09 Abril, 2006 (Luís S. Barbosa)

NOTAS SOBRE EXPONENCIAIS

Elementos como Funções

Todo o elemento $x \in X$ pode ser visto como uma função $\underline{x} : X \longleftarrow \mathbf{1}$ definida a partir do conjunto singular $\mathbf{1}$. Deste modo a aplicação de uma função a um argumento pode ser expressa através de uma composição de funções:

$$\underline{fx} \;=\; f \cdot \underline{x} \tag{1}$$

Repare-se como tudo aquilo que exprimimos em termos de *aplicação* de uma função passa a poder ser expresso em termos de *composição* de funções. Por exemplo a regra de avaliação da função composta

$$f(gx) \;=\; (f \cdot g)\, x$$

é, de facto, um caso particular da associatividade da composição de funções:

$$\underline{f(gx)} \;=\; f \cdot (\underline{gx}) \;=\; \boxed{f \cdot (g \cdot \underline{x}) \;=\; (f \cdot g) \cdot \underline{x}} \;=\; \underline{(f \cdot g)\, x}$$

É esta a chave para a conversão de raciocínios *pointwise* em *pointfree*.

Funções como Elementos

Dualmente, qualquer função $x : X \longleftarrow Z$ pode ser vista como um 'elemento' de X, que, não sendo dado de uma vez por todas, é dependente de Z. Designamos x por *elemento genérico* de X, sendo Z o seu *universo de definição*. Tal sugere a notação $x \in_Z X$ como alternativa a $x : X \longleftarrow Z$. A composta $f \cdot x$, para $f : Y \longleftarrow X$, pode, então, ser escrita como $f\ x$.

Propriedade Universal

Considere-se o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\overline{f}"'] \\ Y^C \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} X \times C \arrow[d, "\overline{f} \times \mathsf{id}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y^C \times C \arrow[r, "\mathsf{ap}"'] & Y \end{tikzcd}$$

que ilustra a bijecção $f \leftrightsquigarrow \overline{f}$, correspondente ao isomorfismo entre as funções (binárias) de $X \times C$ para Y e as funções (unárias) de X para o conjunto das funções de C para Y. Neste contexto $\overline{f}$ é designada por *curry* de f. Note-se que fazendo $X = \mathbf{1}$ vem $\overline{f} : Y^C \longleftarrow \mathbf{1}$, o que define $\overline{f}$ como um *ponto* de Y^C, correspondendo à intuição que define Y^C como um conjunto de funções. A construção exponencial é caracterizada pela seguinte propriedade universal:

$$k = \overline{f} \quad \Leftrightarrow \quad f = \mathsf{ap} \cdot (k \times \mathsf{id}) \tag{2}$$

donde se deduz

$$\begin{aligned} f &= \mathsf{ap} \cdot (\overline{f} \times \mathsf{id}) && \text{(cancelamento)} && (3)\\ \overline{\mathsf{ap}} &= \mathsf{id}_{X^C} && \text{(reflexão)} && (4)\\ \overline{g} \cdot f &= \overline{g \cdot (f \times \mathsf{id})} && \text{(fusão)} && (5) \end{aligned}$$

Prova. As duas primeiras igualdades são triviais. Para a lei de fusão tem-se

$$\begin{aligned} & \overline{g} \cdot f = \overline{g \cdot (f \times \mathsf{id})} \\ \equiv \quad & \{ \text{ universal (2) } \} \\ & g \cdot (f \times \mathsf{id}) = \mathsf{ap} \cdot (\overline{g} \cdot f \times \mathsf{id}) \\ \equiv \quad & \{ \times \text{ functor } \} \\ & g \cdot (f \times \mathsf{id}) = \mathsf{ap} \cdot (\overline{g} \times \mathsf{id}) \cdot (f \times \mathsf{id}) \\ \equiv \quad & \{ \text{ cancelamento (3) } \} \\ & g \cdot (f \times \mathsf{id}) = g \cdot (f \times \mathsf{id}) \end{aligned}$$

□

O functor $\_^C$

Seja C um conjunto arbitrário, mas fixo. Claramente a construção $\_^C$ aplicada a um conjunto A origina o conjunto A^C. Fará sentido aplica-la a funções?

Seja $f : B \longleftarrow A$. Se $\_^C$ for um functor deverá ser possível definir uma função $f^A : C^B \longleftarrow C^A$. Sabe-se que funções cujo co-domínio é um exponencial podem ser definidas por *currying*. Basta, pois, encontrar ϕ no diagrama seguinte

$$\begin{aligned} h : Y \longleftarrow X \times C &\quad\equiv\quad \overline{h} : Y^C \longleftarrow X \\ \phi : B \longleftarrow A^C \times C &\quad\equiv\quad f^C = \overline{\phi} : B^C \longleftarrow A^C \end{aligned}$$

Uma possibilidade é tomar $\phi = f \cdot \mathsf{ap}$, o que nos conduz à definição

$$f^C \triangleq \overline{f \cdot \mathsf{ap}} \qquad (6)$$

Para que esta construção seja *functorial* é necessário não apenas estar definida uniformemente nos conjuntos e nas funções, como ainda preservar identidades e composição, *i.e.*,

$$\begin{aligned} \mathsf{id}^C &= \mathsf{id} && (7)\\ f^C \cdot g^C &= (f \cdot g)^C && (8) \end{aligned}$$

Prova.

$$
\begin{array}{cl}
 & \mathsf{id}^C \\
= & \quad \{ \text{ definição (6) } \} \\
 & \overline{\mathsf{id} \cdot \mathsf{ap}} \\
= & \quad \{ \text{ identidade } \} \\
 & \overline{\mathsf{ap}} \\
= & \quad \{ \text{ reflexão (4) } \} \\
 & \mathsf{id}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cl}
 & f^C \cdot g^C \\
= & \quad \{ \text{ definição (6) } \} \\
 & \overline{f \cdot \mathsf{ap}} \cdot \overline{g \cdot \mathsf{ap}} \\
= & \quad \{ \text{ fusão (5) } \} \\
 & \overline{f \cdot \mathsf{ap} \cdot (\overline{g \cdot \mathsf{ap}} \times \mathsf{id})} \\
= & \quad \{ \text{ cancelamento (3) } \} \\
 & \overline{f \cdot g \cdot \mathsf{ap}} \\
= & \quad \{ \text{ definição (6) } \} \\
 & (f \cdot g)^C
\end{array}
$$

$\square$

Lei da Absorção

Se A^C representa o conjunto das funções de C para A, a acção da construção $\_^C$ sobre uma função f corresponde à *internalização* da composição com f. Para $g : A \longleftarrow C$ e $c \in C$ vem,

$$
\begin{array}{cl}
 & (f^C \ g) \ c \\
= & \quad \{ \text{ definição (6) } \} \\
 & (\overline{(f \cdot \mathsf{ap})} \ g) \ c \\
= & \quad \{ \text{ uncurrying } \} \\
 & f \cdot \mathsf{ap} \ \langle g, c \rangle \\
= & \quad \{ \text{ composição de funções } \} \\
 & f \ (\mathsf{ap} \ \langle g, c \rangle) \\
= & \quad \{ \text{ definição de } \mathsf{ap} \ \} \\
 & f \ (g \ c) \\
= & \quad \{ \text{ composição de funções } \}
\end{array}
$$

$$(f \cdot g)\ c$$

I.e.,

$$f^C \;=\; f \cdot \_$$

Este mesmo resultado pode ser expresso, de um modo que é independente da categoria dos conjuntos, na linguagem dos *elementos genéricos*. Um elemento genérico do exponencial A^C é uma função $\overline{g} : A^C \longleftarrow T$, que corresponde, como se viu, e de forma única, a $g : A \longleftarrow T \times C$. Recordando que, na linguagem dos elementos genéricos $f^C\ \overline{g}$ corresponde a $f^C \cdot \overline{g}$, este resultado de 'internalização' toma a forma de uma *lei de absorção*:

$$\overline{f \cdot g} \;= f^C \cdot \overline{g} \tag{9}$$

Prova.

$$\begin{array}{cl}
 & f^C \cdot \overline{g} \\
= & \quad \{ \text{ definição (6) } \} \\
 & \overline{f \cdot \mathsf{ap}} \cdot \overline{g} \\
= & \quad \{ \text{ fusão (5) } \} \\
 & \overline{f \cdot \mathsf{ap} \cdot (\overline{g} \times \mathsf{id})} \\
= & \quad \{ \text{ cancelamento (3) } \} \\
 & \overline{f \cdot g}
\end{array}$$

□

Naturalidade de ap e sp

A propriedade natural de ap é expressa pela comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A^C \times C \arrow[r, "f^C \times \mathsf{id}"] \arrow[d, "\mathsf{ap}_A"] & B^C \times C \arrow[d, "\mathsf{ap}_B"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

i.e.,

$$\mathsf{ap} \cdot (f^C \times \mathsf{id}) \;=\; f \cdot \mathsf{ap} \tag{10}$$

Prova.

$$
\begin{array}{ll}
& \mathsf{ap} \cdot (f^C \times \mathsf{id}) \\
= & \quad \{ \text{ definição (6) } \} \\
& \mathsf{ap} \cdot (\overline{f \cdot \mathsf{ap}} \times \mathsf{id}) \\
= & \quad \{ \text{ cancelamento (3) } \} \\
& f \cdot \mathsf{ap}
\end{array}
$$

$\square$

Se a identidade é o *currying* de ap (pela lei da reflexão (4)), o *currying* da identidade origina igualmente uma transformação natural $\mathsf{sp}_X : (X \times C)^C \longleftarrow X$ que actua como um construtor de funções. Em notação *pointwise* temos,

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{ap}\ \langle f, c \rangle & = & f\ c \\
\mathsf{sp}\ x & = & \lambda c.\ \langle x, c \rangle
\end{array}
$$

Ou seja,

$$
\mathsf{sp}_X \;=\; \overline{\mathsf{id}_{X \times C}} \tag{11}
$$

A propriedade natural de sp é expressa pela comutatividade do seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathsf{sp}"] \arrow[d, "f"'] & (A \times C)^C \arrow[d, "(f \times \mathsf{id})^C"] \\
B \arrow[r, "\mathsf{sp}"] & (B \times C)^C
\end{tikzcd}
$$

i.e.,

$$
(f \times \mathsf{id})^C \cdot \mathsf{sp} \;=\; \mathsf{sp} \cdot f \tag{12}
$$

que se verifica por

Prova.

$$
\begin{array}{ll}
& (f \times \mathsf{id})^C \cdot \mathsf{sp} \\
= & \quad \{ \text{ definição (6) } \} \\
& \overline{(f \times \mathsf{id}) \cdot \mathsf{ap}} \cdot \mathsf{sp} \\
= & \quad \{ \text{ fusão (5) } \} \\
& \overline{(f \times \mathsf{id}) \cdot \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{sp} \times \mathsf{id})} \\
= & \quad \{ \; \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{sp} \times \mathsf{id}) = \mathsf{ap} \cdot (\overline{\mathsf{id}} \times \mathsf{id}) = \mathsf{id} \; \} \\
& \overline{f \times \mathsf{id}} \\
= & \quad \{ \text{ identidades } \} \\
& \overline{\mathsf{id} \cdot (f \times \mathsf{id})} \\
= & \quad \{ \text{ fusão (5) } \}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{ll} & \overline{\mathsf{id}} \cdot f \\ = & \quad \{ \text{ definição (12) } \} \\ & \mathsf{sp} \cdot f \end{array}$$

$\square$

O functor C^{-}

Seja C um conjunto arbitrário, mas fixo. Claramente a construção C^{-} aplicada a um conjunto A origina o conjunto C^A. Fará sentido aplica-la a funções? De novo, seja $f : B \longleftarrow A$. Então,

$$\begin{array}{rcl} h : Y \longleftarrow X \times C & \equiv & \overline{h} : Y^C \longleftarrow X \\ \phi : C \longleftarrow C^B \times A & \equiv & C^f = \overline{\phi} : C^A \longleftarrow C^B \end{array}$$

sugere $\phi = \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f)$. Donde

$$C^f \triangleq \overline{\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f)} \tag{13}$$

Note-se que o functor é contravariante. Mostremos que,

$$C^{\mathsf{id}} = \mathsf{id} \tag{14}$$

$$C^g \cdot C^f = C^{f \cdot g} \tag{15}$$

Prova.

$$\begin{array}{ll} & C^g \cdot C^f = C^{f \cdot g} \\ \equiv & \quad \{ \text{ definição (13), } \times\text{-functor } \} \\ & C^g \cdot C^f = \overline{\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f) \cdot (\mathsf{id} \times g)} \\ \equiv & \quad \{ \text{ universal (2) } \} \\ & \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f) \cdot (\mathsf{id} \times g) = \mathsf{ap} \cdot ((C^g \cdot C^f) \times \mathsf{id}) \\ \equiv & \quad \{ \text{ definição (13) } \} \\ & \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f) \cdot (\mathsf{id} \times g) = \mathsf{ap} \cdot ((\overline{\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times g)} \cdot \overline{\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f)}) \times \mathsf{id}) \\ \equiv & \quad \{ \text{ fusão (5) } \} \\ & \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f) \cdot (\mathsf{id} \times g) = \mathsf{ap} \cdot \overline{(\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times g) \cdot (\overline{\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f)}) \times \mathsf{id})} \times \mathsf{id} \\ \equiv & \quad \{ \ \times\text{-functor } \} \\ & \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f) \cdot (\mathsf{id} \times g) = \mathsf{ap} \cdot \overline{(\mathsf{ap} \cdot (\overline{(\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f) \times \mathsf{id})} \cdot (\mathsf{id} \times g))} \times \mathsf{id} \\ \equiv & \quad \{ \text{ cancelamento (3) } \} \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
& \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f) \cdot (\mathsf{id} \times g) \;=\; \mathsf{ap} \cdot (\overline{\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f) \cdot (\mathsf{id} \times g)}) \times \mathsf{id} \\
\equiv & \quad \{ \text{ cancelamento (3) } \} \\
& \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f) \cdot (\mathsf{id} \times g) \;=\; \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f) \cdot (\mathsf{id} \times g)
\end{array}
$$

$\square$

Seja $g : C \longleftarrow A$ e $a \in A$. Calculemos $(C^f\ g)a$:

$$
\begin{array}{ll}
& (C^f\ g)a \\
= & \quad \{ \text{ definição (13) } \} \\
& (\overline{\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f)}\ g)a \\
= & \quad \{ \text{ uncurrying } \} \\
& \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{id} \times f)\ (g, a) \\
= & \quad \{ \text{ definição de } \times \} \\
& \mathsf{ap}\ (g, fa) \\
= & \quad \{ \text{ definição de } \mathsf{ap} \} \\
& g(fa) \\
= & \quad \{ \text{ aplicação da função composta } \} \\
& (g \cdot f)\ a
\end{array}
$$

I.e.,

$$C^f \;=\; \_ \cdot f$$

O Bifunctor Exponencial

Compondo os dois functores que acabamos de caracterizar obetemos um functor em duas variáveis, que é covariante no primeiro argumento e contravariante no segundo. Assim, considere-se $f : D \longleftarrow C$ e $g : B \longleftarrow A$. Define-se

$$f^g : D^A \longleftarrow C^B \tag{16}$$

via

$$
\begin{tikzcd}
 & D^B \arrow[dr, "D^g"] & \\
C^B \arrow[ur, "f^B"] \arrow[rr, "f^g"] \arrow[dr, "C^g"'] & & D^A \\
 & C^A \arrow[ur, "f^A"'] &
\end{tikzcd}
$$

Claramente,

$$f^g \;=\; f \cdot \_ \cdot g$$

Note-se que, como seria de esperar, a functorialidade desta construção decorre da functorialidade dos dois functores que a originam. Assim, e em particular, tem-se

$$\mathsf{id}^{\mathsf{id}} = \mathsf{id} \tag{17}$$

$$f'^{g} \cdot f^{g'} = (f' \cdot f)^{g' \cdot g} \tag{18}$$

Prova. Verifiquemos a segunda igualdade, uma vez que a primeira é trivial. Seja $f : D \longleftarrow C$, $f' : E \longleftarrow D$, $g : B \longleftarrow A$ e $g' : F \longleftarrow B$.

$$\begin{array}{cl}
& f'^{g} \cdot f^{g'} \\
= & \quad \{ \text{ definição do bifuntor } \} \\
& E^{g} \cdot f'^{B} \cdot D^{g'} \cdot f^{F} \\
= & \quad \{ \text{ definição do bifuntor } \} \\
& E^{g} \cdot f'^{B} \cdot f^{B} \cdot C^{g'} \\
= & \quad \{ \text{ (8) } \} \\
& E^{g} \cdot (f' \cdot f)^{B} \cdot C^{g'} \\
= & \quad \{ \text{ definição do bifuntor } \} \\
& E^{g} \cdot E^{g'} \cdot (f' \cdot f)^{B} \\
= & \quad \{ \text{ (15) } \} \\
& E^{g' \cdot g} \cdot (f' \cdot f)^{B} \\
= & \quad \{ \text{ definição do bifuntor } \} \\
& (f' \cdot f)^{g' \cdot g}
\end{array}$$

□

Distributividade

Façamos uma breve incursão na distributividade. Notemos, primeiro que a inversa de dl pode ser definida como

$$\mathsf{dl}^{\circ} = [\iota_1 \times \mathsf{id}, \iota_2 \times \mathsf{id}]$$

ou, por aplicação da lei da troca, como um *split* envolvendo as mesmas funções. Por outro lado dl não tem uma definição pointfree apenas em termos de *eithers* ou *splits*. No entanto, recorrendo ao exponencial, temos

$$(A + B) \times C \xrightarrow{[\iota_1^C \cdot \mathsf{sp}, \iota_2^C \cdot \mathsf{sp}] \times \mathsf{id}} (A \times C + B \times C)^C \times C \xrightarrow{\mathsf{ap}} A \times C + B \times C$$

Verifiquemos a correcção desta definição mostrando que se trata de um isomorfismo. Isto envolve verificar dois factos: $\mathsf{dl}^\circ \cdot \mathsf{dl} = \mathsf{id}$ e $\mathsf{dl} \cdot \mathsf{dl}^\circ = \mathsf{id}$.

Prova. Verifiquemos primeiro

$$
\begin{array}{cl}
 & \mathsf{dl}^\circ \cdot \mathsf{dl} \\
= & \quad \{ \text{ definição } \mathsf{dl} \} \\
 & \mathsf{dl}^\circ \cdot \mathsf{ap} \cdot ([\iota_1^C \cdot \mathsf{sp}, \iota_2^C \cdot \mathsf{sp}] \times \mathsf{id}) \\
= & \quad \{ \ \mathsf{ap} \text{ natural } \} \\
 & \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{dl}^{\circ C} \times \mathsf{id}) \cdot ([\iota_1^C \cdot \mathsf{sp}, \iota_2^C \cdot \mathsf{sp}] \times \mathsf{id}) \\
= & \quad \{ \ \times \text{ functor } \} \\
 & \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{dl}^{\circ C} \cdot [\iota_1^C \cdot \mathsf{sp}, \iota_2^C \cdot \mathsf{sp}] \times \mathsf{id}) \\
= & \quad \{ \ +\text{-fusão, functor } \textit{exponencial} \} \\
 & \mathsf{ap} \cdot [(\mathsf{dl}^\circ \cdot \iota_1)^C \cdot \mathsf{sp}, (\mathsf{dl}^\circ \cdot \iota_2)^C \cdot \mathsf{sp}] \times \mathsf{id} \\
= & \quad \{ \text{ definição } \mathsf{dl}^\circ, +\text{-cancelamento } \} \\
 & \mathsf{ap} \cdot [(\iota_1 \times \mathsf{id})^C \cdot \mathsf{sp}, (\iota_2 \times \mathsf{id})^C \cdot \mathsf{sp}] \times \mathsf{id} \\
= & \quad \{ \ \mathsf{sp} \text{ natural } \} \\
 & \mathsf{ap} \cdot [\mathsf{sp} \cdot \iota_1, \mathsf{sp} \cdot \iota_2] \times \mathsf{id} \\
= & \quad \{ \ + \text{ fusão } \} \\
 & \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{sp} \cdot [\iota_1, \iota_2] \times \mathsf{id}) \\
= & \quad \{ \ + \text{ reflexão } \} \\
 & \mathsf{ap} \cdot (\mathsf{sp} \times \mathsf{id}) \\
= & \quad \{ \text{ definição de } \mathsf{sp} \text{ e cancelamento (3) } \} \\
 & \mathsf{id}_{(A+B)\times C}
\end{array}
$$

e de seguida

$$
\begin{array}{cl}
 & \mathsf{dl} \cdot \mathsf{dl}^\circ \\
= & \quad \{ \ \mathsf{dl} \text{ e definição de } \mathsf{dl}^\circ \} \\
 & \mathsf{ap} \cdot ([\iota_1^C \cdot \mathsf{sp}, \iota_2^C \cdot \mathsf{sp}] \times \mathsf{id}) \cdot [\iota_1 \times \mathsf{id}, \iota_2 \times \mathsf{id}] \\
= & \quad \{ \ +\text{-fusão } \} \\
 & \mathsf{ap} \cdot [([\iota_1^C \cdot \mathsf{sp}, \iota_2^C \cdot \mathsf{sp}] \times \mathsf{id}) \cdot (\iota_1 \times \mathsf{id}), ([\iota_1^C \cdot \mathsf{sp}, \iota_2^C \cdot \mathsf{sp}] \times \mathsf{id}) \cdot (\iota_2 \times \mathsf{id})] \\
= & \quad \{ \ \times \text{ functor e } +\text{-cancelamento } \} \\
 & \mathsf{ap} \cdot [(\iota_1^C \cdot \mathsf{sp}) \times \mathsf{id}, (\iota_2^C \cdot \mathsf{sp}) \times \mathsf{id}] \\
= & \quad \{ \ +\text{-fusão } \} \\
 & [\mathsf{ap} \cdot ((\iota_1^C \cdot \mathsf{sp}) \times \mathsf{id}), \mathsf{ap} \cdot ((\iota_2^C \cdot \mathsf{sp}) \times \mathsf{id})] \\
= & \quad \{ \ \times\text{-functor } \} \\
 & [\mathsf{ap} \cdot (\iota_1^C \times \mathsf{id}) \cdot (\mathsf{sp} \times \mathsf{id}), \mathsf{ap} \cdot (\iota_2^C \times \mathsf{id}) \cdot (\mathsf{sp} \times \mathsf{id})] \\
= & \quad \{ \ \mathsf{ap} \text{ natural, definição de } \mathsf{sp} \text{ e cancelamento (3) } \} \\
 & [\iota_1, \iota_2]
\end{array}
$$

$$= \quad \{ \text{ +-reflexão } \}$$

$$\mathsf{id}_{(A\times C)+(B\times C)}$$

$\square$