gamma$, pode-se concluir que $v(\varphi) = 1$. Tem-se portanto simultaneamente $v(\varphi) = 0$ e $v(\varphi) = 1$, o que é um absurdo, pois v é uma função. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ tem que ser semanticamente inconsistente.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente. Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $v(\neg\varphi) = 1$ e $v \models \Gamma$, donde $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. □

Proposição (Redução ao Absurdo)

Seja φ uma fórmula e seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma \models \varphi$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, ou seja, que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, $v \models \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$, donde $v(\varphi) = 0$. Por hipótese $\Gamma \models \varphi$. Logo, dado que $v \models \Gamma$, pode-se concluir que $v(\varphi) = 1$. Tem-se portanto simultaneamente $v(\varphi) = 0$ e $v(\varphi) = 1$, o que é um absurdo, pois v é uma função. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ tem que ser semanticamente inconsistente.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente. Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $v(\neg\varphi) = 1$ e $v \models \Gamma$, donde $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. □

Proposição (Redução ao Absurdo)

Seja φ uma fórmula e seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma \models \varphi$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, ou seja, que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, $v \models \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$, donde $v(\varphi) = 0$. Por hipótese $\Gamma \models \varphi$. Logo, dado que $v \models \Gamma$, pode-se concluir que $v(\varphi) = 1$. Tem-se portanto simultaneamente $v(\varphi) = 0$ e $v(\varphi) = 1$, o que é um absurdo, pois v é uma função. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ tem que ser semanticamente inconsistente.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente. Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $v(\neg\varphi) = 1$ e $v \models \Gamma$, donde $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. □

Proposição (Redução ao Absurdo)

Seja φ uma fórmula e seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma \models \varphi$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, ou seja, que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, $v \models \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$, donde $v(\varphi) = 0$. Por hipótese $\Gamma \models \varphi$. Logo, dado que $v \models \Gamma$, pode-se concluir que $v(\varphi) = 1$. Tem-se portanto simultaneamente $v(\varphi) = 0$ e $v(\varphi) = 1$, o que é um absurdo, pois v é uma função. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ tem que ser semanticamente inconsistente.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente. Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $v(\neg\varphi) = 1$ e $v \models \Gamma$, donde $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. $\square$

Proposição (Redução ao Absurdo)

Seja φ uma fórmula e seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma \models \varphi$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, ou seja, que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, $v \models \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$, donde $v(\varphi) = 0$. Por hipótese $\Gamma \models \varphi$. Logo, dado que $v \models \Gamma$, pode-se concluir que $v(\varphi) = 1$. Tem-se portanto simultaneamente $v(\varphi) = 0$ e $v(\varphi) = 1$, o que é um absurdo, pois v é uma função. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ tem que ser semanticamente inconsistente.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente. Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $v(\neg\varphi) = 1$ e $v \models \Gamma$, donde $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. □

Proposição (Redução ao Absurdo)

Seja φ uma fórmula e seja Γ um conjunto de fórmulas. Então, $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Demonstração.

"$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma \models \varphi$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, ou seja, que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, $v \models \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$, donde $v(\varphi) = 0$. Por hipótese $\Gamma \models \varphi$. Logo, dado que $v \models \Gamma$, pode-se concluir que $v(\varphi) = 1$. Tem-se portanto simultaneamente $v(\varphi) = 0$ e $v(\varphi) = 1$, o que é um absurdo, pois v é uma função. Logo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ tem que ser semanticamente inconsistente.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente. Seja v uma valoração que satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $v(\neg\varphi) = 1$ e $v \models \Gamma$, donde $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. $\square$

Até aqui olhamos a lógica de um ponto de vista semântico: "a lógica proposicional é baseada em tabelas de verdade".

Outro ponto de vista: podemos pensar na lógica como "uma codificação (exacta) do raciocínio". Neste caso deve estar próxima da prática de fazer inferências. Ou seja, de derivar conclusões a partir de premissas.

Até aqui olhamos a lógica de um ponto de vista semântico: "a lógica proposicional é baseada em tabelas de verdade".

Outro ponto de vista: podemos pensar na lógica como "uma codificação (exacta) do raciocínio". Neste caso deve estar próxima da prática de fazer inferências. Ou seja, de derivar conclusões a partir de premissas.

Até aqui olhamos a lógica de um ponto de vista semântico: "a lógica proposicional é baseada em tabelas de verdade".

Outro ponto de vista: podemos pensar na lógica como "uma codificação (exacta) do raciocínio". Neste caso deve estar próxima da prática de fazer inferências. Ou seja, de derivar conclusões a partir de premissas.

Exemplos de regras de inferência

Sejam φ e ψ fórmulas.

1) "*De* φ *e* $\varphi \to \psi$ *conclui-se* ψ", pode-se escrever como

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E$$

Neste exemplo "*eliminou-se*" a implicação.

2) "*De* φ *e* ψ *conclui-se* $\varphi \wedge \psi$", pode ser denotado por

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

Neste caso "*introduziu-se*" a conjunção.

Exemplos de regras de inferência

Sejam φ e ψ fórmulas.

1) "*De* φ e $\varphi \to \psi$ *conclui-se* ψ", pode-se escrever como

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E$$

Neste exemplo "*eliminou-se*" a implicação.

2) "*De* φ e ψ *conclui-se* $\varphi \wedge \psi$", pode ser denotado por

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

Neste caso "*introduziu-se*" a conjunção.

Exemplos de regras de inferência

Sejam φ e ψ fórmulas.

1) "*De* φ *e* $\varphi \rightarrow \psi$ *conclui-se* ψ", pode-se escrever como

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow E$$

Neste exemplo "*eliminou-se*" a implicação.

2) "*De* φ *e* ψ *conclui-se* $\varphi \wedge \psi$", pode ser denotado por

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

Neste caso "*introduziu-se*" a conjunção.

Exemplos de regras de inferência

Sejam φ e ψ fórmulas.

1) "*De* φ *e* $\varphi \to \psi$ *conclui-se* ψ", pode-se escrever como

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E$$

Neste exemplo "*eliminou-se*" a implicação.

2) "*De* φ *e* ψ *conclui-se* $\varphi \wedge \psi$", pode ser denotado por

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

Neste caso "*introduziu-se*" a conjunção.

Exemplos de regras de inferência

Sejam φ e ψ fórmulas.

1) "*De* φ *e* $\varphi \rightarrow \psi$ *conclui-se* ψ", pode-se escrever como

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow E$$

Neste exemplo "*eliminou-se*" a implicação.

2) "*De* φ *e* ψ *conclui-se* $\varphi \wedge \psi$", pode ser denotado por

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

Neste caso "*introduziu-se*" a conjunção.

Exemplos de regras de inferência

Sejam φ e ψ fórmulas.

1) "*De* φ *e* $\varphi \rightarrow \psi$ *conclui-se* ψ", pode-se escrever como

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow E$$

Neste exemplo "*eliminou-se*" a implicação.

2) "*De* φ *e* ψ *conclui-se* $\varphi \wedge \psi$", pode ser denotado por

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

Neste caso "*introduziu-se*" a conjunção.

Exemplos de regras de inferência (continuação)

"*Se assumindo como hipótese φ se pode concluir ψ, então podemos de seguida concluir $\varphi \to \psi$ e esta nova conclusão não depende da hipótese temporária φ.*"

Esta inferência escrever-se-á do seguinte modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\;{\to}I$$

onde a notação $\vdots$ representa a combinação de inferências que permite concluir ψ a partir de φ.

Diremos que esta inferência efectua a "*introdução da implicação*".

Exemplos de regras de inferência (continuação)

"*Se assumindo como hipótese* φ *se pode concluir* ψ, *então podemos de seguida concluir* $\varphi \to \psi$ *e esta nova conclusão não depende da hipótese temporária* φ*.* "

Esta inferência escrever-se-á do seguinte modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ \to I$$

onde a notação $\vdots$ representa a combinação de inferências que permite concluir ψ a partir de φ.

Diremos que esta inferência efectua a "*introdução da implicação*".

Exemplos de regras de inferência (continuação)

"*Se assumindo como hipótese* φ *se pode concluir* ψ*, então podemos de seguida concluir* $\varphi \to \psi$ *e esta nova conclusão não depende da hipótese temporária* φ. "

Esta inferência escrever-se-á do seguinte modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ {\to}I$$

onde a notação $\vdots$ representa a combinação de inferências que permite concluir ψ a partir de φ.

Diremos que esta inferência efectua a "*introdução da implicação*".

Exemplos de regras de inferência (continuação)

"*Se assumindo como hipótese φ se pode concluir ψ, então podemos de seguida concluir $\varphi \to \psi$ e esta nova conclusão não depende da hipótese temporária φ.* "

Esta inferência escrever-se-á do seguinte modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ \to I$$

onde a notação $\vdots$ representa a combinação de inferências que permite concluir ψ a partir de φ.

Diremos que esta inferência efectua a "*introdução da implicação*".

Exemplos de regras de inferência (continuação)

"*Se assumindo como hipótese φ se pode concluir ψ, então podemos de seguida concluir $\varphi \to \psi$ e esta nova conclusão não depende da hipótese temporária φ.*"

Esta inferência escrever-se-á do seguinte modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ \to I$$

onde a notação $\vdots$ representa a combinação de inferências que permite concluir ψ a partir de φ.

Diremos que esta inferência efectua a "*introdução da implicação*".

Definição (Regras de Inferência)

As regras de inferência do sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional (DNP) são as seguintes:

Regras de **I***ntrodução* *Regras de* **E***liminação*

Definição (Regras de Inferência)

As regras de inferência do sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional (DNP) são as seguintes:

Regras de **I***ntrodução*

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

Regras de **E***liminação*

Definição (Regras de Inferência)

As regras de inferência do sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional (DNP) são as seguintes:

Regras de ***I****ntrodução*

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

Regras de ***E****liminação*

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge_1 E$$

Definição (Regras de Inferência)

As regras de inferência do sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional (DNP) são as seguintes:

Regras de **I***ntrodução*

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

Regras de **E***liminação*

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge_1 E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge_2 E$$

Definição (Regras de Inferência)

As regras de inferência do sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional (DNP) são as seguintes:

Regras de **I***ntrodução*

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

Regras de **E***liminação*

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge_1 E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge_2 E$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow E$$

Definição (Regras de Inferência)

As regras de inferência do sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional (DNP) são as seguintes:

Regras de **I***ntrodução*

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge I$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ {\to} I$$

Regras de **E***liminação*

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \wedge_1 E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge_2 E$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ {\to} E$$

Definição (Regras de Inferência)

As regras de inferência do sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional (DNP) são as seguintes:

Regras de ***I****ntrodução*

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi} \neg I$$

Regras de ***E****liminação*

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge_1 E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge_2 E$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E$$

Definição (Regras de Inferência)

As regras de inferência do sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo Proposicional (DNP) são as seguintes:

Regras de **I***ntrodução*

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge I$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\ \rightarrow I$$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\neg\varphi}\ \neg I$$

Regras de **E***liminação*

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \wedge_1 E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge_2 E$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}\ \rightarrow E$$

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}\ \neg E$$

Definição (continuação)

Regras de **I***ntrodução* *Regras de* **E***liminação*

Definição (continuação)

Regras de **I***ntrodução*

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee_1 I$$

Regras de **E***liminação*

Definição (continuação)

*Regras de **I**ntrodução* *Regras de **E**liminação*

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee_1 I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee_2 I$$

Definição (continuação)

Regras de **I***ntrodução*

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \vee_1 I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \vee_2 I$$

Regras de **E***liminação*

$$\frac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \sigma \end{array} \qquad \begin{array}{c} \cancel{\psi} \\ \vdots \\ \sigma \end{array}}{\sigma}\ \vee E$$

Definição (continuação)

Regras de **I***ntrodução*

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee_1 I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee_2 I$$

$$\frac{\begin{array}{cc} \cancel{\varphi} & \cancel{\psi} \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \varphi \end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I$$

Regras de **E***liminação*

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \sigma \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\psi} \\ \vdots \\ \sigma \end{array}}{\sigma} \vee E$$

Definição (continuação)

Regras de **I***ntrodução*

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee_1 I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee_2 I$$

$$\frac{\begin{array}{cc} \cancel{\varphi} & \cancel{\psi} \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \varphi \end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I$$

Regras de **E***liminação*

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \sigma \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\psi} \\ \vdots \\ \sigma \end{array}}{\sigma} \vee E$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi} \leftrightarrow_1 E$$

Definição (continuação)

Regras de **I***ntrodução*

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \vee_1 I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \vee_2 I$$

$$\frac{\begin{array}{cc} \cancel{\varphi} & \cancel{\psi} \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \varphi \end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\ \leftrightarrow I$$

Regras de **E***liminação*

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \sigma \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\psi} \\ \vdots \\ \sigma \end{array}}{\sigma}\ \vee E$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi}\ \leftrightarrow_1 E \qquad \frac{\psi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi}\ \leftrightarrow_2 E$$

Definição (continuação)

Regras de **I***ntrodução*

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \vee_1 I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \vee_2 I$$

$$\frac{\begin{array}{cc} \cancel{\varphi} & \cancel{\psi} \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \varphi \end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\ \leftrightarrow I$$

$$\frac{\perp}{\varphi}\ (\perp)$$

Regras de **E***liminação*

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \sigma \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\psi} \\ \vdots \\ \sigma \end{array}}{\sigma}\ \vee E$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi}\ \leftrightarrow_1 E \qquad \frac{\psi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi}\ \leftrightarrow_2 E$$

Definição (continuação)

Regras de **I***ntrodução*

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \vee_1 I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \vee_2 I$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \cancel{\varphi} & \cancel{\psi} \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \varphi \end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\ \leftrightarrow I$$

$$\frac{\perp}{\varphi}\ (\perp)$$

Regras de **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} & \cancel{\varphi} & \cancel{\psi} \\ & \vdots & \vdots \\ \varphi \vee \psi & \sigma & \sigma \end{array}}{\sigma}\ \vee E$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi}\ \leftrightarrow_1 E \qquad \frac{\psi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi}\ \leftrightarrow_2 E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\neg\varphi} \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi}\ (RAA)$$

Observações

1) Numa regra de inferência, as fórmulas imediatamente acima do traço de inferência são chamadas as premissas da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a conclusão da regra de inferência.

2) As notações dos tipos

$$\begin{array}{c} \rho \\ \vdots \\ \theta \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \cancel{\rho} \\ \vdots \\ \theta \end{array}$$

representam árvores de fórmulas anotadas construídas a partir das regras de inferência, de raiz θ, nas quais ρ ocorre como folha, zero ou mais vezes, sem qualquer anotação ou anotada com um corte, respectivamente.

Observações

1) Numa regra de inferência, as fórmulas imediatamente acima do traço de inferência são chamadas as premissas da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a conclusão da regra de inferência.
2) As notações dos tipos

$$\begin{array}{c} \rho \\ \vdots \\ \theta \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \cancel{\rho} \\ \vdots \\ \theta \end{array}$$

representam árvores de fórmulas anotadas construídas a partir das regras de inferência, de raiz θ, nas quais ρ ocorre como folha, zero ou mais vezes, sem qualquer anotação ou anotada com um corte, respectivamente.

Observações

1) Numa regra de inferência, as fórmulas imediatamente acima do traço de inferência são chamadas as premissas da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a conclusão da regra de inferência.
2) As notações dos tipos

$$\begin{array}{c} \rho \\ \vdots \\ \theta \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \cancel{\rho} \\ \vdots \\ \theta \end{array}$$

representam árvores de fórmulas anotadas construídas a partir das regras de inferência, de raiz θ, nas quais ρ ocorre como folha, zero ou mais vezes, sem qualquer anotação ou anotada com um corte, respectivamente.

Observações

1) Numa regra de inferência, as fórmulas imediatamente acima do traço de inferência são chamadas as premissas da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a conclusão da regra de inferência.
2) As notações dos tipos

$$\begin{array}{c} \rho \\ \vdots \\ \theta \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \not\rho \\ \vdots \\ \theta \end{array}$$

representam árvores de fórmulas anotadas construídas a partir das regras de inferência, de raiz θ, nas quais ρ ocorre como folha, zero ou mais vezes, sem qualquer anotação ou anotada com um corte, respectivamente.

Exemplos

De seguida são apresentadas duas árvores de fórmulas anotadas construídas a partir das regras de inferência de DNP. Sejam φ, ψ e σ fórmulas.

1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\neg\varphi}} \qquad \cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}}{\bot}\,\neg E}{\varphi}\,(RAA)^{(2)}}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,\to I^{(1)}$$

2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\varphi}\,\wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\psi}\,\wedge_2 E \qquad \psi \to (\varphi \to \sigma)}{\varphi \to \sigma}\,\to E}{\sigma}\,\to E}{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}\,\to I^{(1)}$$

Exemplos

De seguida são apresentadas duas árvores de fórmulas anotadas construídas a partir das regras de inferência de DNP. Sejam φ, ψ e σ fórmulas.

1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(2)} \qquad \cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}}{\bot}\,\neg E}{\varphi}\,(RAA)^{(2)}}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,\to I^{(1)}$$

2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\varphi}\,\wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\psi}\,\wedge_2 E \qquad \psi \to (\varphi \to \sigma)}{\varphi \to \sigma}\,\to E}{\sigma}\,\to E}{}}{(\varphi\wedge\psi) \to \sigma}\,\to I^{(1)}$$

Exemplos

De seguida são apresentadas duas árvores de fórmulas anotadas construídas a partir das regras de inferência de DNP. Sejam φ, ψ e σ fórmulas.

1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\neg\varphi}} \qquad \cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}}{\perp}\,\neg E}{\varphi}\,(RAA)^{(2)}}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,\to I^{(1)}$$

2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\varphi}\,\wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\psi}\,\wedge_2 E \qquad \psi \to (\varphi \to \sigma)}{\varphi \to \sigma}\,\to E}{\sigma}\,\to E}{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}\,\to I^{(1)}$$

Definição

O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP (também chamadas deduções ou demonstrações) é o conjunto de árvores de fórmulas (com ou sem anoções de corte) gerado pelo conjunto de regras que contém uma única regra base, que é

$$\frac{}{\varphi \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RB \quad ,$$

representando φ a árvore cujo único nodo é φ, e que contém uma regra indutiva por cada uma das regras de inferência de DNP de tipo semelhante às dos seguintes exemplos: as regras indutivas que correspondem às regras de inferência $\rightarrow I$ e $\rightarrow E$ são, resp.,

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \\ D \\ \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}^{(n)} \\ D \\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\rightarrow I^{(n)} \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\rightarrow I} \qquad \text{e} \qquad \frac{\begin{array}{c}D_1 \\ \varphi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP} \qquad \begin{array}{c}D_2 \\ \varphi \rightarrow \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}D_1 \\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}D_2 \\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi}\rightarrow E \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\rightarrow E}$$

Definição

O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP (também chamadas deduções ou demonstrações) é o conjunto de árvores de fórmulas (com ou sem anoções de corte) gerado pelo conjunto de regras que contém uma única regra base, que é

$$\frac{}{\varphi \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RB\ ,$$

representando φ a árvore cujo único nodo é φ, e que contém uma regra indutiva por cada uma das regras de inferência de DNP de tipo semelhante às dos seguintes exemplos: as regras indutivas que correspondem às regras de inferência $\rightarrow I$ e $\rightarrow E$ são, resp.,

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \\ D \\ \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}^{(n)} \\ D \\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\rightarrow I^{(n)} \ \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\rightarrow I}$$

e

$$\frac{\begin{array}{c}D_1 \\ \varphi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP} \qquad \begin{array}{c}D_2 \\ \varphi \rightarrow \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}D_1 \\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}D_2 \\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi}\rightarrow E \ \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\rightarrow E}$$

Definição

O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP (também chamadas deduções ou demonstrações) é o conjunto de árvores de fórmulas (com ou sem anoções de corte) gerado pelo conjunto de regras que contém uma única regra base, que é

$$\frac{}{\varphi \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RB \ ,$$

representando φ a árvore cujo único nodo é φ, e que contém uma regra indutiva por cada uma das regras de inferência de DNP de tipo semelhante às dos seguintes exemplos: as regras indutivas que correspondem às regras de inferência $\to I$ e $\to E$ são, resp.,

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi\\ D\\ \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}^{(n)}\\ D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to I^{(n)} \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\to I}$$

e

$$\frac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP} \qquad \begin{array}{c}D_2\\ \varphi \to \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}D_2\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}\to E \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\to E}$$

Definição

O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP (também chamadas deduções ou demonstrações) é o conjunto de árvores de fórmulas (com ou sem anoções de corte) gerado pelo conjunto de regras que contém uma única regra base, que é

$$\frac{}{\varphi \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RB\ ,$$

representando φ a árvore cujo único nodo é φ, e que contém uma regra indutiva por cada uma das regras de inferência de DNP de tipo semelhante às dos seguintes exemplos: as regras indutivas que correspondem às regras de inferência $\to I$ e $\to E$ são, resp.,

$$\frac{\begin{matrix}\varphi \\ D \\ \psi\end{matrix} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}^{(n)} \\ D \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ \to I^{(n)} \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\to I}$$

e

$$\frac{\begin{matrix}D_1 \\ \varphi\end{matrix} \in \mathcal{D}^{DNP} \qquad \begin{matrix}D_2 \\ \varphi \to \psi\end{matrix} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{matrix}D_1 \\ \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}D_2 \\ \varphi \to \psi\end{matrix}}{\psi}\ \to E \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\to E}$$

Definição

O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP (também chamadas deduções ou demonstrações) é o conjunto de árvores de fórmulas (com ou sem anoções de corte) gerado pelo conjunto de regras que contém uma única regra base, que é

$$\frac{}{\varphi \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RB\ ,$$

representando φ a árvore cujo único nodo é φ, e que contém uma regra indutiva por cada uma das regras de inferência de DNP de tipo semelhante às dos seguintes exemplos: as regras indutivas que correspondem às regras de inferência $\rightarrow I$ e $\rightarrow E$ são, resp.,

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi\\ D\\ \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}\overset{(n)}{\cancel{\varphi}}\\ D\\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\rightarrow I^{(n)} \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\rightarrow I}$$

e

$$\frac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP} \qquad \begin{array}{c}D_2\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}D_2\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi}\rightarrow E \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\rightarrow E}$$

Definição

O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP (também chamadas deduções ou demonstrações) é o conjunto de árvores de fórmulas (com ou sem anoções de corte) gerado pelo conjunto de regras que contém uma única regra base, que é

$$\frac{}{\varphi \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RB\ ,$$

representando φ a árvore cujo único nodo é φ, e que contém uma regra indutiva por cada uma das regras de inferência de DNP de tipo semelhante às dos seguintes exemplos: as regras indutivas que correspondem às regras de inferência $\rightarrow I$ e $\rightarrow E$ são, resp.,

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi\\ D\\ \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}^{(n)}\\ D\\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\rightarrow I^{(n)} \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\rightarrow I}$$

e

$$\frac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP} \qquad \begin{array}{c}D_2\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}D_2\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi}\rightarrow E \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\rightarrow E}$$

Definição

O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP (também chamadas deduções ou demonstrações) é o conjunto de árvores de fórmulas (com ou sem anoções de corte) gerado pelo conjunto de regras que contém uma única regra base, que é

$$\frac{}{\varphi \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RB\ ,$$

representando φ a árvore cujo único nodo é φ, e que contém uma regra indutiva por cada uma das regras de inferência de DNP de tipo semelhante às dos seguintes exemplos: as regras indutivas que correspondem às regras de inferência $\rightarrow I$ e $\rightarrow E$ são, resp.,

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi\\ D\\ \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}^{(n)}\\ D\\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\rightarrow I^{(n)} \ \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\rightarrow I}$$

e

$$\frac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP} \qquad \begin{array}{c}D_2\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}D_2\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi}\rightarrow E \ \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\rightarrow E}$$

Definição

O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP (também chamadas deduções ou demonstrações) é o conjunto de árvores de fórmulas (com ou sem anoções de corte) gerado pelo conjunto de regras que contém uma única regra base, que é

$$\frac{}{\varphi \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RB\ ,$$

representando φ a árvore cujo único nodo é φ, e que contém uma regra indutiva por cada uma das regras de inferência de DNP de tipo semelhante às dos seguintes exemplos: as regras indutivas que correspondem às regras de inferência $\rightarrow I$ e $\rightarrow E$ são, resp.,

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi\\ D\\ \psi\end{array} \quad \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}^{(n)}\\ D\\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}\rightarrow I^{(n)} \quad \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\rightarrow I}$$

e

$$\frac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP} \qquad \begin{array}{c}D_2\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array} \in \mathcal{D}^{DNP}}{\dfrac{\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}D_2\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi}\rightarrow E \quad \in \mathcal{D}^{DNP}}\ RI_{\rightarrow E}$$

Observação

As notações das formas

$$\begin{array}{c} \\ D' \\ \theta \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} \sigma \\ D' \\ \theta \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \not\sigma \\ D' \\ \theta \end{array}$$

representam derivações D' de raiz θ, sendo, nos dois últimos casos, também assumido que σ ocorre como folha de D', zero ou mais vezes, não anotada ou anotada com um corte, respectivamente.

Exemplo

As duas árvores dos exemplos anteriores são derivações de (DNP).

Sendo $\mathcal{D}^{DNP}$ um conjunto definido indutivamente, existe um teorema de indução estrutural que lhe está associado.

A definição indutiva de $\mathcal{D}^{DNP}$ é determinista, como tal, existe também um teorema de recursão estrutural para $\mathcal{D}^{DNP}$.

Os sub-objectos de uma derivação D são chamados subderivações de D.

Sendo $\mathcal{D}^{DNP}$ um conjunto definido indutivamente, existe um teorema de indução estrutural que lhe está associado.

A definição indutiva de $\mathcal{D}^{DNP}$ é determinista, como tal, existe também um teorema de recursão estrutural para $\mathcal{D}^{DNP}$.

Os sub-objectos de uma derivação D são chamados subderivações de D.

Sendo $\mathcal{D}^{DNP}$ um conjunto definido indutivamente, existe um teorema de indução estrutural que lhe está associado.

A definição indutiva de $\mathcal{D}^{DNP}$ é determinista, como tal, existe também um teorema de recursão estrutural para $\mathcal{D}^{DNP}$.

Os sub-objectos de uma derivação D são chamados subderivações de D.

Exemplo

Recordemos a derivação 1 do exemplo anterior e notémo-la por D_0:

$$D_0 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\neg\varphi}} \qquad \cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}}{\perp}\,\neg E}{\varphi}\,(RAA)^{(2)}}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,\to I^{(1)}$$

D_0 tem as 5 sub-derivações que se seguem, que lidas na ordem descrita, constituem uma sequência de formação de D_0.

1.$\neg\varphi$ 2.$\neg\neg\varphi$

3. $\dfrac{\neg\varphi \qquad \neg\neg\varphi}{\perp}\,\neg E$ 4. $\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\neg\varphi}} \qquad \neg\neg\varphi}{\perp}\,\neg E}{\varphi}\,(RAA)^{(2)}$ 5.D_0

Exercício: construa uma árvore de formação da derivação D_0.

Exemplo

Recordemos a derivação 1 do exemplo anterior e notémo-la por D_0:

$$D_0 \quad = \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(2)} \qquad \cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}}{\perp}\,\neg E}{\varphi}\,(RAA)^{(2)}}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,\to I^{(1)}$$

D_0 tem as 5 sub-derivações que se seguem, que lidas na ordem descrita, constituem uma sequência de formação de D_0.

1. $\neg\varphi$
2. $\neg\neg\varphi$
3. $\dfrac{\neg\varphi \qquad \neg\neg\varphi}{\perp}\,\neg E$
4. $\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(2)} \qquad \neg\neg\varphi}{\perp}\,\neg E}{\varphi}\,(RAA)^{(2)}$
5. D_0

Exercício: construa uma árvore de formação da derivação D_0.

Exemplo

Recordemos a derivação 1 do exemplo anterior e notémo-la por D_0:

$$D_0 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\neg\varphi}} \qquad \cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}}{\perp}\neg E}{\varphi}(RAA)^{(2)}}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\to I^{(1)}$$

D_0 tem as 5 sub-derivações que se seguem, que lidas na ordem descrita, constituem uma sequência de formação de D_0.

1. $\neg\varphi$

2. $\neg\neg\varphi$

3. $\dfrac{\neg\varphi \qquad \neg\neg\varphi}{\perp}\neg E$

4. $\dfrac{\dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\neg\varphi}} \qquad \neg\neg\varphi}{\perp}\neg E}{\varphi}(RAA)^{(2)}$

5. D_0

Exercício: construa uma árvore de formação da derivação D_0.

Definições

Numa derivação D:

- a raiz de D é chamada a conclusão de D;
- as folhas de D são chamadas as hipóteses de D;
- as folhas de D anotadas com um corte são chamadas as hipóteses canceladas (ou cortadas) e as folhas de D sem qualquer anotação são chamadas as hipóteses não canceladas (ou não cortadas) de D.

Exemplo

A derivação D_0 do exemplo anterior tem por conclusão $\neg\neg\varphi \to \varphi$ e as suas hipóteses são $\cancel{\neg\varphi}^{(2)}$ e $\cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}$, estando ambas canceladas.

Definições

Numa derivação D:

- a raiz de D é chamada a conclusão de D;
- as folhas de D são chamadas as hipóteses de D;
- as folhas de D anotadas com um corte são chamadas as hipóteses canceladas (ou cortadas) e as folhas de D sem qualquer anotação são chamadas as hipóteses não canceladas (ou não cortadas) de D.

Exemplo

A derivação D_0 do exemplo anterior tem por conclusão $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ e as suas hipóteses são $\cancel{\neg\varphi}^{(2)}$ e $\cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}$, estando ambas canceladas.

Definições

Numa derivação D:

- a raiz de D é chamada a conclusão de D;
- as folhas de D são chamadas as hipóteses de D;
- as folhas de D anotadas com um corte são chamadas as hipóteses canceladas (ou cortadas) e as folhas de D sem qualquer anotação são chamadas as hipóteses não canceladas (ou não cortadas) de D.

Exemplo

A derivação D_0 do exemplo anterior tem por conclusão $\neg\neg\varphi \to \varphi$ e as suas hipóteses são $\cancel{\neg\varphi}^{(2)}$ e $\neg\cancel{\neg\varphi}^{(1)}$, estando ambas canceladas.

Definições

Numa derivação D:

- a raiz de D é chamada a conclusão de D;
- as folhas de D são chamadas as hipóteses de D;
- as folhas de D anotadas com um corte são chamadas as hipóteses canceladas (ou cortadas) e as folhas de D sem qualquer anotação são chamadas as hipóteses não canceladas (ou não cortadas) de D.

Exemplo

A derivação D_0 do exemplo anterior tem por conclusão $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ e as suas hipóteses são $\cancel{\neg\varphi}^{(2)}$ e $\cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}$, estando ambas canceladas.

Definições

Numa derivação D:

- a raiz de D é chamada a conclusão de D;
- as folhas de D são chamadas as hipóteses de D;
- as folhas de D anotadas com um corte são chamadas as hipóteses canceladas (ou cortadas) e as folhas de D sem qualquer anotação são chamadas as hipóteses não canceladas (ou não cortadas) de D.

Exemplo

A derivação D_0 do exemplo anterior tem por conclusão $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ e as suas hipóteses são $\cancel{\neg\varphi}^{(2)}$ e $\neg\cancel{\neg\varphi}^{(1)}$, estando ambas canceladas.

Definição

Uma fórmula φ diz-se derivável a partir de um conjunto Γ de fórmulas, ou uma consequência sintáctica de Γ, se existir uma derivação D de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses **não canceladas** é um subconjunto de Γ. Em tal caso, escreve-se $\Gamma \vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ a partir de Γ.

Definição

Uma fórmula φ diz-se um teorema de DNP se existir uma derivação D de φ a partir do conjunto vazio de hipóteses não canceladas. Em tal caso, escreve-se $\vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ.

Note-se que, para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Definição

Uma fórmula φ diz-se derivável a partir de um conjunto Γ de fórmulas, ou uma consequência sintáctica de Γ, se existir uma derivação D de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses **não canceladas** é um subconjunto de Γ. Em tal caso, escreve-se $\Gamma \vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ a partir de Γ.

Definição

Uma fórmula φ diz-se um teorema de DNP se existir uma derivação D de φ a partir do conjunto vazio de hipóteses não canceladas. Em tal caso, escreve-se $\vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ.

Note-se que, para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Definição

Uma fórmula φ diz-se derivável a partir de um conjunto Γ de fórmulas, ou uma consequência sintáctica de Γ, se existir uma derivação D de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses **não canceladas** é um subconjunto de Γ. Em tal caso, escreve-se $\Gamma \vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ a partir de Γ.

Definição

Uma fórmula φ diz-se um teorema de DNP se existir uma derivação D de φ a partir do conjunto vazio de hipóteses não canceladas. Em tal caso, escreve-se $\vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ.

Note-se que, para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Definição

Uma fórmula φ diz-se derivável a partir de um conjunto Γ de fórmulas, ou uma consequência sintáctica de Γ, se existir uma derivação D de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses **não canceladas** é um subconjunto de Γ. Em tal caso, escreve-se $\Gamma \vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ a partir de Γ.

Definição

Uma fórmula φ diz-se um teorema de DNP se existir uma derivação D de φ a partir do conjunto vazio de hipóteses não canceladas. Em tal caso, escreve-se $\vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ.

Note-se que, para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Definição

Uma fórmula φ diz-se derivável a partir de um conjunto Γ de fórmulas, ou uma consequência sintáctica de Γ, se existir uma derivação D de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses **não canceladas** é um subconjunto de Γ. Em tal caso, escreve-se $\Gamma \vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ a partir de Γ.

Definição

Uma fórmula φ diz-se um teorema de DNP se existir uma derivação D de φ a partir do conjunto vazio de hipóteses não canceladas. Em tal caso, escreve-se $\vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ.

Note-se que, para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Definição

Uma fórmula φ diz-se derivável a partir de um conjunto Γ de fórmulas, ou uma consequência sintáctica de Γ, se existir uma derivação D de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses **não canceladas** é um subconjunto de Γ. Em tal caso, escreve-se $\Gamma \vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ a partir de Γ.

Definição

Uma fórmula φ diz-se um teorema de DNP se existir uma derivação D de φ a partir do conjunto vazio de hipóteses não canceladas. Em tal caso, escreve-se $\vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ.

Note-se que, para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Definição

Uma fórmula φ diz-se derivável a partir de um conjunto Γ de fórmulas, ou uma consequência sintáctica de Γ, se existir uma derivação D de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses **não canceladas** é um subconjunto de Γ. Em tal caso, escreve-se $\Gamma \vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ a partir de Γ.

Definição

Uma fórmula φ diz-se um teorema de DNP se existir uma derivação D de φ a partir do conjunto vazio de hipóteses não canceladas. Em tal caso, escreve-se $\vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ.

Note-se que, para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Definição

Uma fórmula φ diz-se derivável a partir de um conjunto Γ de fórmulas, ou uma consequência sintáctica de Γ, se existir uma derivação D de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses **não canceladas** é um subconjunto de Γ. Em tal caso, escreve-se $\Gamma \vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ a partir de Γ.

Definição

Uma fórmula φ diz-se um teorema de DNP se existir uma derivação D de φ a partir do conjunto vazio de hipóteses não canceladas. Em tal caso, escreve-se $\vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ.

Note-se que, para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Definição

Uma fórmula φ diz-se derivável a partir de um conjunto Γ de fórmulas, ou uma consequência sintáctica de Γ, se existir uma derivação D de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses **não canceladas** é um subconjunto de Γ. Em tal caso, escreve-se $\Gamma \vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ a partir de Γ.

Definição

Uma fórmula φ diz-se um teorema de DNP se existir uma derivação D de φ a partir do conjunto vazio de hipóteses não canceladas. Em tal caso, escreve-se $\vdash \varphi$ e diz-se que D é uma derivação de φ.

Note-se que, para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Exemplo

Considere-se a derivação *D*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\varphi}\,\wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\psi}\,\wedge_2 E \qquad \psi\to(\varphi\to\sigma)}{\varphi\to\sigma}\,\to E}{\sigma}\,\to E}{(\varphi\wedge\psi)\to\sigma}\,\to I^{(1)}$$

.

- o conjunto de hipóteses é $\{\varphi\wedge\psi,\ \psi\to(\varphi\to\sigma)\}$;
- o conjunto de hipóteses canceladas é $\{\varphi\wedge\psi\}$;
- o conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\psi\to(\varphi\to\sigma)\}$;
- a conclusão é $(\varphi\wedge\psi)\to\sigma$.

Então, *D* é uma derivação de $(\varphi\wedge\psi)\to\sigma$ a partir de $\{\psi\to(\varphi\to\sigma)\}$, ou seja, $\psi\to(\varphi\to\sigma)\vdash(\varphi\wedge\psi)\to\sigma$.

Exemplo

Considere-se a derivação *D*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\varphi}\,\wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\psi}\,\wedge_2 E \qquad \psi \to (\varphi \to \sigma)}{\varphi \to \sigma}\,{\to}E}{\sigma}\,{\to}E}{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}\,{\to}I^{(1)} \qquad .$$

- o conjunto de hipóteses é $\{\varphi \wedge \psi,\ \psi \to (\varphi \to \sigma)\}$;
- o conjunto de hipóteses canceladas é $\{\varphi \wedge \psi\}$;
- o conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\psi \to (\varphi \to \sigma)\}$;
- a conclusão é $(\varphi \wedge \psi) \to \sigma$.

Então, *D* é uma derivação de $(\varphi \wedge \psi) \to \sigma$ a partir de $\{\psi \to (\varphi \to \sigma)\}$, ou seja, $\psi \to (\varphi \to \sigma) \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \sigma$.

Exemplo

Considere-se a derivação *D*:

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\psi}\wedge_2 E \qquad \psi \to (\varphi \to \sigma)}{\varphi \to \sigma}\to E}{\dfrac{\sigma}{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}\to I^{(1)}}\to E$$

.

- o conjunto de hipóteses é $\{\varphi \wedge \psi,\ \psi \to (\varphi \to \sigma)\}$;
- o conjunto de hipóteses canceladas é $\{\varphi \wedge \psi\}$;
- o conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\psi \to (\varphi \to \sigma)\}$;
- a conclusão é $(\varphi \wedge \psi) \to \sigma$.

Então, *D* é uma derivação de $(\varphi \wedge \psi) \to \sigma$ a partir de $\{\psi \to (\varphi \to \sigma)\}$, ou seja, $\psi \to (\varphi \to \sigma) \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \sigma$.

Exemplo

Considere-se a derivação D:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\psi}\wedge_2 E \qquad \psi \to (\varphi \to \sigma)}{\varphi \to \sigma}\to E}{\sigma}\to E}{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}\to I^{(1)} \quad .$$

- o conjunto de hipóteses é $\{\varphi \wedge \psi,\ \psi \to (\varphi \to \sigma)\}$;
- o conjunto de hipóteses canceladas é $\{\varphi \wedge \psi\}$;
- o conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\psi \to (\varphi \to \sigma)\}$;
- a conclusão é $(\varphi \wedge \psi) \to \sigma$.

Então, D é uma derivação de $(\varphi \wedge \psi) \to \sigma$ a partir de $\{\psi \to (\varphi \to \sigma)\}$, ou seja, $\psi \to (\varphi \to \sigma) \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \sigma$.

Exemplo

Considere-se a derivação *D*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \cancel{\wedge} \psi^{(1)}}{\varphi}\,{\scriptstyle\wedge_1 E} \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi \cancel{\wedge} \psi^{(1)}}{\psi}\,{\scriptstyle\wedge_2 E} \qquad \psi \to (\varphi \to \sigma)}{\varphi \to \sigma}\,{\scriptstyle\to E}}{\sigma}\,{\scriptstyle\to E}}{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}\,{\scriptstyle\to I^{(1)}}$$

.

- o conjunto de hipóteses é $\{\varphi \wedge \psi,\ \psi \to (\varphi \to \sigma)\}$;
- o conjunto de hipóteses canceladas é $\{\varphi \wedge \psi\}$;
- o conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\psi \to (\varphi \to \sigma)\}$;
- a conclusão é $(\varphi \wedge \psi) \to \sigma$.

Então, *D* é uma derivação de $(\varphi \wedge \psi) \to \sigma$ a partir de $\{\psi \to (\varphi \to \sigma)\}$, ou seja, $\psi \to (\varphi \to \sigma) \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \sigma$.

Exemplo

Considere-se a derivação D:

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\psi}\wedge_2 E \qquad \psi \to (\varphi \to \sigma)}{\varphi \to \sigma}\to E}{\dfrac{\sigma}{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}\to I^{(1)}}\to E \quad .$$

- o conjunto de hipóteses é $\{\varphi \wedge \psi,\ \psi \to (\varphi \to \sigma)\}$;
- o conjunto de hipóteses canceladas é $\{\varphi \wedge \psi\}$;
- o conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\psi \to (\varphi \to \sigma)\}$;
- a conclusão é $(\varphi \wedge \psi) \to \sigma$.

Então, D é uma derivação de $(\varphi \wedge \psi) \to \sigma$ a partir de $\{\psi \to (\varphi \to \sigma)\}$, ou seja, $\psi \to (\varphi \to \sigma) \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \sigma$.

Consequência sintáctica

Na representação de consequências sintácticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas. Assim, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, escreveremos:

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$;
ii) $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$;
iii) $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$.

Na representação de consequências sintácticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas. Assim, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, escreveremos:

i) $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
ii) $\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
iii) $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$.

Na representação de consequências sintácticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas. Assim, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, escreveremos:

i) $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
ii) $\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
iii) $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$.

Na representação de consequências sintácticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas. Assim, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, escreveremos:

i) $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
ii) $\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
iii) $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$.

Na representação de consequências sintácticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas. Assim, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, escreveremos:

i) $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
ii) $\Gamma, \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$;
iii) $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

ii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$.

iii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

iv) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \vdash \psi$.

v) Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração

i) Seja $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore de fórmulas com um único nodo, φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ. Assim, por definição de consequência sintáctica, $\Gamma \vdash \varphi$.

ii), iii), v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

ii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$.

iii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

iv) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \vdash \psi$.

v) Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração

i) Seja $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore de fórmulas com um único nodo, φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ. Assim, por definição de consequência sintáctica, $\Gamma \vdash \varphi$.

ii), iii), v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

ii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$.

iii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

iv) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \vdash \psi$.

v) Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração

i) Seja $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore de fórmulas com um único nodo, φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ. Assim, por definição de consequência sintáctica, $\Gamma \vdash \varphi$.

ii), iii), v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

ii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$.

iii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

iv) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \vdash \psi$.

v) Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração

i) Seja $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore de fórmulas com um único nodo, φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ. Assim, por definição de consequência sintáctica, $\Gamma \vdash \varphi$.

ii), iii), v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

ii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$.

iii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

iv) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \vdash \psi$.

v) Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração

i) Seja $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore de fórmulas com um único nodo, φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ. Assim, por definição de consequência sintáctica, $\Gamma \vdash \varphi$.

ii), iii), v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

ii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$.

iii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

iv) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \vdash \psi$.

v) Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração

i) Seja $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore de fórmulas com um único nodo, φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ. Assim, por definição de consequência sintáctica, $\Gamma \vdash \varphi$.

ii), iii), v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

ii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$.

iii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

iv) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \vdash \psi$.

v) Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração

i) Seja $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore de fórmulas com um único nodo, φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ. Assim, por definição de consequência sintáctica, $\Gamma \vdash \varphi$.

ii), iii), v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

ii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$.

iii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

iv) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \vdash \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\varphi \vdash \psi$.

v) Se $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração

i) Seja $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore de fórmulas com um único nodo, φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ. Assim, por definição de consequência sintáctica, $\Gamma \vdash \varphi$.

ii), iii), v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

ii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$.

iii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

iv) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \vdash \psi$.

v) Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração

i) Seja $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore de fórmulas com um único nodo, φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ. Assim, por definição de consequência sintáctica, $\Gamma \vdash \varphi$.

ii), iii), v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

ii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$.

iii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

iv) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \vdash \psi$.

v) Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração

i) Seja $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore de fórmulas com um único nodo, φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ. Assim, por definição de consequência sintáctica, $\Gamma \vdash \varphi$.

ii), iii), v) Exercício.

Proposição

Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

i) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

ii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$.

iii) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

iv) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Em particular, quando $\Gamma = \emptyset$ tem-se, $\emptyset \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \vdash \psi$.

v) Se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Demonstração

i) Seja $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore de fórmulas com um único nodo, φ, é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ. Assim, por definição de consequência sintáctica, $\Gamma \vdash \varphi$.

ii), iii), v) Exercício.

Demonstração (continuação).

iv) “$\Longrightarrow$” Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Então existe uma derivação D de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. Logo,

$$\dfrac{\varphi \qquad \begin{array}{c} D \\ \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E$$

é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

“$\Longleftarrow$” Suponhamos agora que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Então, existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Logo, a derivação

$$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I$$

onde todas as ocorrências de φ (como folha) em D são canceladas, com a aplicação de $\to I$, é uma derivação de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. □

Demonstração (continuação).

iv) "$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Então existe uma derivação D de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. Logo,

$$\dfrac{\varphi \qquad \begin{array}{c} D \\ \varphi \to \psi \end{array}}{\psi}\ {\to}E$$

é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Então, existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Logo, a derivação

$$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi}\ {\to}I$$

onde todas as ocorrências de φ (como folha) em D são canceladas, com a aplicação de $\to I$, é uma derivação de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. □

Demonstração (continuação).

iv) “$\Longrightarrow$” Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Então existe uma derivação D de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. Logo,

$$\dfrac{\varphi \qquad \begin{matrix} D \\ \varphi \to \psi \end{matrix}}{\psi}\to E$$

é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

“$\Longleftarrow$” Suponhamos agora que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Então, existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Logo, a derivação

$$\dfrac{\begin{matrix} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \to \psi}\to I$$

onde todas as ocorrências de φ (como folha) em D são canceladas, com a aplicação de $\to I$, é uma derivação de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ.

Demonstração (continuação).

iv) "$\Longrightarrow$" Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Então existe uma derivação D de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. Logo,

$$\dfrac{\varphi \qquad \begin{array}{c} D \\ \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E$$

é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

"$\Longleftarrow$" Suponhamos agora que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Então, existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Logo, a derivação

$$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I$$

onde todas as ocorrências de φ (como folha) em D são canceladas, com a aplicação de $\to I$, é uma derivação de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. $\square$

Lema

Para toda a derivação D, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Demonstração

A demonstração faz-se por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação de φ a partir de Γ com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, $\Gamma \models \varphi$.

b) Se D é da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ D_1\\ \sigma\end{array}}{\psi \to \sigma}\;{\to}I$$

então $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Aplicando a hipótese de indução à subderivação D_1 de D, vem que $\Gamma, \psi \models \sigma$. Portanto, $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

Lema

Para toda a derivação D, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Demonstração

A demonstração faz-se por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação de φ a partir de Γ com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, $\Gamma \models \varphi$.

b) Se D é da forma

$$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\psi}\\ D_1\\ \sigma\end{matrix}}{\psi \to \sigma}\,\to I$$

então $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Aplicando a hipótese de indução à subderivação D_1 de D, vem que $\Gamma, \psi \models \sigma$. Portanto, $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

Lema

Para toda a derivação D, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Demonstração

A demonstração faz-se por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação de φ a partir de Γ com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, $\Gamma \models \varphi$.

b) Se D é da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ D_1\\ \sigma\end{array}}{\psi \to \sigma}\,\to I$$

então $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Aplicando a hipótese de indução à subderivação D_1 de D, vem que $\Gamma, \psi \models \sigma$. Portanto, $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

Lema

Para toda a derivação D, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Demonstração

A demonstração faz-se por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação de φ a partir de Γ com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, $\Gamma \models \varphi$.

b) Se D é da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ D_1\\ \sigma\end{array}}{\psi \to \sigma}\to I$$

então $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Aplicando a hipótese de indução à subderivação D_1 de D, vem que $\Gamma, \psi \models \sigma$. Portanto, $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

Lema

Para toda a derivação D, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Demonstração

A demonstração faz-se por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação de φ a partir de Γ com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, $\Gamma \models \varphi$.

b) Se D é da forma

$$\cfrac{\begin{array}{c}\cancel{\psi} \\ D_1 \\ \sigma\end{array}}{\psi \to \sigma} \to I$$

então $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Aplicando a hipótese de indução à subderivação D_1 de D, vem que $\Gamma, \psi \models \sigma$. Portanto, $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

Lema

Para toda a derivação D, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Demonstração

A demonstração faz-se por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação de φ a partir de Γ com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, $\Gamma \models \varphi$.

b) Se D é da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ D_1\\ \sigma\end{array}}{\psi \to \sigma}\ {\to}I$$

então $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Aplicando a hipótese de indução à subderivação D_1 de D, vem que $\Gamma, \psi \models \sigma$. Portanto, $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

Lema

Para toda a derivação D, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Demonstração

A demonstração faz-se por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação de φ a partir de Γ com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, $\Gamma \models \varphi$.

b) Se D é da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ D_1\\ \sigma\end{array}}{\psi \to \sigma}\to I$$

então $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Aplicando a hipótese de indução à subderivação D_1 de D, vem que $\Gamma, \psi \models \sigma$. Portanto, $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

Lema

Para toda a derivação D, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Demonstração

A demonstração faz-se por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação de φ a partir de Γ com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, $\Gamma \models \varphi$.

b) Se D é da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ D_1\\ \sigma\end{array}}{\psi \to \sigma}\ \to I$$

então $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Aplicando a hipótese de indução à subderivação D_1 de D, vem que $\Gamma, \psi \models \sigma$. Portanto, $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

Demonstração (continuação).

c) Se D é uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \sigma \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \sigma \to \psi \end{matrix}}{\psi} \to E$$

então: $\varphi = \psi$; D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ e D_2 é uma derivação de $\sigma \to \psi$ a partir de Γ. Assim, aplicando a hipótese de indução a D_1 e a D_2, $\Gamma \models \sigma$ e $\Gamma \models \sigma \to \psi$, respectivamente. Donde, $\Gamma \models \psi$.

d) Os restantes casos, correspondentes às outras formas possíveis de D, são deixados como exercício. $\square$

Demonstração (continuação).

c) Se D é uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \sigma \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \sigma \to \psi \end{matrix}}{\psi} \to E$$

então: $\varphi = \psi$; D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ e D_2 é uma derivação de $\sigma \to \psi$ a partir de Γ. Assim, aplicando a hipótese de indução a D_1 e a D_2, $\Gamma \models \sigma$ e $\Gamma \models \sigma \to \psi$, respectivamente. Donde, $\Gamma \models \psi$.

d) Os restantes casos, correspondentes às outras formas possíveis de D, são deixados como exercício. □

Demonstração (continuação).

c) Se D é uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \sigma \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \sigma \to \psi \end{matrix}}{\psi} \to E$$

então: $\varphi = \psi$; D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ e D_2 é uma derivação de $\sigma \to \psi$ a partir de Γ. Assim, aplicando a hipótese de indução a D_1 e a D_2, $\Gamma \models \sigma$ e $\Gamma \models \sigma \to \psi$, respectivamente. Donde, $\Gamma \models \psi$.

d) Os restantes casos, correspondentes às outras formas possíveis de D, são deixados como exercício.

Demonstração (continuação).

c) Se D é uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \sigma \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \sigma \to \psi \end{matrix}}{\psi} \to E$$

então: $\varphi = \psi$; D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ e D_2 é uma derivação de $\sigma \to \psi$ a partir de Γ. Assim, aplicando a hipótese de indução a D_1 e a D_2, $\Gamma \models \sigma$ e $\Gamma \models \sigma \to \psi$, respectivamente. Donde, $\Gamma \models \psi$.

d) Os restantes casos, correspondentes às outras formas possíveis de D, são deixados como exercício. □

Teorema da Correcção

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ,

se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$.

Demonstração.

Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi$ é válida, *i.e.*, que existe uma derivação D de φ a partir de Γ. Então, aplicando o lema anterior, conclui-se de imediato que $\Gamma \models \varphi$. $\square$

Teorema da Correcção

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ,

se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$.

Demonstração.

Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi$ é válida, *i.e.*, que existe uma derivação D de φ a partir de Γ. Então, aplicando o lema anterior, conclui-se de imediato que $\Gamma \models \varphi$. $\square$

Teorema da Correcção

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ, se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$.

Demonstração.

Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi$ é válida, *i.e.*, que existe uma derivação D de φ a partir de Γ. Então, aplicando o lema anterior, conclui-se de imediato que $\Gamma \models \varphi$. $\square$

Teorema da Completude

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ,

se $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Como consequência dos teoremas da Correcção e da Completude obtém-se o seguinte.

Teorema da Adequação

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ,

$\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma \models \varphi$.

Corolário

Para toda a fórmula φ,

φ é um teorema se e só se φ é uma tautologia.

Teorema da Completude

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ,

se $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Como consequência dos teoremas da Correcção e da Completude obtém-se o seguinte.

Teorema da Adequação

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ,

$\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma \models \varphi$.

Corolário

Para toda a fórmula φ,

φ é um teorema se e só se φ é uma tautologia.

Teorema da Completude

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ, se $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Como consequência dos teoremas da Correcção e da Completude obtém-se o seguinte.

Teorema da Adequação

Para toda a fórmula φ e para todo o conjunto de fórmulas Γ, $\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma \models \varphi$.

Corolário

Para toda a fórmula φ,
φ é um teorema se e só se φ é uma tautologia.