Universidade do Minho — 17 de Junho de 2011

Resolução do 2º Teste de

Lógica EI

Lic. Eng. Informática — Duração: 2 horas

1. (a) Construa derivações em DNP que provem que:
   (i) $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$ é um teorema;
   (ii) $\neg(p_0 \wedge p_1) \vdash (p_0 \to \neg p_1)$.

R: *(i) Um teorema é uma fórmula que admite derivações em DNP sem hipóteses por cancelar. Uma tal derivação de $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$ é:*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}^{(2)}}{p_1}\,E\wedge_2 \qquad \cfrac{\cfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}^{(2)}}{p_0}\,E\wedge_1 \quad \cancel{p_0 \to \neg p_1}^{(1)}}{\neg p_1}\,E\to}{\bot}\,E\neg}{\neg(p_0 \wedge p_1)}\,I\neg^{(2)}}{(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)}\,I\to^{(1)}$$

(ii) É necessário construir uma derivação cuja conclusão seja $p_0 \to \neg p_1$ e cujo conjunto de hipóteses por cancelar seja um subconjunto de $\{\neg(p_0 \wedge p_1)\}$. Uma derivação nestas condições é:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_0 \wedge p_1}\,I\wedge \qquad \neg(p_0 \wedge p_1)}{\bot}\,E\neg}{\neg p_1}\,I\neg^{(2)}}{p_0 \to \neg p_1}\,I\to^{(1)}$$

(b) Seja Γ um conjunto de fórmulas do Cálculo Proposicional. Prove que, se $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$, então $\Gamma \vdash p_0 \to \neg p_1$.

R: *Suponhamos $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$. Então, existe uma derivação $\mathcal{D}$ cuja conclusão é $\neg(p_0 \wedge p_1)$ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ. Assim,*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_0 \wedge p_1}\,I\wedge \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}\\ \neg(p_0 \wedge p_1)\end{matrix}}{\bot}\,E\neg}{\neg p_1}\,I\neg^{(2)}}{p_0 \to \neg p_1}\,I\to^{(1)}$$

é uma derivação cuja conclusão é $p_0 \to \neg p_1$ e conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ, o que prova $\Gamma \vdash p_0 \to \neg p_1$.

Uma resolução alternativa é a que se segue.

Suponhamos $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$. Então, pelo Teorema da Correcção, $\Gamma \models \neg(p_0 \wedge p_1)$. Para provar $\Gamma \vdash p_0 \to \neg p_1$, pelo Teorema da Completude, basta provar $\Gamma \models p_0 \to \neg p_1$. Seja v uma valoração arbitrária que satisfaça Γ. De $\Gamma \models \neg(p_0 \wedge p_1)$, segue que $v(\neg(p_0 \wedge p_1)) = 1$, o que implica que $v(p_0) = 0$ ou $v(p_1) = 0$ e, em ambos os casos, segue que $v(p_0 \to \neg p_1) = 1$. Provamos, assim, que toda a valoração que satisfaz Γ atribui valor 1 a $p_0 \to \neg p_1$, o que prova $\Gamma \models p_0 \to \neg p_1$, como pretendido.

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \mathsf{s}, -\}, \{\mathsf{P}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{s}) = 1$, $\mathcal{N}(-) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(<) = 2$.

(a) Das seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_L$, apresente árvores de formação das que pertencem a $\mathcal{T}_L$ ou $\mathcal{F}_L$, e indique (sem justificar) quais as que não pertencem a nenhum desses conjuntos.
   (i) $\mathsf{s}(x_1) - (x_2 - \mathsf{s}(0))$ (ii) $(x_1 - 0) \vee \mathsf{P}(x_2)$
   (iii) $\exists_{x_2}(\mathsf{P}(x_1) \wedge \forall_{x_1}(x_2 < x_1))$ (iv) $\forall_{x_0}(\mathsf{P}(x_0, 0) \vee (\mathsf{s}(x_0) < 0))$

R: *As palavras das alíneas (ii) e (iv) não pertencem nem a $\mathcal{T}_L$ nem a $\mathcal{F}_L$. A palavra da alínea (i) pertence a $\mathcal{T}_L$ e a da alínea (iii) pertence a $\mathcal{F}_L$. As árvores de formação que justificam esta afirmação são as seguintes:*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{x_1 \in \mathcal{T}_L}\,x_1}{\mathsf{s}(x_1) \in \mathcal{T}_L}\,\mathsf{s} \qquad \cfrac{\cfrac{}{x_2 \in \mathcal{T}_L}\,x_2 \quad \cfrac{\cfrac{}{0 \in \mathcal{T}_L}\,0}{\mathsf{s}(0) \in \mathcal{T}_L}\,\mathsf{s}}{x_2 - \mathsf{s}(0) \in \mathcal{T}_L}\,-}{\mathsf{s}(x_1) - (x_2 - \mathsf{s}(0)) \in \mathcal{T}_L}\,-$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\mathsf{P}(x_1) \in \mathcal{F}_L}\,At_L \qquad \cfrac{\cfrac{}{(x_2 < x_1) \in \mathcal{F}_L}\,At_L}{\forall_{x_1}(x_2 < x_1) \in \mathcal{F}_L}\,\forall_{x_1}}{(\mathsf{P}(x_1) \wedge \forall_{x_1}(x_2 < x_1)) \in \mathcal{F}_L}\,\wedge}{\exists_{x_2}(\mathsf{P}(x_1) \wedge \forall_{x_1}(x_2 < x_1)) \in \mathcal{F}_L}\,\exists_{x_2}$$

(b) Indique (justificando) o conjunto das variáveis substituíveis pelo L-termo $x_2 - \mathsf{s}(x_1)$ na L-fórmula $\forall_{x_1}(\mathsf{P}(x_4) \to \exists_{x_0}\neg(x_0 < x_2 - \mathsf{s}(x_1 - 0)))$.

R: *Sejam t e φ respectivamente o termo e a fórmula dados. O conjunto pedido é $\mathcal{V}\backslash\{x_2, x_4\}$, onde $\mathcal{V}$ é o conjunto de todas as variáveis. Por um lado, quer x_2, quer x_4, têm, em φ, uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall_{x_1}$. Como $x_1 \in VAR(t)$, nem x_2, nem x_4 são substituíveis por t em φ. Por outro lado, nenhuma outra variável tem ocorrências livres em φ. Portanto, qualquer outra variável é substituível por t em φ.*

(c) Defina por recursão estrutural a função $f : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t faz corresponder o número de ocorrências da variável x_{2011} em t.

R: *A função é definida por recursão estrutural do seguinte modo:*

$$\begin{array}{rcll} f(x_i) & = & 1 & \textit{se } i = 2011 \\ f(x_i) & = & 0 & \textit{se } i \neq 2011 \\ f(0) & = & 0 & \\ f(\mathsf{s}(t) & = & f(t) & \textit{para todo } t \in \mathcal{T}_L \\ f(t - t') & = & f(t) + f(t') & \textit{para todo } t, t' \in \mathcal{T}_L \end{array}$$

3. Sejam L o tipo de linguagem da pergunta anterior e $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura tal que $\overline{0}$ é o número *zero*, $\overline{\mathsf{s}}$ e $\overline{-}$ são as operações de *sucessor* e *subtração* em $\mathbb{Z}$, respectivamente, $\overline{\mathsf{P}} = 2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ (ou seja, $\overline{\mathsf{P}}$ é o predicado "é par"), e $\overline{<}$ é a relação "menor do que" em $\mathbb{Z}$.

(a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i$. Calcule:
   (i) $(0 - \mathsf{s}(x_1 - x_8))\,[a]$
   (ii) $(\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))\,[a]$

R: *(i) O valor do L-termo $0 - \mathsf{s}(x_1 - x_8)$ para a atribuição a é o elemento de $\mathbb{Z}$, o domínio de E, obtido pelos seguintes cálculos recursivos:*

$$\begin{aligned} (0 - \mathsf{s}(x_1 - x_8))\,[a] &= 0[a] \mathbin{\overline{-}} \mathsf{s}(x_1 - x_8)[a] \\ &= \overline{0} \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,((x_1 - x_8)[a]) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(x_1[a] \mathbin{\overline{-}} x_8[a]) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(a(x_1) \mathbin{\overline{-}} a(x_8)) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(1 \mathbin{\overline{-}} 8) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(-7) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} (-6) \\ &= 6. \end{aligned}$$

(ii) A L-fórmula $\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0)$ é a conjunção das L-fórmulas $\mathsf{P}(x_2)$ e $\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0)$. Tem-se portanto que

$$(\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))\,[a] = \min\{\mathsf{P}(x_2)[a], (\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a]\}.$$

Ora, por um lado, $\mathsf{P}(x_2)[a] = 1$ se e só se $(x_2)[a] \in \overline{\mathsf{P}}$, se e só se $2 \in \overline{\mathsf{P}}$. Como, de facto, 2 é um elemento do conjunto $\overline{\mathsf{P}}$, deduz-se que $\mathsf{P}(x_2)[a] = 1$.
Por outro lado,

$$\begin{array}{rll} (\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a] = 1 & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } (\mathsf{s}(x_1) < 0)[a\binom{x_1}{n_1}] = 1 \\ & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } \mathsf{s}(x_1)[a\binom{x_1}{n_1}] \mathrel{\overline{<}} 0[a\binom{x_1}{n_1}] \\ & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } \overline{\mathsf{s}}(x_1[a\binom{x_1}{n_1}]) \mathrel{\overline{<}} \overline{0} \\ & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } \overline{\mathsf{s}}(n_1) \mathrel{\overline{<}} 0 \\ & \textit{sse} & \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } n_1 + 1 \mathrel{\overline{<}} 0. \end{array}$$

Dado que esta última afirmação é verdadeira (basta tomar, por exemplo, $n_1 = -2$), conclui-se que $(\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a] = 1$.
Pode-se finalmente deduzir que

$$(\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))\,[a] = \min\{\mathsf{P}(x_2)[a], (\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a]\} = \min\{1, 1\} = 1.$$

(b) Seja $\varphi = \neg\mathsf{P}(x_0 - x_1) \to ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))$. Prove que:
   (i) φ é válida em E;
   (ii) φ não é universalmente válida.

R: *(i) A L-fórmula φ é válida em E, ou seja $E \models \varphi$, se $\varphi[a]_E = 1$ para toda a atribuição a em E. Seja a uma atribuição qualquer em E. Tem-se*

$$\begin{array}{rll} \varphi[a]_E = 1 & \textit{sse} & (\neg\mathsf{P}(x_0 - x_1))[a] = 0 \textit{ ou } ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 1 \\ & \textit{sse} & \mathsf{P}(x_0 - x_1)[a] = 1 \textit{ ou } (x_0 < x_1)[a] = 1 \textit{ ou } (x_1 < x_0)[a] = 1 \\ & \textit{sse} & (x_0 - x_1)[a] \in \overline{\mathsf{P}} \textit{ ou } x_0[a] \mathrel{\overline{<}} x_1[a] \textit{ ou } x_1[a] \mathrel{\overline{<}} x_0[a] \\ & \textit{sse} & a(x_0) \mathbin{\overline{-}} a(x_1) \in \overline{\mathsf{P}} \textit{ ou } a(x_0) \mathrel{\overline{<}} a(x_1) \textit{ ou } a(x_1) \mathrel{\overline{<}} a(x_0). \end{array}$$

Suponhamos que $a(x_0) \mathbin{\overline{-}} a(x_1) \notin \overline{\mathsf{P}}$. Então $a(x_0) \mathbin{\overline{-}} a(x_1) \neq 0$, donde $a(x_0) \neq a(x_1)$. Daqui resulta que $a(x_0) \mathrel{\overline{<}} a(x_1)$ ou $a(x_1) \mathrel{\overline{<}} a(x_0)$ e, portanto, $\varphi[a]_E = 1$. Como a é uma atribuição arbitrária em E conclui-se assim que φ é válida em E.

(ii) Seja $E' = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura em tudo idêntica a E salvo em $\overline{<}$ que é definida como sendo a relação de igualdade em $\mathbb{Z}$. Seja a a atribuição da alínea (a).
Tem-se $(\neg\mathsf{P}(x_0 - x_1))[a] = 1$. De facto $(x_0 - x_1)[a] = -1 \notin \overline{\mathsf{P}}$, donde $\mathsf{P}(x_0 - x_1)[a] = 0$. Verifiquemos, por outro lado, que $((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 0$. De facto, tem-se

$$\begin{array}{rll} ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 0 & \textit{sse} & (x_0 < x_1)[a] = 0 \textit{ e } (x_1 < x_0)[a] = 0 \\ & \textit{sse} & (x_0[a], x_1[a]) \notin \overline{<} \textit{ e } (x_1[a], x_0[a]) \notin \overline{<} \\ & \textit{sse} & (0, 1) \notin \overline{<} \textit{ e } (1, 0) \notin \overline{<} \\ & \textit{sse} & 0 \neq 1 \textit{ e } 1 \neq 0 \end{array}$$

afirmação esta que é, evidentemente, válida. Logo $\varphi[a]_{E'} = 0$ e, portanto, a L-fórmula φ não é válida na L-estrutura E', donde não é universalmente válida.

(c) Indique (justificando) uma L-fórmula universalmente válida.

R: *A fórmula $\psi = \mathsf{P}(x_1) \vee \neg\mathsf{P}(x_1)$ é uma L-fórmula universalmente válida. Para justificar esta afirmação basta notar que ψ é uma instância da fórmula $\varphi = p_0 \vee \neg p_0$ do cálculo proposicional (pois $\psi = \varphi[\mathsf{P}(x_1)/p_0]$) e φ é uma tautologia (como é já sabido).*

(d) Para cada uma das seguintes afirmações, indique (sem justificar) uma L-fórmula que a represente:
   (i) Todo o número é menor do que algum número par.
   (ii) A diferença de quaisquer dois números pares é par.

R: *(i) $\forall_{x_0}\exists_{x_1}(\mathsf{P}(x_1) \wedge (x_0 < x_1))$.*
(ii) $\forall_{x_0}\forall_{x_1}((\mathsf{P}(x_0) \wedge \mathsf{P}(x_1)) \to \mathsf{P}(x_0 - x_1))$.

4. (a) Sejam L, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x arbitrários. Mostre que $\exists_x(\varphi \wedge \psi) \models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi)$.

R: *Sejam $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura e a uma atribuição em E tais que*

$$E \models \exists_x(\varphi \wedge \psi)[a] \qquad (*)$$

Queremos $E \models \exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi[a]$.
De $(*)$ segue que existe $d \in D$ tal que $E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$ e $E \models \psi[a\binom{x}{d}]$. Mas então podemos trivialmente afirmar
(i) existe $d_1 \in D$ (a saber: $d_1 = d$) tal que $E \models \varphi[a\binom{x}{d_1}a]$;
(ii) existe $d_2 \in D$ (a saber: $d_2 = d$) tal que $E \models \psi[a\binom{x}{d_2}]$.
De (i) segue $E \models \exists_x\varphi[a]$ e de (ii) segue $E \models \exists_x\psi[a]$. Logo $E \models \exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi[a]$.

(b) Indique (justificando) L tipo de linguagem, φ e ψ L-fórmulas e x variável tais que $\not\models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi) \to \exists_x(\varphi \wedge \psi)$.

R: *Sejam L o tipo de linguagem da questão 2, $x = x_0$, $\varphi = \mathsf{P}(x_0)$ e $\psi = \neg\mathsf{P}(x_0)$. Vamos exibir uma L-estrutura E e uma atribuição a em E tais que $E \not\models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi) \to \exists_x(\varphi \wedge \psi)[a]$. Tome-se E a estrutura da questão 3 e a atribuição arbitrária. Falta ver que:*
(i) $E \models \exists_{x_0}\varphi[a]$;
(ii) $E \models \exists_{x_0}\psi[a]$;
(iii) $E \not\models \exists_{x_0}(\varphi \wedge \psi)[a]$.
(i) Sejam $d' = 2$ e $a' = a\binom{x_0}{d'}$. Então $E \models \varphi[a']$ pois $x_0[a'] = d'$ e $d' \in \overline{\mathsf{P}}$.
(ii) Sejam $d'' = 1$ e $a'' = a\binom{x_0}{d''}$. Então $E \models \psi[a'']$ pois $x_0[a''] = d''$ e $d'' \notin \overline{\mathsf{P}}$.
(iii) $E \models \exists_{x_0}(\varphi \wedge \psi)[a]$ sse existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0[a\binom{x_0}{d}] \in \overline{\mathsf{P}}$ e $x_0[a\binom{x_0}{d}] \notin \overline{\mathsf{P}}$. Mas $x_0[a\binom{x_0}{d}] = d$ e não se pode ter simultaneamente $d \in \overline{\mathsf{P}}$ e $d \notin \overline{\mathsf{P}}$.

(c) Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x tais que $x \notin LIV(\psi)$. Prove que $(\forall_x\varphi) \to \psi \Leftrightarrow \exists_x(\varphi \to \psi)$. (Sugestão: exiba uma série de equivalências lógicas.)

R:

$$\begin{array}{rcll} (\forall_x\varphi) \to \psi & \Leftrightarrow & \neg\forall_x\varphi \vee \psi & \\ & \Leftrightarrow & \exists_x\neg\varphi \vee \psi & \\ & \Leftrightarrow & \exists_x\neg\varphi \vee \exists x\psi & (x \notin LIV(\psi)) \\ & \Leftrightarrow & \exists_x(\neg\varphi \vee \psi) & \\ & \Leftrightarrow & \exists_x(\varphi \to \psi) & \end{array}$$

Cotações

1.	2.	3.	4.
3+1	1,5+1+1,5	2,5+2+1,5+1,5	1,5+1,5+1,5

Universidade do Minho — 15 de Junho de 2012

2º Teste de

Lógica EI

Lic. Eng. Informática — Duração: 2 horas

Nota: ***Justifique*** *adequadamente cada uma das suas respostas.*

1. (a) Construa derivações em DNP que provem que:
   (i) $(p_0 \wedge \neg p_1) \to \neg(p_0 \to p_1)$ é um teorema;
   (ii) $p_0 \to p_3, \neg p_3 \vee p_1 \vdash p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$.
   (b) Seja Γ um conjunto de fórmulas do Cálculo Proposicional. Prove que, se $\Gamma \models p_0 \to p_3$, então $\Gamma, \neg p_3 \vee p_1 \vdash p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$. [Sugestão: use (a)(ii)]

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \mathsf{q}, +\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{q}) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$.
   (a) Das seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_L$, apresente árvores de formação das que pertencem a $\mathcal{T}_L$ ou $\mathcal{F}_L$, e indique (sem justificar) quais as que não pertencem a nenhum desses conjuntos.
   (i) $(\forall_{x_1}(\mathsf{q}(x_1) \to \mathsf{P}(x_1)))$ (ii) $+(\mathsf{q}(+(0, \mathsf{q}(x_0)), x_3))$
   (iii) $(\exists_{x_0}((\forall_{x_1}\mathsf{P}(x_1)) \vee = (x_0, \mathsf{q}(x_1))))$ (iv) $+(= (0, \mathsf{q}(x_0)), \mathsf{q}(x_1))$
   (b) Indique, justificando, o conjunto das variáveis substituíveis pelo L-termo $(\mathsf{q}(x_1) + x_3) + 0$ na L-fórmula $\mathsf{P}(x_2) \leftrightarrow \exists_{x_1}((x_5 = x_1 + \mathsf{q}(x_2 + 0)) \wedge \forall_{x_0}(\mathsf{P}(x_1 + x_0) = x_3))$.
   (c) Defina por recursão estrutural a função $f : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t faz corresponder o número de ocorrências do símbolo 0 em t.

3. Sejam L o tipo de linguagem da pergunta anterior e $E = (\mathbb{Q}, \overline{})$ a L-estrutura tal que $\overline{0}$ é o número *zero*, $\overline{\mathsf{q}}(n) = n^2$ para cada $n \in \mathbb{Q}$, $\overline{+}$ é a função de *adição* em $\mathbb{Q}$, $\overline{\mathsf{P}} = \mathbb{Q}^+$ (ou seja, $\overline{\mathsf{P}}$ é o predicado "é positivo"), e $\overline{=}$ é a relação de igualdade em $\mathbb{Q}$.
   (a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo o $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i - 3$. Calcule:
   (i) $(\mathsf{q}(0 + x_0) + x_3)\,[a]$
   (ii) $(\mathsf{P}(x_5) \wedge \exists_{x_3}(\mathsf{q}(x_3) = 0 + x_5))\,[a]$
   (b) Seja φ a L-fórmula $\mathsf{P}(\mathsf{q}(x_1)) \to \neg\forall_{x_2}(0 = \mathsf{q}(x_2))$. Prove que:
   (i) φ é válida em E;
   (ii) φ não é universalmente válida.
   (c) Indique, justificando, uma L-fórmula ψ tal que $\psi[a']_{E'} = 0$ para toda a atribuição a' numa qualquer L-estrutura E'.
   (d) Para cada uma das seguintes afirmações, indique (sem justificar) uma L-fórmula que a represente:
   (i) Existe um número cujo quadrado é positivo;
   (ii) O quadrado da soma de quaisquer dois números é não nulo.

4. (a) Sejam L um tipo de linguagem, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x uma variável. Mostre que:
   (i) $\forall_x\varphi \vee \forall_x\psi \models \forall_x(\varphi \vee \psi)$;
   (ii) $\neg\forall_x(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \exists_x(\varphi \wedge \neg\psi)$. [Sugestão: exiba uma série de equivalências lógicas.]
   (b) Indique, justificando, um tipo de linguagem L, uma L-fórmula φ e duas variáveis x e y tais que $\not\models \forall_x\exists_y\varphi \to \exists_y\forall_x\varphi$.

Cotações

1.	2.	3.	4.
3+1	1,5+1+1,5	2,5+2+1,5+1,5	3+1,5

2º Teste de Lógica EI
15 Junho de 2012

1.

(a)
(i) $(p_0 \wedge \neg p_1) \longrightarrow \neg(p_0 \to p_1)$ é um teorema se existe uma derivação desta fórmula sem hipóteses não canceladas.

Ora,

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{p_0 \wedge \neg p_1}^{(1)}}{p_0}\,\wedge_1 E \qquad \cancel{p_0 \to p_1}^{(2)}}{p_1}\,\to E \qquad \cfrac{\cancel{p_0 \wedge \neg p_1}^{(1)}}{\neg p_1}\,\wedge_2 E}{\bot}\,\neg E}{\neg(p_0 \to p_1)}\,\neg I^{(2)}}{(p_0 \wedge \neg p_1) \longrightarrow \neg(p_0 \to p_1)}\,\to I^{(1)}$$

é uma derivação de DNP cuja conclusão é $(p_0 \wedge \neg p_1) \to \neg(p_0 \to p_1)$ sem hipóteses não canceladas.
Assim, $(p_0 \wedge \neg p_1) \to \neg(p_0 \to p_1)$ é um teorema.

OBS: 1) a instância da regra $\to I$ (1) permite-nos cancelar qualquer folha $p_0 \wedge \neg p_1$
2) a instância da regra $\neg I$ (2) permite-nos cancelar qualquer folha $p_0 \longrightarrow p_1$

ii) $p_0 \to p_3$, $\neg p_3 \vee p_1 \vdash p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$ se existir uma derivação de DNP cuja conclusão é $p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$ e cujas hipóteses não canceladas, se existirem, são fórmulas de $T = \{p_0 \to p_3, \neg p_3 \vee p_1\}$.

Temos que

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad p_0 \to p_3}{p_3}\,\to E \qquad \cfrac{\neg p_3 \vee p_1 \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad p_0 \to p_3}{p_3} \quad \cancel{\neg p_3}^{(2)}}{\bot}}{p_1}\,(\bot) \qquad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_1}\,\vee E^{(2)}}{p_3 \wedge p_1}\,\wedge I}{p_0 \to (p_3 \wedge p_1)}\,\to I^{(1)}$$

é uma tal derivação.

b) Admitamos que $T \models p_0 \to p_3$.
Então, se v é uma valoração que satisfaz T também satisfaz $p_0 \to p_3$. (*)
Mostremos que $T, \neg p_3 \vee p_1 \models p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$ (Pelo Teorema da Completude poderemos, assim, afirmar que $T, \neg p_3 \vee p_1 \vdash p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$.)

Seja v uma valoração que satisfaz $T \cup \{\neg p_3 \vee p_1\}$. Então, v satisfaz T e, portanto, v também satisfaz $p_0 \to p_3$ (por (*)).
Por a) ii), usando o Teorema da Correção, sabemos que

$$p_0 \to p_3, \neg p_3 \vee p_1 \models p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$$

Logo, como $v(p_0 \to p_3) = 1$ e $v(\neg p_3 \vee p_1) = 1$, podemos concluir que $v(p_0 \to (p_3 \wedge p_1)) = 1$.
Assim, $T, \neg p_3 \vee p_1 \models p_0 \to (p_3 \wedge p_1)$, o que conclui a prova.

(OBS: poderíamos fazer a prova usando derivações)

2. $L = (\{0, q, +\}, \{P, =\}, \mathcal{N})$
$\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(q) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(P) = 1$, $\mathcal{N}(=) = 2$.

(a)
(i) $(\forall x_1\ (q(x_1) \to P(x_1)))$ não é uma L-fórmula (para isso, $q(x_1)$ teria de ser uma L-fórmula e não é!)
Tão pouco é um L-termo.

(ii) $+(q(+(0, q(x_0)), x_3))$ não é L-termo pois $\mathcal{N}(q) = 1$ e não $\mathcal{N}(q) = 2$!
Tão pouco é L-fórmula (só tem símbolos de função e não tem de relação)

(iii)
x_1, $P(x_1)$, $\forall x_1 P(x_1)$, x_0, $q(x_1)$, $= (x_0, q(x_1))$,
$(\forall x_1 P(x_1)) \vee = (x_0, q(x_1))$, $(\exists x_0 ((\forall x_1 P(x_1)) \vee = (x_0, q(x_1))))$
é uma sequência de formação da L-fórmula dada.
(É óbvio que sendo L-fórmula não é L-termo)

(iv) Como a palavra é da forma $+(t_1, t_2)$, nunca seria uma L-fórmula. Como tem o símbolo de relação $=$, tão pouco é um L-termo.

b) $t = (q(x_1) + x_3) + 0$ $\qquad VAR(t) = \{x_1, x_3\}$

φ: $P(x_2) \leftrightarrow \exists x_1 ((x_5 = x_1 + q(x_2 + 0)) \wedge \forall x_0 (P(x_1 + x_0) = x_3))$

x_2 → a), x_5 → e), x_1 → c), x_2 → b), x_1 → d), x_0 → f), x_3 → g)

ocorrências livres de variáveis em φ: a) x_2, e) x_5, b) x_2, g) x_3
ocorrências ligadas de variáveis em φ: c) x_1, d) x_1, f) x_0

- A ocorrência livre a) de x_2 não está no alcance de nenhum quantificador. A ocorrência livre b) de x_2 está no alcance de $\exists x_1$ e $x_1 \in VAR(t)$. Logo, $\boxed{x_2}$ não é substituível por t em φ.
- A ocorrência livre e) de x_5 está no alcance do quantificador $\exists x_1$ e $x_1 \in VAR(t)$. Logo, $\boxed{x_5}$ não é substituível por t em φ.
- A ocorrência livre g) de x_3 está no alcance dos quantificadores $\forall x_0$ e $\exists x_1$. Como $x_1 \in VAR(t)$, $\boxed{x_3}$ não é substituível por t em φ.

Em relação às outras variáveis, como não ocorrem livres em φ, são substituíveis por t em φ. Assim, o conjunto das variáveis

substituíveis por t em φ é $\mathcal{V} \backslash \{x_2, x_3, x_5\}$.

(c) $f : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é definida, por recursão estrutural como

1) $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathcal{V}$
2) $f(0) = 1$
3) $f(q(t)) = f(t)$, para todo $t \in \mathcal{T}_L$
4) $f(+(t_1, t_2)) = f(t_1) + f(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$.

3. $E = (\mathbb{Q}, \overline{})$
$\overline{0}$: zero
$\overline{q}(n) = n^2$ para cada $n \in \mathbb{Q}$
$\overline{+}$: adição
$\overline{P} = \mathbb{Q}^+ \to$ "é positivo"
$\overline{=}$: igualdade em $\mathbb{Q}$.

(a)
i)
$$\begin{aligned} (q(0 + x_0) + x_3)[a] &= q(0 + x_0)[a] \mathbin{\overline{+}} x_3[a] \\ &= \overline{q}((0 + x_0)[a]) + a(x_3) \\ &= \overline{q}(0[a] \mathbin{\overline{+}} x_0[a]) + 0 \\ &= \overline{q}(0 + a(x_0)) + 0 \\ &= \overline{q}(0 + (-3)) + 0 = (-3)^2 = 9 \end{aligned}$$

ii) $(P(x_5) \wedge \exists x_3 (q(x_3) = 0 + x_5))[a] = 1$
sse $P(x_5)[a] = 1$ e $\exists x_3 (q(x_3) = 0 + x_5)[a] = 1$
sse $a(x_5) \in \overline{P}$ e $(q(x_3) = 0 + x_5)\left[a\binom{x_3}{d}\right] = 1$ para algum $d \in \operatorname{dom} E$
sse $2 \in \overline{P}$ e $\underbrace{d^2 = 2 \text{ para algum } d \in \mathbb{Q}}_{\text{imp.}}$

Logo, $(P(x_5) \wedge \exists x_3 (q(x_3) = 0 + x_5))[a] = 0$.

5

b) $\varphi: \; P(q(x_1)) \to \neg\forall x_2\,(0 = q(x_2))$

(i) Seja a' uma atribuição em E

Temos que

$E \not\models \varphi\,[a']$ sse $\varphi[a']_E = 0$ sse $P(q(x_1))\,[a'] = 1$

e $(\neg\forall x_2\,(0 = q(x_2)))\,[a'] = 0$

sse $\bar{q}\,(a'(x_1)) \in \bar{P}$ e $\forall x_2\,(0 = q(x_2))\,[a'] = 1$

sse $(a'(x_1))^2$ é positivo e $(0 = q(x_2))\left[a'\binom{x_2}{d}\right] = 1$ para todo $d \in$ dom E

sse $(a'(x_1))^2 > 0$ e $d^2 = 0$ para todo $d \in$ dom E

sse $(a'(x_1))^2 > 0$ e $d^2 = 0$ para todo $d \in \mathbb{R}$, uma afirmação falsa

Logo, $E \models \varphi\,[a']$

Sendo a' uma atribuição qualquer em E, podemos afirmar que φ é válida em E.

(ii) Seja $E' = (\{a,b\}, -)$ onde

$\bar{0} = a$

$\bar{q}: \{a,b\} \longrightarrow \{a,b\}$

$a \longmapsto a$

$b \longmapsto a$

$\bar{P} = \{a,b\}$

$\bar{=} = \{(a,a)\}$

6

Seja $a': \mathcal{V} \longrightarrow \{a,b\} = \text{dom } E'$

$x_i \longmapsto a$

Temos que

$E' \not\models \varphi\,[a']$ sse $P(q(x_1))\,[a'] = 1$ e $\neg\forall x_2\,(0 = q(x_2))\,[a'] = 0$

sse $\bar{q}(a'(x_1)) \in \bar{P}$ e $\forall x_2\,(0 = q(x_2))\,[a'] = 1$

sse $\bar{q}\,(a'(x_1)) \in \bar{P}$ e $(0 = q(x_2))\left[a'\binom{x_2}{d}\right] = 1$ para todo $d \in$ dom E'

sse $\bar{q}\,(a'(x_1)) \in \bar{P}$ e $(\bar{0}, \bar{q}(d)) \in \bar{=}$ para todo $d \in$ dom E'

sse $a \in \bar{P}$ e $(a,a) \in \bar{=}$, o que é verdade.

c) $\bot$

d)

(i) $\exists x_0\, P(q(x_0))$

(ii) $\forall x_1 \forall x_2\; \neg\,(q(x_1 + x_2) = 0)$

4. (a)

i)

7

4. (a)

(i) Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E tais que

$E \models \forall x\varphi \vee \forall x\psi\,[a]$

Queremos mostrar que $E \models \forall x(\varphi\vee\psi)\,[a]$.

Temos que

$E \models \forall x\varphi \vee \forall x\psi\,[a]$ sse (para todo $d \in$ dom E $\varphi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1$ ou para todo $d \in$ dom E $\psi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1$) ⊛

e

$E \models \forall x(\varphi\vee\psi)\,[a]$ sse para todo $d \in$ dom E $(\varphi\vee\psi)\left[a\binom{x}{d}\right] = 1$.

sse $\underbrace{\text{para todo } d \in \text{dom } E\; \left(\varphi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1 \text{ ou } \psi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1\right)}_{A}$.

Seja $d \in$ dom E. Por ⊛, sabemos que $\varphi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1$ ou $\psi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1$

Logo, a afirmação A é verdadeira.

Assim, $E \models \forall x\,(\varphi\vee\psi)\,[a]$.

(ii) $\neg\forall x\,(\varphi\to\psi) \iff \exists x\,\neg(\varphi\to\psi)$

$\iff \exists x\,(\varphi\wedge\neg\psi)$

(b) $L = (\{\}, \{>\}, \mathcal{N})$ onde $\mathcal{N}(>) = 2$

$E = (\mathbb{N}_0, -)$ onde $\bar{>}$ é a relação maior do que nos inteiros

Sejam $\varphi: \; x_0 > x_1$ e consideremos as L-fórmulas

$\forall x_1 \exists x_0\, \varphi$

e

$\exists x_0 \forall x_1\, \varphi$

Seja a uma atribuição em E.

Temos que $E \models \forall x_1 \exists x_0\, \varphi\,[a]$ sse para todo $d_1 \in \mathbb{N}_0$ existe $d_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $d_0 > d_1$, uma afirmação verdadeira.

8

Temos que

$E \models \exists x_0 \forall x_1\, \varphi\,[a]$ sse Existe $d_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $d_0 > d_1$ para todo $d_1 \in \mathbb{N}_0$, uma afirmação falsa.

Assim, $\not\models \forall x \exists y\, \varphi \to \exists y \forall x\, \varphi$

2º Teste

Lógica EI

17 junho de 2011

1.

(a)

(i) $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$ é um teorema se existir uma sua derivação. Ora,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0\wedge p_1}^{(2)}}{p_1}\,\wedge_2 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_0\wedge p_1}^{(2)}}{p_0}\,\wedge_1 E \qquad \cancel{p_0\to\neg p_1}^{(1)}}{\neg p_1}\,\to E}{\bot}\,\neg I^{(2)}}{\neg(p_0\wedge p_1)}\,\to I^{(1)}}{(p_0\to\neg p_1)\to\neg(p_0\wedge p_1)}$$

cancelamentos dados pelas regras

(1) $p_0 \to \neg p_1$

(2) $p_0 \wedge p_1$

é uma derivação de $(p_0\to\neg p_1)\to\neg(p_0\wedge p_1)$

(ii) $\neg(p_0\wedge p_1) \vdash (p_0 \to \neg p_1)$

se existir uma derivação de conclusão $p_0 \to \neg p_1$ cujas hipóteses não canceladas, se existirem, são elementos de $\{\neg(p_0\wedge p_1)\}$. Aqui está uma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_0\wedge p_1}\,\wedge I \qquad \neg(p_0\wedge p_1)}{\bot}\,\neg E}{\neg p_1}\,\neg I^{(2)}}{p_0\to\neg p_1}\,\to I^{(1)}$$

(1) p_0

(2) p_1

9

b) Sabemos, pelo T. Adequação, que

1) $\neg(p_0\wedge p_1) \vdash (p_0\to\neg p_1)$ se e só se $\neg(p_0\wedge p_1) \models (p_0\to\neg p_1)$

2) $T \vdash \neg(p_0\wedge p_1)$ se e só se $T \models \neg(p_0\wedge p_1)$

3) $T \vdash p_0\to\neg p_1$ se e só se $T \models p_0\to\neg p_1$

Admitamos, então, que $T \vdash \neg(p_0\wedge p_1)$ e mostremos que $T \models p_0\to\neg p_1$.

Seja v uma valoração que satisfaz T. Então, porque $T \vdash \neg(p_0\wedge p_1)$ e por 2), $v(\neg(p_0\wedge p_1)) = 1$. Pela alínea a) ii) e por 1), sabemos, então, que $v(p_0 \to \neg p_1) = 1$.

Assim, $T \models p_0\to\neg p_1$ e, por 3), $T \vdash p_0\to\neg p_1$.

2. $L = (\{0, s, -\}, \{P, <\}, \mathcal{N})$

$\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(-) = 2$, $\mathcal{N}(P) = 1$ e $\mathcal{N}(<) = 2$.

(a)

(i) $0,\; s(0),\; x_2,\; x_2 - s(0),\; x_1,\; s(x_1),\; s(x_1) - (x_2 - s(0))$ é uma sequência de formação de $s(x_1) - (x_2 - s(0)) \in \mathcal{T}_L$.

(ii) Não pertence nem a $\mathcal{T}_L$ nem a $\mathcal{F}_L$

(iii) $x_1,\; P(x_1),\; x_2,\; x_2 < x_1,\; \forall x_1\,(x_2 < x_1),\; P(x_1) \wedge \forall x_1\,(x_2 < x_1),$ $\exists x_2\,(P(x_1) \wedge \forall x_1\,(x_2 < x_1))$ é uma sequência de formação de $\exists x_2\,(P(x_1)\wedge\forall x_1\,(x_2<x_1)) \in \mathcal{F}_L$

(iv) Não pertence nem a $\mathcal{T}_L$ nem a $\mathcal{F}_L$

(b) $t = x_2 - s(x_1)$ $\qquad VAR(t) = \{x_1, x_2\}$

$\varphi = \forall x_1\,(\underset{a)}{P(x_4)} \to \exists x_0\,\neg(\underset{b)}{x_0} < \underset{c)}{x_2} - s(\underset{d)}{x_1} - 0)))$

ocorrências livres: a) a x_4

c) de x_2

ocorrências ligadas: b) de x_0

d) de x_1.

10

A ocorrência livre a) de x_4 está no alcance do quantificador $\forall x_1$. Como $x_1 \in VAR(t)$, x_4 não é substituível por t em φ.

A ocorrência livre c) de x_2 está no alcance dos quantificadores $\forall x_1$ e $\exists x_0$. Como $x_1 \in VAR(t)$, x_2 não é substituível por t em φ.

Assim, o conjunto das variáveis substituíveis por t em φ é $\mathcal{V}\setminus\{x_2, x_4\}$.

c) $f: \mathcal{T}_L \to \mathbb{N}_0$ é dada, por recursão estrutural, por:

1) $f(0) = 0$;

2) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x_{2011} \\ 0 & \text{se } x \in \mathcal{V}\setminus\{2011\} \end{cases}$;

3) $f(s(t)) = f(t)$, para todo $t \in \mathcal{T}_L$;

4) $f(t_1 - t_2) = f(t_1) + f(t_2)$, para todo $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$.

3. $E = (\mathbb{Z}, -)$

$\bar{0}$: zero

$\bar{s}$: sucessor

$\bar{-}$: subtração em $\mathbb{Z}$

$\bar{P}$: "é par"

$\bar{<}$: "menor do que" em $\mathbb{Z}$

(a) $a: \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$x_i \longmapsto i$

(i) $(0 - s(x_1 - x_8))\,[a] = \bar{0} \,\bar{-}\, \bar{s}\,(a(x_1) \,\bar{-}\, a(x_8)) =$

$= 0 - \bar{s}\,(1-8) = -\bar{s}\,(-7) = 6.$

(ii) $(P(x_2) \wedge \exists x_1\,(s(x_1) < 0))\,[a] = 1$ se e só se $P(x_2)\,[a] = 1$

e $\exists x_1\,(s(x_1) < 0)\;[a] = 1$

se e só se $a(x_2) \in \bar{P}$ e $s(x_1) < 0\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$ para algum $d \in \mathbb{Z}$

se e só se $a(x_2)$ é par e $d+1 < 0$ para algum $d \in \mathbb{Z}$

se e só se 2 é par e $d < -1$ para algum $d \in \mathbb{Z}$,

uma afirmação verdadeira. Logo,

$(P(x_2) \wedge \exists x_1\,(s(x_1) < 0))\;[a] = 1.$

11

(b) $\varphi = \neg P(x_0 - x_1) \to ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))$.

(i) Seja a uma atribuição em E.

$E \models \varphi\,[a]$ sse $\varphi[a] = 1$ sse $(\neg P(x_0 - x_1))\,[a] = 0$ ou $((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))\,[a] = 1$

sse $P(x_0 - x_1)\,[a] = 1$ ou $(x_0 < x_1)\,[a] = 1$ ou $(x_1 < x_0)\,[a] = 1$

sse $\underbrace{a(x_0) - a(x_1) \text{ é par ou } a(x_0) < a(x_1) \text{ ou } a(x_1) < a(x_0)}_{A}$

Se a é tal que $a(x_0) < a(x_1)$, então esta última afirmação A é verdadeira. Se a é tal que $a(x_1) < a(x_0)$, A também é verdadeira. Se a é tal que $a(x_1) = a(x_0)$, então $a(x_0) - a(x_1) = 0$, pelo que $a(x_0) - a(x_1)$ é par e, portanto, A é verdadeira.

Assim, $E \models \varphi[a]$, para qualquer atribuição a em E, pelo que φ é válida em E.

(ii) Seja $E' = (\{a,b\}, -)$ a L-estrutura onde

- $\bar{0} = a$
- $\bar{s}: \{a,b\} \to \{a,b\}$
  $a \longmapsto a$
  $b \longmapsto a$
- $\bar{-}: \{a,b\} \times \{a,b\} \longrightarrow \{a,b\}$
  $(x,y) \longmapsto b$
- $\bar{P} = \{a\}$
- $\bar{<} = \{\}$

Seja a uma atribuição em E'.

Temos que

$\varphi\,[a]_{E'} = 0$ sse $\neg P(x_0 - x_1)\,[a] = 1$ e $((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))\,[a] = 0$

sse $P(x_0 - x_1)\,[a] = 0$ e $(x_0 < x_1)\,[a] = 0$ e $(x_1 < x_0)\,[a] = 0$

sse $a(x_0) \,\bar{-}\, a(x_1) \notin \bar{P}$ e $(a(x_0), a(x_1)) \notin \bar{<}$ e $(a(x_1), a(x_0)) \notin \bar{<}$

sse $b \notin \bar{P}$ e $(a(x_0), a(x_1)) \notin \bar{<}$ e $(a(x_1), a(x_0)) \notin \bar{<}$.

12

Como $\bar{P} = \{a\}$ e $\bar{<}$ é a relação vazia, a afirmação anterior é verdadeira.

Logo, $\varphi\,[a]_{E'} = 0$

e, portanto, φ não é universalmente válida.

d)

(i) $\forall x_0 \exists x_1\,(P(x_1) \wedge (x_0 < x_1))$

(ii) $\forall x_0 \forall x_1\,((P(x_0) \wedge P(x_1)) \longrightarrow P(x_0 - x_1))$

4.

a) Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E tais que

$E \models \exists x\,(\varphi\wedge\psi)\;[a]$

Mostremos que $E \models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)\,[a]$.

Temos que

$E \models \exists x\,(\varphi\wedge\psi)\,[a]$ sse $(\varphi\wedge\psi)\left[a\binom{x}{d}\right] = 1$ para algum $d \in$ dom E

sse $\varphi\left[a\binom{x}{d}\right] = \psi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1$, para algum $d \in$ dom E.

Ora,

$E \models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)\,[a]$ sse $\exists x\varphi\,[a] = 1$ e $\exists x\psi\,[a] = 1$

sse $\varphi\left[a\binom{x}{d'}\right] = 1$ para algum $d' \in$ dom E

e $\psi\left[a\binom{x}{d''}\right] = 1$ para algum $d'' \in$ dom E

Tomando $d' = d'' = d$, segue-se que $\varphi\left[a\binom{x}{d'}\right] = 1$ e $\psi\left[a\binom{x}{d''}\right] = 1$.

Portanto, $E \models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)\,[a]$.

Logo, $\exists x\,(\varphi\wedge\psi) \models \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$.

13

(b) Sejam L o tipo de linguagem $L = (\{\}, \{P, I\}, \mathcal{N})$ onde $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(I) = 1$.

Consideremos as L-fórmulas $\varphi: P(x)$ e $\psi: I(x)$.

Seja $E = (\mathbb{N}, -)$ a L-estrutura onde

$\bar{P} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\}$

$\bar{I} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}\}$

Seja a uma atribuição em E. Temos que

$E \not\models ((\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\varphi\wedge\psi))\;[a]$ se e só se

$(\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)\,[a] = 1$ e $\exists x\,(\varphi\wedge\psi)\;[a] = 0$ se e só se

$(\exists x\varphi)\,[a] = 1$ e $(\exists x\psi)\;[a] = 1$ e $(\varphi\wedge\psi)\left[a\binom{x}{d}\right] = 0$ para todo $d \in$ dom E sse

$\varphi\left[a\binom{x}{d_1}\right] = 1$ para algum $d_1 \in$ dom E e $\psi\left[a\binom{x}{d_2}\right] = 1$ para algum $d_2 \in$ dom E e $\left(\varphi\left[a\binom{x}{d}\right] = 0 \text{ ou } \psi\left[a\binom{x}{d}\right] = 0\right)$, para todo $d \in$ dom E sse

$d_1 \in \bar{P}$ para algum $d_1 \in \mathbb{N}$ e $d_2 \in \bar{I}$ para algum $d_2 \in \mathbb{N}$

e $(d \notin \bar{P}$ ou $d \notin \bar{I})$ para todo $d \in \mathbb{N}$ sse

Existe $d_1 \in \mathbb{N}$ t.q. d_1 é par e existe $d_2 \in \mathbb{N}$ tal que d_2 é ímpar e para todo $d \in \mathbb{N}$ d não é par ou não é ímpar,

o que é uma afirmação verdadeira. Logo,

$\not\models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \to \exists x\,(\varphi\wedge\psi)$.