In [27]:
```
using LinearAlgebra
using Plots
using LaTeXStrings
using Printf
```

João Pedro de Moraes Bonucci

1. Sejam A e B matrizes quadradadas. Prove que o produto AB é não singular se, e somente se, as matrizes A e B são não singulares.

In [ ]:

Por definição matrizes são singulares se forem matrizes quadradas cujo determinante é nulo. Assim podemos imaginar uma matriz A e uma matriz B tais que:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

assumindo que ambas as matrizes sejam singulares, valem as seguintes igualdades:

$$ad = bc$$

$$eh = fg$$

Agora temos que o produto destas será dado por : $AB = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$

e seu determinante é dado por :

$$(ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) = bcfg - adfg + eadh - ebch$$

que pode ser reescrito como:

$$(ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) = (bc)(fg) - (ad)(fg) + (ad)(eh) - (bc)(eh)$$

Prova A e B não singular $\rightarrow$ AB não singular:

Levando em conta a expressao anterior, se assumirmos que A e B são singulares, podemos aplicar as igualdades propostas e reescrevê-la da seguinte forma:

$$(ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) = (ad)(eh) - (ad)(eh) + (ad)(eh) - (ad)(eh)$$

Logo obviamente a matriz possui determinante zero e é quadrada, logo é sigular por definição. Vale notar que se as igualdades nao forem verdadeiras, A, B e AB nãoo podem ser singulares por definição.

Prova AB não singular $\rightarrow$ A e B não singular:

Diretamente da etapa anterior, se o determinante de AB é nulo, obrigatoriamente o determinante de A e de B é nulo, devido as igualdades necessárias para tal. Caso essas igualdades não sejam satisfeitas, AB, A e B não podem ser singulares.

2. Mostre, com argumentos claros, qual o número de operações de ponto flutuante necessários para realizar o produto de duas matrizes A ∈ R m×n e B ∈ R n×p . Qual seria esse valor se as duas matrizes fossem quadradas de dimensão n × n?

Desconsiderando a aquisição das dimensões das matrizes e inicialização de uma terceira matriz C, o código abaixo ilustra explicitamente um algoritmo de multiplicação não vetorizada de matrizes.

Podemos perceber que temos dois FLOP dentro de trÊs laços aninhados. Como o primeiro laço itera por m vezes, o segundo por q vezes e o terceiro por n vezes, o total de FLOPs é $m \cdot q \cdot n \cdot 2$ onde m é o número de linhas de A, q é o número de colunas de B e n é o número de colunas de A e de linhas de B.

Caso saibamos que as matrizes sao quadradas o número de FLOPs eh dado por $n^3 \cdot 2$.

In [28]:

```
# codigo explicito para multiplicacao de matrizes
function multi(A, B)
        m,n = size(A)
        p,q = size(B)
        if n != p
                return
        end
        C = zeros(m,q)
        for i in 1:m
                for j in 1:q
                        for k in 1:n
                                temp = A[i, k] * B[k, j]
                C[i, j] = C[i, j] + temp
                end
        end
        end
        return C
end
A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
B = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
C = multi(A,B)
print(C)
```

```
[30.0 36.0 42.0; 66.0 81.0 96.0; 102.0 126.0 150.0]
```

3.Utilizando eliminação de Gauss (escalonamento), resolva os sistemas

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 6 & 5 & 2 & 2 & 5 \\ -4 & -3 & 6 & 5 & -9 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 6 & 5 & 2 & 2 & 5 \\ -4 & -3 & 6 & 5 & -9 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -5 \\ 6 & 5 & 2 & 2 & 5 \\ -4 & -3 & 6 & 5 & -9 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -7 & 11 \\ -4 & -3 & 6 & 5 & -9 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -7 & 11 \\ 0 & -1 & 8 & 11 & -13 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -7 & 11 \\ 0 & -1 & 8 & 11 & -13 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 3/2 & 7/2 & -7/2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -7 & 11 \\ 0 & -1 & 8 & 11 & -13 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 3/2 & 7/2 & -7/2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 11 & -13 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 3/2 & 7/2 & -7/2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -8 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 3/2 & 7/2 & -7/2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -8 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -8 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -10/3 & 17/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -10/3 & 17/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -10/3 & 17/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{matrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 6 & 5 & -15 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 6 & 5 & -15 \end{matrix} \to$$

$$\begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -4 \\ 6 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 6 & 5 & -15 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -7 & 0 \\ -4 & -3 & 6 & 5 & -15 \end{matrix} \to$$

$$\begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 11 & -15 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 11 & -15 \end{matrix} \to$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 3/2 & 7/2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 11 & -15 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & 3/2 & 7/2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 8 & 11 & -15 \end{matrix} \to$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 3/2 & 7/2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -11 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & 3/2 & 7/2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -11 \end{matrix} \to$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -11 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -10/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{matrix} \to$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -10/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -10/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \to$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

4. Compute os fatores L e U , da decomposição LU sem pivotemento, das matrizes do execício anterior e depois resolva

os sistemas baseado nesses fatores. Obs: Se você for esperto, não tem que fazer conta para apresentar os fatores L e U .

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Para resolver $Ax = B$ savendo L e U podemos resolver o sistema: $\begin{matrix} Ly = b \\ Ux = y \end{matrix}$

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix} \quad \rightarrow y = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \\ -10 \end{bmatrix} \quad \rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix} \quad \rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Suponha que A tem decomposição LU (sem pivotemanto). Como é possível usar os fatores para calcular o determinante de A? E para calcular o determinante da inversa de A, A^{-1} ? Justifique a sua resposta.

Sabemos que $A = LU$ logo $det(A) = det(LU)$ pelas propriedades do determinante temos que $det(LU) = det(L)det(U)$. As propriedades do determinante também nos garantem que o determinante de uma matriz triangular é dado pela mutliplicação de sua diagonal principal, logo temos que $det(A) = \prod_{i=1}^{N} L_{ii} \cdot \prod_{i=1}^{N} U_{ii}$

Para achar o determinante da inversa podemos utilizar a mesma propriedade e calcular as inversas de L e U. Como estas sao matrizes trialgulares, precisamos apenas inverter a razão de cada termo não nulo (i.e. se $L_{ii} \neq 0 \rightarrow L_{ii} = 1/L_{ii}$). Assim conseguimos o determinante da inversa de forma bem mais simples.

6. Resolva o sistema linear abaixo com e sem pivoteamento, utilizando um sistema de ponto flutuante com quatro dígitos significativos. Note que x = y = 1 é a solução exata.

$$L = \begin{bmatrix} 1.133 & 5.281 \\ 24.14 & -1.210 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6.414 \\ 22.930 \end{bmatrix}$$

Compare a qualidade das soluções numéricas obtidas.

Versão sem pivoteamento

$$\begin{matrix} 1.133 & 5.281 & 6.414 \\ 24.14 & -1.211 & 22.93 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1.133 & 5.281 & 6.414 \\ 24.13 - 24.14 & 112.4 - (-1.211) & 136.6 - 22.93 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1.133 & 5.281 & 6 \\ 0.01 & 113.6 & 1 \end{matrix}$$

$$x_2 = \frac{113.6 - 0.01x_1}{113.6}$$

$$1.133x_1 + 5.281 \cdot (1 + \frac{-0.01x_1}{113.6}) = 6.414$$

$$\frac{128.7x_1 + 5.281 - 5.281 \cdot 0.01x_1}{113.6} = 6.414$$

$$\frac{128.7x_1 + 5.281 - 0.05281x_1}{113.6} = 6.414$$

$$\frac{128.6x_1 + 5.281}{113.6} = 6.414$$

$$128.6x_1 + 5.281 = 728.6$$

$$128.6x_1 = 723.3$$

$$x_1 = 5.624$$

$$x_2 = \frac{113.5}{113.6} = 0.9991$$

Versão com pivoteamento

$$\begin{matrix} 24.14 & -1.211 & 22.93 \\ 1.133 & 5.281 & 6.414 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 24.14 & -1.211 & 22.93 \\ 24.13 - 24.14 & -1.211 - 112.4 & 22.93 - 136.6 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 24.14 & -1.211 & 2 \\ 0.01 & -113.6 & - \end{matrix}$$

$$x_2 = \frac{-113.6 - 0.01x_1}{-113.6} = 1 - \frac{0.01x_1}{113.6}$$

$$24.14x_1 - 1.211(1 - \frac{0.01x_1}{113.6}) = 22.93$$

$$\frac{2742x_1 - 1.211 + 0.01211x_1}{113.6} = 22.93$$

$$\frac{2742x_1 - 1.211}{113.6} = 22.93$$

$$2742x_1 - 1.211 = 2604$$

$$2742x_1 = 2605$$

$$x_1 = 0.9500$$

$$0.01 \cdot 0.9500 \qquad 0.0095$$

7. Se

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 3/4 & 1 & 0 \\ 4/5 & 2/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} e \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são os fatores da decomposição LU com pivoteamento de uma matriz A,resolva o sistema linear $Ax = b$ para $b = (-5, 5, -7, -4.5)^t$.

$$Ly = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 3/4 & 1 & 0 \\ 4/5 & 2/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -7 \\ -4.5 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow y = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -13.5 \\ -18.25 \end{bmatrix}$$

$$Ux = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -13.5 \\ -18.25 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow x = \begin{bmatrix} 526/15 \\ 1037/24 \\ -50 \\ 73/12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 526/15 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1037/24 \end{bmatrix}$$