Vectores próprios de uma matriz associados a valores próprios distintos são linearmente independentes.

## Definição (Matrizes Semelhantes):

Sejam $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ duas matrizes quadradas de ordem $\underline{\underline{n}}$. Se existe uma matriz $\underline{\underline{P}}$ de ordem $\underline{\underline{n}}$, tal que,

$$B = P^{-1} A P$$

então $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ dizem-se <u>matrizes semelhantes</u>.

**Teorema**: Seja $\underline{\underline{A}}$ uma matriz quadrada de ordem $\underline{\underline{n}}$. Seja $\underline{\underline{P}}$ uma matriz invertível de ordem $\underline{\underline{n}}$. Então $\lambda$ é valor próprio de $\underline{\underline{A}}$, sendo $\tilde{x}$ um vector próprio associado, se e só se, $\lambda$ é um valor próprio de $P^{-1}AP$ com vector próprio associado $P^{-1}\tilde{x}$.

Dem.: Como $\underline{\underline{P}}$ é invertível, se $\tilde{x} \neq \tilde{0}$ então $P^{-1}\tilde{x} \neq \tilde{0}$ e vice-versa.

$$A\tilde{x} = \lambda \tilde{x} \Rightarrow P^{-1}A\tilde{x} = P^{-1}\lambda\tilde{x} \Rightarrow P^{-1}A(PP^{-1})\tilde{x} = \lambda P^{-1}\tilde{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}\tilde{x}) = \lambda(P^{-1}\tilde{x})$$

Matrizes semelhantes têm: o mesmo determinante, a mesma característica, a mesma equação característica e os mesmos valores próprios

Ex: Voltando à matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ do exemplo anterior, considere-se

$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem-se que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (verificar!) e

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Como $A$ e $P^{-1}AP$ são matrizes semelhantes, então têm os mesmos valores próprios. Facilmente se vê que os valores próprios de $P^{-1}AP$ são $-2, 2$ e $4$ (matriz diagonal). Logo $-2, 2$ e $4$ também são valores próprios de $A$ (confirma o que já tínhamos obtido anteriormente).