

Gabarito Lista 3 - MS211 L - 2S 2021

Paulo J. S. Silva

Exercício 5. Suponha que A tem decomposição LU sem pivoteamento. Como é possível usar os fatores para calcular o determinante de A ? E para calcular o determinante da inversa de A , A^{-1} ? Justifique sua resposta.

Solução. Se A é uma matriz não singular com fatoração LU sem pivotamento, então existem matrizes triangulares L e U tal que $A = L \cdot U$ é uma fatoração LU de A . Desse modo, segue do Teorema de Binet que $\det(A) = \det(L \cdot U) = \det(L) \det(U)$.

Como L e U são matrizes triangulares, seus determinantes são dados pelo produto dos termos da diagonal principal. Sendo assim, como as entradas da diagonal principal de L são iguais a 1, segue que

$$\det(L) = 1 \Rightarrow \det(A) = \det(U) = \prod_{i=1}^n u_{ii}.$$

Agora, note que $A^{-1} = (L \cdot U)^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$. Então, como

$$\det(L^{-1}) = \det(L)^{-1} = 1 \quad \text{e} \quad \det(U^{-1}) = \det(U)^{-1},$$

segue que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(U)} = \frac{1}{\det(A)} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{u_{ii}}.$$