

5. Valores e Vectores Próprios

Definição

Seja A uma matriz de ordem n . Diz-se que λ é um **valor próprio** de A se existir um vector x , não nulo, tal que

$$Ax = \lambda x.$$

Designa-se o vector x por **vector próprio** associado ao **valor próprio** λ .

Exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tem-se para $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\lambda = 2$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda = 2$ é um valor próprio de A associado ao vector próprio

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemplos:

1. Seja A a matriz nula O_n de ordem n . Então,

$$\{\text{valores próprios de } A\} = \{0\} \quad \text{e}$$

$$\{\text{vectores próprios de } A\} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Cada elemento de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é um vector próprio associado ao valor próprio 0 de A .

2. Para $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, tem-se

$$Ax = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x$$

Portanto, 3 é valor próprio de A associado a cada vector de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

- Chama-se **espectro da matriz** A ao conjunto de todos os valores próprios da matriz A , que se representa por $\lambda(A)$.

- **Um vector próprio está associado apenas a um valor próprio**

De facto, se λ' é outro valor próprio associado a x , então tem-se $Ax = \lambda x$ e $Ax = \lambda' x$.

Logo, $\lambda x = \lambda' x$ donde $(\lambda - \lambda')x = 0$. Dado que $x \neq 0$, deduz-se assim que $\lambda - \lambda' = 0$, ou seja, que $\lambda = \lambda'$.

- **Um valor próprio está associado uma infinidade de vectores próprios.**

Na verdade, se x é um vector próprio associado ao valor próprio λ , então, αx , com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, também é um vector próprio associado ao valor próprio λ .

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A(\alpha x) = \lambda(\alpha x), \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

como calcular os valores próprios

Teorema

Seja A uma matriz de ordem n . Um escalar λ é um valor próprio de A se e s

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Demonstração:

Para um número real λ são válidas as seguintes equivalências,

$$\begin{aligned}\lambda \text{ é valor próprio de } A &\Leftrightarrow Ax = \lambda x \text{ para algum } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \text{ para algum } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0 \text{ é um sistema indeterminado} \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I \text{ é uma matriz não invertível} \\ &\Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0\end{aligned}$$

Exemplo

$$\text{Seja } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5 - \lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 1 & -1 \\ -2 - \lambda & 5 - \lambda & -1 \\ 0 & 6 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2 + \lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 - \lambda & -1 \\ 0 & 6 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -(2 + \lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 6 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= -(2 + \lambda)(4 - \lambda)(-2 - \lambda) = (2 + \lambda)^2(4 - \lambda)$$

Os valores próprios são $\lambda = -2$ e $\lambda = 4$

- Designa-se por **polinómio característico** o polinómio, em λ , $\det(A - \lambda I_n)$. Este polinómio é de grau n , ordem da matriz A .
- Chama-se **equação característica** à equação $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Note-se que as raízes da equação característica são os valores próprios da matriz A .

Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, ($m \leq n$), são raízes do polinómio característico (ou seja valores próprios de A), então este pode ser factorizado do seguinte modo:

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_n)^{r_n}.$$

em que $r_1 + r_2 + \dots + r_n = n$.

Diz-se que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ têm **multiplicidade algébrica** r_1, r_2, \dots, r_n , respectivamente.

polinómio característico: $p(\lambda) = (2 + \lambda)^2(4 - \lambda)$

equação característica: $p(\lambda) = (2 + \lambda)^2(4 - \lambda) = 0$

Donde os valores próprios de A são $\lambda = -2$ de multiplicidade (algébrica) 2 e $\lambda = 4$ de multiplicidade 1 (simples).

um subespaço próprio importante

Se λ é um valor próprio de uma matriz A , de ordem n então o conjunto

$$U_\lambda = \{x : Ax = \lambda x\},$$

incluindo o vector nulo é um subespaço, designado por **subespaço próprio** associado ao valor próprio λ .

A dimensão do subespaço próprio chama-se **multiplicidade geométrica** do valor próprio λ

Exemplo

A matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, com valores próprios $\lambda = -2$, de multiplicidade algébrica 2, e $\lambda = 4$ simples.

De modo a determinar o subespaço associado a $\lambda = 4$ temos que resolver o sistema $(A - 4I_3)X = 0$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sistema reduz-se a $x = 0, y - z = 0$, sendo então o conjunto solução, constituído por vectores da forma:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix},$$

tendo-se, o subespaço próprio associado a $\lambda = 4$:

$U_{\lambda=4} = \{(0, y, y), y \in \mathbf{R}\}$, o qual tem dimensão 1, sendo $\lambda = -2$ de multiplicidade geométrica 1.

De modo a determinar o subespaço associado a $\lambda = -2$ temos que resolver o sistema $(A + 2I_3)X = 0$, ou seja:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O sistema reduz-se a $x = y, z = 0$, sendo então o conjunto solução, constituído por vectores da forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

tendo-se, o subespaço próprio associado a $\lambda = -2$:

$$U_{\lambda=-2} = \{(x, x, 0), x \in \mathbb{R}\}$$

o qual tem dimensão 1, sendo $\lambda = -2$ de multiplicidade geométrica 1.

Propriedades

- Os valores próprios de uma matriz diagonal são os elementos da diagonal.
- Os valores próprios de uma matriz triangular superior (inferior) são os elementos da diagonal.
- Seja A uma matriz de ordem n . Se λ é valor próprio de A então $\alpha\lambda$ é valor próprio de αA , $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Se β é um número, então $\lambda + \beta$ é um valor próprio de $A + \beta I$ e x é um vector próprio associado.
- Seja A uma matriz de ordem n . Se λ é valor próprio de A associado ao vector próprio x , então λ^n é valor próprio de A^n associado ao vector próprio x .
- A é invertível se e só se $\lambda \neq 0$. Neste caso, $\frac{1}{\lambda}$ é um valor próprio de A^{-1} e x é um vector próprio associado.
- λ é um valor próprio de A^T .

Definição

Duas matrizes A e B dizem-se **semelhantes** se existir uma matriz S , invertível, tal que

$$B = S^{-1}AS$$

Teorema

Duas matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios.

Demonstração

Sejam A e B duas matrizes semelhantes. Então existe uma matriz S , invertível tal que $B = SAS^{-1}$.

Assim, vejamos que têm iguais polinómios característicos

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= |B - \lambda I| = |SAS^{-1} - \lambda(SS^{-1})| = |SAS^{-1} - S\lambda S^{-1}| \\ &= |S(A - \lambda I)S^{-1}| = |S|(A - \lambda I)||S^{-1}| = |S|(A - \lambda I)|\frac{1}{|S|} \\ &= |A - \lambda I| = \\ &= p_A(\lambda) \end{aligned}$$

Relativamente à matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

- **Subespaço próprio associado a $\lambda = -1$**

$$(A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow (A + I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x = 0; U_{\lambda=-1} = \{(-2y, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

- **Subespaço próprio associado a $\lambda = 5$**

$$(A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow (A - 5I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x = 0;$$

$$U_{\lambda=5} = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \text{ Tem-se: } S = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } S^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e então } D = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Note-se que:

$$\dim U_{\lambda=-1} + \dim U_{\lambda=5} = 1 + 1 = 2 = n$$