Teorema (de Laplace): Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n. Então,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(M_{kj}) \qquad (1 \leq k \leq n)$$

ou

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} \det(M_{il}) \qquad (1 \leq l \leq n)$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

desenvolvimento ao longo da 2ª coluna

$$\det(A) = (-1)^{1+2} 2 \times \det\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \times 5 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} +$$
$$+ (-1)^{3+2} \times 8 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= -2 \times (4 \times 9 - 7 \times 6) + 5(1 \times 9 - 7 \times 3) - 8(1 \times 6 - 3 \times 4)$$
$$= -2 \times (-6) + 5 \times (-12) - 8 \times (-6) = 12 - 60 + 48$$
$$= 0$$

Propriedades

Teorema: Se D é uma matriz diagonal de ordem n, $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$

então $\det(D) = d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n$.

Consequentemente, $\det(I_n) = 1$.

Teorema: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz triangular de ordem n. Então

$$\det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}$$

Teorema: Seja A uma matriz de ordem n. Então $\det(A^T) = \det(A)$

Teorema: Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz A são nulos então $\det(A) = 0$.

Teorema: Se B resulta de A por multiplicação dos elementos de uma linha ou coluna de A por um número α, então $\det(B) = \alpha \det(A)$.

Teorema: Se A é uma matriz de ordem n, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Teorema: Se B resulta de A por troca de duas linhas ou duas colunas então $\det(B) = -\det(A)$.