Exercício 7. [1 valores] Seja f uma função real, de duas variáveis reais, com derivadas de 2ª ordem contínuas em todo o seu domínio.

Será possível que $f_x(x, y) = x - y$ e $f_y(x, y) = x + y$?

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(x-y) = -1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) = 1$.

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ podemos concluir, pelo teorema de Schwarz que não é possível existir f.

Exercício 8. [2 valores] Calcule a derivada direcional de f definida por $f(x, y, z) = (x + y^2 + z^3)^2$, no ponto de coordenadas $(1, -1, 1)$ e na direção e no sentido do vetor definido por $\vec{e_1} - \vec{e_3}$.

Exercício 9. [1.5+1.5 valores] Seja f definida por $f(x, y) = y^2 - xy + 2x + y + 1$.

a) Encontre os pontos críticos de f.

b) Classifique, usando o teste das segundas derivadas, os pontos críticos de f.
Sugestão: No caso de não ter resolvido a alínea anterior use, para a classificação, o ponto de coordenadas $(5, 2)$.

8) Sendo $f(x,y,z) = (x+y^2+z^3)^2$, tem-se $\nabla f(x,y,z) = (2 \cdot (x+y^2+z^3) \cdot 1,\ 2\cdot(x+y^2+z^3)\cdot 2y,\ 2(x+y^2+z^3) \cdot 3z^2) =$

e, por conseguinte $\nabla f(1,-1,1) = (6,-12,18)$

Ora $\vec{u} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$ é tal que $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e vers $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Donde

$f_{\vec{u}}(1,-1,1) = \nabla f(1,-1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= (6,-12,18) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{6}{\sqrt{2}} - \frac{18}{\sqrt{2}} = -\frac{12}{\sqrt{2}} = -6\sqrt{2}$

---

9) Sendo $f(x,y) = y^2 - xy + 2x + y + 1$, tem-se $\nabla f(x,y) = (-y+2, 2y - x + 1)$

a) e os pontos críticos são tais que $\nabla f = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+2=0 \\ 2y-x+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 \end{cases}$, isto é, há um ponto crítico de coordenadas $(5,2)$

b) $f_{xx}(x,y) = 0$; $f_{xy}(x,y) = -1$; $f_{yy}(x,y) = 2$

Pelo que

$D(5,2) = 0 \times 2 - (-1)^2 = -1 < 0$

Logo $(5,2)$ é um ponto de sela