João Pedro de M. Bonucci - 218733 MS211-L 2S/2021

1. Qual polinômio p de grau no máximo 2 satisfaz as condições: p(2) = −1, p(3) = 1 e p 0 (3) = 0. Proponha uma representação para p, na qual a resolução do problema de interpolação possa resolvida de forma análoga com o que é feito com polinômios de Lagrange.

Queremos p tal que:

x	2	3
$p(x)$	-1	1

x	3
$p'(x)$	0

onde p e p' são da forma:

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$
$$p'(x) = c_1 + 2c_2 x$$

isso nos deixa com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} p(2) = c_0 + 2c_1 + 4c_2 = -1 \\ p(3) = c_0 + 3c_1 + 9c_2 = 1 \\ p'(3) = c_1 + 6c_2 = 0 \end{cases}$$

mas como queremos evitar contas, podemos reescrever p de forma mais inteligente seguindo a ideia dos polinômios de Lagrange:

$$p(x) = y_0 P_0(x) + y_1 P_1(x)$$

Precisamos encontrar P_0 e P_1 tais que:

$P_0'(3) = 0 \longrightarrow P_0'(x) = x-3$ Sabendo a forma de suas derivadas podemos

$P_1'(3) = 0 \longrightarrow P_1'(x) = x-3$ descobrir a forma das funções: $a(\frac{x^2}{2} - 3x) + b$

Agora precisamos achar a e b para P_0 e P_1:

$$\begin{cases} P_0(2) = a(2-6) + b = 1 \rightarrow a = \frac{1-b}{-4} \\ P_0(3) = a(\frac{9}{2} - 9) + b = 0 \rightarrow \frac{1-b}{-4}(-\frac{9}{2}) + b = 0 \rightarrow b - \frac{9(b-1)}{8} = 0 \end{cases}$$

$$b = 9 \quad a = 2$$

$$\begin{cases} P_1(2) = a(2-6) + b = 0 \rightarrow \frac{2-2b}{-9}(-4) + b = 0 \rightarrow b - \frac{8(b-1)}{9} = 0 \rightarrow b = -8 \\ P_1(3) = a(\frac{9}{2} - 9) + b = 1 \rightarrow a = \frac{1-b}{(\frac{9}{2}-9)} = \frac{2-2b}{-9} \end{cases}$$

$$a = -2$$

$$P(x) = -1 \cdot (2(\frac{x^2}{2} - 3x) + 9) + 1 \cdot (-2(\frac{x^2}{2} - 3x) - 8) = (-x^2 + 6x - 9) + (-x^2 + 6x - 8)$$

Portanto, o polinômio buscado é: $P(x) = -2x^2 + 12x - 17$

2. Encontre o ponto de intersecção das duas funções tabeladas, utilizando interpolação quadrática.

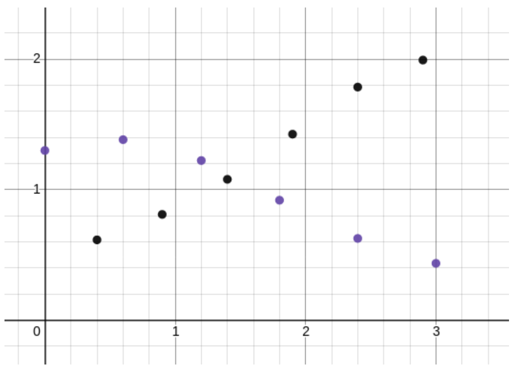
Obs: Você terá que escolher os pontos para fazer a interpolação, há pontos demais. Tente justificar a sua escolha da melhor forma possível.

x	0.000	0.600	1.200	1.800	2.400	3.000
$f(x)$	1.300	1.383	1.223	0.919	0.626	0.435

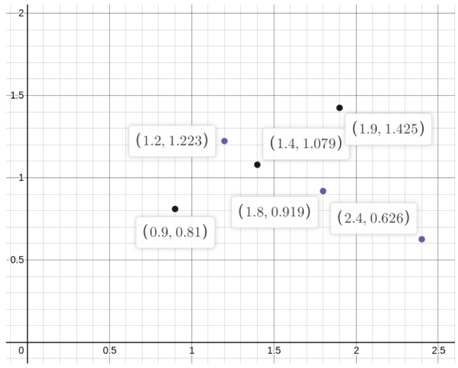
x	0.400	0.900	1.400	1.900	2.400	2.900
$g(x)$	0.615	0.810	1.079	1.425	1.786	1.993

Sabendo que a qualidade da interpolação em um ponto está diretamente ligada à quantidade de pontos conhecidos e sua proximidade do ponto desejado e sabendo que uma interpolação quadrática utiliza apenas 3 pontos, é preciso escolher os 3 pontos de cada tabela mais próximos a intersecção.

Ao plotar os pontos no gráfico sabemos, pelas propriedades dos polinômios e pelo teorema de Bolzano, que a interseção ocorrerá no intervalo $1 < x < 2$. Logo pegaremos os 3 pontos de cada função mais próximos deste intervalo e os mais comportados.



plot dos pontos



pontos selecionados

Agora é preciso calcular a interpolação quadrática para cada uma das funções:

X	1,2	1,8	2,4
p_1	1,223	0,919	0,626

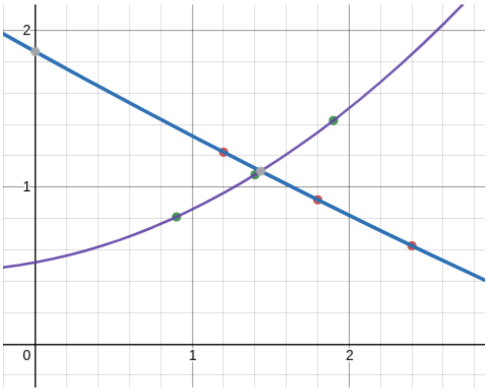
X	0,9	1,4	1,9
p_2	0,81	1,079	1,425

$$p_1(x) = \underbrace{1{,}223\left(\frac{(x-1{,}8)(x-2{,}4)}{(1{,}2-1{,}8)(1{,}2-2{,}4)}\right)}_{1{,}69861x^2 - 7{,}13417x + 7{,}338} + \underbrace{0{,}929\left(\frac{(x-1{,}2)(x-2{,}4)}{(1{,}8-1{,}2)(1{,}8-2{,}4)}\right)}_{-2{,}55278x^2 + 9{,}19x - 7{,}352} + \underbrace{0{,}626\left(\frac{(x-1{,}2)(x-1{,}8)}{(2{,}4-1{,}2)(2{,}4-1{,}8)}\right)}_{0{,}869444x^2 - 2{,}60833x + 1{,}878}$$

$$p_1(x) = 0{,}0152778\,x^2 - 0{,}5525\,x + 1{,}864$$

$$p_2(x) = \underbrace{0{,}81\left(\frac{(x-1{,}4)(x-1{,}9)}{(0{,}9-1{,}4)(0{,}9-1{,}9)}\right)}_{1{,}62x^2 - 5{,}346x + 4{,}3092} + \underbrace{1{,}079\left(\frac{(x-0{,}9)(x-1{,}9)}{(1{,}4-0{,}9)(1{,}4-1{,}9)}\right)}_{-4{,}316x^2 + 12{,}0848x - 7{,}38036} + \underbrace{1{,}425\left(\frac{(x-0{,}9)(x-1{,}4)}{(1{,}9-0{,}9)(1{,}9-1{,}4)}\right)}_{2{,}85x^2 - 6{,}555x + 3{,}591}$$

$$p_2(x) = 0{,}154\,x^2 + 0{,}1838\,x + 0{,}51984$$



funções sobre os pontos

para encontrar a interseção basta igualar as funções

$$f_1(x) = 0{,}0152778\,x^2 - 0{,}5525\,x + 1{,}864 = f_2(x) = 0{,}154\,x^2 + 0{,}1838\,x + 0{,}51984$$

$$-0{,}154\,x^2 + 0{,}0152778\,x^2 - 0{,}5525\,x - 0{,}1838\,x = 0{,}51984 - 1{,}864$$

$$x \cong 1{,}43668$$

pela interpolação quadrática conclui-se que

o ponto de interseção se da em $x = 1{,}4367$

3. Com que grau de precisão podemos aproximar sqrt(115) usando interpolação quadrática sobre os pontos 100, 121 e 144?

Cálculo da interpolação:

x	100	121	144
$f(x)$	10	11	12

$$p(x) = 10\,\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)} + 11\,\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} + 12\,\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}$$

$$p(x) = \left(\frac{5x^2}{462} - \frac{1325x}{462} + \frac{1320}{7}\right) + \left(-\frac{11x^2}{483} + \frac{2684x}{483} - \frac{52800}{161}\right) + \left(\frac{3x^2}{253} - \frac{663x}{253} + \frac{3300}{23}\right)$$

$$p(x) = \frac{-x^2}{10626} + \frac{727x}{10626} + \frac{660}{161}$$

Como temos um intervalo $x \in [100, 144]$ e três pontos para interpolação, ou seja, uma interpolação quadrática, sabemos que o erro máximo é dado por:

$$E_{máx} = máx\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x)\right| \leq \frac{max_{x\in[100,144]}\, f^{(3)}(x)}{6}\, max\,|\omega(x)|$$

sendo $n=2$ (quadrática) e $f(x)=\sqrt{x}$, precisamos de $f^{(3)}(x) = (\sqrt{x})'''$:

$$f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{x^{-1/2}}{2} \qquad f''(x) = \frac{-x^{-3/2}}{4} \qquad \boxed{f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}}$$

como $f'''(x)$ decresce com x no intervalo, temos que seu máximo é em $x = 100$:

$$\frac{3}{8\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8\cdot 10^5} = máx_{x\in[100,144]}\, f^{(3)}(x)$$

além disso, já sabemos que $\boxed{\omega(x) = (x-100)(x-121)(x-144)}$

Como estamos avaliando o erro apenas em um ponto temos que:

$$|E(115)| \leq \frac{3}{8\cdot 10^5}\cdot\frac{(115-100)(115-121)(115-144)}{6}$$

$$E(115) \leq \frac{3\cdot 435}{8\cdot 10^5} = 0{,}00163125$$

grau de precisão da estimativa

4. Em quantos pontos é necessário tabelar a função cosseno para que a sua aproximação por interpolação linear tenha sempre erro inferior a 10 −4 ?

Como visto em aula, o erro máximo (E_{max}) é dado por:

$$E_{max} = max \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega(x) \right| \leqslant \frac{M_n}{n!} max |\omega(x)|$$

onde M_n é o máximo da n-ésima derivada e $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$ e x_i é a abscissa do i-ésimo ponto

Como a função cosseno é periódica sabemos os máximos e mínimos de todas as suas derivadas dentro de um período $[K, 2\pi K]$ onde $K = \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} f(x) = cos(x) \rightarrow max\ f(x) = 1 \text{ para todo } x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ f^{(n)}(x) = -sen(x) \rightarrow max\ f^{(n)}(x) = 1 \text{ para todo } x = 2m\pi - \frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{Z} \\ f^{(n+1)}(x) = -cos(x) \rightarrow max\ f^{(n+1)}(x) = 1 \text{ para todo } x = 2m\pi - \pi, m \in \mathbb{Z} \\ f^{(n+2)}(x) = sen(x) \rightarrow max\ f^{(n+2)}(x) = 1 \text{ para todo } x = 2m\pi + \frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{Z} \\ f^{(n+3)}(x) = cos(x) \rightarrow max\ f^{(n+3)}(x) = 1 \text{ para todo } x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \text{para } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Logo para qualquer intervalo $[K, 2\pi]$, ou até $[K, \pi K]$ sabemos que $max\ f^{(n)}(x) = 1$

Como a função cosseno é periódica e ondulada, a melhor alternativa de interpolação é por partes onde:

$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ são os n pontos divididos em intervalos tais que

$\bigcup_{j=1}^{m} I_j = [x_0, x_n]$ onde I_j tem extremo direito igual ao extremo esquerdo de I_{j+1}.

Assim é possível criar um polinômio interpolador P_j para cada I_j e criar a função interpoladora:

$$f(x) = P_j(x), \text{ se } x \in I_j \text{ para } x \in [x_0, x_n]$$

utilizando um spline linear sabemos que o erro máximo é dado por:

$$E_{máx} \leqslant \max_{x \in I_j} \left| \frac{f''(x)}{2} \right| \max \left| (x - x_{j-1})(x - x_j) \right| = \max_{x \in I_j} \left| \frac{f''(x)}{2} \right| \cdot \frac{1}{4} (x_j - x_{j-1})^2$$

$$E_{máx} \leqslant \frac{\text{máx}\, f''(x)\, (x_j - x_{j-1})^2}{8} = \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{8} \leqslant 10^{-4}$$

$$d^2 = (x_j - x_{j-1})^2 \rightarrow \frac{d^2}{8} \leqslant 10^{-4} \rightarrow d^2 = 8 \cdot 10^{-4} \rightarrow d = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-2}$$

$$n^{\circ}\text{ pontos} = \frac{2\pi}{2\sqrt{2}\, 10^{-2}} = \frac{\pi \sqrt{2} \cdot 100}{2} = 50\pi\sqrt{2} \cong 222{,}144 \cong 223 \text{ intervalos}$$

ou seja, precisamos de 224 pontos por intervalo $[k, 2\pi k]$ onde $k = \mathbb{N}$ para termos erro inferior à 10^{-4}.

5. Considere f , uma função contínua definida no intervalo [−1, 1].

(a) Construa o polinômio p que interpola f nos pontos −2/3 e 2/3.
Obs: Como você não sabe qual é a função terá que fazer isso de forma “teórica”.

(b) Utilizando o polinômio interpolador p, aproxime a integral de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, integrando p.
A resposta desse item é uma fórmula.

(c) Se f (x) = ln(x+2), calcule uma aproximação para −1 f (x)dx usando a estratégia da questão anterior e compare com o valor exato da integral. Qual foi o erro da sua aproximação?

a) $\begin{array}{c|cc} x & -2/3 & 2/3 \\ \hline f(x) & f(-2/3) & f(2/3) \end{array} \rightarrow p(x) = f(-2/3)\left(\frac{x-2/3}{-2/3-2/3}\right) + f(2/3)\left(\frac{x+2/3}{2/3+2/3}\right)$

$$p(x) = -3\,\frac{f(-2/3)(x-2/3)}{4} + \frac{3f(2/3)(x+2/3)}{4}$$

polinômio interpolador $\longrightarrow$ $p(x)\ \frac{3}{4}\left[f(2/3)(x+2/3) - f(-2/3)(x-2/3)\right]$

b) $\int_{-1}^{1} \frac{3}{4}\left[f(2/3)(x+2/3) - f(-2/3)(x-2/3)\right] dx$

$$\frac{3}{4}\left[\int_{-1}^{1} f(2/3)\,x\,dx + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} f(2/3)\,dx - \int_{-1}^{1} f(-2/3)\,x\,dx + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} f(-2/3)\,dx\right]$$

$$\frac{3}{4}\left[\int_{-1}^{1} f(2/3)\,x\,dx - \int_{-1}^{1} f(-2/3)\,x\,dx\right] + \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} f(2/3)\,dx + \int_{-1}^{1} f(-2/3)\,dx\right]$$

c) $f(x) = \ln(x+2) \rightarrow f(2/3) = \ln(8/3)$

$\hookrightarrow f(-2/3) = \ln(4/3)$

I) $\int_{-1}^{1} \ln(8/3)\,x\,dx = \ln(8/3)\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ III) $\int_{-1}^{1} \ln(8/3)\,dx = \ln(8/3)\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2\ln(8/3)$

II) $\int_{-1}^{1} \ln(4/3)\,x\,dx = \ln(4/3)\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ IV) $\int_{-1}^{1} \ln(4/3)\,dx = \ln(4/3)\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2\ln(4/3)$

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = \frac{1}{2}\left[2\ln(8/3) + 2\ln(4/3)\right] = \ln(8/3) + \ln(4/3) = \ln\left(\frac{32}{9}\right) = 1{,}26851133$$

$$\int_{-1}^{1} \ln(x+2)dx \rightarrow \begin{cases} u = x+2 \\ du = dx \end{cases} \rightarrow \int_{-1}^{1} \ln(u)\,du = u\ln(u) - u\Big|_{-1}^{1} = (x+2)\ln(x+2) - (x+2)\Big|_{-1}^{1}$$

$$\int_{-1}^{1} \ln(x+2)\, dx = 3\ln(3) - 3 - (\ln(1) - 1) = \log(27) - 2 = 1{,}295836866$$

Logo a aproximação calculada pelo polinômio foi:

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, dx \cong 1{,}2685$$

e o valor correto é:

$$\int_{-1}^{1} \ln(x+2)\, dx \cong 1{,}2958$$

ou seja, temos um erro de aproximadamente:

$$\left(\ln(27) - 2\right) - \ln(32/9) \cong 0{,}027326$$