Exercício 3. [1 valores] Estabeleça as correspondências apropriadas entre as funções definidas de $a)$ a $d)$ e as curvas de nível apresentadas de $i)$ a $iv)$.

$a)$ $f(x,y) = x^2$	$i)$ retas
$b)$ $f(x,y) = x^2 + 2y^2$	$ii)$ parábolas
$c)$ $f(x,y) = y - x^2$	$iii)$ hipérboles
$d)$ $f(x,y) = x^2 - y^2$	$iv)$ elipses

a) $x^2 = K \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{K}$; $K > 0$ - retas

b) $x^2 + 2y^2 = K \Leftrightarrow \frac{x^2}{K} + \frac{y^2}{\frac{K}{2}} = 1$ - elipses

c) $y - x^2 = K \Leftrightarrow y = x^2 + K$ - parábolas

d) $x^2 - y^2 = K$ - ~~elipse~~ hipérboles (por exclusão de partes)

Exercício 4. [1 valores] Comente a seguinte afirmação:

Todas as superfícies de nível da função definida por $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}$ são parabolóides.

$\frac{z}{x^2+y^2} = K \wedge K = 0 \Leftrightarrow z = 0$ q̄ define 1 plano; a afirmação é falsa!

Exercício 5. [2 valores] Calcule, se existir, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x - y^4}{x^2 - y^4}$.

Exercício 6. [2 valores] Defina, se existir, o plano tangente à superfície definida por $xy + yz + zx = 11$, no ponto de coordenadas $(1, 2, 3)$.

5 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x - y^4}{x^2 - y^4}$?

Limites trajetoriais:

i) $x = 1$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^2-y^4} \underset{x=1}{=} \lim_{y\to 1} \frac{1-y^4}{1-y^4} = 1$$

ii) $y = 1$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^2-y^4} \underset{y=1}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Ora $1 \neq \frac{1}{2}$

Donde

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^2-y^4}$ não existe!

RESOLUÇÕES POSSÍVEIS:

6 $xy + yz + zx = 11 \Leftrightarrow z = \frac{11 - xy}{x+y}$; $x+y \neq 0$

Ora

$$z_x = \frac{(x+y)\times(-y) - (11-xy)\times 1}{(x+y)^2}$$

e

$$z_y = \frac{(x+y)(-x) - (11-xy)\times 1}{(x+y)^2}$$

Donde

$$z_x(1,2) = \frac{-6-9}{9} = -\frac{5}{3}$$

e

$$z_y(1,2) = \frac{-3-9}{9} = -\frac{4}{3}$$

O plano tangente existe e pode ser definido por

$$z = z_0 + z_x(1,2)(x-1) + z_y(1,2)\cdot(y-2)$$

isto é

$$z = 3 - \frac{5}{3}(x-1) - \frac{4}{3}(y-2)$$

$$\Leftrightarrow 5x + 4y + 3z - 22 = 0$$

A superfície definida por $xy + yz + zx = 11$ pode ser entendida como uma superfície de nível $(=11)$ da função definida por

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \mapsto w = xy + yz + zx$$

que é diferenciável (é um polinómio)

Donde $\nabla f(x,y,z) = (y+z, x+z, y+x)$

e $\nabla f(1,2,3) = (5,4,3)$

O plano tangente pode ser definido por

$\Pi: 5x + 4y + 3z + \alpha = 0$

Mas $P = (1,2,3) \in \Pi$, portanto

$5\times 1 + 4\times 2 + 3\times 3 + \alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = -22$