Analyse Numérique
Corrigé Série 2

3 octobre 2019

1. $\star$ (**Différences divisées**)

   (a) Soient (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$ des points d'abscisses $x_0, \ldots, x_n$ distincts deux-à-deux. En utilisant la formule de Newton, montrer que la différence divisée $\delta^n y[x_0, \ldots, x_n]$ est une fonction symétrique, c'est-à-dire que pour chaque permutation σ de $\{0, 1, \ldots, n\}$ on a

   $$\delta^n y[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}] = \delta^n y[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

   Indication : identifier le coefficient de x^n lorsqu'on décompose dans la base canonique $(1, x, \ldots, x^n)$ de $\mathbb{P}_n$ le polynôme d'interpolation de degré inférieur ou égal à n passant par les points $(x_i, y_i), i = 0, \ldots, n$.

   Sol.: *D'après la formule de Newton, le polynôme d'interpolation de degré inférieur ou égal à n est donné par*

   $$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

   avec, en particulier, $c_n = \delta^n y[x_0, \ldots, x_n]$. Or $(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) = x^k + \ldots$ est de degré k, donc c_n est le coefficient de x^n lorsqu'on décompose p dans la base canonique $(1, x, \ldots, x^n)$. Comme le polynôme d'interpolation $p(x)$ est unique, c_n ne dépend pas de l'ordonnancement des x_i, d'où le résultat.

   (b) Pour approcher la dérivée $f'(x_0)$ en x_0 d'une fonction f régulière, une approximation possible est donnée par la première différence divisée

   $$f'(x_0) \simeq \delta f[x_0, x_1] \coloneqq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \qquad \text{avec } x_1 = x_0 + h.$$

   Montrer, à l'aide d'un développement de Taylor, que $f'(x_0) - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = O(h)$.

   Sol.: *Par la formule de Taylor, si f est de classe C^2, $f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + O(h^2)$, d'où $f'(x_0) - (f(x_1) - f(x_0))/h = O(h)$.*

2. (**Erreur d'interpolation**) On verra en cours le Théorème 1.5 concernant l'erreur d'interpolation. Dans cet exercice, on considère une fonction f deux fois dérivable sur $[-1, 1]$ et p son polynôme d'interpolation passant par $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ (a et b distincts et $a, b \in [-1, 1]$). Alors pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe $\xi(x) \in [-1, 1]$ tel que

   $$f(x) - p(x) = (x - a)(x - b)\frac{f''(\xi(x))}{2}.$$

   (a) Déterminer explicitement la fonction $\xi(x)$ dans le cas où $f(x) = \frac{1}{x-5}$.

   Sol.: *On a $p(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) = \frac{a+b-x-5}{(a-5)(b-5)}$. Ainsi,*

   $$\frac{f(x) - p(x)}{(x - a)(x - b)} = \frac{1}{(a - 5)(b - 5)(x - 5)}.$$

   Or $\frac{1}{2}f''(\xi) = \frac{1}{(\xi-5)^3}$, d'où

   $$\xi(x) = \sqrt[3]{(a - 5)(b - 5)(x - 5)} + 5.$$

   (b) L'erreur d'interpolation est un produit de $f''(\xi(x))/2$ et de l'expression $(x - a)(x - b)$. Cette dernière expression ne dépend que du choix des points d'interpolation a et b. Un choix raisonnable serait alors $a,\ b \in [-1, 1]$ tels que la quantité

   $$\max_{x\in[-1,1]} |(x - a)(x - b)|$$

   soit minimisée par rapport aux $a,\ b$. C'est ce qu'on va faire dans cette partie de l'exercice.

i. Trouver les maxima (locaux et globaux) de la fonction $|(x-a)(x-b)|$ pour $x \in [-1,1]$. Vous devriez parvenir au problème d'optimisation suivant :

$$\min_{a,b\in[-1,1]} \max\left\{\frac{1}{4}(a-b)^2,\ (1+a)(1+b),\ (1-a)(1-b)\right\}. \tag{1}$$

Sol.: *En appelant*

$$g(x) := |(x-a)(x-b)|,$$

on calcule la dérivée de $g(x)^2$ et on cherche ses racines pour trouver les extrema :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[g(x)^2\right] = 2(x-a)(x-b)(2x-(a+b)) = 0,$$

dont les solutions sont $x = a,\ x = b,\ x = (a+b)/2$. En ces points on obtient les valeurs $g(a) = 0,\ g(b) = 0,\ g((a+b)/2) = \frac{1}{4}(a-b)^2$, dont seulement

$$\frac{1}{4}(a-b)^2$$

peut être une valeur maximale.
On doit aussi calculer $g(x)$ sur le bord du domaine, c.-à-d., pour $x = \pm 1$. On obtient :

$$g(-1) = |(-1-a)(-1-b)| = |(1+a)(1+b)| = (1+a)(1+b),$$

$$g(1) = |(1-a)(1-b)| = (1-a)(1-b),$$

où nous avons supprimé les valeurs absolues dans les dernières expressions car $a, b \in [-1,1]$. Donc le problème d'optimisation revient à

$$\min_{a,b\in[-1,1]} \max\left\{\frac{1}{4}(a-b)^2,\ (1+a)(1+b),\ (1-a)(1-b)\right\}.$$

ii. Les fonctions $\frac{1}{4}(a-b)^2,\ (1+a)(1+b),\ (1-a)(1-b)$ sur le carré $[-1,1]^2 \in \mathbb{R}^2$ sont visualisées dans la Figure 1. Résolvez le problème d'optimisation (1) à l'aide de cette figure.

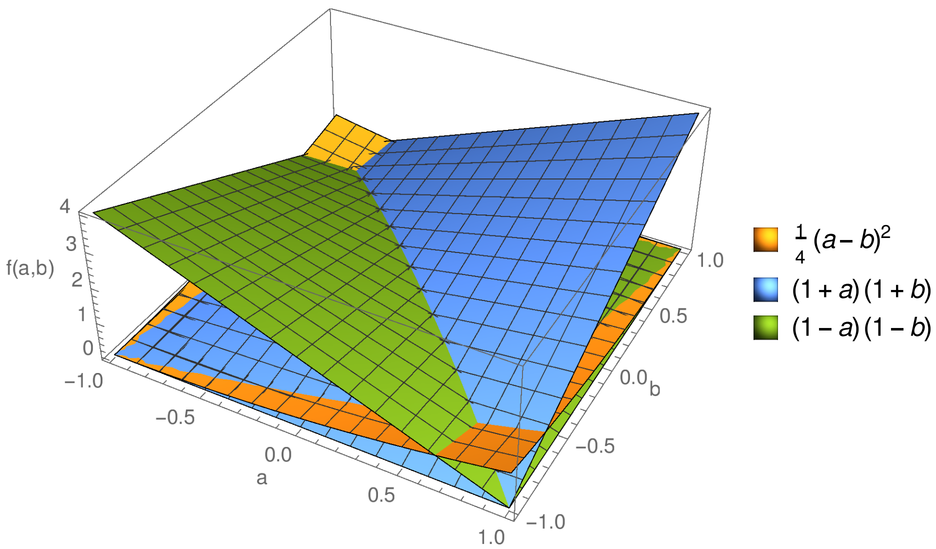

FIGURE 1 – Les trois fonctions $\frac{1}{4}(a-b)^2,\ (1+a)(1+b),\ (1-a)(1-b)$.

Sol.: *À l'aide du graphique, on observe que si les minima sont atteints alors $b = -a$. Le problème se réduit à*

$$\min_{b\in[0,1]} \max\left\{b^2,\ 1-b^2\right\},$$

où l'on considère seulement $b \in [0,1]$ car les deux fonctions sont symétriques. À l'aide d'un petit dessin, on remarque que le minimum est atteint pour $b = \sqrt{2}/2$. On verra plus tard en cours que le choix $a = -\sqrt{2}/2$, $b = \sqrt{2}/2$ correspond aux points d'interpolation de Chebyshev. On constate donc que choisir des points d'interpolation équidistants n'est pas le meilleur choix.

(c) Calculer l'erreur d'interpolation $\|f(x) - p(x)\|_\infty$, $x \in [-1,1]$, avec $f(x)$ et $p(x)$ comme au point (a). Considérez les deux choix suivants pour les points d'interpolation : $b = -a = 1/2$ et $b = -a = \sqrt{2}/2$. Pour faire ce calcul, vous aurez besoin d'un outil numérique, par exemple MATLAB, Mathematica, Maple. Qu'est-ce que vous observez ?

Sol.: *Mathematica donne la réponse :*

```
N[Maximize[{Abs[(x ^2 - (1 / 2) ^2) / (((1 / 2) ^2 - 25) * (x - 5))], Abs[x] ≤ 1}, {x}]]
{0.00757576, {x → 1.}}

N[Maximize[{Abs[(x ^2 - (1 / Sqrt[2]) ^2) / (((1 / Sqrt[2]) ^2 - 25) * (x - 5))], Abs[x] ≤ 1}, {x}]]
{0.00510204, {x → 1.}}
```

On remarque que l'erreur d'interpolation est plus petite lorsqu'on choisi les points de Chebyshev.