Hashes and MACs Outlook

- One-way functions
- Hash Function: Definition and classification
- Unkeyed hash functions (MDCs)
 - MDCs based on cryptographic algorithms
 - Customized MDCs (MD5, SHAx)
- Keyed hash functions (MACs)
- Applications
- Randomized hash functions: UNIX example





One-way Functions

- Une fonction f est dite à sens unique (one-way function ou OWF) si $\forall x \in X$ on peut facilement calculer f(x) = y mais pour la grande majorité des $y \in Y$ il est calculatoirement impossible de trouver un x tq. f(x) = y.
- Exemples:
 - calcul des carrées modulo un composite:

$$f(x) = x^2 \mod n$$
 avec $n = pq$ (p et q inconnus)
est une one-way function car l'inverse est difficile (voir le problème de base SQROOTP).

• on peut construire une one-way function sur la base de DES ou de n'importe quel autre système de cryptage à blocs E comme suit:

$$y = f(x) = E_k(x) \oplus x$$
, avec k une clé fixée et connue

on peut considérer que $\mathbb{E}_k(x) \oplus x$ a un comportement (pseudo) aléatoire par construction de E. Le calcul de l'inverse revient à trouver un x t.q. :

$$x = E_k^{-1} (x \oplus y)$$

ce qui est considéré difficile avec les propriétés de E.

A noter que $f(x) = E_k(x)$ ne suffirait pas pour en faire une OWF car, en connaissant la clé, DES est réversible.





Hash Functions: Définitions



- Une fonction de hachage (*hash function*) est une fonction h ayant les propriétés suivantes:
 - compression: la fonction h fait correspondre à un ensemble X composée par des chaînes de bits de longueur finie mais arbitraire, un ensemble Y composé par des chaînes de bits de longueur finie et fixée (et normalement inférieur à la taille de X) avec h (x) = y, et x ∈ X, y ∈ Y.
 - facile à calculer: partant de h et $x \in X$, h(x) est facile à calculer.
- Une hash function est dite "à clé" ($\frac{keyed}{hash}$ function) si une clé intervient dans le calcul de la fct. ($\frac{h_k(x)}{y}$; sinon on l'appelle "sans clé" ($\frac{unkeyed}{hash}$ function).
- Les hash functions ont des nombreuses applications informatiques dont l'archivage structuré facilitant la recherche. Coté sécurité nous allons étudier deux catégories principales:
 - codes détecteurs d'altérations (manipulation detection codes (MDC) or message integrity codes (MIC)): ce sont des unkeyed functions permettant de fournir un service d'intégrité sous certaines conditions. Le résultat d'une telle fonction est appelée MDC-value ou, simplement, digest.
 - codes d'authentification de message (*message authentication codes ou MAC*) qui sont des *keyed functions* permettant d'authentifier la source du message et d'assurer son intégrité sans utiliser des mécanismes (cryptage) additionnels.





Hash Functions: Définitions (II)

- Quelques propriétés de base des hash functions:
 - 1) preimage resistance: étant donné un $y \in Y$, il est calculatoirement impossible de trouver une pré-image $x \in X$ satisfaisant h(x) = y.
 - 2) 2nd-preimage resistance: étant donné un x ∈ X et son image y ∈ Y, avec h (x) = y, il est calculatoirement impossible de trouver un x' ≠ x tel que h (x) = h (x'). Aussi appelée weak collision resistance.
 - 3) collision résistance: il est calculatoirement impossible de trouver deux préimages x, x' ∈ X distinctes pour lesquels h(x) = h(x') (pas de restriction sur le choix des valeurs). Aussi appelée strong collision resistance.
- Une fonction de hachage à sens unique (*one way hash function ou OWHF*) est un MDC satisfaisant l) et 2). Aussi appelée: *weak one-way hash function*.
- Une fonction de hachage résistante aux collisions (*collision resistant hash function ou CRHF*) est un MDC satisfaisant le propriétés 2) et 3). (A noter que 3) \Rightarrow 2)). Aussi appelée: *strong one-way hash function*.
- OWF ≠> OWHF: A noter qu'une OWHF en tant que hash function impose des restrictions supplémentaires sur les domaines sources et image ainsi que sur la 2nd-preimage resistance qui ne sont pas forcement respectés par des OWFs.
 - Exemple: $f(x) = x^2 \mod n$ avec n = pq (p et q inconnus) n'est pas une OWHF car étant donné x, -x est une collision triviale.





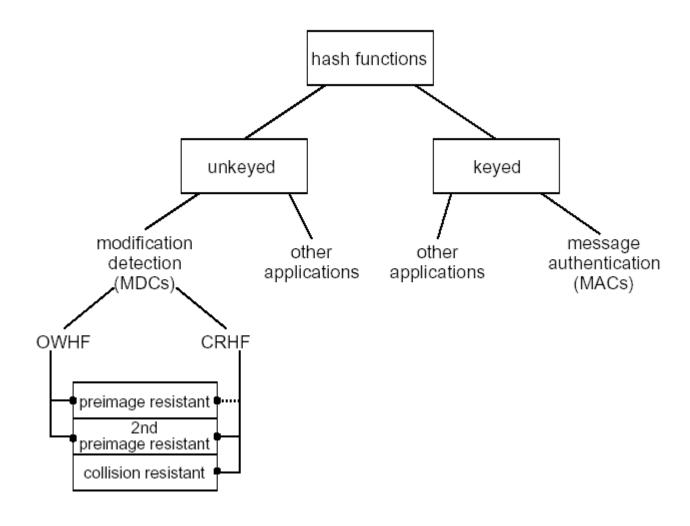
Message Authentication Codes (MAC)

- Un Message Authentication Code (MAC) est une famille de fonctions h_k paramétrisées par une clé secrète k ayant les propriétés suivantes:
 - 1) **compression**: comme pour les fonctions de hash génériques mais appliqué à h_k.
 - 2) facile à calculer: à partir d'une fonction h_k , et d'une clé connue k, on peut facilement calculer h_k (x). Le résultat est appelée un MAC-value ou, simplement, un MAC.
 - 3) **résistance calculatoire** (computation-resistance): sans connaissance de la clé symétrique k, il est (calculatoirement) impossible de calculer des paires (x, h_k(x)) à partir de 0 ou plusieurs paires connus (x_i, h_k(x_i)) pour tout x ≠ x_i.
- La propriété 3) implique que les paires $(x_i, h_k(x_i))$ ne peuvent non plus servir à calculer la clé k (key non-recovery). Cependant la propriété key non-recovery n'implique pas computation-resistance car des attaques chosen/known-plaintext pourraient mener à des paires $(x, h_k(x))$ falsifiées.
- L'impossibilité de calculer des paires (x, h_k(x)) se traduit également en *preimage* et collision resistance (cf. transparent précédent) pour toute entité ne possédant pas la clé k.





Hash Functions: Schéma Récapitulatif



(Source [Men97])





Attaques sur des MDCs: 2nd preimage résistance

- Problème: étant donné h(x) = y, trouver x' tq. h(x') = h(x).
- Exemple pratique: on a un texte avec un *digest* associé portant une signature digitale; on veut créer un faux texte portant la même signature (sans avoir le contrôle sur le texte original). Quelles sont nos chances d'un point de vue probabiliste?
- Soit une hash function h avec n sorties possibles et une valeur donnée h (x). Si h est appliquée à k valeurs aléatoires, quelle doit être la valeur de k pour que la probabilité d'avoir au moins un y tq. h (x) = h (y) soit 0.5?
- Pour la première valeur de y, la probabilité que h (x) = h (y) est 1/n. Inversement, la probabilité que h (x) ≠ h (y) est 1-1/n. Pour k valeurs, la probabilité de n'avoir aucune collision est de: (1-1/n)^k, soit:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k} = 1 - k\frac{1}{n} + \binom{k}{2}\frac{1}{n^{2}} - \binom{k}{3}\frac{1}{n^{3}} + \dots$$

ce qui pour n très grand peut être approché par 1 - k/n. Par conséquent, la probabilité complémentaire d'avoir au moins une collision est d'environ k/n; c'est qui nous donne k = n/2 pour une probabilité de 0.5.

Conclusion: pour un digest de m-bits, le nombre d'essais nécessaires à trouver un y tq.
 h(x) = h(y) avec une probabilité de 0.5 est 2^{m-1}.





Attaques sur des MDCs: collision résistance

- Problème: trouver deux valeurs x, x' distincts t.q. h(x) = h(x').
- Exemple pratique: On doit faire signer un texte à quelqu'un et on veut appliquer cette signature à un texte falsifié (on contrôle le texte original). Quelles sont nos chances de trouver deux textes originaux satisfaisant ce critère?

```
Dear Anthony,
 \left\{ \begin{array}{l} \text{This letter is} \\ \text{I am writing} \end{array} \right\} \text{ to introduce} \left\{ \begin{array}{l} \text{you to} \\ \text{to you} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Mr.} \\ - \end{array} \right\} \text{ Alfred} \left\{ \begin{array}{l} P. \\ - \end{array} \right\} 
Barton, the { new new newly appointed} { chief senior } jewellery buyer for { our the }
Northern { European } { area division } . He { will take has taken } over { the }
responsibility for { all the whole of } our interests in { watches and jewellery } jewellery and watches }
in the { area region}. Please { afford give } him { every all the } help he { may need needs }
to { seek out } the most { modern } lines for the { top high } end of the
 market. He is {empowered authorized} to receive on our behalf { samples specimens} of the
   \left\{ \begin{array}{l} \text{latest} \\ \text{newest} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{watch and jewellery} \\ \text{jewellery and watch} \end{array} \right\} \text{products,} \left\{ \begin{array}{l} \text{up} \\ \text{subject} \end{array} \right\} \text{ to a } \left\{ \begin{array}{l} \text{limit} \\ \text{maximum} \end{array} \right\} 
 of ten thousand dollars. He will { carry hold} a signed copy of this { letter document }
 as proof of identity. An order with his signature, which is {appended}
  { authorizes } you to charge the cost to this company at the { above head office }
  address. We \left\{\begin{array}{l} \text{fully} \\ -\end{array}\right\} expect that our \left\{\begin{array}{l} \text{level} \\ \text{volume} \end{array}\right\} of orders will increase in
  the {following | year and {trust | hope } that the new appointment will { be | prove }
   {advantageous } to both our companies.
```

Exemple d'une lettre falsifiée en 2³⁷ variations (source [Sta95])





Birthday Paradox: Fondement Mathématique

- Le *birthday paradox* est un problème probabiliste classique qui montre que dans une réunion de 23 personnes seulement, on a déjà une chance sur deux d'avoir deux personnes ayant leur anniversaire le même jour.
- Soit y_1 , y_2 , ..., y_n toutes les sorties possibles d'une hash function. Combien des $h(x_1)$: $h(x_1)$, $h(x_2)$, ..., $h(x_k)$ devons nous calculer pour avoir une probabilité de collision égale ou supérieure à 0.5?
- Le premier choix pour h (x₁) est arbitraire (prob = 1), le deuxième h (x₂) ≠ h (x₁) a une probabilité de 1 1/n, le troisième de 1 2/n, etc. Ce qui nous donne une probabilité de ne pas avoir des collisions égale à:

$$P_{no-collision} = \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$$

On prouve facilement (développement en série de e -x) que pour

 $0 \le x \le 1: 1-x \le e^{-x}$ et donc:

$$P_{no-coll} = \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \le \prod_{i=1}^{k-1} e^{-\frac{i}{n}} = e^{\frac{-k(k-1)}{2n}}$$





Birthday Paradox: Fondement Mathématique (II)

La probabilité d'avoir au moins une collision est $P_{au-moins1} = 1 - P_{no-coll}$, soit:

$$P_{au-moins1} \ge 1 - e^{\frac{-k(k-1)}{2n}}$$

Pour connaître la valeur de k pour laquelle P_{au-moins1} est plus grand que 0.5, il suffit de calculer:

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{\frac{-k(k-1)}{2n}}$$

Si k est grand, on remplace k (k-1) par k² et on obtient après des calculs simples:

$$k = \sqrt{2(\ln 2)n} \cong 1, 17\sqrt{n} \approx \sqrt{n}$$

- En prenant n = 365 pour l'anniversaire, on obtient k = 22.3, ce qui confirme l'énoncé du problème
- Conséquence pour les hash functions: Soit une hash function avec 2^m sorties possibles. Si h est appliqué à $k = 2^{m/2}$ entrées on a une probabilité supérieur à 0.5 d'obtenir $h(x_i) = h(x_i)$





Résistance Calculatoire Théorique des Hash Functions: Récapitulation

Type de Hash Fct.	Caractéristique	Difficulté Calculatoire	But de l'attaque	Taille conseillée du digest/clé
OWHF	preimage resistance	2 ⁿ	trouver une pré- image	$n \ge 80$ bits
	2 nd -preimage résistance	2 ⁿ⁻¹	trouver x' avec h(x') = h(x)	
CRHF	collision resistance	2 ^{n/2}	trouver une collision	n ≥ 160 bits
MAC	key non-recovery	2 ^t	trouver la clé	n ≥ 80
	computation resistance	min(2 ^t ,2 ⁿ)	produire un $(x, h_k(x))$	t ≥ 80

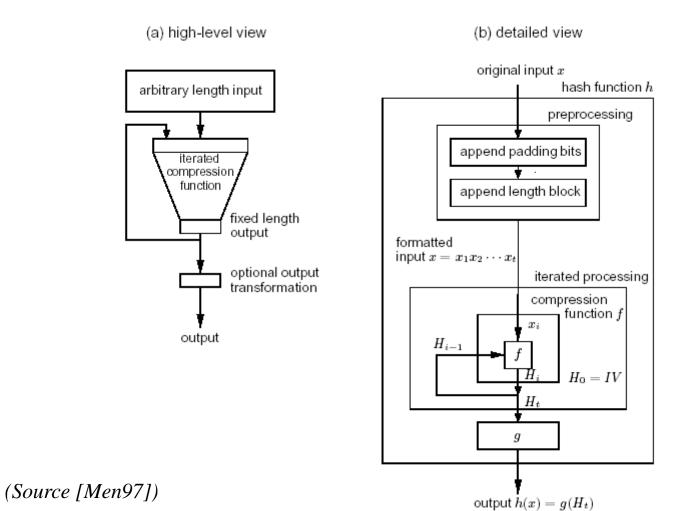
• n: taille du MDC-value ou du MAC-value résultant de l'application de la hash function

• t: taille de la clé du MAC





Modèle de fonctionnement générique des MDCs







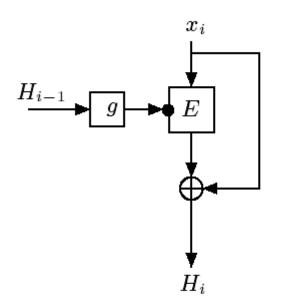
MDCs Basées sur des Systèmes de Cryptage

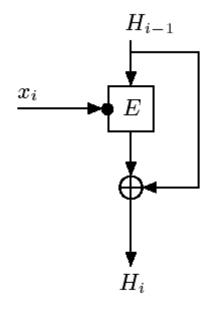
- Idée: utiliser un système de cryptage symétrique connu pour construire un MDC.
- Problèmes à résoudre:
 - il faut "casser" la réversibilité des algorithmes symétriques pour en faire des OWHF ou des CRHF.
 - La "largeur nominale" de certains systèmes de cryptage (eg. DES) est de 64 bits, ce qui n'est pas suffisant pour construire des CRHF.
- Principe de fonctionnement:
 - les blocs de texte sont séquentiellement traités par la "boîte" de cryptage.
 - la compression se base sur des opérations de chaînage avec les blocs résultant des itérations précédentes et des fonctions logiques (fondamentalement XOR). Ceci rend également le procédé irréversible.
 - Si nécessaire, n boîtes de cryptage seront combinées pour obtenir des longueurs de *digests* n fois supérieures à la largeur nominale des boîtes utilisées.
- Attention: la sécurité de ces algorithmes est fortement dépendante des propriétés des boîtes de cryptage sous-jacents.
- Exemples:
 - Les modèles de Matyas-Meyer-Oseas, Davies-Meyer et Miyaguchi-Preneel.
 - MDC-2 et MDC-4 utilisant respectivement 2 et 4 boîtes DES. *Digest* = 128 bits.

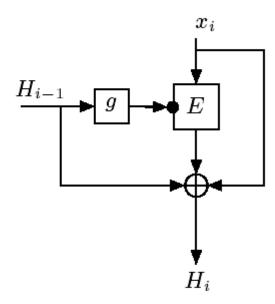




MDCs Basées sur des Systèmes de Cryptage: Modèles Génériques







Matyas-Meyer-Oseas

Davies-Meyer

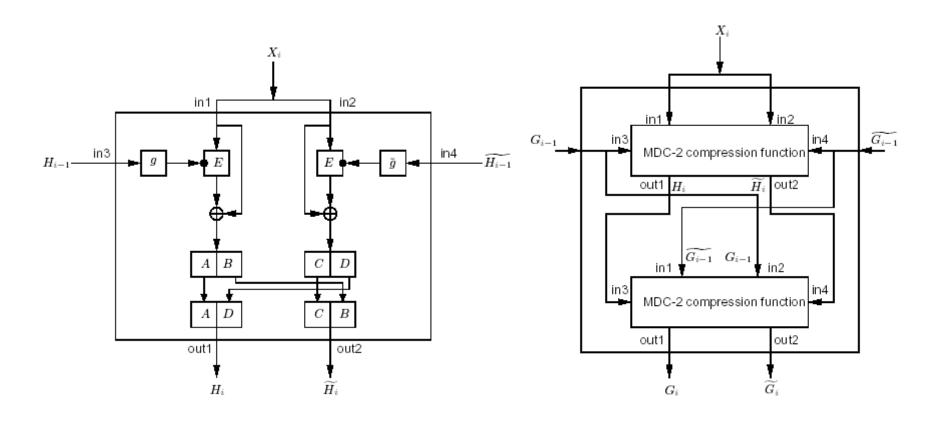
Miyaguchi-Preneel

(source [Men97])





Exemples(II): MDC-2 et MDC-4



Hash Function MDC-2 E-box = DES

Hash Function MDC-4

(Source [Men97])





Customized MDCs

- Il s'agit de fonctions conçues exclusivement pour générer des codes d'intégrité (des *digests*) avec un soucis principal de vitesse et sécurité.
- Leur fonctionnement se base sur les éléments suivants:
 - des opérations d'initialisation (padding + rajouter la longueur).
 - un ensemble de constantes prédéfinies choisies spécialement pour augmenter la dispersion.
 - un ensemble "d'étapes" (*rounds*) qui vont séquentiellement s'appliquer a tous les blocs des données originaux. Ces rounds vont effectuer une combinaison d'opérations logiques et des rotations sur les données et les constantes.
 - des opérations de chaînage impliquant les sorties des *rounds* précédents.
- Dans ces fonctions, chaque bit du digest est une fonction de chaque bit des entrées.
- Les plus connues sont:
 - MD5: R. Rivest, 1992; RFC 1321. *Digest* = 128 bits. Cassé!
 - SHA-0: NIST, 1993. $Digest = 160 \ bits$. Collisions en 2^{39} opérations au lieu de 2^{80}
 - SHA-1: NIST, 1995. $Digest = 160 \ bits$. Révision de SHA-0 avec rotation de bits additionnelle. Collisions en 2^{63} opérations (au lieu de 2^{80}).
 - SHA-2: NIST (FIPS 190-3). Comprend: SHA-224, SHA-256, SHA-384 et SHA-512. Les tailles du digest vont de 224 à 512 bits.
 - SHA-3: *Keccak* Algorithm (taille du digest variable de 224 à 512 bits)





Hash Functions: Derniers Développements

- X.Wang et al. 1 culminent en 2004 un long travail visant à trouver des collisions dans l'algorithme MD5. Ils publient deux paires de collisions pour des messages de 1024 bits.
- En 2005, X. Wang et al.² prouvent dans la conférence CRYPTO'05 que le nombre d'opérations nécessaires pour trouver des collisions sur SHA-1 (standard actuel pour les fonctions de hashage sécurisées) est seulement de 2⁶³.
- Ces attaques ont pour cible la recherche de collisions arbitraires mais lors de CRYPTO'06 des chercheurs de l'Université de Graz en Autriche³ proposent une méthode pour contrôler partiellement le contenu des collisions.
- En Décembre 2008⁴ on montre qu'on peut générer des collisions contrôlées sur MD5 et créer ainsi une Certification Authority illicite permettant des forger des certificats acceptés par n'importe quel browser.
- Ces résultats s'appuient sur des approches analytiques (par opposition au *brute force*!)
- Le processus de sélection de successeur de SHA-1 est semblable à celui ayant désigné AES comme standard de cryptage en blocs. Le NIST a décidé (Octobre 2012) que Keccak serait l'algorithme de base pour **SHA-3**.

^{4.}M. Stevens et al. Short Chosen-Prefix Collisions for MD5 and the Creation of Rogue CA Certificate. CRYPTO'09



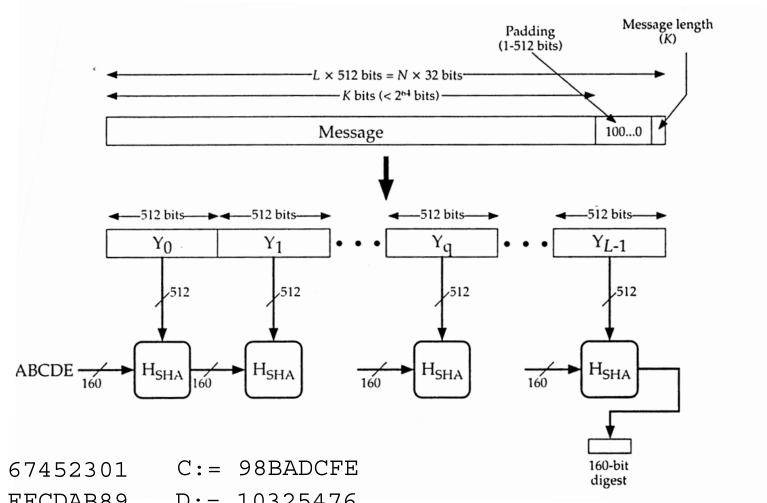


^{1.}X. Wang et al. *Collisions for Hash Functions MD4, MD5, HAVAL-128 and RIPEMD*. http://eprint.iacr.org/2004/199.pdf.

^{2.}X. Wang et al. Finding Collisions in the Full SHA-1. Advances in Cryptology. Crypto'05

^{3.}C. Cannière et al. SHA-1 collisions: Partial meaningful at no extra cost? Ramp Sessions CRYPTO'06.

Secure Hash Algorithm: Vue d'Ensemble



A := 67452301

B:= EFCDAB89

D := 10325476

E := C3D2E1F0

(Source [Sta95])

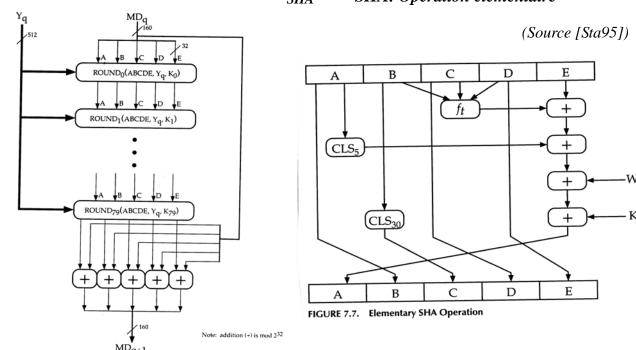




SHA-0: Détails de Fonctionnement

SHA: Traitement d'un bloc de 512 bits H_{SHA}

SHA: Opération élémentaire



0 ≤t≤19	K _t :=5A827999	$f_t(b,c,d) := (b\cdot c) U (\overline{b}\cdot d)$
20 ≤ t ≤ 39	K _t :=6ED9EBA1	$f_t(b,c,d) := b \oplus c \oplus d$
40 ≤ t ≤ 59	K _t :=8F1BBCDC	$f_t(b,c,d) := (b.c) U (b.d) U (c.d)$
60 ≤ t ≤ 79	K _t :=CA62C1D6	$f_t(b,c,d) := b \oplus c \oplus d$

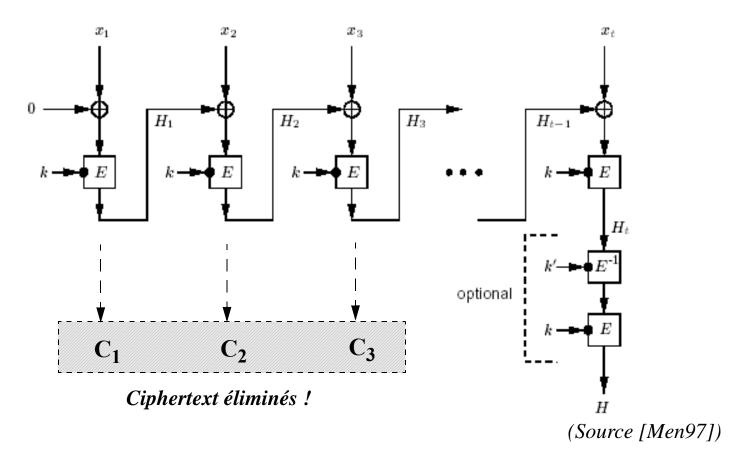
Les blocs de text W_t se calculent: $W_t := W_{t-16} \oplus W_{t-14} \oplus W_{t-8} \oplus W_{t-3}$





MACs basés sur des Systèmes de Cryptage

- Algorithme CBC-MAC basé sur DES-CBC avec IV = 0 et élimination des *ciphertext* intermédiaires
- longueur de clé = 56 bits (112 en cas d'utilisation de la partie optionnelle)
- Longueur du MAC-value = 64 bits







Nested MACs et HMACs

• Un *Nested MAC* ou *NMAC* est une composition de 2 familles de fonctions MACs G et H paramètrès par les clés k et l tel que:

G o H = { g o h avec g ∈ G et h ∈ H } avec g o h
$$(k,l)$$
 (x) = g_k (h₁ (x))

- La sécurité d'un NMAC dépend de deux critères:
 - La famille de fonctions G est résistante aux collisions.
 - La famille de fonctions H est résistante aux attaques spécifiques pour MACs, i.e.:

 Il est impossible de trouver un couple (x,y) et une clé m fixée mais inconnue, telle que: $MAC_m(x) = y$.
- Un *HMAC* (FIPS 198, 2002) est un Nested MAC utilisant à la base des MDCs sans clé dédiées comme SHA-1 ou SHA-256.
- Un HMAC utilise deux constantes de 512 bits dénommés *ipad* et *opad* telles que:

et une clé k de 512 bits.

• Le schéma de fonctionnement de HMAC-256 (sur la base de SHA-256) est le suivant:

$$HMAC-256_k(x) := SHA-256 ((k \oplus opad) || SHA-256 ((k \oplus ipad) || x))$$

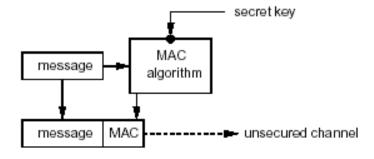
• Les HMACs sont les MACs les plus utilisés. Les attaques mentionnées sur les fonctions de la famille SHA sont plus difficiles à réaliser sur un HMAC par cause de la clé k.



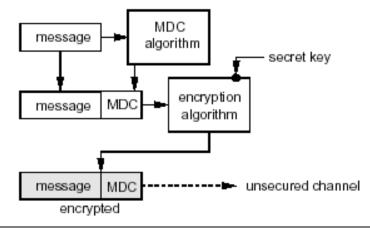


Applications des Hash Functions: Intégrité

MAC Seul:

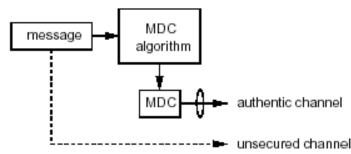


MDC + Encryption:



MDC + canal authentique:

(Source [Men97])

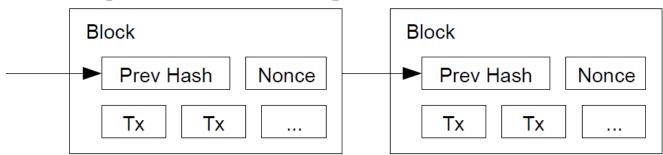






Application des Hash Functions: Blockchains

- Les transactions bitcoin sont publiées et visibles par tous les intervenants. Elles sont encapsulées dans des **blocs** chaînés à l'aide de fonctions de hachage cryptographiques
- Le **minage** (*mining*) consiste à rajouter itérativement des nouveaux blocs contenant les transactions courantes
- La génération d'un bloc valable nécessite la **résolution d'un** *puzzle cryptographique* (*proof of work*) très coûteux en temps de calcul (trouver des *pseudo-collisions* dans les fonctions de hachage cryptographiques). La validation reste très efficace
- Le premier mineur capable de générer un bloc valable recevra une récompense monétaire (en bitcoins). Le processus de minage est ouvert à tous les mineurs mais seul le premier est récompensé
- La chaine de blocs résultante (**blockchain**) devient alors un **registre publique** (*public ledger*), décentralisé et immuable protégeant toutes les transactions passées. La falsification/modification des données protégées par la *blockchain* nécessiterait un effort calculatoire supérieur à celui effectué par tous les mineurs *honnêtes*



Source Image: Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System. Satoshi Nakamoto

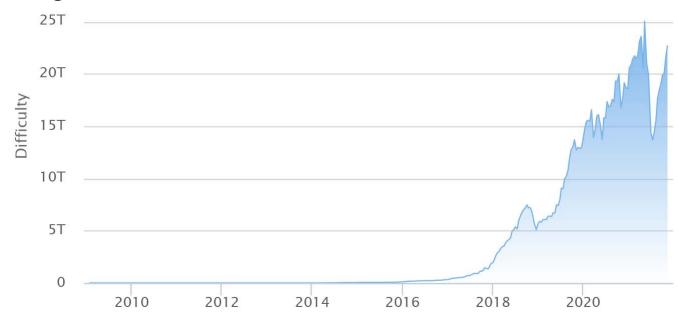




Blockchain: *Proof of Work*

Statistiques Bitcoin 20/11/2021 (source http://btc.com):

- Difficulty: 22,674,148,233,453
- Target: 2^{224} / Difficulty = $\sim 2^{180}$. Le digest valable pour générer un bloc doit être inférieur à 2^{180} , ce qui signifie une pseudo-collision sur les 76 bits de poids plus fort. La variation sur les inputs dépend du nonce
- *Hashrate*: ~ 168 EH/sec (168 * 10^{18} hashes /sec)
- Fonctions de hachage exécutées pour obtenir un bloc: $\sim 97 * 10^{21}$
- Temps de génération d'un bloc: 9,5 minutes







Autres Applications de Hash Functions

- Authentification:
 - data origin authentication (DOA)
 - transaction authentication (= DOA + time-variant parameters)
- Virus checking
 - Le créateur d'un logiciel crée un digest = h(x) avec x étant l'original et le distribue par un canal sûr (eg. CD-ROM).
- Distribution des clés publiques
 - Permet de contrôler l'authenticité d'une clé publique.
- *Timestamp* sur un document:
 - Le document sur lequel on veut effectuer le timestamp est d'abord soumis à une hash function. Le timestamp (avec la signature de l'entité correspondante) s'applique alors seulement au digest.
- One-time password (S-Key) (mécanisme d'identification)
 - A partir d'un seed secret x_0 , on crée une chaîne de hash-values: $x_1 = h(x_0)$, $x_2 = h(x_1)$, ... $x_n = h(x_{n-1})$.
 - Le système mémorise x_n et l'utilsateur rentre x_{n-1} . Si h $(x_{n-1}) = x_n \Rightarrow OK$.
 - Le système mémorise alors x_{n-1} et ainsi de suite.





Randomized Hash Functions (l'exemple UNIX) I

- UNIX garde ses mots de passe dans un fichier globalement accessible (ou éventuellement distribué par NIS)
- L'information stockée correspond au résultat produit par une hash function.
- Exemple (fictif):

```
root:Jw87u9bebeb9i:0:1:Operator:/:/bin/csh
pp:1Qhw.oihEtHK6:359:355:PP:/net/spp_telecom/pp:/bin/cs
```

• Problèmes:

- la hash function étant déterministe, elle produit le même résultat pour des mots de passe identiques.
- on pourrait créer des "cahiers" (*codebooks*) contenant le résultat de l'application de la hash function à des entrées données (p.ex. un dictionnaire) et les comparer facilement (*off-line*) avec les chaînes stockées par UNIX (*brute force dictionnary attack*).

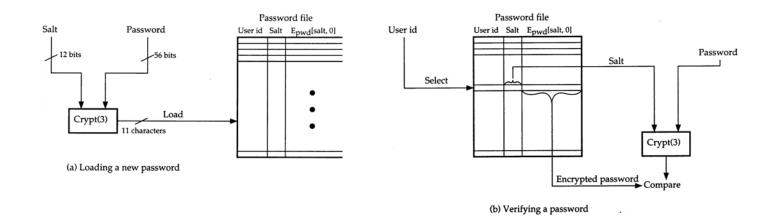
• Solution:

- Rajouter un élément (pseudo) aléatoire de 12 bits différent pour chaque mot de passe (appelé *salt*) avant de calculer la hash function et lors de la vérification.
- Cet élément permet de rajouter un facteur aléatoire de 4096 possibilités pour chaque mot de passe et de prévenir la détection des duplications.





Randomized Hash Functions (l'exemple UNIX) II

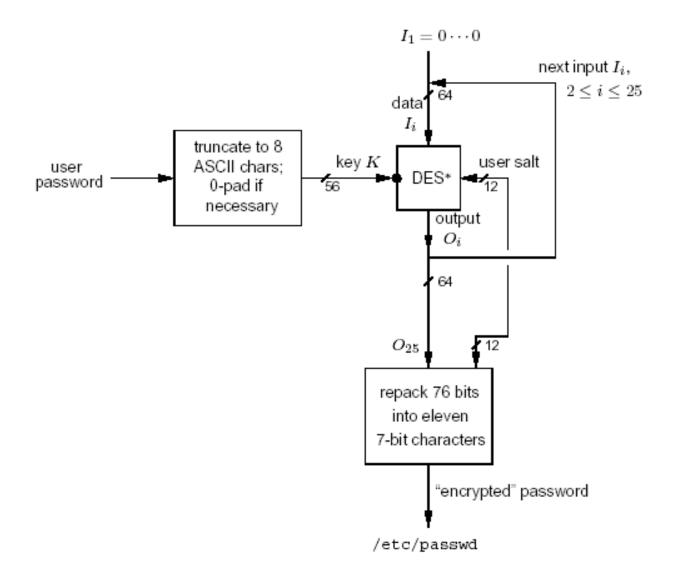


(Source [Sta95])





Randomized Hash Functions (l'exemple UNIX) III



(Source [Men97])



