# Analyse Numérique
# Corrigé Série 1

1. (**Polynômes d'interpolation et système de Vandermonde**)

(a) Calculer le polynôme de plus petit degré qui passe par les points :

$$(x_0, y_0) = (-2, 3), \quad (x_1, y_1) = (-1, -2), \quad (x_2, y_2) = (0, -1),$$

par les méthodes de Lagrange et de Newton. Vérifier que les deux méthodes donnent le même résultat.

***Sol.:***

i. *(Lagrange)*
*Pour chaque point $(x_i, y_i)$ on a le polynôme de Lagrange $\ell_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$. Pour nos points on a :*

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \tfrac{1}{2}(x+1)\,x, \\ l_1(x) &= -(x+2)\,x, \\ l_2(x) &= \tfrac{1}{2}(x+2)(x+1). \end{aligned}$$

*La formule d'interpolation de Lagrange $p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, \ell_i(x)$ donne*

$$p(x) = 3x^2 + 4x - 1.$$

ii. *(Newton)*
*On calcule les différences divisées*

| $x_i$ | $y_i$ | $\delta y[x_i, x_{i+1}]$ | $\delta^2 y[x_0, x_1, x_2]$ |
|---|---|---|---|
| $-2$ | $\mathbf{3}$ | | |
| | | $\mathbf{-5}$ | |
| $-1$ | $-2$ | | $\mathbf{3}$ |
| | | $1$ | |
| $0$ | $-1$ | | |

*La formule d'interpolation de Newton $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \prod_{0\leq j<k}(x - x_j)$ donne :*

$$p(x) = 3x^2 + 4x - 1.$$

(b) Une méthode d'interpolation alternative à celle vue en cours consiste en la résolution d'un système linéaire pour déterminer les coefficients du polynôme. Étant donnés les points $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ ($x_i$ distincts et $x_i \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$), on cherche le polynôme d'interpolation $p(x)$ tel que $p(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$.

i. Donner explicitement le système linéaire à résoudre afin de déterminer les coefficients de $p(x)$ dans la base canonique $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.
*Indice : Écrire $p(x)$ dans la forme $p(x) = a_0 + a_1\, x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ pour chaque point $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$.*
***Sol.:***

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

ii. La matrice ainsi obtenue est appelée matrice de Vandermonde. En utilisant les données du point 1.(a), calculer le polynôme d'interpolation en résolvant le système linéaire correspondant.

***Sol.:*** *Le système obtenu est le suivant :*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:M} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{b}}.$$

*Puisque le déterminant de la matrice $M$ est non nul, le système admet une solution donnée par $\boldsymbol{a} = M^{-1}\boldsymbol{b}$ ; en fait $\boldsymbol{a} = (-1, 4, 3)^\top$.*

iii. Écrire le système linéaire sous forme matricielle pour trouver le polynôme $p(x)$ de degré 2 qui passe par les points :

$$(x_0, y_0) = (-2, 3), \quad (x_1, y_1) = (-2, -2), \quad (x_2, y_2) = (1, 1).$$

On aura trois coefficients inconnus et trois équations. A priori, est-ce qu'il est raisonnable de penser que le polynôme d'interpolation $p(x)$ existe ? Pourquoi ? Montrer qu'il n'existe pas de polynôme satisfaisant ces conditions.

*Indication : Construire un système linéaire comme au point précédent et montrer que la matrice obtenue n'est pas inversible.*

***Sol.:*** *On obtient le système :*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=:M} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{b}}.$$

*Comme le déterminant de la matrice $M$ est nul, le système n'admet pas de solution.*

2. $\star$ (**Polynômes d'interpolation**)

(a) Calculer le polynôme de plus petit degré qui passe par les points :

$$(-2, -53) \quad (-1, -12) \quad (0, -5) \quad (1, 16)$$

par les méthodes de Lagrange et Newton. Vérifier que les deux méthodes donnent le même résultat.

***Sol.:***

*i. (Lagrange) On a les polynômes de Lagrange*

$$\begin{aligned} l_{-2}(x) &= -(x+1)x(x-1)/6 = -x^3/6 + x/6 \\ l_{-1}(x) &= (x+2)x(x-1)/2 = x^3/2 + x^2/2 - x \\ l_0(x) &= -(x+2)(x+1)(x-1)/2 = -x^3/2 - x^2 + x/2 + 1 \\ l_1(x) &= (x+2)(x+1)x/6 = x^3/6 + x^2/2 + x/3 \end{aligned}$$

*Finalement on obtient*

$$p(x) = -53l_{-2}(x) - 12l_{-1}(x) - 5l_0(x) + 16l_1(x) = 8x^3 + 7x^2 + 6x - 5.$$

*ii. (Newton) On a les différences divisées suivantes*

$$\left[\begin{array}{c|c|cccc} -2 & \boldsymbol{-53} & & & \\ -1 & -12 & \boldsymbol{41} & & \\ 0 & -5 & 7 & \boldsymbol{-17} & \\ 1 & 16 & 21 & 7 & \boldsymbol{8} \end{array}\right]$$

*On écrit le polynôme d'interpolation à l'aide de différences divisées*

$$p(x) = -53 + (x+2)\Big(41 + (x+1)\big(-17+8x\big)\Big)$$

*qui après simplification donne le même résultat*

$$p(x) = 8x^3 + 7x^2 + 6x - 5.$$

(b) On va démontrer en cours que pour l'erreur d'interpolation linéaire de $f$ aux points $x_0, x_1$, pour tout $0 \leq a < x \leq b$ avec $x_0, x_1 \in [a,b]$, il existe $\xi(x) \in [a,b]$ tel que

$$f(x) - p(x) = (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(\xi(x))}{2}, \qquad x_0 < x < x_1,$$

avec $f$ une fonction deux fois dérivable sur $[x_0, x_1]$. Déterminer explicitement la fonction $\xi(x)$ dans le cas où $f(x) = \frac{1}{x}$ et $0 < x_0 < x_1$. Trouver $\max_{a \leq x \leq b} \xi(x)$ et $\min_{a \leq x \leq b} \xi(x)$.
***Sol.:*** *On a* $p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0) = \frac{1}{x_0} - \frac{x-x_0}{x_0x_1}$. *Ainsi,* $\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)(x-x_1)} = \frac{1}{xx_0x_1}$. *Or* $\frac{1}{2}f''(\xi) = \frac{1}{\xi^3}$, *d'où*

$$\xi(x) = \sqrt[3]{xx_0x_1}.$$

*Le minimum et le maximum de cette fonction croissante sur* $[a,b]$ *sont donnés respectivement par* $\sqrt[3]{ax_0x_1}$ *et* $\sqrt[3]{bx_0x_1}$.

3. $\star$ (**Différences divisées et polynômes d'Hermite**) On considère la fonction $f(x) = e^x$ et les points d'abscisse $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = t$, avec $t \in \mathbb{R}, t > 0$.

(a) Calculer en fonction de $t$ le polynôme d'interpolation $p_2(x)$ de $f(x)$ associé aux points $x_0$, $x_1$ et $x_2$, en utilisant la formule de Newton. ***Sol.:*** *En utilisant la formule de Newton*

$$p_2(x) = c_0 + c_1\,(x-x_0) + c_2\,(x-x_0)(x-x_1),$$

*où les coefficients sont donnés par le tableau des différences divisées*

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $\delta f[x_i, x_{i+1}]$ | $\delta^2 f[x_0,x_1,x_2]$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $\mathbf{e^{-1}}$ | | |
| | | $\mathbf{1-e^{-1}}$ | |
| $0$ | $1$ | | $\dfrac{\frac{e^t-1}{t}-(1-e^{-1})}{1+t}$ |
| | | $\frac{e^t-1}{t}$ | |
| $t$ | $e^t$ | | |

*On obtient*

$$p_2(x) = e^{-1} + (1-e^{-1})\,(x+1) + \frac{\frac{e^t-1}{t}-(1-e^{-1})}{1+t}\,(x+1)\,x.$$

(b) Considérer la limite pour $t \to 0$. A quoi correspond la limite de $\delta f[x_1,x_2]$ pour $t \to 0$ ? Quel est le « polynôme d'interpolation limite » ? Quel type de condition d'interpolation satisfait en $x_1$ ? ***Sol.:*** *On remarque que pour* $t \to 0$, *le point* $x_2 = t$ *tend vers le point* $x_1 = 0$, *et la différence divisée* $\delta f[x_1,x_2]$ *tend vers une valeur limite donnée par*

$$\delta f[x_1,x_1] = \lim_{t\to 0}\delta f[x_1,x_2] = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1$$

*qui correspond à la dérivée de* $f$ *évaluée en* $x_1$. *Le « polynôme d'interpolation limite » pour* $t \to 0$ *correspond donc aux différences divisées calculées aux points* $x_0, x_1, x_1$ *(où* $x_1$ *est répété deux fois). On verra que le polynôme déterminé par ces coefficients est exactement le polynôme d'Hermite* $h_2(x)$ *(voir les polycopiés pour sa définition)*

$$h_2(x) = e^{-1} + (1-e^{-1})\,(x+1) + e^{-1}\,(x+1)\,x,$$

*qui satisfait les conditions suivantes*

$$h_2(x_0) = f(x_0), \quad h_2(x_1) = f(x_1), \quad \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}x}(x_1) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_1).$$