Lista 4 - MS211
2º sem. de 2021

Paulo J. S. Silva

Entrega: 14 outubro de 2021

Resolva os exercícios abaixo. Você deve entregar todos os exercícios feitos mas apenas um ou dois deles será(ão) corrigido(s).

Obs: Os exercícios devem ser feitos manualmente ou usando o computador/calculadora somente para fazer contas simples, sem a execução automática de laços por exemplo a menos que o enunciado explicite que o computador deve ser usado de forma programada.

1. Partindo da implementação do método de Jacobi abaixo, escreva uma variante que implementa o método de Gauss-Seidel.

```
using LinearAlgebra

function jacobi(A, b, maxiters = 100, prec = 1.0e-5)
    n = length(b)
    x = 1.0 ./ diag(A) .* b
    # Cria um vetor do mesmo tipo e comprimento de x
    xnovo = similar(x)
    iters = 0
    while iters < maxiters && norm(A*x - b) > prec
        for i = 1:n
            xnovo[i] = b[i]
            for j = 1:i - 1
                xnovo[i] = xnovo[i] - A[i, j]*x[j]
            end
            for j = i + 1:n
                xnovo[i] = xnovo[i] - A[i, j]*x[j]
            end
            xnovo[i] = xnovo[i] / A[i, i]
        end
        # Copia o valor de xnovo sobre x, coordenada a coordenada
        x .= xnovo
        iters = iters + 1
    end
```

```
    return x
end
```

2. Qual o número de FLOPs executado pelo método de Jacobi a cada iteração? Justifique a sua resposta.

3. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

   (a) É possível garantir facilmente a convergência do método de Jacobi para esse sistema (justifique)?

   (b) Realiza três iterações do método de Jacobi a partir de $x^0 = (1, 1, 1)^t$. Calcule o resíduo a cada iteração, ou seja $\|Ax - b\|$. O que parece que está ocorrendo? Há alguma contradição com a sua resposta do item (a)?

4. Represente graficamente o sistema não linear abaixo e use a figura para encontrar uma solução dos sistemas por inspeção. Se quiser, use o computador para desenhar a figura para você. Em seguida, confirme que a solução encontrada é exata avaliando as funções no ponto encontrado. Por fim, simule a execução do método de Newton partindo de $x^0 = (1.05, 1.07)^t$ e até que a a distância do ponto x^k obtido e uma raiz seja menor que 10^{-4}. Quantas iterações foram necessárias.

$$x_1^2 + x_2^2 = 2, \quad e^{x_1 - 1} + x_2^3 = 2.$$

   Obs: Para simular o método de Newton você pode usar os computador para resolver os sistemas lineares intermediários, mas precisa colocar informação de todos os passos, inclusive com uma indicação aproximada dos sistemas que foram resolvidos.

5. Exiba graficamente os pontos amostrados abaixo e ajuste, por quadrados mínimos, a curva $\phi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 + c_3 e^x$. Qual é o resíduo quadrático,

x	-2.00	-1.00	0.00	1.00	2.00	3.00
y	9.10	3.14	1.39	1.82	4.83	13.52

   ou seja, o valor de $\|\Phi c - y\|^2$ que é minimizado no método dos quadrados mínimos?

   Obs: Indique claramente qual sistema deve ser resolvido em função da matriz Φ. A resolução do sistema pode ser feita em um computador.

6. Esse exercício tenta "ensinar"que as vezes ajustes que não parecem lineares podem ser transformados em ajustes lineares. Considere que queremos ajustar uma curva na forma $\phi(x) = \alpha\sqrt{x}e^{\beta x}$ para diferentes valores de α e β. Com respeito a esses parâmetros não é possível fazer ajuste linear. O principal problema é que essa função é escrita como produto de outras funções e não soma. Mas há uma forma de contornar isso:

   (a) Considere $\tilde{\phi}(x) = \log_e \phi(x)$. Mostre que $\tilde{\phi}(x)$ pode ser vista como combinação linear de uma função com parâmetro fixo mais duas duas funções com parâmetros livres que podem ser facilmente calculados a partir de α e β e vice-versa. Note que, ao fazer isso, é possível ajustar $\tilde{\phi}(x)$ e partir dos seus parâmetros obter parâmetros de α e β que ajustam $\phi(x)$.

   (b) Usando a ideia sugerida acima, ajuste $\phi(x_i) \approx y_i$:

x	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	4.00	5.00	6.00
y	1.72	1.90	1.99	2.01	2.00	1.89	1.73	1.55

   Obs: Indique claramente qual sistema deve ser resolvido em função da matriz Φ. A resolução do sistema pode ser feita em um computador. E observe que estou pedindo para ajustar $\phi \approx y$ e não $\tilde{\phi} \approx y$.