

Equações Cosmológicas

Ricardo Mendes Ribeiro



Universidade do Minho

Factor Escala

Equações do Movimento do Universo

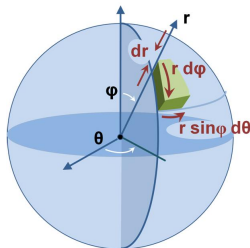
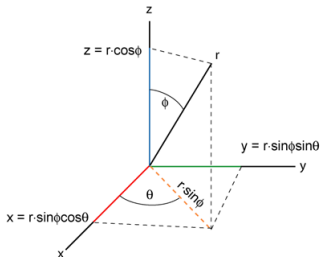
A evolução do Universo

Intervalo de Espaço-tempo

$$ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2)$$



Na métrica de Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right)$$

Factor de Escala

Na equação

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right)$$

$a(t)$ é o factor de escala

Factor de Escala

Na equação

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right)$$

$a(t)$ é o **factor de escala**

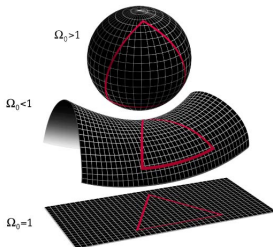
k é a **Constante de curvatura**

Determina a curvatura do espaço-tempo, à escala cosmológica

$k > 0$ o Universo tem curvatura positiva e diz-se fechado

$k = 0$ o Universo tem curvatura nula, é plano

$k < 0$ o Universo tem curvatura negativa e diz-se aberto



Equações do Movimento do Universo

Evolução do factor de escala:

$$H^2 = \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

em que:

- $H(t)$ é o parâmetro de Hubble
- G é a constante de gravitação universal
- Λ é a constante cosmológica
- ρ é a densidade

Na equação do movimento do Universo,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

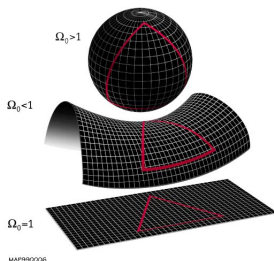
Se definirmos:

- Densidade crítica: $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$
- Parâmetro densidade cosmológica: $\Omega_{tot} = \frac{\rho}{\rho_c}$
- $\Omega_{tot} = \Omega_m + \Omega_r$
- $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H^2$
- $\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$

Obtemos:

$$\frac{k}{a^2} = H^2 (\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - 1)$$

- $\Omega > 1$, $k > 0$ e o Universo é fechado
- $\Omega < 1$, $k < 0$ e o Universo é aberto
- $\Omega = 1$, $k = 0$ e o Universo é plano



Valores determinados para os parâmetros de densidade são:

$$\Omega_m = 0.26 \pm 0.03$$

$$\Omega_\Lambda = 0.74 \pm 0.03$$

$$\Omega_r \approx 0$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$
$$H^2 = \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2$$

A densidade de matéria ρ_m varia com $1/a^3$.

A densidade de radiação ρ_r varia com $1/a^4$.

Universo dominado pela matéria: $a(t) \propto t^{2/3}$

Universo dominado pela radiação: $a(t) \propto t^{1/2}$

Universo dominado pela energia de vácuo: $a(t) \propto e^{\sqrt{\Lambda/3}t}$