Analyse Numérique
Exercices – Série 1

1. (**Polynômes d'interpolation et système de Vandermonde**)
   (a) Calculer le polynôme de plus petit degré qui passe par les points :
   $$(x_0, y_0) = (-2, 3), \quad (x_1, y_1) = (-1, -2), \quad (x_2, y_2) = (0, -1),$$
   par les méthodes de Lagrange et de Newton. Vérifier que les deux méthodes donnent le même résultat.

   (b) Une méthode d'interpolation alternative à celle vue en cours consiste en la résolution d'un système linéaire pour déterminer les coefficients du polynôme. Étant donnés les points $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ (x_i distincts et $x_i \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$), on cherche le polynôme d'interpolation $p(x)$ tel que $p(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$.

      i. Donner explicitement le système linéaire à résoudre afin de déterminer les coefficients de $p(x)$ dans la base canonique $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.
      Indice : Écrire $p(x)$ dans la forme $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ pour chaque point $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$.

      ii. La matrice ainsi obtenue est appelée matrice de Vandermonde. En utilisant les données du point 1.(a), calculer le polynôme d'interpolation en résolvant le système linéaire correspondant.

      iii. Écrire le système linéaire sous forme matricielle pour trouver le polynôme $p(x)$ de degré 2 qui passe par les points :
      $$(x_0, y_0) = (-2, 3), \quad (x_1, y_1) = (-2, -2), \quad (x_2, y_2) = (1, 1).$$
      On aura trois coefficients inconnus et trois équations. A priori, est-ce qu'il est raisonnable de penser que le polynôme d'interpolation $p(x)$ existe ? Pourquoi ? Montrer qu'il n'existe pas de polynôme satisfaisant ces conditions.
      Indication : Construire un système linéaire comme au point précédent et montrer que la matrice obtenue n'est pas inversible.

2. $\star$ (**Polynômes d'interpolation**)
   (a) Calculer le polynôme de plus petit degré qui passe par les points :
   $$(-2, -53) \quad (-1, -12) \quad (0, -5) \quad (1, 16)$$
   par les méthodes de Lagrange et Newton. Vérifier que les deux méthodes donnent le même résultat.

   (b) On va démontrer en cours que pour l'erreur d'interpolation linéaire de f aux points x_0, x_1, pour tout $0 \leq a < x \leq b$ avec $x_0, x_1 \in [a, b]$, il existe $\xi(x) \in [a, b]$ tel que
   $$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(\xi(x))}{2}, \qquad x_0 < x < x_1,$$
   avec f une fonction deux fois dérivable sur $[x_0, x_1]$. Déterminer explicitement la fonction $\xi(x)$ dans le cas où $f(x) = \frac{1}{x}$ et $0 < x_0 < x_1$. Trouver $\max_{a \leq x \leq b} \xi(x)$ et $\min_{a \leq x \leq b} \xi(x)$.

3. $\star$ (**Différences divisées et polynômes d'Hermite**) On considère la fonction $f(x) = e^x$ et les points d'abscisse $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = t$, avec $t \in \mathbb{R}, t > 0$.
   (a) Calculer en fonction de t le polynôme d'interpolation $p_2(x)$ de $f(x)$ associé aux points x_0, x_1 et x_2, en utilisant la formule de Newton.

   (b) Considérer la limite pour $t \to 0$. A quoi correspond la limite de $\delta f[x_1, x_2]$ pour $t \to 0$? Quel est le « polynôme d'interpolation limite » ? Quel type de condition d'interpolation satisfait en x_1 ?