Gabarito Lista 2 - MS211 L - 2S 2021
Paulo J. S. Silva

Exercício 2. Quantas raízes a função $f(x) = x^{-1/2} - e^{x/5}$ possui? Se possível, exiba um intervalo que contém uma raiz.
Obs: A função não tem domínio em toda a reta real.

Solução. Primeiramente, como $x^{-1/2}$ não está definido para $x \leq 0$, segue que f está definida para $x > 0$ (e é contínua). Ao se tentar analisar o comportamento da função, obtemos que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Logo, esses limites garantem que existem $0 < a < b$ tais que $f(a) \cdot f(b) < 0$ e, portanto, f possui pelo menos uma raiz. Vamos utilizar a derivada de f para nos ajudar a entender seu comportamento. Temos que

$$f'(x) = \frac{x^{3/2}}{2} - \frac{e^{x/5}}{5} = -\left(\frac{x^{3/2}}{2} + \frac{e^{x/5}}{5}\right)$$

para todo $x > 0$. Note que $x^{3/2}$ e $e^{x/5}$ são positivos e, então, $f'(x) < 0$ em todo o domínio. Sendo assim, segue que f é decrescente e possui uma única raiz.

Para acharmos um intervalo que contém uma raiz, devemos calcular a função em alguns pontos. Veja que $f(1) = 1 - e^{1/5} < 0$ pois $e^{1/5} > e^0 = 1$. Dessa forma, a raiz está entre 0 e 1. Como f não está definida em 0, vamos procurar outro ponto para analisar. Assim, $f(1/2) = (1/2)^{-1/2} - e^{1/10} = \sqrt{2} - e^1/10 > 0$. Consequentemente, a raiz se encontra em $[1/2, 1]$.

Observação. Pontos importantes:

- garantir a existência da solução através do Teorema de Bolzano;
- garantir a unicidade pelo fato da derivada não mudar de sinal;
- apresentar um intervalo $[a, b]$ que contenha a solução.

Erros recorrentes:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ não garantem a unicidade da solução, apenas a existência;
- gráfico serve apenas como auxílio visual, não como argumento matemático;
- analisar a derivada num intervalo $[a, b]$ não é suficiente para concluir a existência, tem que ser para todo $x > 0$;
- $f'(a)$ e $f'(b)$ terem o mesmo sinal não implica que a derivada não muda de sinal no intervalo (a, b).

Exercício 4. Deduza um método para computo da raiz cúbica de um número x a partir do método de Newton, de forma análoga ao que fizemos com a raiz quadrada nas notas de aula. Aplique 4 passos do método para calcular a raiz cúbica de 10 partindo do número 3. Quantas casas decimais corretas a aproximação obtida possui?

Solução. Para calcular a raiz cúbica de 10, definimos a função $f(x) = x^3 - 10$, sendo $f'(x) = 3x^2$. Desse modo, o processo iterativo do método de Newton é dado pela expressão

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{(x_k^3 - 10)}{3x_k^2} = \frac{2}{3}x_k + \frac{10}{3x_k^2}\,,$$

que nos fornece, partindo de $x0 = 3$,

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2,370370370370370\,,\\
x_2 &= 2,173508632330247\,,\\
x_3 &= 2,154601586556419\,,\\
x_4 &= 2,154434702959438\,.
\end{aligned}$$

Comparando x_4 com o valor dado pelo computador: $\sqrt[3]{10} = 2.154434690031884$, vemos que x_4 possui seis casas decimais iguais ao valor desejado (sete casas da mantissa se considerarmos o 2 antes da vírgula) e erro da ordem de 10^{-8}

Observação. Pontos importante:

- definir f, calcular f' e construir o processo iterativo;
- realizar os cálculos considerando um número grande de casas decimais (de preferência no computador);
- apresentar o resultado de cada etapa da iteração é importante, bem como realizá-las corretamente;
- apresentar o valor de $\sqrt[3]{10}$ dado pelo computador ou calculadora e
- comparar o resultado da etapa 4 para obter o número de casas que coincidem com a resposta dada pelo computador.