Exerc. 2.5: $P_n \to$ conjunto dos polinómios de grau $\leq n$

(i) Sejam p_0 e p_1 elementos de P_n, tais que, $p_0 = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ e $p_1 = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$

$p_0 + p_1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$

$= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n \overset{\text{comutatividade em } \mathbb{R} \text{ (de "+")}}{=} b_0 + a_0 + (b_1 + a_1)x + \dots + (b_n + a_n)x^n$

$= b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = p_1 + p_0$

(ii) Seja também $p_2 = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$. Então,

$(p_0 + p_1) + p_2 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$

$= ((a_0 + b_0) + c_0) + ((a_1 + b_1) + c_1)x + \dots + ((a_n + b_n) + c_n)x^n$

$= (a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1))x + \dots + (a_n + (b_n + c_n))x^n$

assoc. em $\mathbb{R}$ (da "+")

$= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + \dots + (b_n + c_n)x^n$

$= p_0 + (p_1 + p_2)$

(iii) Seja $\underset{\sim}{0} = 0 + 0x + \dots + 0x^n$ o polinómio nulo. Então

$p_0 + \underset{\sim}{0} = a_0 + 0 + (a_1 + 0)x + \dots + (a_n + 0)x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = p_0$

el. neutro da "+" em $\mathbb{R}$

$\underset{\sim}{0} + p_0 = 0 + a_0 + (0 + a_1)x + \dots + (0 + a_n)x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = p_0$

(iv) Seja $-p_0 = -a_0 - a_1 x - \dots - a_n x^n$. Então

$p_0 + (-p_0) = a_0 + (-a_0) + (a_1 + (-a_1))x + \dots + (a_n + (-a_n))x^n$

$= 0 + 0x + \dots + 0x^n = \underset{\sim}{0}$

el.$^{\text{to}}$ simétrico em $\mathbb{R}$ (da "+")

(v) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

$\alpha(p_0 + p_1) = \alpha((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n) =$

$= (\alpha a_0 + \alpha b_0) + (\alpha a_1 + \alpha b_1)x + \dots + (\alpha a_n + \alpha b_n)x^n$

dist. em $\mathbb{R}$

$= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_n x^n + \alpha b_0 + \alpha b_1 x + \dots + \alpha b_n x^n$

$= \alpha p_0 + \alpha p_1$

(vi) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então,

$(\alpha + \beta)p_0 = ((\alpha + \beta)a_0) + ((\alpha + \beta)a_1)x + \dots + ((\alpha + \beta)a_n)x^n$

$= \alpha a_0 + \beta a_0 + (\alpha a_1 + \beta a_1)x + \dots + (\alpha a_n + \beta a_n)x^n = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_n x^n +$
$+ \beta a_0 + \beta a_1 x + \dots + \beta a_n x^n = \alpha p_0 + \beta p_0$

dist. em $\mathbb{R}$