TP 2

Exercice 1 : Langages Finis

.1)

On veut prouver que la propriété (3) est applicable à n langages.

$$\text{P(n)}\frac{L_1, ..., L_n \in Rat(\Sigma)}{L_1 \cup ... \cup L_n \in Rat(\Sigma)}$$

Cas de base :

$$\text{P(n=2)}\frac{L_1, L_2 \in Rat(\Sigma)}{L_1 \cup L_2 \in Rat(\Sigma)}$$

On suppose que la propiété P(n) est vraie, on démontre P(n+1) :

$$\text{P(n)} \vdash \text{P(n+1)}\frac{L_1, ..., L_{n+1}, (L_1 \cup ... \cup L_n) \in Rat(\Sigma)}{(L_1 \cup ... \cup L_{n+1}) = ((L_1 \cup ... \cup L_n) \cup L_{n+1}) \in Rat(\Sigma)}$$

Par hypothese on sait que $(L_1 \cup ... \cup L_n) \in Rat(\Sigma)$, mettons $(L_1 \cup ... \cup L_n)$=A, ensuite on a $A \cup L_{n+1} \in Rat(\Sigma)$ qui nous ramène au cas de base.

.2)

On veut prouver que la propriété (4) est applicable à n langages.

$$\text{P(n)}\frac{L_1, ..., L_n \in Rat(\Sigma)}{L_1 \cdot ... \cdot L_n \in Rat(\Sigma)}$$

Cas de base :

$$\text{P(n=2)}\frac{L_1, L_2 \in Rat(\Sigma)}{L_1 \cdot L_2 \in Rat(\Sigma)}$$

On suppose que la propiété P(n) est vraie, on démontre P(n+1) :

$$\text{P(n)} \vdash \text{P(n+1)}\frac{L_1, ..., L_{n+1}, (L_1 \cdot ... \cdot L_n) \in Rat(\Sigma)}{(L_1 \cdot ... \cdot L_{n+1}) = ((L_1 \cdot ... \cdot L_n) \cdot L_{n+1}) \in Rat(\Sigma)}$$

Par hypothese on sait que $(L_1 \cdot ... \cdot L_n) \in Rat(\Sigma)$, mettons $(L_1 \cdot ... \cdot L_n)$=A, ensuite on a $A \cdot L_{n+1} \in Rat(\Sigma)$ qui nous ramène au cas de base.

.3)

Soit A_n un langage fini composé de i mots tous de taille n.

Alors pour tout mot $w_i \in A_n$, on peut créer w_i en faisant la concaténation de n singletons. On a alors $w_i = l_1 \cdot\ ...\ \cdot l_n$. ($l_j$ = jème lettre de w_i).

Finalement on peut créer A_n en faisant l'union de tous les mots $A_n = w_1 \cup\ ...\ \cup w_i$

Vu qu'on utilise que des opérations définies pour les langages rationnels, alors A_n l'est aussi.

.4)

Soit L un langage fini composé de i mots chacun de taille quelconque.

Alors pour tout mot $w_i \in L$, on peut créer w_i en faisant la concaténation de singletons, comme avant, sauf que maintenant chaque mot w_i peut avoir une taille diffèrente.

Ensuite on crée L comme on a crée A_n dans l'exercice précedent (avec l'union).

Vu qu'on utilise des opérations définies pour les langages rationnels, alors L l'est aussi.

Exercice 2 : Langages Miroirs

.1)

Reflexivite $\dfrac{L}{Miroir(Miroir(L))\ =\ L}$

Ensemble vide $\dfrac{L\ =\ \emptyset}{Miroir(L)\ =\ \emptyset}$

Singleton $\dfrac{a \in \Sigma}{Miroir(\{a\})\ =\ \{a\}}$

Union $\dfrac{L_1, L_2}{Miroir(L_1 \cup L_2)\ =\ Miroir(L_1) \cup Miroir(L_2)}$

Concaténation $\dfrac{L_1, L_2}{Miroir(L_1 \cdot L_2)\ =\ Miroir(L_2) \cdot Miroir(L_1)}$

.2)

Ici on veut prouver que L $\in$ Rat(Σ) $\vdash$ Miroir(L) $\in$ Rat(Σ).

$$\text{P(n)}\frac{L^n \in Rat(\Sigma)}{Miroir(L^n) \in Rat(\Sigma)}$$

Cas de base :

$$\text{P(n=0)}\frac{L, L^0 = \{\varepsilon\} \in Rat(\Sigma)}{Miroir(\{\varepsilon\}) = \{\varepsilon\} \in Rat(\Sigma)}$$

Car $\{\varepsilon\}$ est un singleton.

On suppose que la propiété P(n) est vraie, on démontre P(n+1) :

$$\text{P(n)} \vdash \text{P(n+1)}\frac{L^{n+1} = L^1 \cdot L^n = L \cdot L^n, Miroir(L^n) \in Rat(\Sigma)}{Miroir(L^{n+1}) = Miroir(L \cdot L^n) = Miroir(L^n) \cdot Miroir(L) \in Rat(\Sigma)}$$

Par hypothese on sait que $Miroir(L^n) \in Rat(\Sigma)$, et par (1.4) on sait qu'on peut construire chaque mot de L avec des operations Rationnels, on peut de la meme facon construire Miroir(L) en inversant l'ordre des lettres dans les mots, alors on a $Miroir(L^n) \cdot Miroir(L) \in Rat(\Sigma)$.

Exercice 3 : Mots de taille fixe

.1)

Soil L un langage rationel :

Cas (1) Le langage L est le langage vide, dans quel cas L n'a aucun mot, et donc : L = $\emptyset$ = $L_{\geq 0}$.

Cas (2) Le langage L est non vide, alors il contient des mots, tout mot a une taille de au moins 0 (le mot vide ε a une taille 0), et tout autre mot a une taille plus grande que 0. Donc : L = $\emptyset$ = $L_{\geq 0}$.

Avec **(1) et (2)** on conclut que L = $L_{\geq 0}$ et vu que L est rationnel par hypothèse, $L_{\geq 0}$ est aussi rationnel.

.2)

Ici on veut prouver que pour L $\in$ Rat(Σ), alors $L_{\geq n}$ $\in$ Rat(Σ).

$$\text{P(n)}\frac{L \in Rat(\Sigma)}{L_{\geq n} \in Rat(\Sigma)}$$

Cas de base :

$$\text{P(n)}\frac{L \in Rat(\Sigma)}{L_{\geq 0} \in Rat(\Sigma)} \qquad \text{Demontre avec l'exercice (3.1).}$$

On suppose que la propiété P(n) est vraie, on démontre P(n+1) :

$$\text{P(n)} \vdash \text{P(n+1)}\frac{L, L_{\geq n}, A_n \in Rat(\Sigma)}{L_{\geq n+1} = L_{\geq n} \backslash A_n \in Rat(\Sigma)}$$

Vu que $L_{\geq n+1} \subset L_{\geq n}$, ca veut dire qu'on peut tout simplement enlever A_n, qui est l'ensemble qui contient tous les mots de L qui on exactement n lettres, à $L_{\geq n}$, et ca nous donne $L_{\geq n}$ sans les mots qui ont n lettres = $L_{\geq n+1}$

.3)

Soit L un langage rationel, on a démontré dans la question (1.4) qu'on pouvait construire L avec les opérations Rationnels, en construisant chaque mot comme une concaténation de singletons, et ensuite l'union de tous les mots donne L.

La seule chose que nous devons changer pour la question (3.3), c'est de garder que les mots qui ont au moins m lettres, avec m $\geq$ n.

Soit $w_1 = l_1 \cdot \ ... \ \cdot l_m$, vu que w_1 a m lettres, alors on le garde dans l'union, si w_1 avait moins de m lettres, alors on le garderait pas, car il respecte pas la condition de $L_{\geq n}$.