

João Silva Sequeira

Introdução à Robótica

caps 1 a 6

Conteúdo

1	O mundo dos robots	1
1.1	Introdução - O que é um robot ?	1
1.2	Breve cronologia	1
1.3	Uma visão global da Robótica.....	17
	Referências	21
2	Conceitos base.....	23
2.1	Introdução	23
2.2	Ferramentas básicas	25
2.2.1	Álgebra de vectores e matrizes	27
2.2.2	Inversas, pseudo-inversas e determinantes de matrizes	28
2.2.3	Produto interno	30
2.2.4	Produto externo.....	31
2.2.5	Normas e distâncias	31
2.2.6	Valores próprios, vectores próprios e valores singulares	33
2.2.7	Formas quadráticas e matrizes (semi)-definidas	33
2.2.8	Tensores	34
2.2.9	Quaterniões	35

VI Conteúdo

2.3	Espaços de configuração	36
2.4	Transformações de coordenadas	39
2.4.1	Estrutura de uma matriz de rotação	39
2.4.2	Transformações de coordenadas em $SE(3)$	41
2.4.3	Composição de transformações homogéneas entre referenciais	43
2.4.4	Transformações de coordenadas usando quaterniões	44
2.5	Parametrizações comuns para matrizes de rotação	45
2.5.1	Parametrização por ângulo e eixo de rotação	46
2.5.2	Parametrização por 3 rotações	47
2.5.3	Não univocidade da representação das orientações por parametrização através de 3 ângulos	52
2.5.4	Transformação entre referenciais rodados em torno de eixos arbitrários - Problema inverso	54
2.6	Quaterniões <i>vs.</i> Matrizes de rotação	55
2.7	Optimização - Procura de extremos de funções	56
2.8	Interpolação	58
2.9	Grafos	59
2.9.1	Árvore	60
2.9.2	O algoritmo de Dijkstra	61
2.9.3	O algoritmo A^*	62
2.10	Simulação de robots	64
2.11	Análise de estabilidade de Lyapunov	66
2.12	Ruído	68
2.13	Conclusões	68
2.14	Exercícios	69
	Referências	71

	Conteúdo	VII
3 Cinemática	73	
3.1 Introdução	73	
3.2 Manipuladores série.....	74	
3.2.1 Cinemática directa	74	
3.2.2 Cinemática inversa	86	
3.2.3 Cinemática inversa do PUMA 500	91	
3.2.4 Cinemática inversa do Rob3/Tr5	95	
3.2.5 Orientação do efector terminal de manipuladores série.....	98	
3.2.6 Técnicas iterativas para resolução da cinemática inversa	98	
3.3 Cinemática de manipuladores paralelos	99	
3.4 Plataformas móveis	103	
3.4.1 A convenção Sheth-Uicker	105	
3.4.2 Método geométrico	112	
3.5 Incertezas nos Modelos Cinemáticos	116	
3.6 Exercícios	119	
Referências	123	
4 Cinemática diferencial	125	
4.1 Introdução	125	
4.2 Propagação de velocidades em manipuladores série.....	125	
4.2.1 Transformação de velocidades entre referenciais	127	
4.3 Propagação de velocidades entre troços	130	
4.4 Modelos diferenciais - Jacobianos	132	
4.4.1 Singularidades em modelos da cinemática diferencial	136	
4.5 Jacobianos em plataformas móveis	139	
4.6 Exercícios	141	

VIII	Conteúdo	
Referências		143
5	Dinâmica	145
5.1	Introdução	145
5.2	Influência de distribuição de massa no movimento de um robot	147
5.3	Formulação iterativa de Newton-Euler para a dinâmica de robots	149
5.3.1	Aceleração de um corpo rígido	149
5.3.2	Exemplo 1 - Manipulador RP	156
5.3.3	Exemplo 2 - Manipulador RPR	158
5.4	Formulação Lagrangeana para a dinâmica de robots	159
5.4.1	Exemplo 1 - Manipulador RR planar	160
5.4.2	Exemplo 2 - Plataforma móvel tipo uniciclo	162
5.5	Estrutura das equações da dinâmica de um robot	167
5.6	Inclusão de efeitos dissipativos na dinâmica de robots	168
5.6.1	Exemplo 3 - Plataforma móvel simplificada com atrito nos veios dos motores	171
5.6.2	Exemplo 4 - Plataforma móvel simplificada com atrito no contacto com o chão	172
5.7	Comentários	174
5.8	Exercícios	175
Referências		177
6	Sensores e actuadores	179
6.1	Introdução	179
6.2	Sensores	180
6.2.1	Potenciómetro - Resistência eléctrica variável	180
6.2.2	Encoders ópticos	181
6.2.3	Sensores de velocidade	184
6.2.4	Sensores de força	184

	Conteúdo	IX
6.2.5 Acelerómetros	185	
6.2.6 Sensores de campo magnético	187	
6.2.7 Giroscópios	187	
6.2.8 Sensores para nanoposicionamento.....	190	
6.2.9 Ultrasons.....	190	
6.2.10 Sensores de distância por infravermelhos	194	
6.2.11 Sensores de distância através de laser	195	
6.2.12 Imagem	197	
6.2.13 Sistema de Posicionamento Global (GPS)	200	
6.2.14 Sistema de Detecção/Identificação por Rádiofrequência (RFID)	200	
6.2.15 Código QR	200	
6.3 Actuadores	202	
6.3.1 Motores eléctricos DC e AC	202	
6.3.2 Micromotores eléctricos	204	
6.3.3 Motores pneumáticos e hidráulicos.....	204	
6.3.4 Músculos artificiais	204	
6.3.5 Actuadores para nanoposicionamento	206	
6.3.6 Sistemas integrados de actuadores	207	
Referências	209	
7 Controlo	211	
7.1 Introdução	211	
7.2 Controlabilidade e Controlo Geométrico de Robots	215	
7.3 Princípios de Síntese de Controladores	219	
7.3.1 Topologias Simples	221	
7.3.2 Inclusão de Tarefas no Controlador	224	

X	Conteúdo	
7.4	Controlo por Modelo Predictivo	232
7.5	Controlo Proporcional-Integral-Derivativo (PID).....	237
7.5.1	Sistemas lineares de 2 ^a ordem - Sistema Massa-Mola-Atrito	238
7.5.2	Controlo com termo de robustez.....	244
7.6	Controlo não linear de robots	246
7.6.1	Dominância das não linearidades	246
7.7	Controlo robusto	250
7.7.1	Exemplo: Manipulador RR flexível.....	253
7.8	Controlo por Modo Deslizante.....	256
7.8.1	Exemplo 1: Um sistema não linear simples	256
7.8.2	Exemplo 2: Robot uniciclo.....	262
7.8.3	Controlo PID expandido com termo de modo deslizante	263
7.9	Controlo de força em manipuladores	268
7.10	Combinação de Múltiplas Técnicas de Controlo	272
7.11	Robots redundantes	275
7.12	Conclusão	277
7.13	Exercícios	279
	Referências	281
A	Igualdades trigonométricas básicas.....	285
B	A função tangente inversa de 4 quadrantes	287
C	Derivada de uma função composta	289
D	Função de Dirac	291
E	Apêndice: Tensores de inércia	293

F Apêndice: Produtos de Lie.....	295
----------------------------------	-----

1

O mundo dos robots

1.1 Introdução - O que é um robot ?

Vivemos num mundo cheio de robots. Tente o leitor identificar robots na realidade que o rodeia; automóveis, guindastes, elevadores, portas, cadeiras giratórias, ... e pessoas. Todos constituem exemplos de robots. Em cada um deles identificam-se sem dificuldade capacidades de locomoção ou manipulação, ou seja, capacidade para interagir com o ambiente que o rodeia. Numa linguagem livre, um robot pode ser definido como qualquer dispositivo relativamente ao qual é possível identificar um conjunto de posições e velocidades. Cada elemento deste conjunto constitui um *grau de liberdade* do robot e podemos descrever o seu movimento num sistema de coordenadas apropriado.

Habitualmente, identificamos robots com dispositivos mecânicos. Qualquer que seja a sua geometria, podem ser vistos como corpos quase-rígidos, i.e., sistemas compostos por um número finito de troços rígidos interligados entre si por juntas ou articulações. Esta perspectiva é especialmente interessante numa introdução ao estudo da Robótica e é de resto seguida em vários textos pedagógicos relacionados. No entanto o conceito de robot pode ser expandido para formas mais abstractas como por exemplo o conceito de agente¹.

A Robótica possui diferentes taxonomias. É habitual usar a expressão *Robótica móvel* para referenciar o estudo de robots com capacidade de locomoção. Complementarmente, pode usar-se a expressão *Robótica fixa* para englobar o estudo de robots para manipulação. Fica assim definida uma taxonomia simples da Robótica (Tabela 1.1).

1.2 Breve cronologia

Existem robots desde tempos remotos. Embora o termo robot seja relativamente recente, um conceito antecessor, e em certo sentido equivalente, é o de *autómato*. A noção actual de robot, como mecanismo ao

¹ A noção de agente será clarificada ao longo do texto.

Robótica móvel	Robótica fixa
<ul style="list-style-type: none"> • Nenhum ponto do robot está permanentemente fixo no espaço de trabalho • Robots móveis terrestres, aviões, submarinos, robots multípedes 	<ul style="list-style-type: none"> • Pelo menos 1 ponto do robot mantém a sua posição inalterada • Manipuladores série, manipuladores paralelos • Estruturas com alguma regularidade de representação: cadeias cinemáticas • A análise de cadeias de tipo série pode ser feita recorrendo a ferramentas “simples”

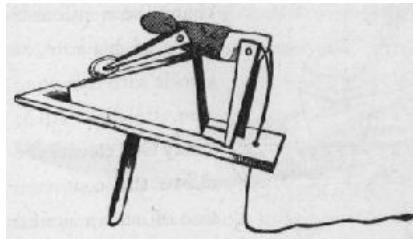
Tabela 1.1. Taxonomia simples para a Robótica

qual é possível imprimir movimento complexo, confunde-se com a de autómato, como mecanismo capaz de executar movimentos repetitivos de alguma complexidade.

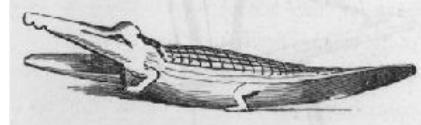
Antes dos autómatos podemos ainda considerar os veículos construídos desde as civilizações antigas. A história da robótica identifica-se com a história das construções mecânicas, i.e., construções com capacidade de movimento.

No Egípto antigo

Já no Egípto antigo existiam autómatos. A figura 1.1 mostra duas ilustrações, de autor anónimo, [10], representando autómatos (robots) com finalidades lúdicas.



O polidor de pedra



*Esboço sem título
(A boca do crocodilo é operada através de uma corda)*

Figura 1.1. Ilustração do séc. XIX de autómatos do Egípto antigo

Hefestos - o deus do fogo

Uma das mais antigas descrições de um robot deve-se, possivelmente, a Homero², no canto XVIII da Ilíada, [15]. Hefesto, deus do fogo, construiu mesas com três pernas, cada uma das quais possuindo rodas, capazes de se deslocarem de forma autónoma dentro dos palácios dos deuses. Não se limitando à criação de robots, Héphaïstos criou ainda mulheres artificiais para o ajudarem. Estas criaturas eram de tal forma perfeitas que podiam ser confundidas com mulheres reais.

Heron de Alexandria

Por volta de 200 aC, Heron de Alexandria escreve o tratado *Spiritalia seu Pneumatica* onde compilou descrições de vários dispositivos mecânicos, [23]. A Figura 1.2 mostra um esboço da máquina de Heron, da autoria de J. G. Greenwood, feito a partir das indicações no manuscrito de Heron. A esfera α , suspensa

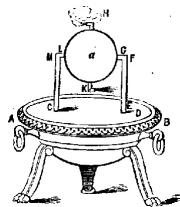


Figura 1.2. O motor de reacção de Heron (aprox. 200 aC)

através dos apoios $C-E-F-G-L-M$ (estando os pontos G e L) em posições diametralmente opostas), contém água. Por aquecimento da esfera esta água transforma-se em vapor que é expulso pelas condutas de escape H e K . A disposição particular destas condutas gera um binário ao longo do eixo GL que faz a esfera rodar.

Os mestres franceses e suíços

A relojoaria produziu algumas das mais interessantes construções mecânicas dos tempos modernos. Não será portanto de estranhar que alguns relojoeiros desenvolvessem em paralelo uma actividade igualmente exigente no que respeita à complexidade da construção: autómatos.

No ocidente os mestres artesãos franceses e suíços produziram esplêndidos autómatos. Nomes como Vaucanson, Jaquet-Droz, o Abade Mical, Maillardet, Barão Von Kempelen, Robert-Houdin e Bontemps, entre outros são referências incontornáveis nesta arte³ cujo período áureo se situou entre 1850 e terminando com o início da I Grande Guerra, em 1914.

² Poeta Grego que viveu em meados de 850 a.C.

³ Note o leitor que alguns nomes ainda são actualmente referências na relojoaria de qualidade.

No período 1738-1739 Jacques de Vaucanson construiu, entre outros, um tocador de flauta e um pato mecânico. O pato, ilustrado na Figura 1.3, conseguia mover as asas, comer e simular a digestão de sementes, [7].

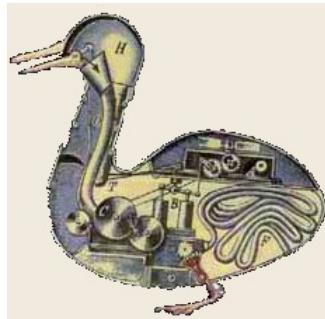
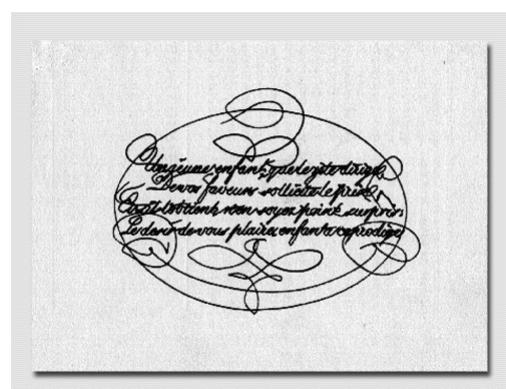


Figura 1.3. O pato de Vaucanson

A Figura 1.4 ilustra um autómato famoso: o escritor/desenhadutor de Maillardet, [21], capaz de escrever poemas e desenhar. Acredita-se que terá sido construído por volta de 1800. Maillardet, um relojoeiro de origem suíça, construiu apenas dois autómatos escritores. Foi possivelmente influenciado por Pierre Jaquet-Droz, com quem trabalhou⁴. Um dos exemplares, oferecido ao imperador da China por George III de Inglaterra, escrevia em chinês.



Vista geral do autómato

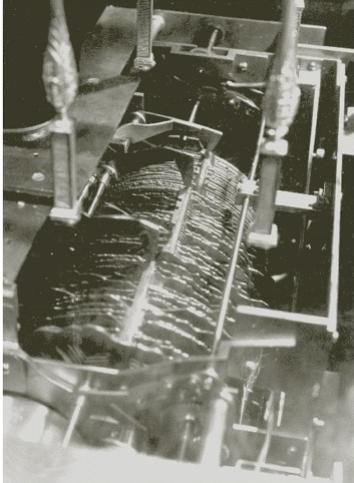


Exemplar da escrita produzida pelo autómato

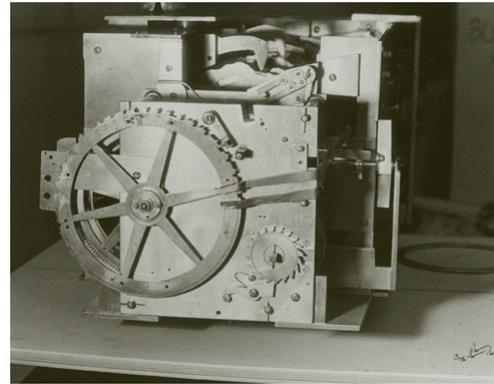
Figura 1.4. O escritor/desenhadutor de Maillardet

O autómato de Maillardet possui uma das maiores memórias mecânicas conhecidas, guardada sob a forma de discos excêntricos actuados por um motor de relógio (Figura 1.5).

⁴ Os autómatos de Pierre Jaquet-Droz e seu filho, Henri-Louis Jaquet-Droz, estão na origem da palavra *andróide*, pela suas capacidades mímicas muito “humanas”.



Memória do autómato



O motor de relógio, fonte de energia mecânica

Figura 1.5. O escritor/desenhadutor de Maillardet

Os mestres japoneses

O desenvolvimento dos autómatos no ocidente teve paralelo no oriente pela mão dos mestres artesãos japoneses. A elevada qualidade artística fazia com que a propriedade destes autómatos fosse um exclusivo de senhores feudais e mercadores abastados. A criação de bonecos automatizados (ou *Karakuri Ningyou* no original japonês), praticamente elevada ao estatuto de arte, subsiste ainda na actualidade. A Figura 1.6 mostra dois exemplares do século XVIII, segunda metade do período Edo (1603-1868), [6]. Ambos os exemplares têm comportamentos semelhantes. O movimento iniciava-se em direcção ao convidado quando o anfitrião colocava a chávena de chá sobre a bandeja, parando assim que o convidado levantava a chávena. Tomado o chá, o convidado colocava a chávena vazia na bandeja fazendo o autómato reiniciar o movimento de volta à sua posição inicial. Os mecanismos são feitos em madeira. A energia provinha de molas feitas a partir de barbas de baleia.

A revolução industrial

A máquina a vapor,⁵ inventada por Denis Papin por volta 1690 para bombear água, está na base da revolução industrial dos séculos XVIII e XIX. Múltiplos desenvolvimentos, nomeadamente por Thomas Savery em 1698 e Thomas Newcomen em 1705 permitiram a construção de bombas fiables para a extração da água das minas de carvão. Foram contudo os melhoramentos introduzidos por James Watt (a primeira patente de Watt data de 1769) que estabeleceram em definitivo a máquina a vapor como a principal fonte de energia mecânica. De entre as inovações devidas a Watt vale a pena destacar a introdução

⁵ Na forma de uma máquina de pistão. Já vimos que Heron de Alexandria utilizou o vapor de água para gerar movimento.



Figura 1.6. Bonecos *Karakuri Ningyou* para servir chá

da lubrificação por óleo e o regulador centrífugo (1788) para regular automaticamente a velocidade de rotação.

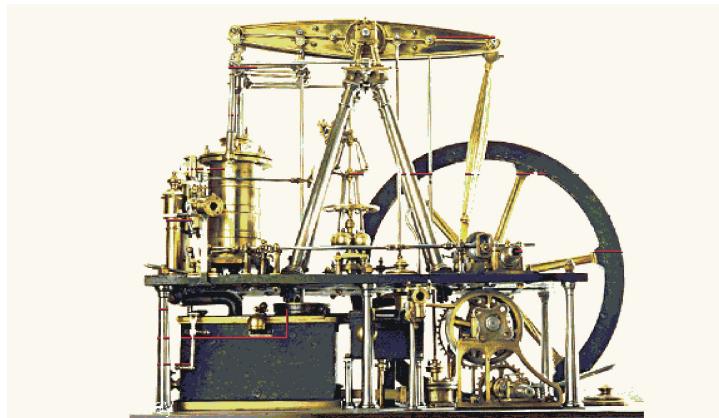


Figura 1.7. A máquina a vapor

O regulador de Watt funciona utilizando segundo o princípio do *servo-mecanismo* em que a saída do sistema é *realimentada* sobre a entrada. A *realimentação* está na base da moderna Teoria do Controlo, fundamental na construção dos modernos automatismos.

No início do século XX, a massificação dos sistemas de produção, nomeadamente na indústria automóvel com a generalização das linhas de montagem (Figura 1.8)⁶ faz entrar a automação no quotidiano laboral, com enorme impacto social.

⁶ Em 1902 o Oldsmobile já era produzido em série. O conceito de linha de produção é bastante mais antigo, podendo ser referenciado já em 1798 na standardização da produção de mosquetes por Eli Whitney, [5].



Figura 1.8. Linha de montagem automóvel

Charles Babbage

Homem extremamente activo, Charles Babbage inicia por volta de 1812 a construção da *máquina de diferenças*, com o objectivo de calcular as tabelas náuticas à época necessárias à determinação da posição dos navios. Em 1823, já com um modelo reduzido da máquina, Babbage obteve financiamento do governo britânico para a construção de um protótipo completo (Figura 1.9). Os esboços de Babbage, [9], ilustram a complexidade do projecto. Dificuldades de engenharia impediram um avanço significativo dos trabalhos que levaram o governo a desistir do projecto.

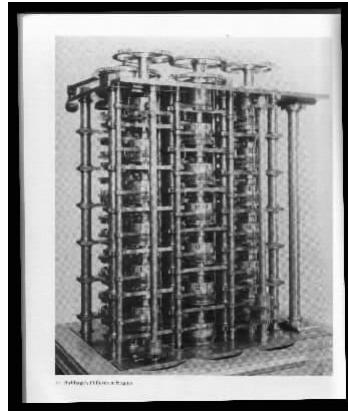


Figura 1.9. Fragmento da parte de cálculo da máquina de diferenças

Por volta de 1830, Babbage lança-se então num projecto mais ambicioso, a *máquina analítica*. Esta evolução da máquina de diferenças possuía “memória”, unidade aritmética e lógica e podia ser programada através de um sistema de cartões perfurados. Lady Ada Lovelace, colaboradora de Babbage, desenhou para a máquina analítica aquilo que é geralmente considerado o primeiro programa de computador, com o objectivo de calcular a sequência de Bernoulli.

Apesar da engenharia da época, com recursos algo limitados, ser apontada como factor limitativo à conclusão dos projectos de Babbage, alguns autores apontam a personalidade irrequieta de Babbage como causa dos relativos fracassos, [8]. Em suporte deste argumento, refira-se que em 1834, Georg e Edward

Scheutz, dois engenheiros suecos, apresentam uma versão reduzida da máquina de diferenças construída com base na descrição de Babbage. Em 1876, apenas cinco anos após a morte de Babbage, George Barnard Grant apresenta um modelo completo da máquina de diferenças na Philadelphia Centennial Fair. Este modelo com 1.5 m de altura e 2.4 m de largo, continha cerca de 15000 peças móveis, [8].

Karel Čapek

Em 1921-1922 Karel Čapek⁷ escreve uma peça de teatro intitulada *R.U.R.: Rossum's Universal Robots*⁸, [13]. A acção tem lugar numa ilha não identificada, num período indistinto, onde a fábrica R.U.R. produz robots para venda, [22]. O objectivo é aliviar a sociedade do trabalho permitindo que o homem se dedique a objectivos mais elevados. Num espaço de 10 anos os robots desenvolvem emoções; ódio para com o homem e orgulho nas suas mentes superiores. Organizam então uma revolta à escala mundial que destroi todos os humanos à excepção de um dos cientistas da fábrica, que julgam possuidor da fórmula que permite o seu fabrico. No entanto, a fórmula é destruída durante a revolta pela esposa do director da fábrica, convencida da necessidade de parar o fabrico de robots visto a população humana ter deixado de se reproduzir. O único cientista restante revela-se incapaz de redescobrir a fórmula de fabrico dos robots, mas os aperfeiçoamentos introduzidos secretamente pela extinta equipa de cientistas ao longo dos anos permitam que alguns dos robots desenvolvam novos sentimentos típicos dos humanos; proteção da sua própria espécie, amor, carinho e, sobretudo, desejo de viver. Numa metáfora do género humano, os robots acabam por perpetuar as qualidades típicas dos humanos.

O conceito de trabalho escravo, feito na peça pelos robots, é descrito pelo significado moderno da palavra checa “robota”. Na era feudal das actuais República Checa e Eslováquia a palavra “robota” significava os 2 ou 3 dias que os camponeses eram obrigados a trabalhar para os nobres sem direito a qualquer remuneração. Após o fim da era feudal “robota” passou a ser usada para descrever todo o tipo de trabalho não voluntário ou desinteressante, [12]. Procurando um termo para representar os “trabalhadores escravos” da peça, Karel Čapek pediu ajuda ao seu irmão Joseph. A ele se deve o termo “robot”, [11].

A exploração espacial

A exploração espacial proporcionou a oportunidade para o desenvolvimento da Robótica. Desde os veículos automáticos russos concebidos para a exploração lunar (Figura 1.10) aos recentes Sojourner, Spirit e Opportunity (Figura 1.11) e aos manipuladores como o Canadarm, em uso no vaivém espacial e o Flight Telerobotic Servicer, proposto para uso na estação espacial internacional (Figura 1.12). Exemplos adicionais podem ser facilmente consultados nos diversos sites da NASA, [19, 18].

A exploração terrestre

Curiosamente, a exploração terrestre por robots acontece posteriormente à exploração espacial. As missões Dante I, para inspecção do vulcão do monte Erebus na Antártica, e Dante II, para inspecção do monte

⁷ Dramaturgo e novelista, doutorado em Filosofia (1915), Čapek foi ainda director do Teatro Nacional em Praga.

⁸ A tradução para inglês é de 1923.

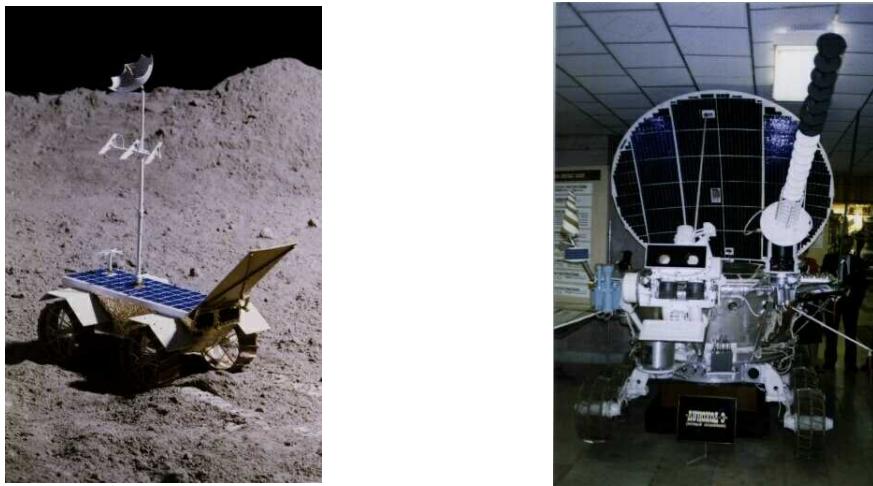
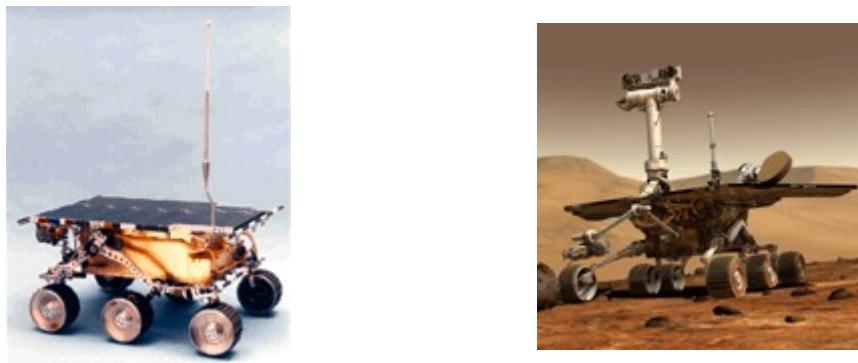


Figura 1.10. Robots da antiga União Soviética



O Sojourner

Os veículos Spirit/Oportunity

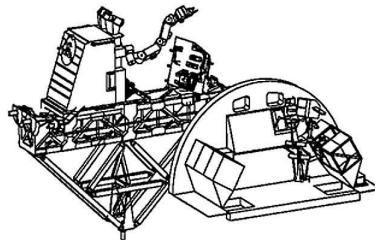
Figura 1.11. Robots da NASA para exploração de Marte

Spur no Alaska, constituem exemplos típicos de aplicações da Robótica na exploração do nosso planeta (Figura 1.13).

Usando locomoção aérea é também possível realizar exploração terrestre. A Figura 1.14 mostra um exemplo de uma aeronave UAV (Unmanned Aerial Vehicle) que pode ser usada para diversos tipos de missões de vigilância.



O Canadarm, montado no Space Shuttle



Vista conceptual do FTS montado no exterior da ISS

Figura 1.12. Robots manipuladores no espaço

Dante I on the rim of Erebus.

Dante I no monte Erebus, Antártica



Photo by Bill Ingalls/NASA

Dante 2 no monte Spur, Alaska

Figura 1.13. Inspecção de vulcões pelos robots Dante

Entretenimento e sociedade

Estatísticas recentes mostram que a indústria do entretenimento constitui um dos pólos de desenvolvimento futuro da Robótica, [24, 25]. No entanto, o desenvolvimento científico caminha paralelamente às aplicações na indústria do entretenimento.

O RoboCup constitui um exemplo particularmente interessante deste fenómeno. Trata-se de um conjunto de competições entre robots englobando jogos de futebol entre robots, e missões de busca e salvamento por robots especializados. Existem diferentes classes de competição, dependendo das dimensões dos robots e do tipo de locomoção, e.g., por rodas, de tipo bípede e de tipo quadrúpede. A Figura 1.15 mostra algumas das competições actualmente incluídas neste evento.



Figura 1.14. Robot UAV

Para além do entretenimento puro, a vaga de novas aplicações da Robótica estende-se também ao entretenimento terapêutico. O robot PAROS (Figura 1.16) tem sido usado no apoio a idosos, [26]. Dotado de um conjunto de movimentos simples que os humanos interpretam tendencialmente como comportamentos afectuosos permite o estabelecimento de relações de afectividade básicas. Estas são especialmente importantes em seres humanos sofrendo de síndromes relacionados com a solidão.

A interação emocional com seres humanos tem igualmente sido estudada através da criação de robots com características antropomórficas. É um dado aceite que os seres humanos tendem a interagir mais facilmente com robots que possuam características físicas humanas, [16]. O robot Kismet, [1], (Figura 1.17) possui capacidade de expressar algumas emoções facilmente reconhecidas por seres humanos.

A interacção através de emoções pode igualmente ser expressa com recurso a formas virtuais de antropomorfismo. Na Figura 1.18 ilustra-se uma forma alternativa de comunicação icónica entre seres humanos e robots guia em edifícios, [2].

As próteses robóticas são possivelmente das aplicações com maior relevo social. Actualmente assiste-se a rápidos progressos na tecnologias de materiais, sensores e actuadores, conduzindo a próteses com dimensões consistentes com a utilização por seres humanos. A Figura 1.19 ilustra a evolução das mãos robóticas através de três modelos distintos.

Micro robots

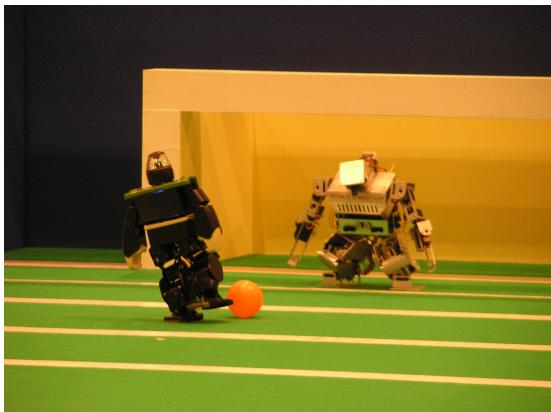
O níveis de miniaturização actualmente possíveis permitem conceber a utilização de robots em ambientes microscópicos. A especulação científica permite, por exemplo, pensar no uso de populações de robots microscópicos para tarefas de inspecção dentro do corpo humano. Estudos sobre a dinâmica de populações de robots e formas de controlar são desde há muito objecto de investigação pela comunidade científica. A



Middle Size league



Small Size league



Humanoid league



Four legged league

Figura 1.15. Algumas das competições do RoboCup



Figura 1.16. O robot PAROS

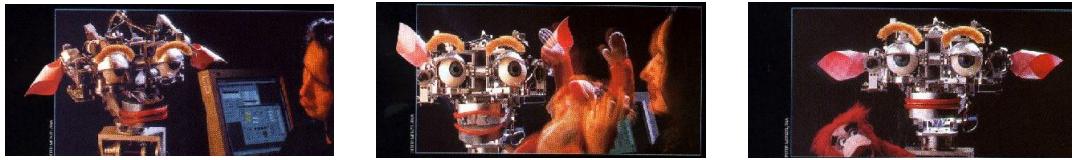


Figura 1.17. O robot Kismet expressando diversas emoções

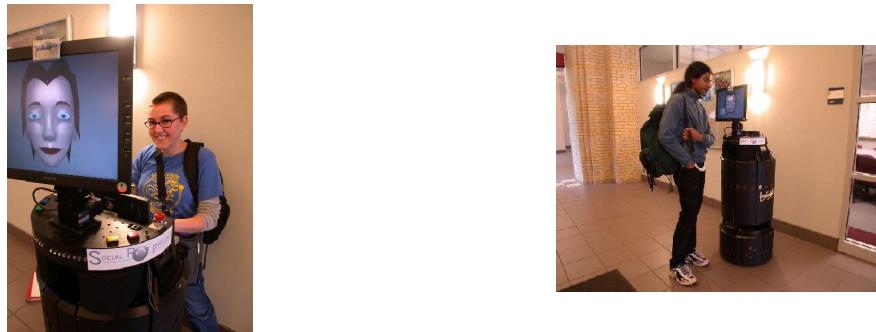


Figura 1.18. O robot Vikia em interacção com seres humanos



A mão Robonaut, [17]

A mão SHADOW, [4]

A mão LAVAL 10, [3]

Figura 1.19. Mão robóticas

miniaturização e a capacidade de controlar populações de robots permitem antever a criação de sistemas virtualmente vivos, no sentido em que terão capacidade de se reproduzir e evoluir as suas capacidades⁹.

A Figura 1.20 ilustra micro-robots actuais.

⁹ A vida artificial constitui uma das áreas de investigação da Inteligência Artificial. Curiosamente, já em Jacques de Vaucanson se encontra uma preocupação com a vida artificial.



Pílula com câmara de vídeo incorporada .

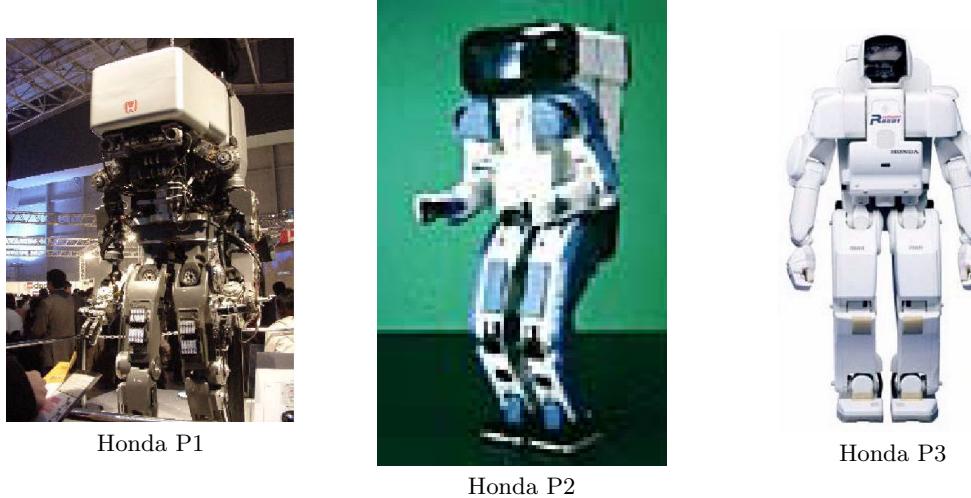
Micro-motores realizados numa pastilha de silício

Figura 1.20. Micro-robots

Robots e ficção

Nos últimos 2 séculos a literatura tem sido pródiga na utilização de robots. A ficção científica tem explorado exaustivamente o uso de robots e criado marcos que influenciaram em parte a Robótica. Filmes como a Guerra das Estrelas colocaram definitivamente os robots no imaginário popular, por vezes contribuindo, de forma quase paradoxal, para o aparecimento de expectativas irrealistas e para o estudo de novas aplicações.

Os robots humanóides (Figuras 1.21 e 1.22) constituem um exemplo típico deste quase paradoxo. A complexidade da locomoção bípede começou no passado recente a ser estudada pela comunidade científica ligada à Robótica. Os avanços espectaculares, nomeadamente na qualidade da movimentação, ainda escondem múltiplos problemas.

**Figura 1.21.** Os bípedes da Honda



Honda Asimo



Sony QRIO

Figura 1.22. Os bípedes recentes da Honda e da Sony.

Actualmente estes robots possuem capacidades de locomoção relativamente básicas. Por exemplo, conseguem caminhar em superfícies planas ou com pequenas inclinações, subir e descer escadas, mas não conseguem caminhar em ambientes pouco estruturados. No entanto estas capacidades já estão no limiar do necessário para que os robots humanóides possam a breve prazo ser usados em ambientes fabris e domésticos.

Para além dos aspectos puramente tecnológicos a literatura de ficção abordou também questões relacionadas com a interacção entre homens e robots. Em 1940 o escritor Isaac Asimov publica uma série de pequenos contos onde define as chamadas 3 leis da robótica.

Lei 1: Um robot não pode, deliberadamente ou por omissão, fazer mal a um humano.

Lei 2: Um robot deve obedecer às ordens que lhe forem dadas excepto no que conflitar com a primeira lei.

Lei 3: Um robot deve proteger a sua própria existência excepto quando isso conflictuar com a primeira ou segunda leis.

A elegância deste conjunto de axiomas esconde no entanto algumas dificuldades em resolver problemas éticos. Por exemplo, os axiomas de Asimov não permitiriam que um robot sacrificasse uma vida humana para salvar milhões. Em 1950 uma quarta lei, habitualmente chamada lei 0, resolve este problema¹⁰

Lei 0: Um robot não pode deliberadamente ou por omissão fazer mal à humanidade.

¹⁰ Evidentemente, a terceira lei deverá agora fazer referência às três anteriores.

As leis de Asimov escondem uma grande dificuldade na implementação. As inúmeras arquitecturas de controlo de robots actualmente existentes procuram directa ou indirectamente mimetizar nos robots a forma de interagir com o ambiente típica dos seres humanos.

A interacção entre homens e robots que está na base do aparecimento das Leis da Robótica, é actualmente uma área em forte expansão. Como já referido neste texto, alguns estudos apontam no sentido da interacção ser facilitada se os robots forem de tipo antropomórfico, ou seja, as suas características físicas forem de algum modo semelhantes às características físicas humanas, [16]. No âmbito dos serviços existem actualmente diversas propostas de robots desenhados com o intuito de facilitar a interacção com seres humanos. A Figura 1.23 mostra dois robots de atendimento público.

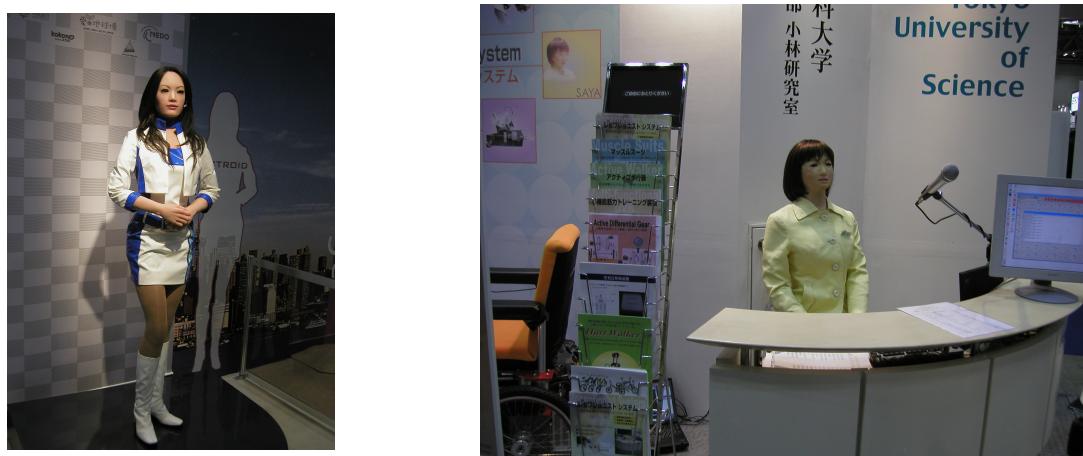


Figura 1.23. Robots para atendimento público

A realidade industrial

A Robótica vai conquistando aos poucos a indústria e os serviços. Algumas aplicações usam robots desde que o homem foi capaz de desenvolver fontes de energia mecânica. As escavadoras (Figura 1.24a) constituem exemplos de plataformas móveis onde está montado um manipulador. Grande parte das linhas de montagem automóvel são actualmente compostas por manipuladores roboticos (Figura 1.24b). Manipuladores paralelos são usados para manipular massas de valores elevados (Figura 1.24c) e onde sejam exigido posicionamento de precisão (Figura 1.24d).

Em ambientes domésticos assiste-se actualmente a uma tentativa de introdução de robots de serviços. A Figura 1.25 mostra dois exemplos de robots aspiradores disponíveis no mercado. Os robots na Figura 1.26 possuem capacidades básicas de assistência pessoal, nomeadamente de gestão de email.

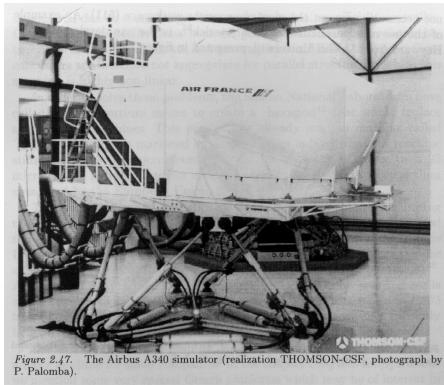
Para além das aplicações comuns da Figura 1.24, existem na actualidade diversas tarefas, e.g., a monitorização de galerias subterrâneas e linhas de alta tensão, a instalação de linhas de comunicação em



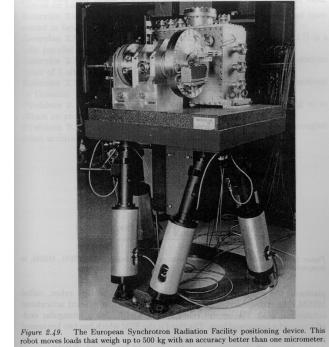
a) Escavadora



b) Linha de montagem robotizada



c) Simulador de voo do Airbus A340



d) Posicionamento de precisão

Figura 1.24. Robots em aplicações industriais

condutas subterrâneas, ou a vigilância activa de áreas semi-estruturadas, que podem ser desempenhadas de forma eficiente, com vantagem económica, e minimizando os riscos de acidentes, por robots.

1.3 Uma visão global da Robótica

A introdução à Robótica segue normalmente uma estrutura bem estabelecida em vários textos pedagógicos de referência nesta área, [14, 20].



Figura 1.25. Robots aspiradores para ambientes domésticos



Figura 1.26. Robots de assistência pessoal

A estrutura escolhida neste texto reflecte uma tentativa de compor o mosaico resultante do estudo das diferentes áreas que intervêm na Robótica. A Figura 1.27 apresenta uma proposta de taxonomia da Robótica baseada nas áreas funcionais identificadas atrás. O leitor é convidado desde já a intuir as relações entre cada uma das áreas indicadas.



Figura 1.27. Uma taxonomia para a Robótica

Referências

1. <http://www.ai.mit.edu/projects/humanoid-robotics-group/kismet/kismet.html>.
2. <http://www.cs.cmu.edu/social/pics.html>.
3. http://wwwrobot.gmc.ulaval.ca/recherche/theme04_a.html.
4. <http://www.shadowrobot.com/>.
5. Microsoft Encarta 97 Encyclopedia, 1997. English edition.
6. The Karakuri, 2001. www.cjn.or.jp/karakuri/index.html.
7. Vaucanson's Duck, 2001. www.rennard.org/alife/english/alimggb.html.
8. 1830 AD - Charles Babbage's Analytical Engine. www.maxmon.com/1830ad.htm, 2002.
9. Charles Babbage's First Difference Engine. home.clara.net/mycetes/babbage/, 2002.
10. Anonymous. Ancient Egypt. Dodd, Mead & Company, New-York, 2002. Web reference at www.marcdatabase.com/lemur/dm-ancient-automata.html. Link access - January, 2002.
11. Joseph Čapek. What is a Robot ?
inpaku-www.chuden.co.jp/us/data_base/database_s/s_01e.html, 2002.
12. Karel Čapek. R.U.R.: Rossum's Universal Robots. www.maxmon.com/1921ad.htm, 1921.
13. Karel Čapek. *R.U.R.* Dover Publications Inc., 2001.
14. John Craig. *Introduction to Robotics*. Addison-Wesley, 1989.
15. Homero. *Iliada*. Livros Cotovia, 2005.
16. S. Kiesler and P. Hinds. Introduction to the special issue on human-robot interaction. *Human-Computer Interaction*, 19, 2004.
17. C. S. Lovchik and M. A. Diffler. The Robonaut hand: A Dexterous Robot Hand For Space. In *Procs. 1999 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, May 1999. Detroit, MI, USA.
18. Nasa Mars Program, 2005. <http://marsprogram.jpl.nasa.gov/gallery/index.html>.
19. Nasa Space Telerobotics Program, 2005. http://ranier.hq.nasa.gov/telerobotics_page/photos.html.
20. Lorenzo Sciavicco and Bruno Siciliano. *Modeling and Control of Robot Manipulators*. McGraw-Hill, 1996.
21. The Franklin Institute Science Museum. The Maillardet automaton, 2002.
www.sln.org/pieces/knox/automaton.
22. The RUR Group. R.U.R., The Play, An Historical Perspective.
www.rur.nxs.net/historic_perspective.htm, 1921.
23. Robert H. Thurston. A history of the growth of the steam-engine. Electronic published at www.history.rochester.edu/steam/thurston/1878/index.html, 1878. Link access - January, 2002.
24. United Nations and The International Federation of Robotics. *World Robotics 2001*. UN, 2001.
25. United Nations and The International Federation of Robotics. *World Robotics 2002*. UN, 2002.
26. K. Wada, T. Shibata, T. Musha, and S. Kimura. Robot Therapy for Elders Affected by Dementia. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, July/August 2008.

Conceitos base

2.1 Introdução

Este capítulo descreve as ferramentas matemáticas e terminologia usadas nesta introdução à Robótica. Esta motivação recorre a exemplos simples, deixando para os capítulos seguintes a explicação detalhada.

O conjunto de ferramentas matemáticas necessárias a uma introdução à Robótica é relativamente pequeno. A Tabela 2.1 permite uma rápida percepção das relações entre áreas científicas das bases de Engenharia e áreas de estudo na Robótica. Esta correspondência não é rígida. Em regra todas as áreas científicas participam em todas as áreas da Robótica.

Área científica	Área de intervenção na Robótica
Álgebra linear e geometria euclideana	→ Cinemática
Cálculo diferencial e sistemas dinâmicos	→ Dinâmica e controlo
Matemática discreta, sistemas de eventos e inteligência artificial	→ Interacção com o exterior; modelação do ambiente
Processos estocásticos	→ Sensores, localização, navegação

Tabela 2.1. Ferramentas básicas da Robótica

A Álgebra Linear é a ferramenta base para o estudo da cinemática de robots, i.e., o estudo das propriedades de movimento exclusivamente dependente da geométrieia do robot.

A dinâmica de robots estuda as propriedades de movimento dependentes das características físicas do robot, e.g., massa e respectiva distribuição, utilizando as leis da Mecânica Clássica. Os modelos obtidos são descritos por sistemas de equações diferenciais e portanto o cálculo diferencial e a teoria dos sistemas dinâmicos são as ferramentas básicas de suporte.

Os aspectos relacionados com a tomada de decisões têm muitas vezes características discretas. A modelização de sistemas de decisão é habitualmente feita com recurso à Matemática discreta através de sistemas de acontecimentos discretos ou a técnicas de inteligência artificial.

O estudo de processos estocásticos, i.e., sistemas dinâmicos que incluem variáveis aleatórias, na Robótica tem como principal motivação a representação de incertezas e graus de confiança nos dados obtidos dos sensores, no estudo de controladores e sistemas de decisão.

No que respeita à terminologia, esta introdução é suportada maioritariamente no estudo de manipuladores robóticos. Sem qualquer perda de generalidade, aproveitam-se as características particulares destes dispositivos que permitem uma introdução estruturada das principais ideias envolvidas na Robótica. A extrapolação dos conceitos base para plataformas móveis é feita sempre que relevante.

Um manipulador robótico, ou braço robot, é um conjunto de corpos rígidos (vulgarmente chamados troços) ligados entre si através de articulações (vulgarmente chamadas juntas ou graus de liberdade). Os manipuladores classificam-se em *série*, se cada junta está ligada a um máximo de 2 troços, ou *paralelo*, se para alguma junta esse número for superior (Figura 2.1).

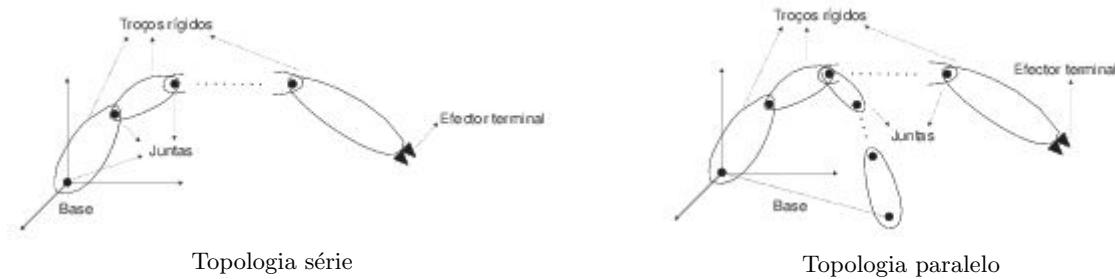


Figura 2.1. Representação abstracta para as topologias série e paralelo em manipuladores robóticos

Um manipulador possui pelo menos 1 ponto fixo de ligação ao ambiente em que está inserido. Este ponto de ligação denomina-se *base* do manipulador. A base é geralmente associada a um extremo da cadeia cinemática no caso de manipuladores série. O troço do manipulador onde é colocada a ferramenta de trabalho constitui o *efector terminal*. Em manipuladores série o efector terminal é geralmente colocado no extremo oposto à base. Para manipuladores paralelo a base é formada pelo troço da estrutura que está rigidamente ligado ao ambiente. O efector terminal poderá ser qualquer um dos restantes troços.

As juntas são os sistemas que permitem o movimento relativo entre troços. O tipo de junta define o tipo de movimento do troço a que está associada. Rotações e translações constituem os tipos de movimento mais comuns. Rotações simples em torno de um eixo fixo são geradas por *juntas de revolução*. Translações simples ao longo de uma direcção fixa são geradas por *juntas prismáticas*.

As juntas constituem os *graus de liberdade* de um manipulador e podem ser *actuadas* ou *não actuadas*, consoante estejam ou não equipadas com um actuador, e.g., um motor eléctrico ou pneumático. O movi-

mento de uma junta não actuada depende exclusivamente das forças exteriores que actuam no respectivo troço.

A Figura 2.2 mostra dois exemplos de manipuladores série em que todas as juntas são de revolução. Em ambos os exemplos todas as juntas são actuadas.



Figura 2.2. Manipuladores série

A Figura 2.3 ilustra dois exemplos de manipuladores paralelo. Este tipo de manipulador é utilizado em diferentes variantes relativamente aos pontos de ligação dos troços à base e ao efector terminal. Uma das variantes mais comuns tem 6 pontos de ligação na base e 3 pontos no efector terminal e designa-se por Stewart-Gough. No exemplo as juntas prismáticas correspondem aos troços rígidos que unem as duas estruturas hexagonais (como se tivessem sido fixadas nos comprimentos dos troços). Em geral as juntas prismáticas são actuadas enquanto que as juntas esféricas são não-actuadas. A estrutura da direita mostra um manipulador paralelo utilizado como mesa sísmica no Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC), em Lisboa. Este sistema simula o efeito de sismos em modelos de estruturas (podendo utilizar para tal dados sísmicos reais).

Relativamente a plataformas móveis, a terminologia básica é no essencial a mesma já que os tipos de juntas utilizados são os mesmos. Obviamente estes robots não possuem um ponto fixo de contacto com o ambiente. A Figura 2.4 mostra exemplos de robots móveis onde as juntas de revolução são claramente identificáveis nas rodas e lagartas de locomoção e nas estruturas mais complexas usadas nas pernas.

2.2 Ferramentas básicas

O objectivo de qualquer robot é mover-se por forma a executar uma tarefa. A noção de movimento só tem sentido se for definida num espaço apropriado. A este espaço é comum chamar-se espaço de estados.



Exemplo em Lego de um manipulador paralelo (variante da estrutura Delta, vide [20])



Mesa sísmica do LNEC

Figura 2.3. Manipuladores paralelo



Figura 2.4. Robots móveis de diversos tipos

Um ponto no espaço de estados (ou, mais simplesmente, um *estado*) deve conter a informação suficiente que permita a definição de trajectórias no espaço de estados (a execução de uma tarefa corresponde a pelo menos uma trajectória), ou seja, um estado deve incluir informação de posição e velocidade.

Em geral, a execução de uma dada tarefa por parte de um robot requer que a trajectória do robot no espaço de estados seja ajustada. Por exemplo, o aparecimento de um obstáculo no caminho do robot pode obrigar a uma alteração da trajectória. Esta ideia de que o comportamento de um robot pode ser modificado para atingir determinados objectivos corresponde à noção de controlo de um sistema dinâmico.

A Figura 2.5 introduz o ciclo de controlo percepção-decisão-acção (representado pela linha a traço forte) como elemento base da arquitectura de controlo de um robot.



Figura 2.5. Áreas funcionais no controlo de um robot e o ciclo percepção-decisão-acção

2.2.1 Álgebra de vectores e matrizes

A representação natural para a configuração de um robot requer o agrupamento de um número finito de variáveis. Por exemplo, num manipulador com todas as juntas de revolução, o conjunto das posições angulares de todas as juntas θ_i , $i = 1, \dots, n$ define a postura do manipulador pode ser representado por

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \quad (2.1)$$

A postura, ou seja a forma como o robot está colocado no mundo, designa-se habitualmente por configuração.

Uma configuração da forma (2.1) pode identificar-se com um ponto num espaço n -dimensional definido sobre o corpo dos números reais, já que qualquer que seja o tipo de junta o valor numérico que lhe está associado é necessariamente real. O espaço usado para representar configurações tem o nome de *espaço de configuração* ou *C-espaço*.

A representação (2.1) é provavelmente a mais intuitiva. No entanto não é a única possível e, como veremos adiante, pode haver vantagem em escolher outras representações para simplificar a análise das características de um robot. Por exemplo, representações utilizando matrizes são comuns no estudo dos manipuladores série.

A necessidade de expressar matematicamente o movimento de um robot obriga a que qualquer representação defina um espaço que admita a possibilidade de se definirem operadores que possam ser utilizados para definir variações, tais como o operador diferenciação. Espaços lineares, como por exemplo \mathbb{R}^n , permitem expressar a variação de um ponto segundo um vector e portanto é de esperar que tenham papel de relevo na Robótica.

Note-se que um espaço de configuração não é um espaço de estados já que cada configuração não contém informação de velocidade.

2.2.2 Inversas, pseudo-inversas e determinantes de matrizes

Dada uma matriz A , quadrada de ordem n , a sua inversa é a matriz A^{-1} tal que se verifica $AA^{-1} = \mathbb{I}_n$, em que \mathbb{I}_n é a matriz identidade e ordem n . Esta propriedade pode ser expressa na forma,

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)}$$

onde $\text{Adj}(A)$ é a matriz adjunta de A , definida como

$$\text{Adj}(A) = \left[(-1)^{i+j} |a_{ij}| \right]'$$

em que $|a_{ij}|$ representa o determinante da submatriz obtida por remoção da linha i da da coluna j de A , e $|A|$ é o determinante de A pode ser definido como

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} |a_{1j}|$$

Na Robótica os determinantes de matrizes são utilizados, por exemplo, no cálculo de singularidades de manipuladores série, i.e., de posturas a partir das quais o robot possui algum tipo de restrição ao movimento.

Quando A é uma matriz não quadrada a noção de matriz inversa dá lugar à noção de pseudo inversa. Uma matriz A^- de dimensão $n \times m$ diz-se inversa generalizada¹ de uma matriz A de dimensão $m \times n$ se verifica $AA^-A = A$, [17],

A matriz A^- não é única. De facto, dadas as matrizes A , com dimensões $m \times n$ e característica $\text{rank}(A) = r$, B , com dimensões $m \times m$ e não singular, C , com dimensões $n \times n$, não singular, e verificando

$$BAC = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde I_r é a matriz identidade de ordem r , tem-se que a matriz

$$C \begin{bmatrix} I_r & D \\ E & F \end{bmatrix} B$$

¹ Pseudo-inversa é uma denominação igualmente usada.

é uma inversa generalizada de A , quaisquer que sejam as matrizes D , $r \times (n - r)$, E , $(m - r) \times r$, e F , $(m - r) \times (n - r)$. A verificação deste facto pode ser feita directamente a partir da definição de pseudo-inversa por manipulação algébrica simples.

$$AA^{-}A = AC \begin{bmatrix} I_r & D \\ E & F \end{bmatrix} BA$$

$$BAA^{-}AC = BAC \begin{bmatrix} I_r & D \\ E & F \end{bmatrix} BAC$$

$$BAA^{-}AC = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & D \\ E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

esta igualdade verifica-se (condição suficiente) para

$$AA^{-}A = A$$

como B e C são não singulares verifica-se

$$AA^{-}A = B^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C^{-1} = A$$

pelo que a condição é também necessária.

Uma pseudo-inversa comum pode obter-se a partir da resolução de um problema de optimização simples. Considere-se o problema linear,

$$y = Ax$$

onde x são as variáveis independentes, num vector coluna $n \times 1$, e A uma matriz de dimensão $m \times n$.

A solução é

$$x = A^{-}y$$

Neste caso a pseudo-inversa A^{-} pode ser obtida resolvendo o problema

$$\min_x \frac{1}{2} (y - Ax)^T (y - Ax)$$

obtendo-se

$$A^- = (A^T A)^{-1} A^T.$$

2.2.3 Produto interno

O produto interno é um operador de projecção definido num espaço linear através de um conjunto de propriedades. O co-domínio deste operador é o conjunto dos números reais.

Representando o produto interno de dois vectores \mathbf{a} e \mathbf{b} por $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ as propriedades são

$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$	Comutatividade	
$\langle a, a \rangle = 0 \Rightarrow a = 0$	Elemento nulo	(2.2)
$\langle \lambda_1 a + \lambda_2 b, c \rangle = \lambda_1 \langle a, c \rangle + \lambda_2 \langle b, c \rangle$	Linearidade	

Se o produto interno de dois quaisquer vectores a, b for nulo então $a = 0$ ou $b = 0$ ou os vectores dizem-se perpendiculares, representando-se esta relação por $a \perp b$.

De entre os operadores produto interno mais utilizados temos (a verificação das propriedades (2.2) é deixada como exercício),

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (2.3)$$

com

$$a = (a_1, \dots, a_n), \quad b = (b_1, \dots, b_n)$$

e

$$\langle a(t), b(t) \rangle = \int_{l_i}^{l_s} a(\tau) b(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

com

$$a(t), b(t), \text{ funções reais do tempo}$$

A forma (2.3) tem uma interpretação particularmente simples no caso 2D,

$$\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos(\arg(a, b)). \quad (2.5)$$

O termo $\|a\| \cos(\arg(a, b))$ corresponde ao comprimento da projecção de a sobre b enquanto que $\|b\| \cos(\arg(a, b))$ corresponde ao comprimento da projecção de b sobre a .

A forma (2.4) é normalmente usada quando os vectores são funções do tempo. Esta forma pode, por exemplo, definir a projecção entre uma trajectória de um robot móvel (uma função do tempo) e um caminho de referência que o robot deve seguir.

Num espaço euclideano o produto interno verifica a chamada desigualdade de Schwartz²,

$$\langle a, b \rangle^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$$

2.2.4 Produto externo

Dados dois vectores $a, b \in \mathbb{R}^3$, o produto externo $a \times b$ é definido como

$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

e verificam-se as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} a \times b &\perp a \quad \wedge \quad a \times b \perp b \\ \|a \times b\| &= \|a\| \|b\| |\sin(\arg(a, b))| \end{aligned}$$

No caso em que $a, b \in \mathbb{R}^2$, o produto externo verifica

$$\|a \times b\| = \det(a, b).$$

O produto externo de vectores é usado, por exemplo, nas leis da Mecânica Clássica que permitem definir os modelos matemáticos da dinâmica de robots.

2.2.5 Normas e distâncias

Uma norma verifica as seguintes propriedades,

² Mais genericamente, esta desigualdade é verificada em espaços de Hilbert, [28].

$\|\mathbf{q}\| \geq 0$, a igualdade verifica-se apenas para $\mathbf{q} = 0$,

$\|r\mathbf{q}\| = |r|\|\mathbf{q}\|$, com r um escalar,

$\|\mathbf{q} + \mathbf{s}\| \leq \|\mathbf{q}\| + \|\mathbf{s}\|$, é chamada desigualdade triangular.

As normas L^p , definidas por,

$$\|q\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |q_i(t)|^p \right)^{1/p}$$

para sinais (contínuos), e por

$$\|q\|_p = \left(\sum_i |q_i|^p \right)^{1/p}$$

para vectores $q = (q_1, \dots, q_n)$, estão entre as mais usadas na Robótica. A norma $-\infty$ é definida por

$$\|q\|_\infty = \sup_t |q(t)|, \quad \text{no espaço de sinais}$$

$$\|q\|_\infty = \sup_i |q_i|, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{no espaço de vectores}$$

Para espaços onde se define o produto interno a norma de um vector \mathbf{q} pode ser induzida por³,

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\langle q, q \rangle}.$$

A noção de distância entre dois pontos q e s pode ser definida através da norma por

$$d(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = \|\mathbf{q} - \mathbf{s}\|.$$

Os espaços em que se define uma distância dizem-se espaços métricos. A noção de distância é usada em praticamente todas as áreas envolvidas na Robótica. Como exemplo, qualquer mecanismo de decisão é suportado numa medida de desempenho que na prática é muitas vezes uma distância (a que muitas vezes se chama “erro”).

³ Um espaço com produto interno possui sempre uma norma mas o inverso não é verdadeiro, [8]. Um exemplo comum é dado pelas normas $L^p, p \neq 2$, [14].

2.2.6 Valores próprios, vectores próprios e valores singulares

A noção de vector próprio está associada à noção de direcção do espaço ao longo da qual um sistema dinâmico tem as variações mais significativas. Estas direcções constituem as famílias de vectores próprios. Dada uma matriz quadrada A , e são definidas por,

$$Ax = \lambda x \quad (2.6)$$

onde λ é chamado valor próprio.

É interessante notar que no caso de um sistema linear em que A representa a matriz da dinâmica,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

o termo Ax é a componente principal que define a evolução do sistema e, usando (2.6), pode concluir-se que se o estado atinge um vector próprio e $u = 0$ então o sistema evolui na direcção definida pelo vector próprio (já que λ é um escalar)

Os valores singulares são definidos como a raiz quadrada dos valores próprios da matriz $A^H A$, em que $A^H = (A^*)^T$ é a matriz transposta e conjugada de A , [17].

No contexto dos manipuladores é comum definir-se uma medida, chamada manipulabilidade, da capacidade de movimento quando o efector terminal está numa dada configuração. Os valores singulares são uma medida da manipulabilidade ao longo das principais direcções de movimento.

2.2.7 Formas quadráticas e matrizes (semi)-definidas

Uma matriz A diz-se Hermitiana se $A = (A')^*$ (A transposta e conjugada).

Se A é Hermitiana e real então é simétrica, ou seja $A = A^T$.

Uma forma $x'Ax$, com A diz-se (semi)definida se A

Uma matriz quadrada Hermitiana ($m \times m$), $A = [a_{ij}]$, é (semi)-definida positiva sse

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{bmatrix} > (\geq)0, \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

ou seja

$$x^T Ax > (\geq)0$$

Uma matriz quadrada Hermitiana ($m \times m$) $A = [a_{ij}]$ é (semi) definida negativa sse

$$\begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1i} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{i1} \dots a_{ii} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} > (\geq)0, \text{ para } i = 1, \dots, m \wedge i \text{ par} \\ < (\leq)0, \text{ para } i = 1, \dots, m \wedge i \text{ impar} \end{array} \right.$$

ou seja

$$x^T Ax < (\leq)0$$

Uma matriz definida positiva/negativa tem todos os valores próprios positivos/negativos. Caso haja valores próprios nulos é apenas semi-definida. Havendo simultaneamente valores próprios positivos e negativos a matriz diz-se indefinida.

2.2.8 Tensores

Um tensor é um objecto matemático que pode ser associado a um referencial através de um conjunto de escalares. Estão neste caso os vectores, associados ao referencial onde estão descritos pelas respectivas coordenadas, e as matrizes de rotação, em que cada coluna descreve as coordenadas de cada um dos eixos do referencial após a rotação.

Um tensor A de ordem n , no espaço 3D, é um objecto descrito por 3^n componentes.

$$A = [a_{i_1, i_2, \dots, i_n}], \quad j = 1, \dots, n, \quad i_j = 1, 2, 3 \quad (2.7)$$

Cada uma destas componentes tem um significado próprio num dado referencial \mathcal{F}_A . Este significado é preservado quando A é descrito num referencial $\mathcal{F}_{A'}$, ou seja o significado é preservado por mudança de coordenadas.

Um escalar é um exemplo de um tensor de ordem 0. Um vector no espaço 3D, $A = [a_{11}, a_{21}, a_{31}]$, constitui um exemplo de um tensor de ordem 1 já que se verifica

$$[a'_{11}, a'_{21}, a'_{31}] = \lambda [a_{11}, a_{21}, a_{31}]$$

onde λ é uma constante arbitrária, ou seja, o novo vector $[a'_1, a'_2, a'_3]$ tem todas as coordenadas escaladas por igual. Uma matriz de rotação no espaço 3D é um exemplo de um tensor de ordem 2. De facto, se uma matriz genérica

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

forem associadas as condições a verificar por matrizes de rotação no espaço 3D

$$\begin{aligned} a_{\star,i} &\perp a_{\star,j}, \quad i \neq j \\ a_{i,\star} &\perp a_{j,\star}, \quad i \neq j \\ |A| &= 1 \end{aligned}$$

e R for uma matriz de rotação que expressa a transformação entre dois referenciais então o produto RA contínua a ser uma matriz de rotação e logo A é um tensor.

Na Robótica, para além dos vectores e matrizes de rotação, os tensores de ordem 2 são usados na descrição das propriedades de massa dos corpos. Como se verá no Capítulo 5, o conhecimento da distribuição da massa de um robot pelo seu volume é fundamental para se obter o correspondente modelo matemático.

2.2.9 Quaterniões

Inventados por William R. Hamilton, os quaterniões são uma generalização dos números complexos a apresentam algumas vantagens na representação da configuração dos robots. O espaço dos quaterniões é por vezes representado por \mathcal{H} .

Um quaternião q é um quadríplo ordenado

$$q = (d, a, b, c)$$

onde a, b, c, d são elementos de um corpo⁴, d é chamada parte escalar e (a, b, c) é chamada a parte vectorial. Em alternativa, é comum usar-se a representação

$$q = d\mathbf{1} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

onde $\mathbf{1} \equiv (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{i} \equiv (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{j} \equiv (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{k} \equiv (0, 0, 0, 1)$ representam os versores de uma base do espaço dos quaterniões, ou ainda

$$q = (d, \mathbf{v}), \quad \text{com } \mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

A Tabela 2.2 define a igualdade de quaterniões juntamente as operações principais da álgebra no espaço dos quaterniões.

Pontos no espaço 3D euclídeo podem representar-se como quaterniões com parte escalar nula e parte vectorial identificada com o correspondente vector de \mathbb{R}^3 , ou seja, dado um ponto $p = (p_x, p_y, p_z)$ a sua representação no espaço dos quaterniões reais é $p = 0\mathbf{1} + p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$.

⁴ Por exemplo o corpo dos números reais, \mathbb{R} ou o corpo dos números complexos, \mathbb{C} . Em todo o livro apenas serão considerados quaterniões sobre o corpo dos reais.

Igualdade	$q_1 = q_2 \Leftrightarrow d_1 = d_2 \wedge a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 \wedge c_1 = c_2$
Soma	$q_1 + q_2 = (d_1 + d_2)\mathbf{1} + (a_1 + a_2)\mathbf{i} + (b_1 + b_2)\mathbf{j} + (c_1 + c_2)\mathbf{k}$
Subtracção	$q_1 - q_2 = (d_1 - d_2)\mathbf{1} + (a_1 - a_2)\mathbf{i} + (b_1 - b_2)\mathbf{j} + (c_1 - c_2)\mathbf{k}$
Produto por escalar	$\lambda q = \lambda d\mathbf{1} + \lambda a\mathbf{i} + \lambda b\mathbf{j} + \lambda c\mathbf{k}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \lambda \in \mathbf{C}$
Produto	$\begin{aligned} q_1 q_2 &= d_1 d_2 - a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 + \\ &\quad + d_1 (\underbrace{a_2 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + c_2 \mathbf{k}}_{\mathbf{v}_2}) + d_2 (\underbrace{a_1 \mathbf{i} + b_1 \mathbf{j} + c_1 \mathbf{k}}_{\mathbf{v}_1}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{d_1 d_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}_{\text{Parte escalar}} + \underbrace{d_1 \mathbf{v}_2 + d_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}_{\text{Parte vectorial}} \end{aligned}$
Conjugado	$q^* = (d\mathbf{1} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})^* = d\mathbf{1} - a\mathbf{i} - b\mathbf{j} - c\mathbf{k}$
Norma	$N_q = qq^* = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$
Recíproco	$q^{-1} = q^*/N_q$

Tabela 2.2. Operações básicas no espaço dos quaterniões

A especificação da atitude de um robot requer a utilização de posições e orientações. Uma orientação no espaço 3D podem ser definida através de um ângulo e do correspondente eixo de rotação e logo as 4 coordenadas disponíveis num quaternião podem ser utilizadas para este efeito.

2.3 Espaços de configuração

Na Secção 2.2.1 introduziu-se a noção de configuração como sendo um ponto num espaço com n dimensões (chamado C -espaço). Um robot evoluindo no espaço 3D possui em cada instante posição e orientação. Esta informação pode ser extraída usando as características geométricas do robot e portanto interessa estudar formas de representação para posições e orientações.

A representação de posições e orientações pode assumir múltiplas formas, dependendo das características dos espaços usados para a sua representação, e.g., vectorial, matricial, quaterniões.

No caso de um manipulador, a especificação de uma tarefa requer a especificação de uma posição e de uma orientação, identificando, respectivamente, a localização de uma peça que o manipulador deve agarrar e a forma como a deve agarrar. Adicionalmente pode ser necessário especificar a posição e orientação de algum(ns) troço intermédio(s). No caso de um robot móvel, uma tarefa pode requerer que o robot atinja uma posição pré-definida com uma determinada orientação. Em suma, para representar o movimento de um robot no espaço 3D é necessário recorrer a espaços onde se possam representar posições e orientações.

A Figura 2.6 ilustra a representação gráfica típica de posições e orientações no espaço 3D. A posição é representada através das coordenadas de um ponto e a orientação através de dois sistemas de coordenadas⁵. A notação ${}^A P$ indica um ponto descrito num referencial \mathcal{F}_A , com eixos descritos pelos vectores X_A , Y_A e Z_A ⁶.



O ponto ${}^A P$ é representado em \mathcal{F}_A por um vector

Os referenciais \mathcal{F}_A e \mathcal{F}_B diferem na orientação

Figura 2.6. Representação de configurações com espaços em \mathbb{R}^3

No caso da posição é evidente a necessidade das 3 coordenadas de \mathbb{R}^3 e como tal a representação é naturalmente o vector definido entre o ponto e a origem do sistema de coordenadas. Para especificar a orientação relativa entre os referenciais \mathcal{F}_A e \mathcal{F}_B bastam 3 ângulos e 3 eixos de rotação.

Considere-se a descrição de cada um dos eixos de \mathcal{F}_B em \mathcal{F}_A ,

$${}^A X_B = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}, {}^A Y_B = \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}, {}^A Z_B = \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}.$$

Dado um vector ${}^B P = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$, descrito em \mathcal{F}_B , a combinação linear

$${}^A P = \alpha {}^A X_B + \beta {}^A Y_B + \gamma {}^A Z_B \quad (2.8)$$

descreve o vector ${}^B P$ em \mathcal{F}_A . Como intuição, os ${}^A X_B, {}^A Y_B, {}^A Z_B$ representam os eixos de \mathcal{F}_B vistos em \mathcal{F}_A e as coordenadas de ${}^B P$ representam a quantidade de cada um dos eixos de \mathcal{F}_B . A soma (2.8) representa portanto os eixos de \mathcal{F}_B ponderados de acordo com as coordenadas de ${}^B P$. Note-se que em (2.8) está implícito que a origem dos dois referenciais é coincidente.

⁵ Todos os sistemas de coordenadas (ou referenciais) usados nest estudo são assumidos ortonormados, i.e., os correspondentes versores são ortogonais entre si e têm norma unitária.

⁶ Esta notação segue a usada em [10].

A expressão (2.8) pode ser escrita sob a forma matricial

$${}^A P = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} {}^B P$$

e, numa forma mais compacta,

$${}^A P = {}^A R {}^B P \quad (2.9)$$

A matriz ${}^A R$ é a matriz de rotação que transforma pontos descritos em \mathcal{F}_B em pontos descritos em \mathcal{F}_A . Assim, a orientação relativa entre dois referenciais \mathcal{F}_B e \mathcal{F}_A também pode ser expressa através de uma matriz de rotação⁷ e desta forma o espaço de configuração para um robot é da forma $SE(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ ⁸.

Viu-se atrás que as rotações entre referenciais em \mathbb{R}^3 podem ser descritas por 3 ângulos (e respectivos eixos de rotação) ou por matrizes de rotação. Portanto, no primeiro caso a descrição de uma rotação arbitrária requer um total de 12 parâmetros - 3 parâmetros para cada um dos eixos e 3 para os ângulos - que se podem reduzir a 3 se as rotações forem efectuadas em torno de eixos previamente convencionados. No segundo caso temos um total de 9 parâmetros - os nove elementos da matriz de rotação. As duas formas são, como não poderia deixar de ser, equivalentes e não são as únicas formas de representação⁹ de rotações.

Os quaterniões, introduzidos na Secção 2.2.9, constituem uma forma alternativa de representação de rotações. No espaço euclideano 3D, a representação de uma rotação em torno de um eixo arbitrário requer um mínimo de 4 parâmetros: 1 ângulo e 3 coordenadas para o eixo de rotação. Sem perca de generalidade, pode assumir-se que a parte vectorial do quaternião é usada para representar o eixo de rotação, identificando cada um dos versores de \mathbb{R}^3 com os versores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} do espaço dos quaterniões. O ângulo não pode ser directamente identificado com a parte escalar do quaternião sob pena de não se poderem utilizar as boas propriedades, i.e., as operações da Tabela 2.2, do espaço dos quaterniões.

Considere-se o quaternião

$$\mathbf{q} = \cos(\theta)\mathbf{1} + \sin(\theta)(r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} + r_z\mathbf{k}) \quad (2.10)$$

onde θ é um ângulo e $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ é um vector unitário que representa um eixo de rotação. A transformação, no espaço de quaterniões,

⁷ O espaço das matrizes de rotação definidas sobre o espaço euclideano 3D designa-se habitualmente por $SO(3)$. Esta designação é um acrónimo para *Special Orthonormal group of dimension 3*.

⁸ A designação $SE(3)$ advém da expressão *Special Euclidean group of dimension 3*.

⁹ Na Matemática o termo “representação” é sinónimo de “mergulho”, do termo anglo-saxónico *embeddings*, vide [18] a propósito de variedades diferenciais e “mergulhos”. Uma representação, ou mergulho corresponde à descrição de um objecto matemático num dado espaço tal que as suas propriedades são preservadas.

$$R(p) = \mathbf{q} \mathbf{p} \mathbf{q}^{-1} \quad (2.11)$$

retorna o ponto $p = (p_x, p_y, p_z)$, descrito na forma do quaternião $\mathbf{p} = 0\mathbf{1} + p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$, rodado de 2θ em torno de r . Note-se que o quaternião $R(p)$ tem parte real nula e a parte vectorial é interpretada como um ponto do espaço 3D. A demonstração de que (2.10) representa uma rotação é deixada como exercício.

2.4 Transformações de coordenadas

Escolhido um espaço para representar o robot, o estudo do movimento relativo entre os diversos pontos do robot, ou entre um qualquer ponto do robot e o ambiente exterior, requer o conhecimento de transformações de coordenadas no espaço escolhido. Nesta secção estudam-se transformações de coordenadas em $SE(3)$ e \mathcal{H}^2 . A Figura 2.7 ilustra a ideia de transformação de coordenadas no espaço 3D. A origem de \mathcal{F}_B não é coincidente com a origem de \mathcal{F}_A e existe ainda uma diferença de orientação entre os dois referenciais.

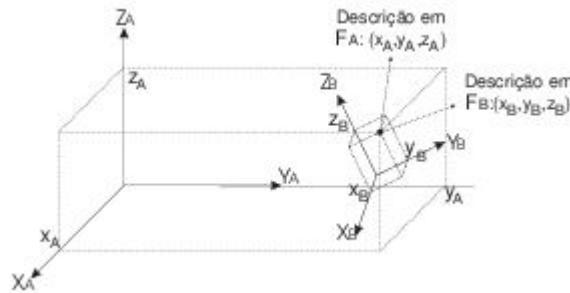


Figura 2.7. Transformações de coordenadas.

2.4.1 Estrutura de uma matriz de rotação

Dada uma matriz de rotação¹⁰

$${}^B_R = \begin{bmatrix} r_{XX} & r_{YX} & r_{ZX} \\ r_{XY} & r_{YY} & r_{ZY} \\ r_{XZ} & r_{YZ} & r_{ZZ} \end{bmatrix}$$

e atendendo a (2.8), é fácil reconhecer que os vectores coluna constituem projecções dos eixos de \mathcal{F}_B sobre os eixos de \mathcal{F}_A . Por exemplo, o elemento r_{XY} da matriz B_R é a projecção do eixo X_B sobre o eixo Y_A . Atendendo às propriedades do produto interno, uma matriz de rotação pode ser escrita como

¹⁰ A propósito de transformações de coordenadas, ao longo do texto segue-se a notação de [10].

$${}^A_B R = [{}^A X_B \ {}^A Y_B \ {}^A Z_B] = \begin{bmatrix} X_B \cdot X_A & Y_B \cdot X_A & Z_B \cdot X_A \\ X_B \cdot Y_A & Y_B \cdot Y_A & Z_B \cdot Y_A \\ X_B \cdot Z_A & Y_B \cdot Z_A & Z_B \cdot Z_A \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

A expressão (2.5) juntamente com a hipótese de bases normadas permite interpretar cada um dos elementos de ${}^A_B R$ como o coseno do ângulo formado pelos eixos respectivos. Nesta situação, é comum denominar cada um destes elementos por coseno director.

As colunas de ${}^A_B R$ representam portanto a descrição dos eixos de \mathcal{F}_B em \mathcal{F}_A . De (2.12) é fácil inferir que as linhas de ${}^A_B R$ representam a descrição dos eixos de \mathcal{F}_A em \mathcal{F}_B . Este argumento permite determinar facilmente a transformação inversa $({}^A_B R)^{-1}$.

$$({}^A_B R)^T = \begin{bmatrix} X_B \cdot X_A & X_B \cdot Y_A & X_B \cdot Z_A \\ Y_B \cdot X_A & Y_B \cdot Y_A & Y_B \cdot Z_A \\ Z_B \cdot X_A & Z_B \cdot Y_A & Z_B \cdot Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \cdot X_B & Y_A \cdot X_B & Z_A \cdot X_B \\ X_A \cdot Y_B & Y_A \cdot Y_B & Z_A \cdot Y_B \\ X_A \cdot Z_B & Y_A \cdot Z_B & Z_A \cdot Z_B \end{bmatrix} = {}^B_A R = ({}^A_B R)^{-1} \quad (2.13)$$

A matriz ${}^A_B R$ transforma pontos descritos em \mathcal{F}_B em pontos descritos em \mathcal{F}_A . No entanto, convém salientar que esta expressão pode conduzir a equívocos. Considere-se o exemplo simples da Figura 2.8.

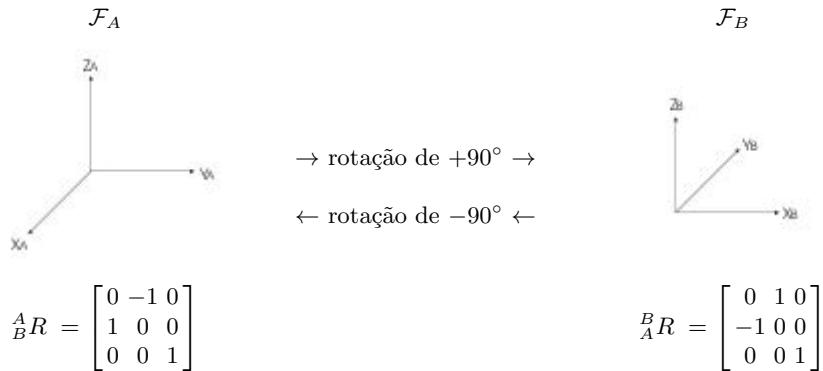


Figura 2.8. Os referenciais \mathcal{F}_A e \mathcal{F}_B diferem de uma rotação de 90°

O vector em \mathcal{F}_A , ${}^A P_1 = [1, 0, 0]'$ é transformado pela matriz de rotação num vector ${}^A P_2 = [0, 1, 0] = {}^A_B R [1, 0, 0]',$ também descrito em \mathcal{F}_A , rodado de $+90^\circ$ relativamente a ${}^A P_1$. Em alternativa, usando ${}^B P_1 = [1, 0, 0]',$ o significado de ${}^A P_2$ é agora alterado para a descrição de ${}^B P_1$ em \mathcal{F}_A .

Este exemplo permite reforçar a noção de que a matriz de rotação ${}^A_B R$ define um operador ao qual é possível atribuir duas interpretações: (i) transformação de pontos num mesmo referencial e (ii) transformação de pontos entre dois referenciais diferentes.

2.4.2 Transformações de coordenadas em $SE(3)$

Considerem-se os dois referenciais da Figura 2.9 arbitrariamente colocados no espaço, diferindo entre si de uma translação e na orientação relativa. A translação é descrita pelo vector ${}^A P_{B_{org}}$ que representa o deslocamento entre as origens dos referenciais medido em \mathcal{F}_A . A orientação relativa entre os dois referenciais é representada por uma matriz de rotação ${}^B R$, obtida considerando que as origens são coincidentes.

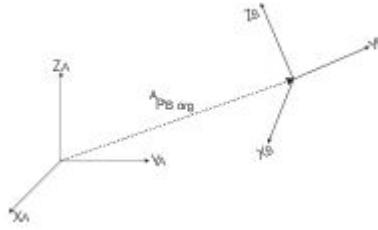


Figura 2.9. Referenciais diferindo de rotação e translação

Da Figura 2.9 obtém-se facilmente que pontos em \mathcal{F}_B são mapeados em \mathcal{F}_A através de

$${}^A P = {}^B R \cdot {}^B P + {}^A P_{B_{org}} \quad (2.14)$$

Note que (2.14) impõe que a sequência de operações a utilizar na transformação entre referenciais seja rotação seguida de translação. Usando coordenadas homogéneas para descrever os pontos ${}^A P$ e ${}^B P$ obtém-se uma formulação mais compacta

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^B R & {}^A P_{B_{org}} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^B T} \begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

A expressão (2.15) define uma transformação homogénea entre os pontos ${}^B P$ e ${}^A P$ expressos em coordenadas homogéneas¹¹

¹¹ As coordenadas homogéneas para um ponto (x, y) finito são dadas pelo ponto (x_1, x_2, x_3) que verifica

$$\frac{x_1}{x_3} = x \quad \frac{x_2}{x_3} = y$$

As coordenadas homogéneas permitem, entre outras coisas, a representação de pontos no infinito. Por exemplo, o ponto $(x_1, x_2, 0)$ descreve um ponto no infinito, na direcção $\frac{x_2}{x_1}$. O espaço dos pontos (x_1, x_2, x_3) designa-se por plano projectivo e representa-se por $P\mathbb{R}^2$.

A Figura 2.10 ilustra dois exemplos de referenciais diferindo entre si apenas por uma rotação. Em ambos os exemplos as origens dos referenciais são coincidentes.



- a) \mathcal{F}_B está rodado de $-\pi/2$ em torno do eixo X_A b) \mathcal{F}_B está rodado de θ relativamente a \mathcal{F}_A , em torno de Z_A

Figura 2.10. Exemplo de transformação entre referenciais

Utilizando a formulação dos cosenos directores a submatriz que descreve a rotação entre os dois referenciais do exemplo da Figura 2.10a é dada por,

$$\begin{aligned} X_B \cdot X_A &= 1 & Y_B \cdot Y_A &= 0 & Z_B \cdot X_A &= 0 \\ X_B \cdot Y_A &= 0 & Y_B \cdot Y_A &= 0 & Z_B \cdot Y_A &= 1 \\ X_B \cdot Z_A &= 0 & Y_B \cdot Z_A &= -1 & Z_B \cdot Z_A &= 0 \end{aligned}$$

e logo a transformação homogénea que descreve pontos de \mathcal{F}_B em pontos de \mathcal{F}_A é dada por,

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

No caso do exemplo da Figura 2.10b, os eixos de \mathcal{F}_B descritos em \mathcal{F}_A são dados por,

$${}^A X_B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^A Y_B = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^A Z_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e portanto a correspondente matriz de rotação é dada por,

$${}^A_B R = [{}^A X_B \ {}^A Y_B \ {}^A Z_B] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que a origem de \mathcal{F}_A coincide com a de \mathcal{F}_B a transformação homogénea entre \mathcal{F}_B e \mathcal{F}_A é,

$${}^B_T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4.3 Composição de transformações homogéneas entre referenciais

O movimento de robots com estruturas articuladas, i.e., compostos por vários troços rígidos ligados entre si, requer frequentemente o conhecimento da configuração de um dos troços relativamente a qualquer outro. Para tal é necessário determinar de que forma o referencial colocado num troço “vê” cada um dos referenciais colocados nos restantes troços.

Considere-se o exemplo da Figura 2.11 em que os três referenciais podem representar as posições e orientações relativas de três troços de um robot móvel. Pretende-se determinar de que forma pontos ${}^C P$, descritos em \mathcal{F}_C , são transformados em pontos ${}^A P$, descritos em \mathcal{F}_A .

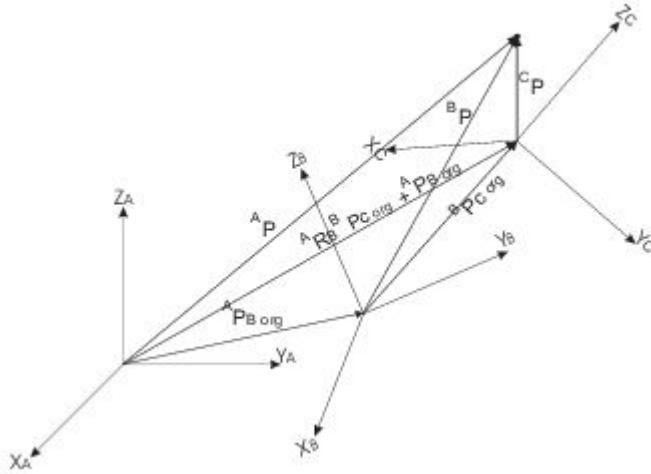


Figura 2.11. Composição de transformações homogéneas

Sabendo que se verificam as relações

$${}^B P = {}^B_T {}^C P$$

e

$${}^A P = {}^A T {}^B P$$

então

$${}^A P = {}^A T {}^B T {}^C P$$

e logo a composição da duas transformações é

$${}^A C T = {}^A T {}^B C T \quad (2.16)$$

A transformação composta tem uma estrutura da forma,

$${}^A C T = \begin{bmatrix} {}^B R & {}^A P_B \text{ org} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B R & {}^B P_C \text{ org} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B R {}^B C R & {}^B R {}^B P_C \text{ org} + {}^A P_B \text{ org} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Esta estrutura permite obter facilmente a transformação inversa¹².

$${}^B A T = ({}^A B T)^{-1} = \begin{bmatrix} {}^B R & {}^B P_A \text{ org} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Como visto anteriormente, ${}^B R = ({}^A R)^T$. Identificando \mathcal{F}_C com \mathcal{F}_A em (2.17) obtém-se,

$$\begin{aligned} 0 &= {}^B R {}^B P_A \text{ org} + {}^A P_B \text{ org} \\ {}^B P_A \text{ org} &= -{}^B R^T {}^A P_B \text{ org}, \end{aligned}$$

vindo para a transformação inversa,

$${}^B A T = \begin{bmatrix} {}^B R^T - {}^B R^T {}^A P_B \text{ org} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

2.4.4 Transformações de coordenadas usando quaterniões

A estrutura particular do quaternião rotação em (2.10) permite calcular facilmente a função (2.11).

Dado que $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$ vem¹³,

$$N_q = c_\theta^2 + s_\theta^2 r_x^2 + s_\theta^2 r_y^2 + s_\theta^2 r_z^2 = 1$$

e logo

$$q^{-1} = \cos(\theta) - \sin(\theta)(r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k}) \quad (2.19)$$

¹² Note que a inversão explícita de ${}^A C T$ não é opção razoável. Porquê?

¹³ Para simplificar a notação usa-se $c_\theta \equiv \cos(\theta)$ e $s_\theta \equiv \sin(\theta)$.

Para exemplificar o uso de quaterniões na representação de rotações considere-se um corpo rígido sujeito a uma rotação de 60° em torno do eixo $m_1 = (3, 2, 0)$, seguindo-se uma rotação de 115° em torno do eixo $m_2 = (0, -1, 2)$. Pretende-se determinar as coordenadas do ponto $p = (5, 2, 3)$ após as 2 rotações.

Os quaterniões que expressam as 2 rotações são descritos por

$$q_1 = \cos(30^\circ) + \frac{1}{\sqrt{13}} \sin(30^\circ)(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

$$q_2 = \cos(57.5^\circ) + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(57.5^\circ)(-\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Aplicando o operador rotação 2 vezes (em composição) o “ponto rodado” é descrito pelo quaternião

$$\begin{aligned} p_{q_1, q_2} &= q_2 (q_1 (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) q_1^{-1}) q_2^{-1} \\ &= -3.054\mathbf{i} + 4.624\mathbf{j} + 2.701\mathbf{k} \end{aligned}$$

a que corresponde o ponto $(-3.054, 4.624, 2.701)$

O operador inverso da rotação obtém-se facilmente invertendo o sentido da rotação no quaternião rotação. O quaternião que representa a rotação de $-\theta$ é dado por

$$\cos(-\theta)\mathbf{1} + \sin(-\theta)(r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} + r_z\mathbf{k}) = q^{-1}$$

vindo para o operador inverso

$$R^{-1}(p) = q^{-1}p q \quad (2.20)$$

2.5 Parametrizações comuns para matrizes de rotação

Como referido anteriormente, uma matriz de rotação pode ser obtida através de diferentes parametrizações¹⁴ Nesta secção descrevem-se algumas das parametrizações mais usadas.

Viu-se anteriormente que as matrizes de rotação em $SO(2)$ têm a forma

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

A parametrização aplica \mathbb{R} , o domínio de θ , no subconjunto de $\mathbb{R}^4 [-1, 1] \oplus [-1, 1] \oplus [-1, 1] \oplus [-1, 1]$ ¹⁵. Claramente, esta não é uma parametrização mínima já que usa 2 valores para representar uma rotação que pode ser descrita por apenas 1 valor.

Matrizes de rotação em $SO(3)$ podem ser construídas a partir de (i) um eixo de rotação e de um ângulo de rotação em torno deste eixo, ou (ii) três rotações em torno de eixos principais do referencial. O leitor é convidado a explorar de forma intuitiva a rotação entre dois referenciais antes de prosseguir o estudo das secções seguintes.

¹⁴ Dados dois espaços A e B , uma parametrização é uma aplicação $f : A \mapsto B$ tal que f é injectiva, ou seja, existe uma correspondência um-para-um entre pontos de A e pontos de B .

¹⁵ O operador \oplus representa a soma directa, i.e., $c = a \oplus b$ impõe um valor único para a e um valor único para b .

2.5.1 Parametrização por ângulo e eixo de rotação

Qualquer orientação no espaço 3D pode ser obtida por rotação em torno de um eixo fixo. Esta afirmação, constitui o chamado Teorema de Euler da Rotação, [10], e pode demonstrar-se facilmente através da decomposição em rotações em torno de eixos elementares. A Figura 2.12 ilustra esta decomposição para uma rotação de θ em torno do eixo \mathbf{r} , num total de 4 parâmetros.

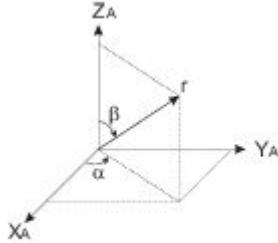


Figura 2.12. Qual a matriz que expressa rotações de θ em torno de r ?

Usando apenas rotações em torno de eixos elementares, uma decomposição possível consiste em:

- alinhar o eixo \mathbf{r} com o eixo Z , a que corresponde a sequência de rotações em torno de eixos elementares $R_Z(-\alpha) \rightarrow R_Y(-\beta)$;
- rodar de θ em torno de Z , a que corresponde uma rotação de θ em torno de Z ;
- realinhar com a direcção inicial, \mathbf{r} , a que corresponde a sequência de rotações em torno de eixos elementares $R_Y(\beta) \rightarrow R_Z(\alpha)$.

Compondo todas as rotações obtém-se

$$R_R(\theta) = R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_Z(\theta) R_Y(-\beta) R_Z(-\alpha).$$

Por inspecção da Figura 2.12, e considerando $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ um vector unitário, obtém-se

$$\sin(\alpha) = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}, \quad \sin(\beta) = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}, \quad \cos(\beta) = r_z,$$

substituindo em $R_r(\theta)$ vem

$$R_r(\theta) = \begin{bmatrix} r_x^2(1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta) & r_x r_y(1 - \cos(\theta)) - r_z \sin(\theta) & r_x r_z(1 - \cos(\theta)) + r_y \sin(\theta) \\ r_x r_y(1 - \cos(\theta)) + r_z \sin(\theta) & r_y^2(1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta) & r_y r_z(1 - \cos(\theta)) - r_x \sin(\theta) \\ r_x r_z(1 - \cos(\theta)) - r_y \sin(\theta) & r_y r_z(1 - \cos(\theta)) + r_x \sin(\theta) & r_z^2(1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Note-se que (2.21) verifica $R_{-r}(-\theta) = R_r(\theta)$.

2.5.2 Parametrização por 3 rotações

Qualquer matriz de rotação pode obter-se por composição de três matrizes correspondentes a rotações em torno de eixos elementares independentes. Assim, existem um total de 3^3 conjuntos de composições com rotações elementares. A Tabela 2.3 lista o conjunto das 27 composições possíveis. Cada composição é representada pelo triplo com os eixos em torno dos quais se efectuam as rotações elementares. Por exemplo, $X - Y - Z$ indica uma rotação em torno de X seguida de uma rotação em torno de Y seguida de uma rotação em torno de Z . Claramente, das 27 possibilidades apenas 12 são válidas já que combinações com sequências de rotações em torno do mesmo eixo não permitem representar matrizes de rotação arbitrárias¹⁶. As combinações inválidas são assinaladas com o símbolo \times .

Composição	Validade	Composição	Validade	Composição	Validade
$X - X - X$	\times	$X - X - Y$	\times	$X - X - Z$	\times
$X - Y - X$		$X - Y - Y$	\times	$X - Y - Z$	
$X - Z - X$		$X - Z - Y$		$X - Z - Z$	\times
$Y - X - X$	\times	$Y - X - Y$		$Y - X - Z$	
$Y - Y - X$	\times	$Y - Y - Y$	\times	$Y - Y - Z$	\times
$Y - Z - X$		$Y - Z - Y$		$Y - Z - Z$	\times
$Z - X - X$	\times	$Z - X - Y$		$Z - X - Z$	
$Z - Y - X$		$Z - Y - Y$	\times	$Z - Y - Z$	
$Z - Z - X$	\times	$Z - Z - Y$	\times	$Z - Z - Z$	\times

Tabela 2.3. Conjunto de três composições de rotações elementares (X indica não válido)

Dados os referenciais arbitrários \mathcal{F}_A e \mathcal{F}_B a orientação relativa entre eles pode ser obtida através de rotações elementares em torno dos eixos de cada um dos referenciais. É comum usarem-se duas estratégias de obtenção das rotações elementares chamadas, respectivamente, *ângulos fixos* e *ângulos de Euler*.

A estratégia de ângulos fixos começa por fazer coincidir \mathcal{F}_B com \mathcal{F}_A . A Tabela 2.4 descreve o procedimento a utilizar para uma combinação $I - J - K$ genérica.

1	Fazer \mathcal{F}_B coincidente com \mathcal{F}_A
2	Rodar \mathcal{F}_B em torno de I_A de um ângulo γ
3	Rodar \mathcal{F}_B em torno de J_A de um ângulo β
4	Rodar \mathcal{F}_B em torno de K_A de um ângulo α

Tabela 2.4. Procedimento para a obtenção de ângulos fixos

O referencial \mathcal{F}_B obtido tem orientação (α, β, γ) segundo a convenção $I - J - K$ ângulos fixos relativamente a \mathcal{F}_A .

¹⁶ O leitor é convidado a verificar esta afirmação.

A estratégia de ângulos de Euler começa por fazer coincidir \mathcal{F}_B com \mathcal{F}_A . A Tabela 2.5 descreve o procedimento a utilizar para uma combinação $I - J - K$ genérica.

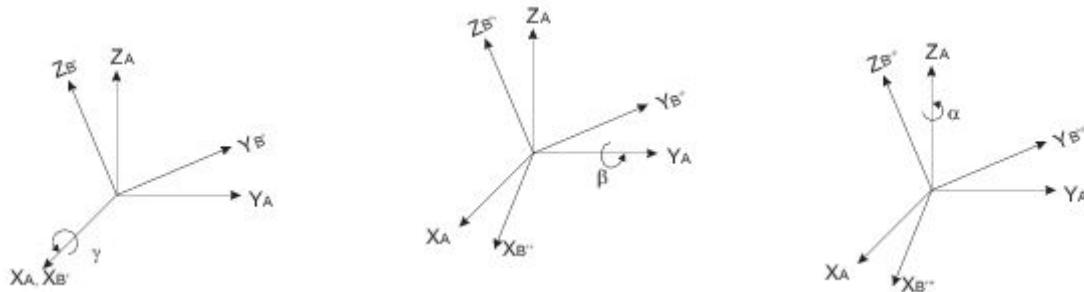
1	Fazer \mathcal{F}_B coincidente com \mathcal{F}_A
2	Rodar \mathcal{F}_B em torno de K_B de um ângulo α
3	Rodar \mathcal{F}_B em torno de J_B de um ângulo β
4	Rodar \mathcal{F}_B em torno de I_B de um ângulo γ

Tabela 2.5. Procedimento para a obtenção de ângulos de Euler

Tal como no caso anterior, o referencial \mathcal{F}_B assim obtido tem orientação (α, β, γ) relativamente a \mathcal{F}_A para a convenção escolhida $I - J - K$.

Eixos fixos ($X - Y - Z$) - Problema directo

Escolhendo os eixos de rotação coincidentes com os eixos coordenados de um referencial fixo, \mathcal{F}_A , na sequência rotação X_A seguido de Y_A seguido de Z_A obtém-se a convenção habitualmente designada por *ângulos fixos X - Y - Z*. A Figura 2.13 ilustra a sequência de rotações necessária para representar uma orientação genérica definida por (α, β, γ) , bem como as correspondentes transformações de coordenadas homogéneas entre os referenciais.



$${}^A P_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ 0 \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \end{bmatrix} {}^A P_1 \quad {}^A P_{B''} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} {}^A P_{B'} \quad {}^A P_2 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^A P_{B''}$$

Figura 2.13. Sequência de rotações para representar a orientação genérica (α, β, γ) segundo a convenção *ângulos fixos X - Y - Z*

Note-se que os pontos ${}^A P_{B'}$, ${}^A P_{B''}$, ${}^A P_{B'''}$ estão descritos em \mathcal{F}_A . Cada uma das transformações deve ser interpretada como uma aplicação entre pontos de \mathcal{F}_A .

A composição das três rotações elementares é descrita pela matriz de rotação correspondente à convenção em ângulos fixos $X - Y - Z$,

$${}^A R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

ou seja, a expressão ${}^A P_2 = {}^A R_{X-Y-Z}(\gamma, \beta, \alpha) {}^A P_1$, representa a transformação do ponto ${}^A P_1$ no ponto ${}^A P_2$ pela rotação ${}^A R(\alpha, \beta, \gamma)$,

$${}^A R_{X-Y-Z}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

onde, para simplificar a notação, $c_\alpha = \cos(\alpha), s_\alpha = \sin(\alpha), c_\beta = \cos(\beta), s_\beta = \sin(\beta), c_\gamma = \cos(\gamma), s_\gamma = \sin(\gamma)$.

Eixos fixos ($X - Y - Z$) - Problema inverso

Dada uma matriz de rotação genérica $[r_{ij}]$, calcular os ângulos α, β, γ de acordo com a convenção ângulos $X - Y - Z$ fixos são facilmente determinados resolvendo a equação (2.23).

$${}^A R_{X-Y-Z}(\gamma, \beta, \alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Das nove equações resultantes, apenas três são linearmente independentes. Por inspecção obtém-se

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2} = c_\beta \\ r_{31} = -s_\beta \end{array} \right\} \longrightarrow \beta = \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} r_{11} = c_\alpha c_\beta \\ r_{21} = s_\alpha c_\beta \end{array} \right\} \longrightarrow \alpha = \text{atan2}\left(\frac{r_{21}}{c_\beta}, \frac{r_{11}}{c_\beta}\right), \quad \text{se } c_\beta \neq 0 \quad (2.24)$$

$$\left. \begin{array}{l} r_{32} = c_\beta s_\gamma \\ r_{33} = c_\beta c_\gamma \end{array} \right\} \longrightarrow \gamma = \text{atan2}\left(\frac{r_{32}}{c_\beta}, \frac{r_{33}}{c_\beta}\right), \quad \text{se } c_\beta \neq 0$$

Quando $\cos(\beta) = 0$ tem-se $\sin(\beta) = \pm 1$. Recorrendo a igualdades trigonométricas básicas (ver Apêndice A) obtém-se facilmente¹⁷

¹⁷ A função $\text{atan2}(\cdot, \cdot)$, muito usada em Robótica, está descrita no Apêndice .

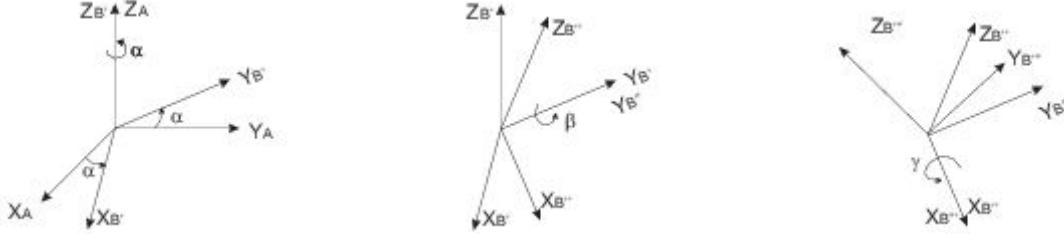
$$r_{12} = \pm \sin(\gamma \mp \alpha), \quad r_{13} = \cos(\gamma \mp \alpha), \quad r_{22} = \cos(\gamma \mp \alpha), \quad r_{23} = \pm \sin(\gamma \mp \alpha),$$

e portanto apenas é possível calcular a combinação $\gamma \mp \alpha$. Nesta situação é comum adoptar-se a seguinte convenção para desambiguar os valores de α e γ ,

$$\begin{aligned} \text{Se } \beta = \pi/2 \text{ então } & \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = \text{atan2}(r_{12}, r_{22}) \end{cases} & \text{Se } \beta = -\pi/2 \text{ então } & \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = -\text{atan2}(r_{12}, r_{22}) \end{cases} \\ & (2.25) \end{aligned}$$

onde a função $\text{atan2}(, ,)$ é a função $\text{atan}()$ de 4 quadrantes (Apêndice B).

Eixos não fixos (ângulos de Euler $Z - Y - X$) - Problema inverso



$$\begin{aligned} {}^A P &= {}^{A'} R_Z {}^{B'} P & {}^{B'} P &= {}^{B''} R_Y {}^{B''} P & {}^{B''} P &= {}^{B'''} R_X {}^{B'''} P \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{B'} P & &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} {}^{B''} P & &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} {}^{B'''} P \end{aligned}$$

Figura 2.14. Sequência de rotações para representar a orientação genérica (α, β, γ) segundo a convenção *ângulos de Euler Z – Y – X*

À semelhança do que foi feito para a convenção *ângulos fixos X – Y – Z*, a rotação global obtém-se compondo as três rotações elementares (vide a Figura 2.14),

$${}^A P = {}^{A'} R_Z {}^{B'} R_Y {}^{B''} R_X {}^{B'''} P = {}^{A'''} R_{ZYX}(\alpha, \beta, \gamma) {}^{B'''} P$$

onde a matriz de rotação é dada por

$${}^A_{B'''} R_{ZYX}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Claramente, a matriz de rotação em (2.26) é idêntica à dada em (2.22) para a convenção de ângulos fixos $X - Y - Z$. Desta forma a solução do problema inverso tem exactamente as mesmas expressões da solução do problema inverso para a convenção ângulos fixos $X - Y - Z$. Apesar da estrutura das matrizes ser idêntica o significado físico dos ângulos α, β, γ é obviamente diferente entre ambas.

Eixos não fixos (ângulos de Euler $Z - Y - Z$) - Problema directo

Uma outra convenção para representar orientações usando eixos móveis recorre à sequência de rotações $Z - Y - Z$ (vide a Figura 2.15),

$$\begin{aligned} {}^A P &= {}^A_{B'} R_Z {}^{B'} P & {}^{B'} P &= {}^{B'}_{B''} R_Y {}^{B''} P & {}^{B''} P &= {}^{B''}_{B'''} R_Z {}^{B'''} P \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{B'} P & &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} {}^{B''} P & &= \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^{B'''} P \end{aligned}$$

Figura 2.15. Sequência de rotações para representar a orientação genérica (α, β, γ) segundo a convenção *ângulos de Euler Z - Y - Z*

Compondo as três transformações indicadas na Figura 2.15 obtém-se,

$${}^A P = {}^A_{B'} R_Z {}^{B'}_{B''} R_Y {}^{B''}_{B'''} R_Z {}^{B'''} P = {}^A_{B'''} R_{ZYZ}(\alpha, \beta, \gamma) {}^{B'''} P$$

de onde se extrai a matriz de rotação que expressa uma orientação arbitrária segundo esta convenção,

$${}^A_{B'''} R_{ZYX}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}.$$

Eixos não fixos (ângulos de Euler $Z - Y - Z$) - Problema inverso

A resolução do problema inverso para a convenção ângulos de Euler $Z - Y - Z$ segue a mesma técnica dos casos anteriores. Dada uma matriz de rotação genérica, $[r_{ij}]$, procura-se o conjunto de equações que permita a determinação dos ângulos α , β e γ .

$$\begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

À semelhança do que foi feito para as convenções ângulos fixos $X - Y - Z$ e ângulos de Euler $Z - Y - X$, por escolha adequada das equações a resolver na equação (2.27) obtém-se,

$$\gamma = \text{atan2}\left(\frac{r_{32}}{s_\beta}, \frac{-r_{31}}{s_\beta}\right) \quad \text{se } s_\beta \neq 0$$

$$\alpha = \text{atan2}\left(\frac{r_{23}}{s_\beta}, \frac{r_{13}}{s_\beta}\right) \quad \text{se } s_\beta \neq 0$$

$$\beta = \text{atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) = \text{atan2}\left(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}\right)$$

Se $s_\beta = 0$ então $c_\beta = \pm 1$, e escolhendo os elementos r_{21} e r_{11} da matriz de rotação, obtém-se

$$\alpha \pm \gamma = \text{atan2}(r_{21}, r_{11})$$

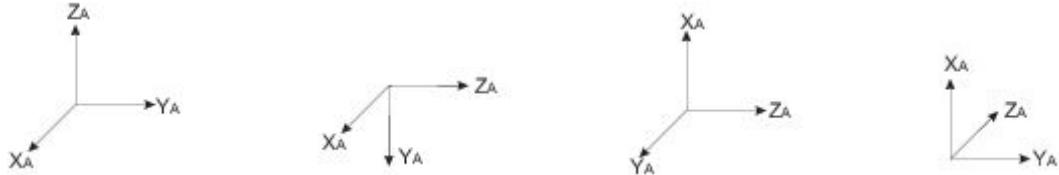
Em alternativa poder-se-ia usar os elementos r_{22} e r_{12} obtendo-se $\alpha \pm \gamma = \text{atan2}(r_{22}, -r_{12})$ ou, escolhendo os elementos r_{21} e r_{22} $\alpha \pm \gamma = \text{atan2}(r_{21}, -r_{22})$ ou ainda, usando r_{12} e r_{11} , $\alpha \pm \gamma = \text{atan2}(-r_{12}, r_{11})$. Para desambiguar os ângulos α e γ pode usar-se uma convenção idêntica à indicada na Secção 2.5.2.

2.5.3 Não univocidade da representação das orientações por parametrização através de 3 ângulos

Uma das características mais importantes das parametrizações usando rotações em torno de eixos elementares é a não univocidade das representações. Cada orientação é representada por um número infinito de triplos (α, β, γ) , independentemente da convenção. Como se verá de seguida, mesmo restringindo os ângulos ao intervalo $]-\pi, \pi[$, a correspondência entre as orientações e os pontos de (α, β, γ) não é injetiva.

Rotação em torno de eixos fixos

As Figuras 2.16 e 2.17 ilustram como diferentes valores para a mesma sequência de rotações permitem obter a mesma orientação, ou seja, os triplos $(\alpha, \beta, \gamma) = (\pi/2, -\pi/2, -\pi/2)$ e $(\alpha, \beta, \gamma) = (\pi, -\pi/2, \pi)$ conduzem à mesma orientação do referencial resultante.



Rotações: $R_X(-\frac{\pi}{2})$ $R_Y(-\frac{\pi}{2})$ $R_Z(\frac{\pi}{2})$

Figura 2.16. Sequência de rotações para a orientação $(\alpha, \beta, \gamma) = (\pi/2, -\pi/2, -\pi/2)$



Rotações: $R_X(\pi)$ $R_Y(-\frac{\pi}{2})$ $R_Z(\pi)$

Figura 2.17. Sequência de rotações para a orientação $(\alpha, \beta, \gamma) = (\pi, -\pi/2, \pi)$

Rotação em torno de eixos móveis

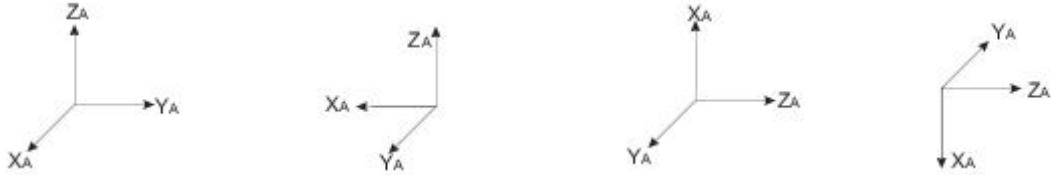
As Figuras 2.18 e 2.19 ilustram o problema da não univocidade da representação para a convenção ângulos de Euler $Z - Y - Z$.



Rotações: $R_Z(\frac{\pi}{2})$ $R_Y(\frac{\pi}{2})$ $R_Z(0)$

Figura 2.18. Sequência de rotações para a orientação $(\alpha, \beta, \gamma) = (\pi/2, \pi/2, 0)$

Esta característica é especialmente relevante no comando de manipuladores. Em regra, o movimento das juntas de um manipulador está limitado fisicamente. Por exemplo, a amplitude de rotação de uma junta é normalmente limitada por dois factores: complexidade mecânica e restrições devidas à estrutura



Rotações:

$$R_Z(-\frac{\pi}{2})$$

$$R_Y(-\frac{\pi}{2})$$

$$R_Z(\pi)$$

Figura 2.19. Sequência de rotações para a orientação $(\alpha, \beta, \gamma) = (-\pi/2, -\pi/2, \pi)$

geométrica¹⁸. Considere-se agora uma trajectória no espaço de orientações $\{(\alpha, \beta, \gamma)\}$ aproximando-se de $(\pi/2, -\pi/2, -\pi/2)$, por exemplo representando uma re-orientação do punho do manipulador numa tarefa de agarrar um copo. De acordo com o exemplo acima, é possível que a trajectória não seja contínua, saltando, por exemplo entre $(\pi/2, -\pi/2, -\pi/2)$ e $(\pi, -\pi/2, \pi)$ obrigando à movimentação de juntas. Em geral esta movimentação obriga a algum planeamento já que a trajectória entre os dois pontos pode passar em zonas não factíveis, por exemplo devido a limites físicos.

2.5.4 Transformação entre referenciais rodados em torno de eixos arbitrários - Problema inverso

Neste problema pretende determinar-se qual o eixo de rotação \mathbf{r} e o ângulo θ a que corresponde uma matriz de rotação dada. Igualando a matriz de rotação conhecida à matriz (2.21) e escolhendo criteriosamente as equações a resolver obtém-se facilmente,

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = \underbrace{(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)}_{=1} (1 - c_\theta) + 3c_\theta,$$

o que permite de imediato determinar o valor para o ângulo θ ,

$$\theta = \text{acos}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33}}{2}\right).$$

As coordenadas do vector que define o eixo de rotação verificam

$$\begin{aligned} r_{32} - r_{23} &= r_y r_z (1 - c_\theta) + r_x s_\theta - r_y r_z (1 - c_\theta) + r_x s_\theta = 2r_x s_\theta \\ r_{13} - r_{31} &= r_x r_z (1 - c_\theta) + r_y s_\theta - r_x r_z (1 - c_\theta) + r_y s_\theta = 2r_y s_\theta \\ r_{21} - r_{12} &= r_x r_y (1 - c_\theta) + r_z s_\theta - r_x r_y (1 - c_\theta) + r_z s_\theta = 2r_z s_\theta \end{aligned}$$

Usando o valor de θ já determinado pode resolver-se o sistema em ordem às incógnitas r_x , r_y e r_z ,

¹⁸ As juntas com movimento linear constituem um exemplo onde a limitação no comprimento da deslocação da junta é uma necessidade evidente. No entanto, o movimento de juntas prismáticas não influencia a orientação de um manipulador.

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin(\theta)} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Quando $\theta = 0$ o eixo de rotação é indeterminado. De facto nem sequer há rotação.

2.6 Quaterniões vs. Matrizes de rotação

Singularidades no problema inverso

Já vimos que, por exemplo, o cálculo dos ângulos de Euler $Z - Y - X$ está sujeito a singularidades na situação em que $\beta = 2k\pi \pm \pi/2$, ou seja, dada uma matriz de rotação ${}^A_B R$ genérica nem sempre é possível determinar α, β, γ univocamente na equação

$${}^A_B R = R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma).$$

Nesta secção ilustra-se como se pode eliminar esta singularidade através do uso de quaterniões na representação de orientações.

Dada uma matriz de rotação $[r_{ij}]$, o correspondente quaternião de rotação, $q = d\mathbf{1} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, obtém-se das expressões

$$\begin{aligned} da &= \frac{1}{4}(r_{32} - r_{23}) \\ db &= \frac{1}{4}(r_{13} - r_{31}) \\ dc &= \frac{1}{4}(r_{21} - r_{12}) \\ ab &= \frac{1}{4}(r_{12} + r_{21}) \\ ac &= \frac{1}{4}(r_{13} + r_{31}) \\ bc &= \frac{1}{4}(r_{23} + r_{32}) \end{aligned}$$

Para se obter o eixo e ângulo de rotação θ, r_x, r_y, r_z basta resolver a equação,

$$q = \cos(\theta)\mathbf{1} + \sin(\theta)(r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} + r_z\mathbf{k})$$

Transformando q num quaternião unitário e identificando coeficientes com as mesmas coordenadas

$$d = \cos(\theta), \quad a = \sin(\theta) r_x, \quad b = \sin(\theta) r_y, \quad c = \sin(\theta) r_z$$

Note-se que se $\sin(\theta) = 0$ não há, de um ponto de vista práctico, rotação já que a correspondente rotação é de 2θ . Assim é possível usar as expressões,

$$r_x = \frac{a}{\sin(\theta)} = \pm \left| \frac{ad}{1-d^2} \right|, \quad r_y = \frac{b}{\sin(\theta)} = \pm \left| \frac{bd}{1-d^2} \right|, \quad r_z = \frac{c}{\sin(\theta)} = \pm \left| \frac{cd}{1-d^2} \right|$$

$$\theta = \text{atan2}\left(\frac{a}{r_x}, d\right) = \text{atan2}\left(\frac{b}{r_y}, d\right) = \text{atan2}\left(\frac{c}{r_z}, d\right)$$

sem problemas de singularidades (note-se que não é possível ter ambos os ângulos na função atan2 simultaneamente nulos). O duplo sinal nas expressões para r_x, r_y, r_z indica que a rotação pode ser realizada em torno de eixos com sentidos opostos com as correspondentes rotações realizadas em sentidos opostos.

Considerações computacionais

A escolha da representação para orientações adequada depende por vezes dos recursos computacionais disponíveis. Por exemplo, o número de operações aritméticas necessárias nas operações mais comuns é um factor relevante já que pode influenciar, por exemplo, o consumo de energia. Em aplicações espaciais ainda é fundamental manter o consumo de energia a níveis muito baixos.

O número de operações aritméticas simples usado pelo operador rotação definido por ${}^A P = {}^A_B R {}^B P$. resulta num total de 9 multiplicações e 6 adições.

Usando quaterniões, o número de operações aritméticas simples é de 16 multiplicações e 12 somas para o produto de quaterniões. A inversão de um quaternião requer (não contabilizando mudanças de sinais) 8 multiplicações e 3 somas, se for utilizado um algoritmo genérico. Usando a estrutura particular do quaternião rotação obtém-se 0 multiplicações e 0 somas.

O operador rotação, definido por $p_q = q p q^{-1}$, requer 2 produtos de quaterniões, num total de 32 multiplicações e 24 somas, e 1 inversão.

A comparação baseada no número de operações é desfavorável ao uso de quaterniões. No entanto o uso de quaterniões exige um menor espaço de memória para armazenagem.

2.7 Optimização - Procura de extremos de funções

O cálculo de valores extremos, máximos e mínimos, de funções está na base da formulação de múltiplos problemas de Engenharia. Na Robótica a optimização aparece associada por exemplo ao projecto de sistemas de decisão e controlo. A ideia base consiste em definir um espaço de erro, adequado ao problema a resolver, definir uma medida de distância nesse espaço, e projectar o sistema de decisão por forma a que uma distância a um objectivo tenda para 0.

As técnicas de optimização são em regra desenvolvidas para problemas específicos e dada a vastidão do tema apenas se referem aqui uma das mais relevantes para esta introdução à Robótica.

Considere-se o problema de optimização sem restrições definido por

$$\min_q J(q) \quad (2.28)$$

onde $J : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é uma função (pelo menos) C^1 . Os pontos q^* solução de (2.28) verificam,

$$\begin{aligned} \nabla J(q^*) &= \mathbf{0}, \quad \text{condição necessária} \\ \nabla_{qq}^2 J(q^*) &> 0, \quad \text{condição suficiente.} \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde $\nabla J(q^*)$ é o gradiente de J calculado no ponto q^* ,

$$\nabla J(q^*) = \left[\frac{\partial J(q)}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial J(q)}{\partial q_n} \right] \Big|_{q=q^*}$$

e $\nabla^2 J(q^*)$ é o Hessiano de J , também calculado em q^* ,

$$\nabla^2 J(q^*) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 J(q)}{\partial q_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J(q)}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 J(q)}{\partial q_n \partial q_1} & \cdots & \frac{\partial^2 J(q)}{\partial q_n^2} \end{array} \right] \Big|_{q=q^*}$$

Para o problema com restrições,

$$\min_q J(q) \quad (2.30)$$

sujeito às restrições de tipo igualdade e pelo menos duplamente diferenciáveis e com derivadas contínuas

$$g_i(q) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.31)$$

então, na hipótese de q^* ser regular (ou seja os gradientes $\nabla_q g_i(q^*)$, $i = 1, \dots, n$ são linearmente independentes), as condições de Karush-Kuhn-Tucker dão a solução através de,

$$L(q^*) = \nabla_q J(q^*) + \lambda_1 \nabla g_1(q^*) + \dots + \lambda_n \nabla g_n(q^*) = \mathbf{0}, \quad (2.32)$$

$$\nabla_{qq}^2 L(q^*) > 0 \quad (2.33)$$

As condições de Karush-Kuhn-Tucker podem ser adaptadas à existência de restrições de tipo desigualdade, [16, 7].

Para problemas complexos, a obtenção de soluções segue habitualmente estratégias iterativas.

Como exemplo podemos analizar a solução do problema de optimização sem restrições definido na secção 2.2.2 para o cálculo de uma pseudo-inversa.

A função a optimizar é

$$J(x) = \frac{1}{2} (y - Ax)^T (y - Ax)$$

para a qual a condição de óptimo (2.29) é

$$\nabla J(x) = (y - Ax)^T A = 0$$

de onde se obtém facilmente

$$\begin{aligned} y^T A - x^T A^T A &= 0 \\ x^T = y^T A (A^T A)^{-1} & \\ x = ((A^T A)^{-1})^T A^T y &= (A^T A)^{-1} A^T y \end{aligned}$$

e portanto a pseudo-inversa é dada por

$$A^- = (A A^T)^{-1} A^T$$

2.8 Interpolação

Na especificação de tarefas para robots são frequentemente usados caminhos no espaço de configuração. O robot deve seguir um caminho para executar a tarefa com sucesso sendo que por vezes há múltiplos caminhos possíveis. A especificação destes caminhos através de expressões matemáticas nem sempre é simples, sendo frequentemente mais simples especificar apenas um número limitado de pontos por onde o robot deve passar.

Dependendo da missão, pode ser necessário que o robot conheça uma trajectória de referência, definida a partir do objectivo da missão. Nesta situação, o objectivo do controlo será actuar por forma a que a trajectória efectivamente realizada se aproxime o mais possível da trajectória de referência.

A obtenção de uma trajectória de referência a partir de um conjunto de pontos faz-se utilizando técnicas de interpolação. Existem múltiplos métodos para se interpolarem curvas a partir de um conjunto finito de pontos. De forma geral, dado um conjunto de pontos $p_i, i = 1, \dots, n$ e uma curva parametrizada em a , $f(x, a) = 0$, o problema pode ser definido através da minimização de uma função de custo $J(a) = \sum_{i=1}^n f(p_i, a)$

$$a^* = \arg \min J(a) \quad (2.34)$$

sujeito à restrição

$$f(x, a^*) = 0, \quad \forall x. \quad (2.35)$$

Para o caso, muito simples, em que $f(x, a) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$ e $m = n$ tem-se

$$\begin{bmatrix} p_1^n & p_1^{n-1} & \dots & p_1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ p_i^n & p_i^{n-1} & \dots & p_i & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ p_n^n & p_n^{n-1} & \dots & p_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = 0$$

Se o número de pontos, n , é inferior à ordem do polinómio basta colocar a 0 os coeficientes apropriados para se obter o custo mínimo. Se o número de pontos for superior à ordem do polinómio o problema pode ser resolvido por recurso à técnica de optimização descrita na Secção 2.7, o que conduz à resolução da equação,

$$\nabla J(a) + \lambda_1 \nabla f(p_1, a) + \dots + \lambda_n \nabla f(p_n, a) = 0 \quad (2.36)$$

O leitor interessado em aprofundar os conhecimentos em outras técnicas de optimização pode consultar [16, 7].

2.9 Grafos

O uso de estruturas de dados descritas por grafos é comum na Robótica, por exemplo para armazenamento de informação sobre a estrutura do ambiente que rodeia um robot móvel, representando um mapa do

ambiente, ou armazenamento de conhecimento em que cada nó representa informação conhecida pelo robot como numa rede semântica. O leitor interessado em aprofundar este assunto encontra facilmente uma extensa bibliografia no âmbito da Matemática discreta, [6, 19, 26]

Um grafo é constituído por nós (também chamados vértices) e arestas. Os nós podem ser vistos como locais de armazenamento de informação enquanto que as arestas estabelecem relações, por exemplo de distância, entre os nós. As arestas podem ser direcionadas ou não-direcionadas. Uma aresta não-direcionada entre dois nós significa que se pode passar entre os nós sem restrições. Se a aresta for direcionada, a transição entre os nós só pode ocorrer no sentido da aresta.

A Figura 2.20 ilustra um exemplo de um grafo. Os nós são habitualmente representados na forma de círculos. As arestas são representadas pelas linhas (ou setas) que unem os nós.



Figura 2.20. Exemplos de grafos

2.9.1 Árvores

As árvores são grafos não direcionados em que cada par de nós diferentes está ligado por um único caminho simples, [26]. Em árvores com um nó base, pode definir-se uma relação de parentesco entre nós. Esta relação é normalmente expressa indicando que cada nó (pai) está ligado a um máximo de n nós (os filhos). Cada nó “filho” apenas pode ter um nó “pai”.

A Figura 2.21 ilustra um exemplo de uma árvore ternária, em que cada nó a, b, c, d tem três nós filhos e em que a é o nó base. Os nós $e - m$ são chamados “folhas” da árvore. A árvore da figura tem uma altura 3.

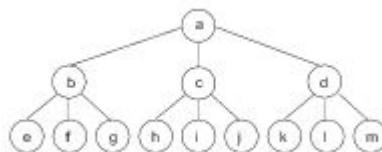


Figura 2.21. Árvore ternária

As árvores são usadas em Robótica, por exemplo, para representação do espaço em redor de um robot com diferentes granularidades. O nó pai da árvore representa a totalidade do espaço. O espaço é particionado

e cada elemento da partição é representado por um dos filhos do nó base. Cada nó recebe uma marcação especial se o espaço que lhe estiver atribuído estiver completamente ocupado por obstáculos. À medida que se avança na altura da árvore o espaço atribuído a cada nó diminui. Assim, o ambiente pode ser representado com precisão arbitrária bastando fazer crescer a árvore até à altura adequada.

2.9.2 O algoritmo de Dijkstra

Em cenários descritos através de grafos é comum colocar a questão de qual o caminho entre dois nós do grafo. O algoritmo de Dijkstra é normalmente utilizado para procura de caminhos de comprimento mínimo.

Dado um grafo representado pelo conjunto de nós $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ ligados por um conjunto de arestas $a_{ij}, i, j = \dots, n$, atribui-se ao nó e_i as etiquetas $L(e_i)$ e $L'(e_i)$ representando, respectivamente, um caminho mínimo e um seu majorante entre os nós 1 e e_i . A etiqueta $L(e_i)$ é definitiva enquanto que a etiqueta majorante, $L'(e_i)$ é temporária. Durante a execução do algoritmo os nós do caminho mudam até se convergir para o caminho mínimo, ou seja, $L'(e_i) \rightarrow L(e_i)$. Em cada passo do algoritmo são actualizadas 2 listas. A lista P contém os nós que possuem etiquetas permanentes, significando que o algoritmo já encontrou um caminho mínimo. A lista T contém os nós que possuem etiquetas temporárias, para os quais ainda só se conhece um majorante do caminho mínimo. A Tabela 2.6 descreve este algoritmo (para uma demonstração da correção deste algoritmo veja-se por exemplo, [6]).

0	$P = \{e_1\}, \quad T = \{e_2, \dots, e_n\}, \quad a_{ij} = \text{dist}(e_i, e_j)$
1	Calcule $e_i \in T$ tal que $e_i = \arg \min(L')$ $P = P \cup \{e_i\}$ $L(e_i) = L'(e_i)$ Se $P = N$ stop
2	Para todos os nós $e_j \in T$ $L'(e_j) = \min\{L'(e_j), L(e_i) + a_{ij}\}$ Volte ao passo 1

Tabela 2.6. O algoritmo de Dijkstra

A Tabela 2.7 ilustra a aplicação do algoritmo de Dijkstra ao exemplo da Figura 2.22.

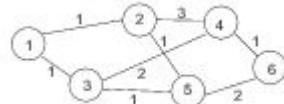


Figura 2.22. Exemplo de aplicação do algoritmo de Dijkstra

Iteração	Estado do algoritmo
1	$P = \{1\}, T = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ $L(1) = 0$ $L'(2) = 1, L'(3) = 1, L'(4) = \infty, L'(5) = \infty, L'(6) = \infty$ $e_i = 2$
2	$P = \{1, 2\}, T = \{3, 4, 5, 6\}$ $L(1) = 0, L(2) = 1$ $L'(4) = 4, L'(5) = 2, L'(6) = \infty$ $e_i = 3$
3	$P = \{1, 2, 3\}, T = \{4, 5, 6\}$ $L(1) = 0, L(2) = 1, L(3) = 1$ $L'(4) = 3, L'(5) = 2, L'(6) = \infty$ $e_i = 5$
4	$P = \{1, 2, 3, 5\}, T = \{4, 6\}$ $L(1) = 0, L(2) = 1, L(3) = 1, L(5) = 2$ $L'(4) = 3, L'(6) = 5$ $e_i = 4$
5	$P = \{1, 2, 3, 5, 4\}, T = \{6\}$ $L(1) = 0, L(2) = 1, L(3) = 1, L(5) = 2, L(4) = 3$ $L'(6) = 4$ $e_i = 6$
6	$P = \{1, 2, 3, 5, 4, 6\}, T = \emptyset$ $L(1) = 0, L(2) = 1, L(3) = 1, L(5) = 2, L(4) = 3, L(6) = 4$

Tabela 2.7. Aplicação do algoritmo de Dijkstra ao grafo da Figura 2.22

Como se verá adiante, na Robótica um ambiente pode ser descrito através de um grafo em que os nós representam configurações no espaço livre e as arestas indicam a distância entre nós.

O algoritmo de Dijkstra requer que os pesos das arestas sejam positivos ou nulos. A generalização para valores negativos é dada pelo algoritmo de Floyd-Warshall. O leitor interessado pode consultar [6, 19].

2.9.3 O algoritmo A^*

Em grafos de tipo árvore a procura de um nó objectivo cuja distância ao nó base da árvore seja mínima (distância medida de acordo com um critério dependente do problema particular em análise) é uma questão central em múltiplos problemas. O algoritmo A^* utiliza uma procura de tipo melhor-primeiro para resolver esta questão, [15, 25].

Em cada nó, o A^* usa o conhecimento dos nós filhos (ou sucessores) e uma medida de distância de cada um deles ao nó pai. Esta distância tem duas componentes contendo, respectivamente, informação relativa

à topologia da árvore (por exemplo a altura do nó e_i na árvore) e informação heurística de avaliação do nó (dependente do problema em questão).

O algoritmo possui duas listas, designadas por ABERTOS e FECHADOS. A lista ABERTOS contém os nós gerados e já avaliados pela função de avaliação mas que ainda não geraram os respectivos sucessores. A lista FECHADOS contém os nós que já foram examinados por completo. A medida de distância do nó base ao nó e_i é representada por $f(e_i) = g(e_i) + h(e_i)$, em que $g(e_i)$ respeita à topologia da árvore e $h(e_i)$ é a função heurística de avaliação do nó e_i . A Tabela 2.8 mostra os passos do A^* (de notar as semelhanças com o algoritmo de Dijkstra).

- 1 $ABERTOS = \{e_0\}$, onde e_0 é o nó de partida na procura
 $FECHADOS = \emptyset$
 $g(e_0) = 0$
 $f(e_0) = 0 + h(e_0)$
 - 2 Enquanto não for encontrado um nó solução repetir os passos seguintes
 Se $ABERTOS = \emptyset$ retorna solução vazia
 Caso contrário, calcular $e_i = \arg \min\{f(e_i)\}$
 $FECHADOS = FECHADOS \cup \{e_i\}$
 Se e_i = “nó objectivo” retornar a solução (caminho entre e_0 e e_i)
 Caso contrário, gerar os nós sucessores de e_i , verificando se algum deles já foi gerado a partir de outro nó
 Para cada sucessor de e_i , $suc_j(e_i)$
 - 2.1 Calcular $g(suc_j(e_i)) = g(e_i) + C(e_i, suc_j(e_i))$, onde $C(e_i, suc_j(e_i))$ representa o custo de ir de e_i para o sucessor j de e_i
 - 2.2 Se $suc_j(e_i) \equiv e_k \in ABERTOS$, i.e., o nó já foi gerado mas não processado,
 Calcular $best_{succ} = \arg_{suc_j(e_i), e_k} \min\{g(suc_j(e_i)), g(e_k)\}$, ou seja, escolhe-se como melhor sucessor o nó com custo mais baixo
 Se $best_{succ} = suc_j(e_i)$ substituir e_k por $suc_j(e_i)$ na lista ABERTOS
 - 2.3 Se $suc_j(e_i) \equiv e_k \in FECHADOS$
 Calcular $best_{succ} = \arg_{suc_j(e_i), e_k} \min\{g(suc_j(e_i)), g(e_k)\}$
 Se $best_{succ} = suc_j(e_i)$
 Substituir e_k por $suc_j(e_i)$ na lista FECHADOS
 Propagar $g(suc_j(e_i))$ por todos os sucessores de e_k já que o caminho encontrado para o nó $suc_j(e_i)$ é melhor do que o até agora existente para chegar a e_k
 - 2.4 Se $suc_j(e_i) \not\in ABERTOS \cup FECHADOS$
 $ABERTOS = ABERTOS \cup \{suc_j(e_i)\}$
 Calcular $f(suc_j(e_i)) = g(suc_j(e_i)) + h(suc_j(e_i))$
-

Tabela 2.8. O algoritmo A^*

2.10 Simulação de robots

A simulação de robots em computador pode ser feita a diferentes níveis.

- Como um sistema dinâmico evoluindo em tempo contínuo ou discreto;
- Como um sistema dinâmico evoluindo de acordo com a ocorrência de eventos discretos;
- Como um sistema híbrido em que uma parte do sistema evolui de acordo com a ocorrência de eventos discretos e outra parte evolui de acordo com um índice temporal contínuo ou discreto.

Para qualquer destas perspectivas é necessário ter um modelo do robot. Na simulação de sistemas dinâmicos em tempo contínuo, um robot é modelizado por sistema de equações do tipo $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ em que $x(t)$ e $u(t)$ representam, respectivamente, o estado e as entradas de controlo no instante t . A simulação baseia-se na discretização do tempo e na integração numérica das equações. A Tabela 2.9 ilustra em pseudo-código uma forma de simular um sistema dinâmico contínuo usando a regra de Euler¹⁹ dada por

$$\int_{x(t)}^{x(t+h)} f(x) dx \approx f(x(t))h$$

Dependendo da aplicação particular, pode ser necessário recorrer a regras de integração numérica de maior qualidade, i.e., em que o erro cometido na aproximação seja inferior ou com melhores propriedades de estabilidade numérica, como por exemplo, a regra de do trapézio, dada por

$$\int_{x(t)}^{x(t+h)} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(x(t+h)) + f(x(t)))$$

ou a regra de Simpson, dada por

$$\int_{x(t)}^{x(t+2h)} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x(t)) + 4f(x(t+h)) + f(x(t+2h)))$$

com $x(t+2h) = x(t) + 2h$, $x(t+h) = x(t) + h$

Para um resumo sobre as principais regra de integração veja-se, por exemplo, [5, 1].

A escolha do passo de discretização é uma tarefa importante. Se o sistema variar muito rapidamente é desejável ter um passo pequeno por forma a que o cálculo da derivada em cada instante da integração numérica possa capturar todas as variações importantes da função. O valor mínimo para este passo corresponde ao dobro do período correspondente à maior frequência presente no sinal $x(t)$ ²⁰. Uma regra empírica situa este valor em um décimo do período da maior frequência presente.

¹⁹ Esta versão denomina-se habitualmente *forward Euler*. Em alternativa pode calcular-se $x(t)$ em função de $x(t-h)$ e a aproximação é habitualmente designada por *backward Euler*.

²⁰ Esta afirmação corresponde ao chamado teorema da amostragem, [23]. A frequência mínima é chamada frequência de Nyquist.

```

Definir o intervalo de discretização,  $h$ 
Definir o tempo de simulação,  $t_{sim}$ 
Fazer  $t = 0$ ,
Definir as condições iniciais (estado inicial),  $x(t) = x_0$ 
Enquanto  $t < t_{sim}$ 
    Calcular  $f(x(t), u(t))$ 
    Calcular  $x(t + h) = x(t) + f(x(t), u(t)) \cdot h$ 
    Calcular  $t = t + h$ 
    Iterar

```

Tabela 2.9. Pseudo-código para simulação de um sistema contínuo usando a aproximação de Euler

A simulação de sistemas evoluindo de acordo com eventos discretos é suportada em autómatos finitos (os máquinas de estados finitas) ou em redes de Petri (para uma descrição completa veja-se, por exemplo, [9]). Os autómatos finitos são habitualmente descritos através de grafos direcionados em que as transições entre estados estão dependentes da ocorrência de uma ou mais condições. A cada conjunto de condições que define a ocorrência de uma transição entre dois estados dá-se o nome de evento. A Figura 2.23 ilustra a representação gráfica habitual (em forma de grafo) para um exemplo particular de uma máquina de estados. Cada aresta têm associado o nome do evento que define a transição entre os estados correspondentes. No caso da figura, e_1, \dots, e_5 , correspondem aos eventos possíveis.

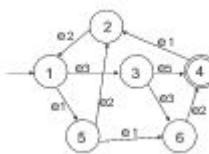


Figura 2.23. Exemplo de um autómato finito

As redes de Petri extendem as capacidades de modelização dos autómatos. Em particular simplificam a representação de ocorrências paralelas, ou seja, de sistemas em o estado é representado por mais do que 1 nó no grafo e em que múltiplos eventos podem ocorrer simultaneamente. Na forma mais simples de rede de Petri, cada nó do grafo (também chamado *lugar*) possui um recurso, a que se dá o nome de *marcação* do lugar, que define se podem ocorrer transições de saída do nó. Cada lugar acumula este recurso quando ocorre uma transição de entrada e gasta o recurso quando se dá uma transição de saída. A Figura 2.24 ilustra um exemplo de uma rede de Petri onde existem transições com diferentes características. Os eventos que definem a ocorrência de transições entre lugares estão representados pelos símbolos e_1, \dots, e_6 . Os lugares estão identificados como p_1, \dots, p_6 . A marcação de um lugar corresponde ao número de símbolos \bullet existentes nesse lugar. Os arcos que de saída de lugares e entrada nas transições têm associados pesos (considerados 1 quando não indicados explicitamente). A interpretação destes pesos depende do problema particular, e.g., podem representar um custo associado à transição. Cada transição de saída de um lugar diminui o recurso existente nesse lugar (i.e., o valor da marcação do lugar) num

valor idêntico ao peso associado à transição. As transições de entrada aumentam o recurso existente no lugar de acordo com o valor do arco de entrada no lugar.

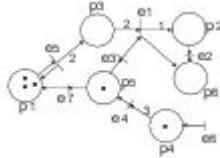


Figura 2.24. Exemplo de rede de Petri

Para simulação de sistemas híbridos existem actualmente múltiplos pacotes de software. De entre os mais comuns citam-se o SHIFT, [11], Modelica, [2], e o Matlab/Simulink, [3]. Como exemplo, na simulação de robots usando o Matlab/Simulink-Stateflow pode simular-se o modelo físico do robot (i.e., a parte do sistema que evolui em tempo contínuo) em blocos de tipo S-function e o estado discreto do sistema através de autómatos finitos usando blocos de tipo Stateflow. Esta técnica adapta-se igualmente à simulação de autómatos finitos e redes de Petri.

2.11 Análise de estabilidade de Lyapunov

Dado um sistema dinâmico que expresse a evolução da posição de um robot ao longo do tempo é de fundamental saber se a trajectória está contida numa região limitada do espaço o que corresponde a uma noção intuitiva de estabilidade do sistema.

No estudo de sistemas dinâmicos são usadas múltiplas definições de estabilidade. (a bibliografia abordando o tema da estabilidade é extremamente vasta, [12, 27, 13, 22, 24]).

Uma das definições mais simples, normalmente designada por estabilidade no sentido de Lyapunov²¹.

Intuitivamente, um sistema está num estado de equilíbrio se na ausência de quaisquer perturbações não sai desse estado. A noção de estado de equilíbrio é usada na Robótica em múltiplas situações. Por exemplo, uma configuração objectivo a ser atingida por um robot pode ser encarada como um estado de equilíbrio desejado. Dependendo da qualidade do sistema de comando pode acontecer que um robot atinja um estado de equilíbrio indesejável, em que a sua configuração se mantém constante a partir de um determinado instante apesar da tarefa ainda não ter sido cumprida. A noção de estabilidade está portanto intimamente ligada à noção de estado de equilíbrio. Um estado de equilíbrio diz-se estável se para uma grande gama de perturbações o sistema volta sempre ao equilíbrio.

Um estado de equilíbrio q_e do sistema dinâmico descrito por

²¹ Desenvolvida a partir do trabalho de Aleksandr M. Lyapunov, [4]

$$\dot{q}(t) = f(q(t), t)$$

com solução dada por

$$q(t) = \Phi(q_0, t_0, t), \quad \text{em que } \Phi(q_0, t_0, t_0) = q_0$$

diz-se estável no sentido de Lyapunov se e só se

$$\forall t, \quad \exists \epsilon : q_0 \in \mathcal{B}(q_e \epsilon) \Rightarrow \forall \delta : \Phi(q_0, t_0, t) \in \mathcal{B}(q_e, \delta)$$

ou seja, se as trajectórias $q(t)$ se iniciarem numa vizinhança de raio ϵ do estado de equilíbrio então convergem para uma vizinhança de raio δ desse mesmo estado. A estabilidade diz-se assimptótica se

$$\forall t, \quad q_0 \in \mathcal{B}(q_e, \delta) \Rightarrow q(t) \in \mathcal{B}(q_e, \epsilon)$$

A análise básica da estabilidade de estados de equilíbrio pode ser feita recorrendo ao conceito de função de Lyapunov. Uma função de Lyapunov pode ser interpretada como uma medida da distância do estado de um sistema a um estado de equilíbrio, i.e., a um estado a partir do qual o sistema não se move, ou como uma medida da energia do sistema. A medida que o sistema evolui a função de Lyapunov é um indicador do comportamento do mesmo no que respeita à convergência para o estado de equilíbrio. Se for possível garantir que a função de Lyapunov é decrescente monotonicamente então o estado de equilíbrio é estável. Este resultado é expresso na forma do seguinte teorema, normalmente conhecido como segundo método de Lyapunov,

Theorem 2.1 (Estabilidade de estados de equilíbrio). *Considere-se um sistema $\dot{q}(t) = f(q(t), t)$, com $f(q_e) = 0$ um estado de equilíbrio do sistema. Se existir uma função $V(q(t), t)$, pelo menos C^1 , tal que*

$$\begin{aligned} V(q(t), t) &> 0 \\ \dot{V}(q(t), t) &< 0 \\ \lim_{\|q(t)\| \rightarrow \infty} V(q(t), t) &= \infty \end{aligned}$$

então q_e é um estado de equilíbrio assimptoticamente estável. Se $\dot{V}(q(t), t) \leq 0$ então o estável de equilíbrio é apenas estável.

Esta análise simples esconde um problema potencial na aplicação a sistemas dinâmicos genéricos: para cada sistema é necessário encontrar uma função de Lyapunov. Para sistemas mecânicos as funções de Lyapunov estão naturalmente identificadas com medidas de energia. Assim, usando os termos relacionados com as energias cinética e potencial de um corpo em movimento é, em algumas situações, fácil encontrar uma função de Lyapunov.

2.12 Ruído

2.13 Conclusões

As ferramentas usadas na Robótica vão, no geral, bastante mais além do que a abordagem simples e descritiva apresentada neste capítulo. O leitor interessado numa descrição detalhada de várias ferramentas relacionadas principalmente com a Robótica móvel pode consultar por exemplo [15].

A representação de incertezas e a forma como estas afectam as decisões tomadas pelos robots constitui um problema de relevo na Robótica. A incerteza está presente na descrição/modelo dos robots, na forma como estes percepionam o ambiente de trabalho e nas ambiguidades presentes em algumas formas de comunicação (quer seja entre robots quer seja entre robots e seres humanos).

A representação de incertezas pode ser feita por variáveis aleatórias. A extensa teoria de processos estocásticos tem grande importância em diversas áreas da Robótica. Em alguns problemas, a Análise de Intervalos, [21], pode também ser usada para representar incerteza.

Fundamentais na definição de competências inteligentes num robot são as técnicas de aprendizagem. Estas requerem muitas vezes o uso de ferramentas específicas e mais complexas que as apresentadas neste capítulo.

2.14 Exercícios

1. Considere um vector descrito em coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) . Admita que, no espaço euclideano 3D, este vector descreve o eixo X_B do referencial \mathcal{F}_B no referencial \mathcal{F}_A .

Calcule a matriz de rotação que descreve pontos de \mathcal{F}_B em \mathcal{F}_A .

2. Considere os quaterniões reais p, q, r e os escalares $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Verifique as seguintes propriedades no espaço dos quaterniões reais.

$$\begin{array}{ll} 1. \quad q_1 + q_2 = q_2 + q_1 & 2. \quad (q_1 + q_2) + q_3 = q_1 + (q_2 + q_3) \\ 3. \quad \lambda q = q\lambda & 4. \quad (\lambda\mu)q = \lambda(\mu q) \\ 5. \quad (\lambda + \mu)q = \lambda q + \mu q & 6. \quad \lambda(p + q) = \lambda p + \lambda q \\ 7. \quad (q_1 q_2)q_3 = q_1(q_2 q_3) & 8. \quad q_1(q_2 + q_3) = q_1 q_2 + q_1 q_3 \\ 9. \quad (p + q)r = pr + qr & 10. \quad (q_1 q_2)^* = q_1^* q_2^* \\ 11. \quad N_{q_1 q_2} = N_{q_1} N_{q_2} & 12. \quad (q_1 q_2 \cdots q_n)^{-1} = q_n^{-1} q_{n-1}^{-1} \cdots q_2^{-1} q_1^{-1} \\ 13. \quad q_1 q_2^{-1} \neq q_2^{-1} q_1 & \end{array}$$

3. Verifique a expressão para o produto de quaterniões. Sugestão: use o produto termo a termo entre cada um dos quadrúplos e a Tabela 2.2.

4. Verifique que o operador rotação no espaço dos quaterniões definido por (2.11) é equivalente ao operador rotação definido no espaço das matrizes definido por (2.9).

5. A tabela seguinte define a multiplicação de quaterniões. Verifique a sua concordância com a operação produto de quaterniões definida na Tabela 2.2.

$$\mathbf{1}\mathbf{1} = \mathbf{1} \quad \mathbf{1}\mathbf{i} = \mathbf{i} \quad \mathbf{1}\mathbf{j} = \mathbf{j} \quad \mathbf{1}\mathbf{k} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{i}\mathbf{1} = \mathbf{i} \quad \mathbf{i}\mathbf{i} = -\mathbf{1} \quad \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{i}\mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

$$\mathbf{j}\mathbf{1} = \mathbf{j} \quad \mathbf{j}\mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{j}\mathbf{j} = -\mathbf{1} \quad \mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k}\mathbf{1} = \mathbf{k} \quad \mathbf{k}\mathbf{i} = \mathbf{j} \quad \mathbf{k}\mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{k}\mathbf{k} = -\mathbf{1}$$

6. Demonstre que a orientação relativa entre dois referenciais pode ser descrita usando 2 ângulos e 2 eixos de rotação.

Sugestão: Considere uma rotação de ϕ rad em torno do eixo A_Z seguida de uma rotação de θ rad em torno do eixo A_X que resultou da primeira rotação.

$$\begin{aligned} x &= \cos(\phi) \cos(\theta) \\ y &= \sin(\phi) \cos(\theta) \\ z &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Referências

1. <http://mathworld.wolfram.com/runge-kuttamethod.html>.
2. <http://www.mathcore.com/documents/modelica.pdf>.
3. <http://www.mathworks.com>.
4. 2006. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Lyapunov.html>.
5. <http://mathworld.wolfram.com/newton-cotesformulas.html>, 2006.
6. V. K. Balakrishnan. *Introductory Discrete Mathematics*. Prentice-Hall Int. Editions, 1991.
7. Dimitri P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 1999.
8. Ray M. Bowen and C.-C. Wang. *Introduction to Vectors and Tensors*. Plenum Press, 1980. Vol. 1 - Linear and Multilinear Algebra.
9. Christos G. Cassandras and Stéphane Laforgue. *Introduction to Discrete Event Systems*. Kluwer Academic, 1999.
10. John Craig. *Introduction to Robotics*. Addison-Wesley, 1989.
11. Akash Deshpande, Aleks Gölli, and Luigi Semenzato. The shift programming language for dynamic networks of hybrid automata, 1999.
12. Paul Glendinning. *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. Cambridge University Press, 1999.
13. Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, 2005.
14. Erwin Kreysig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1978.
15. Jean-Claude Latombe. *Robot Motion Planning*. Kluwer Academic, 1992.
16. D. Luenberger. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, 1973.
17. H. Lütkepohl. *Handbook of Matrices*. John Wiley & Sons, 1997.
18. L. Magalhães. *Integrais em Variedades e Aplicações*. Texto Editora, 1993.
19. James A. McHugh. *Algorithmic Graph Theory*. Prentice-Hall, 1990.
20. Jean-Pierre Merlet. *Parallel Robots*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
21. R.E. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM Press, Philadelphia, 1979.
22. Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, 1997.
23. Alan V. Oppenheim and Alan S. Willsky. *Signals and Systems*. Signal Processing Series. Prentice-Hall, 1983.
24. M.I. Ribeiro. *Análise de Sistemas Lineares*. IST Press, 2002.
25. Elaine Rich. *Artificial Intelligence*. McGraw-Hill, 1983.
26. Kenneth A. Ross and Charles R.B. Wright. *Discrete Mathematics*. Prentice-Hall, 1992.
27. Shankar Sastry and Marc Bodson. *Adaptive Control - Stability, Convergence and Robustness*. Prentice-Hall, 1989.
28. G. F. Simmons. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill, 1963.

3

Cinemática

3.1 Introdução

A cinemática¹ estuda o movimento de corpos sem considerar as forças que os produzem. No fundamental, este estudo do movimento tem em conta apenas as características geométricas do robot. Um modelo cinemático expressa a forma como os diversos componentes de um robot se movem entre si envolvendo exclusivamente as variáveis relacionadas com a geometria do robot. Grandezas relacionadas com a dinâmica, por exemplo a massa do robot, não são consideradas.

O espaço de configuração escolhido tem aqui um papel fundamental. A cinemática representa transformações entre espaços de configuração. Regra geral, um dos espaços está directamente associado aos graus de liberdade do robot, o *espaço operacional*, e o outro ao espaço de trabalho, e.g., $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ incluindo coordenadas de posição e orientação. O espaço de trabalho também é chamado *espaço de tarefa* na literatura.

Ambos os espaços, de trabalho e de junta, constituem espaços de configuração². Num espaço de configuração um robot pode ser representado por um ponto, contendo a sua posição e orientação. Para uma introdução às características dos espaços de configuração veja-se, por exemplo, [6].

O estudo da cinemática inicia-se com a análise de manipuladores série. A estrutura particular destes robots permite a introdução dos principais conceitos de forma sistemática.

De particular interesse é a cinemática de robots paralelos dada a sua utilização em aplicações de relevo económico e social. São exemplos as mesas sísmicas, para simulação de sismos em modelos de construções, as mesas de suporte de simuladores aeronáuticos, sistemas de posicionamento de precisão e diversos tipos de instrumentação médica. A cinemática de robots paralelos é abordada de forma substancialmente diferente da dos robots série.

¹ Etimologicamente do grego *kínematos* ou movimento.

² Estes espaços designam-se habitualmente pela abreviatura *C*-espaço.

Relativamente a robots móveis a cinemática é geralmente definida usando modelos diferenciais que expressam a velocidade do robot como função da sua configuração e sinais de controlo. O estudo sistemático das cinemáticas de robots móveis generaliza a técnica utilizada para os manipuladores série. Para os robots móveis comuns, a análise empírica da estrutura é em geral suficiente para obtenção do modelo cinemático.

Distinguem-se duas formas de cinemática:

- A **cinemática directa** permite determinar a configuração do robot no espaço de trabalho para um dado conjunto de valores das variáveis de junta;
- A **cinemática inversa** resolve o problema inverso, dada uma configuração determina as correspondentes variáveis de junta.

3.2 Manipuladores série

Este tipo de manipuladores é constituído por um conjunto de corpos rígidos, habitualmente chamados troços, ligados entre si por juntas. Diferentes tipos de juntas possibilitam diversos tipos de movimentação e impõem diversos tipos de restrições.

O conjunto de juntas de um manipulador define o chamado *espaço junta*. O espaço onde o manipulador actua, isto é o espaço de trabalho, é também chamado *espaço cartesiano* e corresponde ao espaço de configuração que codifica a posição e atitude do robot.

É comum designar a estrutura de manipuladores a partir da sequência de juntas que os compõem. Assim, RRR designa um manipulador com 3 juntas de rotação e RPRP um manipulador com 4 juntas (2 de rotação e 2 prismáticas) A junta da base é habitualmente a primeira a ser indicada na string.

A Tabela 3.1 ilustra alguns dos tipos de junta mais utilizados e representações gráficas de uso corrente.

Uma análise exaustiva dos tipos de junta habitualmente considerados em mecanismos está fora do âmbito deste texto. O leitor interessado encontra facilmente a bibliografia sobre este tópico, [12]. A representação gráfica das juntas possui múltiplas variantes (veja-se por exemplo [5]). O leitor pode criar sem dificuldade a sua própria representação, bastando identificar sem ambiguidade os componentes e o seu movimento relativo.

3.2.1 Cinemática directa

A cinemática directa mapeia o espaço junta no espaço cartesiano. A Figura 3.1 ilustra dois exemplos de manipuladores série utilizando digramas cinemáticos. A base de cada um tem associado um referencial $\mathcal{F}_{\text{base}}$ da base (também chamado referencial do mundo) onde se pretende descrever as capacidades de movimento, a posição, $(x, y, z)_{\text{ferramenta}}$, e orientação, $(\alpha, \beta, \gamma)_{\text{ferramenta}}$ do efector terminal como função das variáveis de junta.

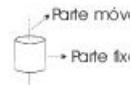
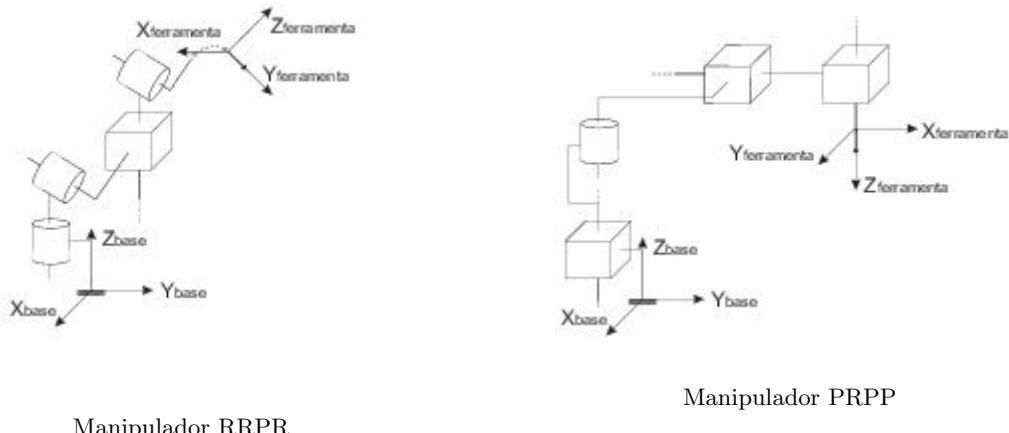
Junta	Símbolo	Representações
Revolução	R	 
Prismática	P	 
Esférica	S	

Tabela 3.1. Tipos de juntas comuns usadas em robots**Figura 3.1.** Exemplos esquemáticos de manipuladores série

O passo inicial no estudo da cinemática de manipuladores série consiste na especificação de um conjunto de referenciais capazes de capturar todas as características de movimento do manipulador. A definição de um conjunto de referenciais adequado não é única podendo ser feita de acordo com múltiplas convenções.

A Figura 3.2 ilustra uma das convenções mais utilizadas, denominada Denavit-Hartenberg, [3, 13]. Para simplificar a exposição as juntas são representadas com a simbologia habitual das juntas de rotação.

A ideia base para este método consiste em atribuir referenciais a cada uma das juntas do manipulador por forma a capturar o movimento gerado pelas mesmas. Um conjunto de referenciais auxiliares permite

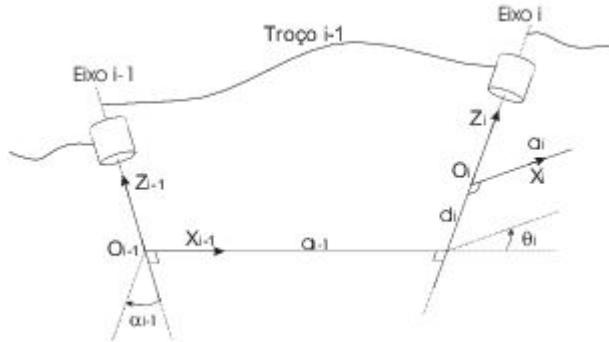


Figura 3.2. Conjunto de referenciais usado pela convenção Denavit-Hartenberg para descrever a geometria de um manipulador entre 2 eixos de rotação

capturar todos os aspectos relevantes da geometria do manipulador. A convenção utiliza um total de 4 parâmetros para definir o papel de cada troço; 2 ângulos para descrever a orientação relativa entre troços e 2 distâncias para descrever a posição relativa dos mesmos. A Tabela 3.2 descreve os principais elementos usados por esta convenção.

Z_i	Eixo de \mathcal{F}_i coincidente com o eixo da junta i
O_i	Origem de \mathcal{F}_i , intersecção entre Z_i e a_i
O_{i-1}	Idem para \mathcal{F}_{i-1}
a_i	Distância de Z_i a Z_{i+1} medida segundo X_i
α_i	Ângulo entre Z_i e Z_{i+1} medido em torno de X_i
d_i	Distância de X_{i-1} a X_i medida segundo Z_i
θ_i	Ângulo entre X_{i-1} e X_i medido em torno de Z_i

Tabela 3.2. Principais elementos da convenção de Denavit-Hartenberg

O eixo X_{i-1} fica orientado para o eixo do troço i . De notar que a_{i-1} só representa a distância entre Z_{i-1} e Z_i quando se fixa O_{i-1} . Sem esta última condição existem infinitas direções simultaneamente perpendiculares a Z_{i-1} e Z_i .

Se $a_i = 0$, X_i é escolhido perpendicular ao plano definido por Z_i e Z_{i-1} . a_i é sempre positivo ou nulo já é medido segundo o sentido positivo de X_i . No entanto, α_i, d_i, θ_i podem ser positivos, negativos ou nulos.

Em geral, d_i corresponde à variável de junta em juntas prismáticas enquanto que θ_i corresponde à variável de junta em juntas de revolução.

Existem múltiplas variantes para a convenção de Denavit-Hartenberg (por exemplo, a variante descrita em [13]).

Para ilustrar a aplicação da convenção considere-se o manipulador RRR na Figura 3.3. A figura da esquerda usa a representação com a simbologia associada ao tipo de junta utilizado. A figura da direita usa referenciais em cada troço para definir os graus de liberdade do manipulador.



Figura 3.3. Manipulador planar RRR

O primeiro passo na aplicação da convenção consiste na atribuição dos referenciais de troço. Em geral são possíveis várias disposições para o conjunto de referenciais. Como regra empírica pode afirmar-se que o conjunto deve conseguir capturar todas as dimensões físicas do robot nos 4 parâmetros usados para descrever cada troço.

A Figura 3.4 ilustra uma atribuição possível onde se assume que todas as variáveis de junta têm valor 0. Para o troço inicial verifica-se que X_1 fica alinhado com X_0 quando $\theta_1 = 0$. Similarmente, X_3 fica alinhado com X_2 quando $\theta_3 = 0$. A Tabela 3.3 descreve os parâmetros D-H obtidos.

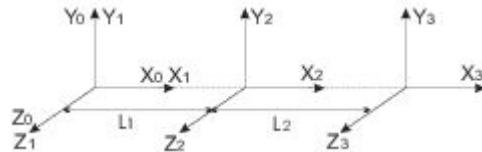


Figura 3.4. Referenciais de troço para o manipulador RRR quando todas as variáveis de junta são 0

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

Tabela 3.3. Parâmetros de troço

Uma vez obtidos os parâmetros D-H descrevendo por completo as características geométricas do robot pode obter-se facilmente o modelo cinemático compondo as transformações homogéneas que descrevem o movimento relativo entre os referenciais de troço. Para determinar as transformações de troço introduz-se

um conjunto de referenciais auxiliares tal que as transformações possam ser decompostas em termos de translações e rotações simples (vide a Figura 3.5).

Note-se que os referenciais da Figura 3.4 estão dispostos por forma a que as variáveis das juntas de rotação sejam nulas. Este procedimento facilita a obtenção dos parâmetros D-H.

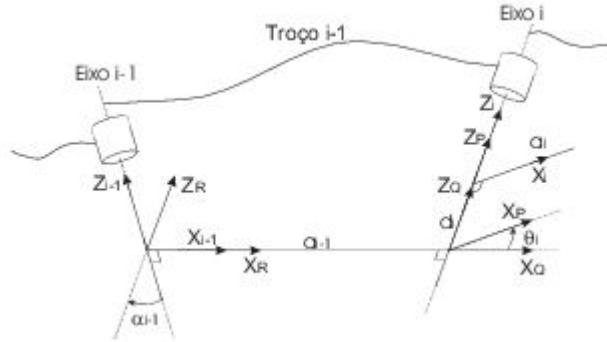


Figura 3.5. Referenciais auxiliares para cálculo da transformação de troço

Com a introdução dos referenciais auxiliares \mathcal{F}_P , \mathcal{F}_Q e \mathcal{F}_R a transformação entre os troços $i - 1$ e i pode escrever-se como a composição das transformações elementares,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i-1} &= R_X(\alpha_{i-1}) \quad \mathcal{F}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} \\ 0 & s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} \end{bmatrix} \quad \mathcal{F}_R = \text{Trans}_X(a_{i-1}) \quad \mathcal{F}_Q = \begin{bmatrix} a_{i-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{F}_P \\ \mathcal{F}_Q &= R_Z(\theta_i) \quad \mathcal{F}_P = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{F}_P = \text{Trans}_Z(d_i) \quad \mathcal{F}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{F}_i. \end{aligned}$$

Estas transformações entre referenciais podem ser escritas como transformações homogéneas (deixa-se ao cuidado do leitor como exercício). Compondo estas transformações obtém-se

$${}^{i-1}T = {}^R_T {}^R_Q {}^Q_P {}^P_T {}^P_T \quad (3.1)$$

Efectuando os produtos de matrizes obtém-se para a transformação de troço

$${}^{i-1}T = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ s_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}}d_i \\ s_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

A composição de todas as transformações de troço constitui a *cinemática directa* e descreve completamente a influência da estrutura geométrica do manipulador no seu movimento.

Considere-se o manipulador RPR da Figura 3.6. Atribuindo os referenciais de acordo com a Figura 3.7 obtém-se os parâmetros D-H descritos na Tabela 3.4.

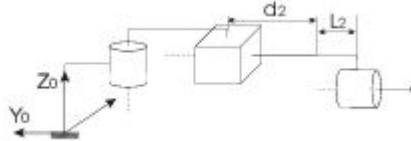


Figura 3.6. Manipulador RPR

No caso do troço com a junta prismática deve referir-se que o referencial \mathcal{F}_2 é colocado na extremidade do eixo da junta.

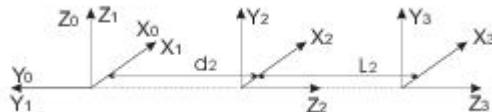


Figura 3.7. Referenciais de troço para o robot RPR quando as variáveis de junta se anulam

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$\pi/2$	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

Tabela 3.4. Parâmetros D-H para o manipulador RPR

O conjunto de referenciais da Figura 3.7 aparenta que X_1 não aponta na direcção do eixo do troço 2. No entanto o troço 1 apenas contém a junta de rotação não tendo associado um corpo rígido. Como tal o comprimento do troço 1 quando medido ao longo de X_1 é 0.

Neste exemplo, d_2 é sempre positivo já que aumenta segundo o sentido positivo de Z_2 (o eixo em que é medido). O eixo X_3 é paralelo a X_2 quando $\theta_3 = 0$ e \mathcal{F}_0 coincide com \mathcal{F}_1 quando $\theta_1 = 0$ pelo que se cumprem as condições impostas pela convenção de Denavit-Hartenberg.

Substituindo os parâmetros da Tabela 3.4 na transformação de troço dada pela expressão (3.2) obtém-se as correspondentes matrizes de transformação,

$${}^0T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Compondo as três transformações obtém-se,

$${}^0T = \begin{bmatrix} c_1c_3 & -c_1s_3 & s_1 & s_1(L_2 + d_2) \\ s_1c_3 & -s_1s_3 & -c_1 & -c_1(L_2 + d_2) \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

correspondendo à transformação homogénea de coordenadas que transforma pontos descritos no referencial associado ao efeitor terminal, \mathcal{F}_3 em pontos descritos no referencial da base, \mathcal{F}_0 .

Como referido atrás, a convenção de Denavit-Hartenberg não conduz a uma atribuição única para os referenciais de troço. A regra a seguir deve ser a de conseguir determinar sem qualquer ambiguidade todos os parâmetros exigidos pela convenção. A Figura 3.8 ilustra uma variante da atribuição de referenciais para o manipulador da Figura 3.6.

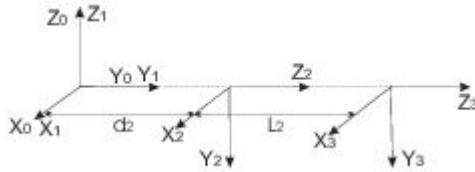


Figura 3.8. Variante dos referenciais de troço para o robot RPR

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$-\pi/2$	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

Tabela 3.5. Parâmetros D-H para a variante de referenciais de troço

Para esta variante \mathcal{F}_1 alinha-se com \mathcal{F}_0 quando $\theta_1 = 0$ e \mathcal{F}_3 alinha-se com \mathcal{F}_2 quando $\theta_3 = 0$. Novamente substituindo os parâmetros da Tabela 3.5 na expressão (3.2) obtém-se para as matrizes de transformação de troço,

$$\begin{aligned} {}_1^0T &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_2^1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_3^2T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

vindo para a transformação global

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} c_1c_3 & -c_1s_3 & s_1 & -s_1(L_2 + d_2) \\ s_1c_3 & -s_1s_3 & c_1 & c_1(L_2 + d_2) \\ -s_3 & -c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

As diferenças entre a solução (3.4) e a solução inicial (3.3) devem-se apenas às diferenças de orientação entre os referenciais \mathcal{F}_3 do efector terminal nos dois exemplos. O leitor é convidado a verificar esta afirmação por simples inspecção visual e também de forma analítica.

Se a atribuição de referenciais não seguir a convenção de Denavit-Hartenberg ainda assim pode obter-se um modelo cinemático correcto. Relativamente ao manipulador RPR do exemplo anterior, considere-se o conjunto de referenciais da Figura 3.9. Nesta atribuição não é possível determinar o parâmetro α_1 , o ângulo entre Z_1 e Z_2 medido em torno de X_1 . De forma similar, não é possível determinar o parâmetro θ_2 , o ângulo entre X_1 e X_2 medido em torno de Z_2 . A Tabela 3.6 mostra os paraâmetros que podem ser determinados com os referenciais propostos.

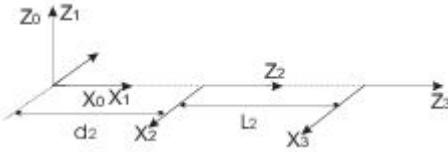


Figura 3.9. Variante de referenciais de troço não concordantes com a convenção D-H

Tabela 3.6. Parâmetros D-H

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	\times	0	0	\times
3	0	0	L_2	θ_3

A falha na atribuição dos referenciais é apenas aparente. De facto, se a junta 1 rodar $\pi/2$ rad passa a ser possível determinar $\alpha_1 = -\pi/2$ e também $\theta_2 = 0$. Este exemplo reforça a noção de que o conjunto de

regras da Tabela 3.2 é apenas uma convenção. O modelo cinemático de um robot pode ser obtido com qualquer conjunto de referenciais de troço desde que as transformações de troço possam ser determinadas sem ambiguidades.

Para este exemplo as transformações ${}_1^0T$ e ${}_3^2T$ podem ser determinadas simplesmente por inspecção,

$${}_1^0T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_3^2T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A transformação restante, ${}_2^1T$ pode obter-se por composição de transformações elementares,

$${}_2^1T = \text{Trans}_X(d_2) R_Z(-\pi/2) R_X(-\pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A transformação total é,

$${}_3^0T = \begin{bmatrix} s_1c_3 & -s_1c_3 & c_1 & c_1(L_2 + d_2) \\ -c_1c_3 & c_1s_3 & s_1 & -s_1(L_2 + d_2) \\ -s_3 & -c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A Figura 3.10 ilustra uma variante do manipulador RPR em que as origens do referencial do mundo \mathcal{F}_0 e do referencial da junta 1, \mathcal{F}_1 não são coincidentes estando à distância de L_1 , medida segundo Z_0 .

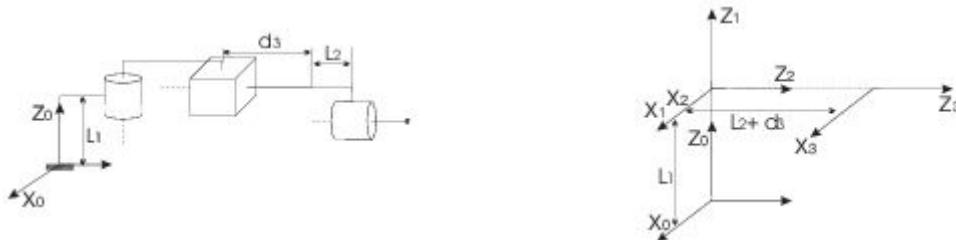


Figura 3.10. Variante do manipulador RPR

A Tabela 3.7 ilustra os correspondentes parâmetros de troço. Esta atribuição de referenciais é pouco ortodoxa já que conduz a 2 variáveis de junta no mesmo troço. Não obstante o resultado é correcto.

Tabela 3.7. Parâmetros de troço para a variante do manipulador RPR

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	L_1	θ_1
2	$-\pi/2$	0	0	0
3	0	0	$L_2 + d_3$	θ_3

As transformações de troço são, respectivamente,

$${}^0T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A composição destas transformações resulta em,

$${}^0T = \begin{bmatrix} c_1c_3 & -c_1s_3 & -s_1 & -s_1(L_2 + d_3) \\ s_1c_3 & -s_1s_3 & c_1 & c_1(L_2 + d_3) \\ -s_3 & -c_3 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O manipulador Puma 500

O manipulador Puma 500 (Figura 3.11a) constitui um exemplo clássico estudado em vários textos de introdução à Robótica³. Este manipulador possui 6 juntas de revolução e tem capacidade para posicionar o efector terminal em qualquer orientação no espaço 3D atingível. As três juntas iniciais são responsáveis pelo posicionamento do efector terminal, sendo a orientação obtida através das restantes 3 juntas.

A Figura 3.11b mostra o sistema de referenciais escolhido de acordo com a convenção de Denavit-Hartenberg. A Tabela 3.8 contém os correspondentes parâmetros.

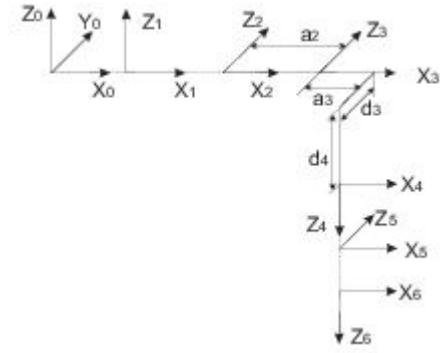
Substituindo os parâmetros da Tabela 3.8 na transformação (3.2) obtém-se as transformações

$$\begin{aligned} {}^0T &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^3T &= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4T = \begin{bmatrix} c_4 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

³ Esta secção segue de perto [3].



(a) Aspecto geral do manipulador



(b) Referenciais

Figura 3.11. O manipulador Puma 500**Tabela 3.8.** Parâmetros D-H para o Puma 500

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$-\pi/2$	0	0	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	$-\pi/2$	a_3	d_4	θ_4
5	$\pi/2$	0	0	θ_5
6	$-\pi/2$	0	0	θ_6

que podem ser compostas para se obter a transformação global

$${}^6T = {}^0T \ {}^1T \ {}^2T \ {}^3T \ {}^4T \ {}^5T .$$

O manipulador Yasukawa L3

Este robot constitui um outro exemplo clássico no estudo da cinemática de manipuladores série. A Figura 3.12 mostra o diagrama cinemático para este robot na configuração de repouso habitual.

A Figura 3.13 mostra um conjunto de referenciais que permite a definição de todos os parâmetros D-H. A disposição dos referenciais, assumindo que todas as variáveis de junta são nulas, contrasta com a disposição dos troços na posição de repouso. A Tabela 3.9 mostra os correspondentes parâmetros D-H e

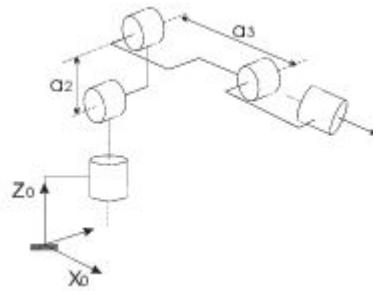


Figura 3.12. O Yasukawa L3

os respectivos valores para a configuração de repouso do robot (onde algumas juntas têm valor diferente de 0).

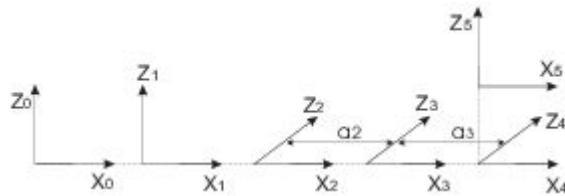


Figura 3.13. Referenciais para o Yasukawa L3, quando todas as variáveis de junta têm valor 0

Tabela 3.9. Parâmetros D-H para o robot Yasukawa L3

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	Valor em repouso
1	0	0	0	θ_1	0
2	$-\pi/2$	0	0	θ_2	$-\pi/2$
3	0	a_2	0	θ_3	$\pi/2$
4	0	a_3	0	θ_4	$\pi/2$
5	$\pi/2$	0	0	θ_5	0

A transformação de troço usando quaterniões

Usando quaterniões para representar o espaço de posição e orientação pode obter-se a transformação de troço usando uma técnica similar à usada para obter (3.2). A Figura 3.14 ilustra o conjunto de referenciais já usado na Figura 3.5 e os quaterniões que modelam as transformações que lhes estão associadas.

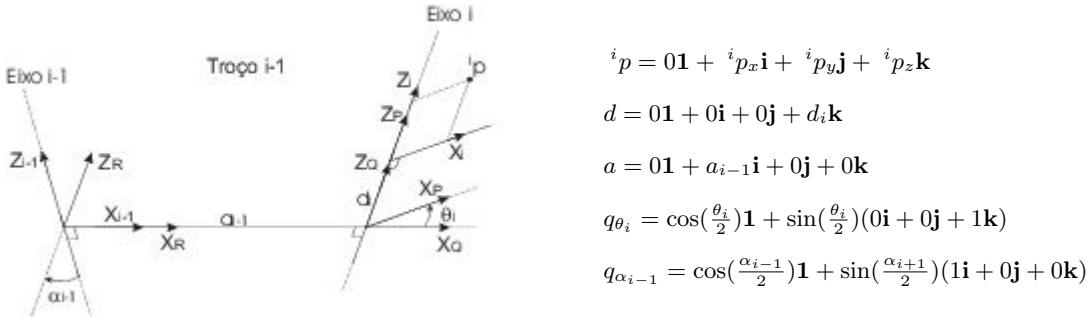


Figura 3.14. Referenciais de troço e respectivos quaterniões associados

A composição das transformações segue uma sequência similar à usada para obter (3.2) obtendo-se

$$i^{-1}Q({^i}p) = q_{\alpha_{i-1}}(q_{\theta_i}({^i}p + d)q_{\theta_i}^{-1} + a)q_{\alpha_{i-1}}^{-1} \quad (3.5)$$

Desenvolvendo a primeira rotação em (3.5) obtém-se

$$q_{\theta_i}({^i}p + d)q_{\theta_i}^{-1} = 0\mathbf{1} + (\cos(\theta_i){^i}p_x - \sin(\theta_i){^i}p_y)\mathbf{i} + (\cos(\theta_i){^i}p_y + \sin(\theta_i){^i}p_x)\mathbf{j} + ({^i}p_z + d_i)\mathbf{k}$$

Desenvolvendo a segunda rotação vem para a transformação de troço,

$$\begin{aligned} i^{-1}Q({^i}p) &= 0\mathbf{1} + (\cos(\theta_i){^i}p_x - \sin(\theta_i){^i}p_y + a_{i-1})\mathbf{i} \\ &\quad + [\sin(\alpha_{i-1})(\cos(\theta_i){^i}p_y + \sin(\theta_i){^i}p_x) - \sin(\alpha_{i-1})({^i}p_z + d_i)]\mathbf{j} \\ &\quad + [\cos(\alpha_{i-1})({^i}p_z + d_i) + \sin(\alpha_{i-1})(\cos(\theta_i){^i}p_y + \sin(\theta_i){^i}p_x)]\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como seria de esperar, o resultado é idêntico ao obtido com a transformação homogénea de troço. O leitor pode comparar facilmente as expressões (3.6) e (3.7).

$$i^{-1}P = i^{-1}T{^i}P = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ s_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}}d_i \\ s_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {^i}p_x \\ {^i}p_y \\ {^i}p_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.2.2 Cinemática inversa

À transformação entre o espaço de posições e orientações $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ e o espaço junta dá-se habitualmente o nome de *cinemática inversa*.

A cinemática inversa representa a transformação inversa da cinemática directa. A característica principal desta transformação é o facto de, em geral, conduzir a múltiplas soluções. Para manipuladores série o posicionamento num ponto $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ arbitrário requer o mínimo de 6 graus de liberdade. O conjunto de pontos $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ para os quais a cinemática inversa tem pelo menos 1 solução denomina-se *espaço de trabalho dextro*. Algumas posições podem ser atingidas restringindo a orientação. Este conjunto de pontos denomina-se *espaço de trabalho atingível*.

A obtenção de formas fechadas para as soluções da cinemática inversa é possível para robots genéricos com um máximo de 6 juntas e em que os eixos de rotação das 3 últimas juntas se intersectam num ponto, [3]. Para robots com um número de juntas superior são usados métodos numéricos.

Utilizando transformações homogéneas para representar configurações, o problema da cinemática inversa para um manipulador com n juntas resume-se à resolução de uma equação da forma,

$$\text{base}_{\text{ferramenta}} T = {}^0_n T \quad (3.8)$$

em que $\text{base}_{\text{ferramenta}} T$ define a configuração desejada e ${}^0_n T$ contém as variáveis de junta a determinar.

Os métodos para determinar as soluções da cinemática inversa em forma fechada podem dividir-se em três classes: (i) os métodos algébricos, (ii) os métodos geométricos e (iii) os métodos mistos. Os métodos algébricos caracterizam-se pela manipulação algébrica efectuada sobre as transformações de troço. Os métodos geométricos usam as relações trigonométricas básicas para obter as relações envolvendo as variáveis de junta e do espaço de configuração. Os métodos mistos combinam os dois métodos anteriores.

O método algébrico

Para ilustrar a aplicação do método algébrico considere-se o manipulador RRR planar da Figura 3.15 semelhante ao exemplo da Figura 3.3.

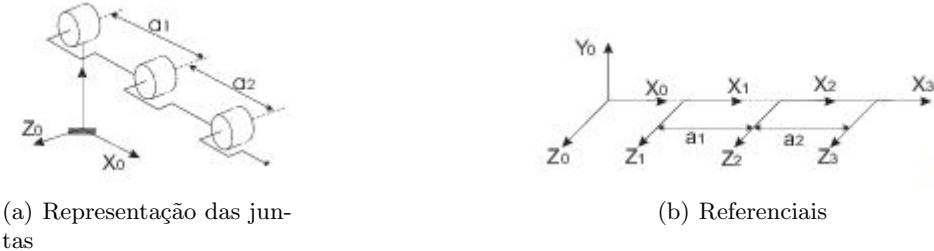


Figura 3.15. Manipulador RRR planar

A transformação global, entre a ferramenta e a base, é dada por

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

A estrutura planar permite escrever por inspecção a transformação entre a ferramenta e base,

$$\underset{\text{ferramenta}}{\text{base}} {}^0_3T = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

onde ϕ corresponde ao único ângulo necessário para definir a orientação do robot e x, y são as coordenadas da ferramenta no plano onde o robot se move. De notar que a matriz de rotação em (3.10) corresponde a uma rotação em torno do eixo Z_0 . A resolução da cinemática inversa corresponde pois a determinar os valores de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ que verificam a equação

$$\underset{\text{ferramenta}}{\text{base}} {}^0_3T = {}^0_3T. \quad (3.11)$$

Igualando os elementos 1,1 e 2,1 obtém-se

$$c_\phi = c_{123}, \quad s_\phi = s_{123} \quad (3.12)$$

e portanto

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \text{atan2}(s_\phi, c_\phi). \quad (3.13)$$

Igualando os elementos 1,4 e 2,4 obtém-se

$$x = a_1c_1 + a_2c_{12} \quad (3.14)$$

$$y = a_1s_1 + a_2s_{12} \quad (3.15)$$

quadrando e somando

$$x^2 + y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2c_2 \quad (3.16)$$

onde se obtém facilmente

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}, \quad s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2} \quad (3.17)$$

e portanto existem 2 soluções para θ_2 (a interpretação física é deixada como exercício)

$$\theta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2) \quad \text{e} \quad \theta_2 = \text{atan2}(-s_2, c_2) \quad (3.18)$$

Usando igualdades trigonométricas básicas obtém-se o sistema de equações,

$$\begin{aligned}x &= a_1c_1 + a_2c_1c_2 - a_2s_1s_2 = (a_1 + a_2c_2)c_1 - a_2s_2s_1 = K_1c_1 - K_2s_1 \\y &= a_1s_1 + a_2c_1s_2 + a_2s_1c_2 = \underbrace{(a_1 + a_2c_2)}_{K_1}s_1 + \underbrace{a_2s_2}_{K_2}c_1 = K_1s_1 + K_2c_1\end{aligned}$$

que, resolvido em ordem às variáveis c_1 e s_1 , resulta na solução,

$$c_1 = \frac{x + K_2y}{K_1^2 + K_2^2}, \quad s_1 = \frac{yK_1 - K_2x}{K_1^2 + K_2^2}. \quad (3.19)$$

Dado que $K_1^2 + K_2^2 > 0$ pode escrever-se

$$\theta_1 = \text{atan2}(K_1y - K_2x, K_1x + K_2y), \quad \forall \theta_2 \quad (3.20)$$

vindo para a variável de junta restante

$$\theta_3 = \Phi - \theta_2 - \theta_1 \quad (3.21)$$

O método geométrico

Este método tem como fundamento o uso das relações conhecidas da geometria euclidiana na determinação da cinemática inversa. O manipulador RRR já usado anteriormente é redesenhado na Figura 3.16.

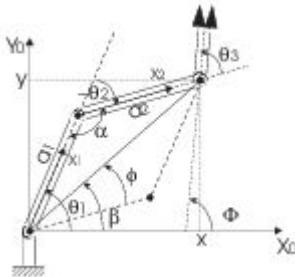


Figura 3.16. Manipulador RRR planar

Usando a lei dos cosenos (por vezes denominada Teorema de Carnot),

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\alpha) \\&= a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \underbrace{\cos(\pi + \theta_2)}_{-\cos(\theta_2)}\end{aligned}$$

obtém-se

$$\cos(\theta_2) = \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

o que significa que existem 2 soluções para o valor da junta 2.

$$\text{Solução 1: } 0 \leq \theta_2 \leq \pi$$

$$\text{Solução 2: } -\pi \leq -\theta_2 \leq 0$$

Por inspecção da Figura 3.16 pode escrever-se

$$\beta = \text{atan2}(y, x)$$

e usando de novo a lei dos cosenos

$$a_2^2 = x^2 + y^2 + a_1^2 - 2a_1\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\phi)$$

obtém-se

$$\cos(\phi) = \frac{x^2 + y^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1\sqrt{x^2 + y^2}}$$

com as correspondentes duas soluções

$$\text{Solução 1: } 0 \leq \phi \leq \pi$$

$$\text{Solução 2: } -\pi \leq -\phi \leq 0$$

Note que as duas soluções para ϕ são dependentes de θ_2 .

Novamente por inspecção da Figura 3.16 e usando β determinada atrás obtém-se as soluções para a primeira junta

$$\theta_1 = \beta \pm \phi$$

$$\begin{array}{ll} \nearrow \beta + \phi & \text{se } \theta_2 < 0 \\ \searrow \beta - \phi & \text{se } \theta_2 \geq 0 \end{array}$$

A orientação do efector terminal é $\Phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ donde se pode extrair a variável restante

$$\theta_3 = \Phi - \theta_1 - \theta_2$$

3.2.3 Cinemática inversa do PUMA 500

O Puma 500 (Figura 3.11) permite ilustrar com maior detalhe a aplicação do método algébrico. Recorde-se que o objectivo da cinemática inversa é a determinação de todos os valores para as variáveis de junta que colocam o efector terminal numa dada configuração. Em termos de transformações homogéneas,

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0T(\theta_1) {}^1T(\theta_2) {}^2T(\theta_3) {}^3T(\theta_4) {}^4T(\theta_5) {}^5T(\theta_6) \quad (3.22)$$

onde o lado esquerdo pode ser construído a partir de uma posição, p_x, p_y, p_z , e orientação, α, β, γ , desejadas. Qualquer uma das convenções para representar orientações descritas no Capítulo 2 pode ser usada para definir a matriz de rotação.

Multiplicando ambos os lados de (3.22) por ${}^0T(\theta_1)^{-1}$

$$[{}^0T(\theta_1)]^{-1} \cdot {}^{base}_{ferramenta}T = {}^1T(\theta_2) {}^2T(\theta_3) {}^3T(\theta_4) {}^4T(\theta_5) {}^5T(\theta_6)$$

permite que o lado esquerdo da equação fique apenas com a variável θ_1 , ou seja,

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^{base}_{ferramenta}T = {}^1T(\theta_2, \dots, \theta_6) \quad (3.23)$$

Igualando os elementos (2, 4) de ambos os lados de (3.23) obtém-se

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_3$$

Usando a transformação $p_x = \rho \cos(\Phi), p_y = \rho \sin(\Phi)$, onde $\rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ e $\Phi = \text{atan2}(p_y, p_x)$ obtém-se

$$c_1 s_\Phi - s_1 c_\Phi = \sin(\Phi - \theta_1) = \frac{d_3}{\rho}$$

resultando em 2 soluções para θ_1

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) - \text{atan2}\left(d_3, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_3^2}\right)$$

Igualando os elementos (1, 4) na expressão (3.23)

$$c_1 p_x + s_1 p_y = a_3 c_{23} - d_4 s_{23} + a_2 c_2$$

e os elementos (3,4)

$$-p_z = a_3 s_{23} + d_4 c_{23} + a_2 s_2,$$

quadrando e somando ambas as expressões

$$a_3 c_3 - d_4 s_3 = K \text{ com } K = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_3^2 - d_4^2}{2a_2}$$

e usando a transformação $a_3 = \rho \sin(\Phi)$ e $d_4 = \rho \cos(\Phi)$, com $\rho = \sqrt{a_3^2 + d_4^2}$ e $\Phi = \text{atan2}(a_3, d_4)$, obtém-se

$$c_3 s_\Phi - s_3 c_\Phi = \sin(\Phi - \theta_3) = \frac{K}{\rho}$$

resultando em 2 soluções para θ_3

$$\theta_3 = \text{atan2}(a_3, d_4) - \text{atan2}\left(K, \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - K^2}\right).$$

O procedimento inicial pode ser repetido por forma a deixar no lado esquerdo de (3.22) apenas a variável θ_3 ,

$${}^0 T(\theta_3)^{-1} {}^{base}_{ferramenta} T = {}^3 T(\theta_4) {}^4 T(\theta_5) {}^5 T(\theta_6)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 c_{23} & -s_{23} & -a_2 c_3 \\ -c_1 s_{23} & -s_1 s_{23} & -c_{23} & a_2 s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^3 T(\theta_4, \theta_5, \theta_6) \quad (3.24)$$

Igualando os elementos (1,4) e (2,4) na expressão (3.24) obtém-se o sistema de equações

$$c_1 c_{23} p_x + s_1 c_{23} p_y - s_{23} p_z - a_2 c_3 = a_3$$

$$-c_1 s_{23} p_x - s_1 s_{23} p_y - c_{23} p_z + a_2 s_3 = d_4$$

que resolvido em ordem a c_{23} e s_{23} resulta em

$$s_{23} = \frac{(-a_3 - a_2 c_3)p_z + (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_2 s_3 - d_4)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2}$$

$$c_{23} = \frac{(-a_2 s_3 - d_4)p_z - (c_1 p_x + s_1 p_y)(-a_3 - a_2 c_3)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2}$$

e tendo θ_3 já sido determinado atrás,

$$\theta_2 = \text{atan2}(s_{23}, c_{23}) - \theta_3$$

Note-se que as 2 soluções para θ_2 são dependentes das soluções para θ_3 .

Igualando os elementos (1, 3) e (3, 3) na expressão (3.24)

$$\begin{aligned} r_{13}c_1c_{23} + r_{23}s_1c_{23} - r_{33}s_{23} &= -c_4s_5 \\ -r_{13}s_1 + r_{23}c_1 &= s_4s_5 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Se $s_5 \neq 0$, obtém-se

$$\theta_4 = \text{atan2}(-r_{13}s_1 + r_{23}c_1, r_{13}c_1c_{23} + r_{23}s_1c_{23} - r_{33}s_{23})$$

Quando $\theta_5 = k\pi$ o manipulador está numa configuração singular, não sendo possível distinguir entre os movimentos das juntas 4 e 6. Nesta situação pode convencionar-se um valor para uma das juntas o que permite determinar o valor da outra.

A multiplicação de ambos os lados das expressões (3.25) por -1 não altera a sua validade e é equivalente a substituir θ_5 por $-\theta_5$ o que resulta em $\theta_4 = \text{atan2}(-\dots, -\dots)$, ou seja o novo valor para a variável da junta 4 é $\theta_4 + \pi$.

Retomando a técnica já usada,

$$[{}^0T(\theta_4)]^{-1} {}_{ferramenta}^{\text{base}}T = {}^4T(\theta_5) {}^5T(\theta_6) \tag{3.26}$$

podem igualar-se os elementos (1, 3) e (3, 3) em (3.26)

$$r_{13}(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) + r_{23}(s_1s_{23}c_4 - c_1s_4) - r_{33}s_{23}c_4 = -s_5$$

$$-r_{13}c_1s_{23} - r_{23}s_1s_{23} - r_{33}c_{23} = c_5$$

e logo

$$\theta_5 = \text{atan2}(s_5, c_5)$$

O último passo na determinação da cinemática inversa do Puma 560 segue a filosofia dos anteriores,

$$\left[\begin{smallmatrix} {}^0T \\ {}^5T \end{smallmatrix} \right]^{-1} \underset{\text{ferramenta}}{\text{base}} T = {}^5T(\theta_6) \quad (3.27)$$

Igualando os elementos (3, 1) e (1, 1) em (3.27)

$$\begin{aligned} s_6 &= -r_{11}(c_1 c_{23} s_4 - s_1 c_4) - r_{21}(s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4) + r_{31}s_{23} s_4 \\ c_6 &= r_{11}((c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4)c_5 - c_1 s_{23} s_5) + r_{21}((s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4)c_5 - s_1 s_{23} s_5) - r_{31}(s_{23} c_4 c_5 + c_{23} s_5) \end{aligned} \quad (3.28)$$

obtendo-se

$$\theta_6 = \text{atan2}(s_6, c_6)$$

Multiplicando ambos os lados de (3.28) por -1 obtém-se $\theta_6 = \text{atan2}(-s_6, -c_6)$, ou seja, $\theta_6 + \pi$. Após alguma manipulação, pode observar-se que o produto de -1 pelo lado direito de (3.28) corresponde a utilizar $-\theta_5$ e $\theta_4 + \pi$.

As 3 primeiras juntas geram 4 soluções para a cinemática inversa do Puma 560. Estas soluções estão relacionadas com a posição do efector terminal. A Figura 3.17 ilustra as 4 soluções para a cinemática inversa do Puma 560 correspondentes à movimentação das juntas 1 a 3.



Figura 3.17. 4 soluções para as juntas 1 a 3 (note as diferentes orientações do efector terminal)

Note-se a diferença, entre as 2 figuras, na orientação do e.t.

As 3 últimas juntas geram 2 soluções adicionais, relacionadas com a orientação do efector terminal. Para cada uma das 4 soluções esquematizadas nas figuras há 2 soluções para as juntas 4,5 e 6, respectivamente, $(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$ e $(\theta_4 + \pi, -\theta_5, \theta_6 + \pi)$. O total de soluções para o Puma 500 é portanto de 8.

3.2.4 Cinemática inversa do Rob3/Tr5

Na resolução da cinemática inversa para o manipulador Rob3/Tr5 usa-se uma técnica mista. O Rob3/Tr5 é um manipulador educacional (Figura 3.18) possui 5 juntas de revolução numa estrutura semelhante ao Yasukawa L3 (um exemplo clássico da literatura, [3]).



Figura 3.18. O manipulador Rob3/Tr5

De forma análoga ao exemplo anterior, o objectivo é determinar todos os valores $\theta_1, \dots, \theta_5$ que colocam o efector terminal numa posição e orientação dadas,

$$\begin{matrix} \text{base} \\ \text{ferramenta} \end{matrix} T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0_1 T \ {}^1_2 T \ {}^2_3 T \ {}^3_4 T \ {}^4_5 T = {}^0_5 T$$

Utilizando a técnica usada no Puma 500,

$$\begin{aligned} \left[{}^0_1 T \right]^{-1} \begin{matrix} \text{base} \\ \text{ferramenta} \end{matrix} T &= \begin{bmatrix} c_1 r_{11} + s_1 r_{21} & c_1 r_{12} + s_1 r_{22} & c_1 r_{13} + s_1 r_{23} & c_1 p_x + s_1 p_y \\ -s_1 r_{11} + c_1 r_{21} & -s_1 r_{12} + c_1 r_{22} & -s_1 r_{13} + c_1 r_{23} & -s_1 p_x + c_1 p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} * & * & s_{234} & * \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ * & * & c_{234} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1_2 T \ {}^2_3 T \ {}^3_4 T \ {}^4_5 T \end{aligned} \tag{3.29}$$

Igualando os elementos (2, 4) em (3.29)

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = 0$$

obtém-se a solução para a junta 1,

$$\theta_1 = \text{atan} \left(\frac{p_y}{p_x} \right)$$

Igualando os elementos (2, 1) e (2, 2) em (3.29),

$$s_5 = -s_1 r_{11} + c_1 r_{21}$$

$$c_5 = -s_1 r_{12} + c_1 r_{22}$$

obtém-se

$$\theta_5 = \text{atan2}(s_5, c_5)$$

e igualando os elementos (3, 3) e (1, 3) em (3.29)

$$c_{234} = r_{33}$$

$$s_{234} = c_1 r_{13} + s_1 r_{23}$$

determina-se a relação

$$\theta_{234} = \text{atan2}(s_{234}, c_{234})$$

As juntas 2,3 e 4 formam uma estrutura planar (Figura 3.19) de fácil resolução pelo método geométrico (assume-se que os referenciais de troço estão colocados de acordo com a Figura 3.13).

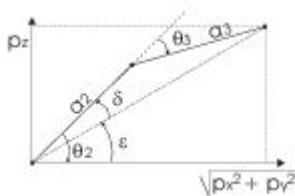


Figura 3.19. Plano formado pelos troços 2, 3 e 4 do Rob3/Tr5

Usando a lei dos cosenos

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3 \underbrace{\cos(\pi - \theta_3)}_{-\cos(\theta_3)}$$

obtém-se por simples manipulação algébrica,

$$\theta_3 = \text{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - c_3^2}, c_3\right) \quad (3.30)$$

A solução $\theta_3 = \text{atan2}\left(-\sqrt{1 - c_3^2}, c_3\right)$ não é factível devido a restrições físicas (vide a Figura 3.20).

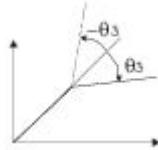


Figura 3.20. Relação entre as soluções para a junta 3 no Rob3/Tr5

Por inspecção da Figura 3.19 obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon &= \text{atan2}\left(p_z, \sqrt{p_x^2 + p_y^2}\right) \\ a_3^2 &= a_2^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 2a_2\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \cos(\delta) \\ \theta_2 &= -\delta - \epsilon \end{aligned} \quad (3.31)$$

e pode determinar-se a variável de junta 4,

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3.$$

As 5 juntas do Rob3/Tr5 não permitem a colocação do efector terminal numa posição e orientação arbitrária e portanto a ferramenta T não pode ser arbitrária. Esta restrição dificulta a utilização da técnica desenvolvida atrás já que é necessário garantir a existência das soluções para a cinemática inversa antes de iniciar o algoritmo de cálculo de $\theta_1, \dots, \theta_5$. Uma forma de resolver este problema consiste em dada uma configuração qualquer, calcular uma configuração aproximada que seja factível sendo esta a utilizada pelo algoritmo da cinemática inversa (veja-se por exemplo a estratégia proposta em [3]).

A resolução algébrica, genérica, efectuada atrás pode ser muito simplificada se a orientação do efector terminal for descrita usando a convenção Euler ZYZ. Partindo do referencial da base, a orientação do

efector terminal é obtida através de (i) uma rotação em torno do eixo vertical Z_0 , efectuada pela junta 1, seguida de (ii) uma rotação em torno do eixo Y_1 , efectuada pelas juntas 2 3 e 4, e de (iii) uma rotação em torno do eixo Z_5 . Em termos prácticos, a cinemática pode ser descrita por

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \alpha \\ \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 &= \beta \\ \theta_5 &= \gamma\end{aligned}\tag{3.32}$$

com $p_y = \tan(\theta_1)p_x$ (as coordenadas p_x e p_y não são independentes), ou por

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \text{atan2}(p_y, p_x) \\ \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 &= \beta \\ \theta_5 &= \gamma\end{aligned}\tag{3.33}$$

Na formulação (3.32) o objectivo é colocar o efector terminal na orientação desejada, sem atender à posição. O valor das coordenadas p_x e p_y não pode ser escolhido de forma independente do valor α . Para o caso (3.33) o objectivo é colocar o efector terminal na posição desejada, sem atender à orientação. Neste caso é o valor do ângulo α que não pode ser escolhido de forma livre.

3.2.5 Orientação do efector terminal de manipuladores série

Em geral, sendo a orientação do e.t. muito importante para a execução de tarefas convém que na cinemática inversa possa ser rapidamente encontrada uma função dos ângulos de orientação.

As convenções de Euler são, como se viu na secção anterior, a escolha natural para a orientação. Repare-se que num manipulador série cada junta roda em torno dos eixos que resultam da última rotação. Ou seja, a estrutura física do manipulador é consistente com a estrutura da própria convenção.

3.2.6 Técnicas iterativas para resolução da cinemática inversa

O problema da cinemática inversa expresso em (3.8) é na prática um problema da determinação das raízes de uma função que pode ser resolvido usando técnicas de optimização clássicas como a descrita no Capítulo 2 (veja-se a este respeito [7, 1]).

De forma genérica, dada uma configuração desejada para o efector terminal, $(x_d, y_d, z_d, \alpha_d, \beta_d, \gamma_d)$, considere-se a função a optimizar

$$J(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = (x - x_d)^2 + (y - y_d)^2 + (z - z_d)^2 + (\alpha - \alpha_d)^2 + (\beta - \beta_d)^2 + (\gamma - \gamma_d)^2\tag{3.34}$$

sujeito às restrições impostas pela cinemática directa

$$(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = f(\theta_1, \dots, \theta_n) \quad (3.34b)$$

Em geral, na resolução do problema (3.34)-(3.34b) a escolha das condições iniciais condiciona a solução obtida. Em geral obtém-se apenas 1 solução, que pode inclusive ser sensível às unidades usadas em cada variável, e portanto para utilização em tempo real há ainda que definir uma estratégia capaz de restringir a zona da solução a obter (por exemplo incluindo no problema de optimização restrições adicionais). De um ponto de vista práctico, aplicações em tempo real requerem com frequência ritmos de cálculo da ordem das dezenas de kHz o que pode não ser fácil de obter.

3.3 Cinemática de manipuladores paralelos

Na representação abstrata de estruturas cinemáticas de tipo paralelo na Figura 2.1 ressalta de imediato a necessidade de na cinemática directa compatibilizar as diferentes cadeias que a constituem.

Dentro da classe dos manipuladores paralelos têm especial interesse a subclasse dos manipuladores de Stewart-Gough. Estes manipuladores são compostos por dois corpos rígidos ligados entre si por actuadores lineares. Em cada um dos pontos de ligação dos actuadores lineares aos corpos rígidos existem juntas esféricas ou universais não actuadas. A Figura 3.21 ilustra duas estruturas comuns⁴ define a terminologia usada nesta Secção. O corpo B possui m pontos de ancoragem em b_1, \dots, b_m e é denominado a base do manipulador. O corpo P possui n pontos de ancoragem em p_1, \dots, p_n e constitui o efector terminal. Sem perca de generalidade admite-se que $m \geq n$.

O objectivo da cinemática directa é o cálculo do $p_j, j = 1, \dots, n$ dados os comprimentos dos troços prismáticos, l_{ij} . Para o manipulador genérico pode escrever-se directamente por inspecção,

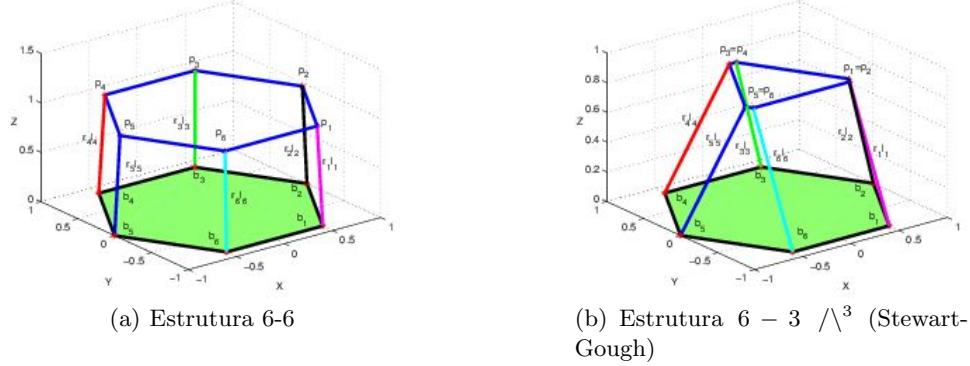
$$p_j = b_i + l_{ij} r_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.35)$$

onde l_{ij} é o comprimento do actuador que liga b_i a p_j e r_{ij} é um vector unitário com a direcção $p_j - b_i$.

Para a cinemática inversa o objectivo é determinar os l_{ij} dados os pontos p_j , o que corresponde a resolver a equação trivial,

$$l_{ij} = \|p_j - b_i\|. \quad (3.36)$$

⁴ Segue-se a nomenclatura usada em [8] para classificar estas estruturas, em que a designação $a - b$ indica os pontos de ancoragem de actuadores na base, a , e no efector terminal, b , respectivamente. $/ \backslash^3$ indica que há 3 estruturas do tipo $/ \backslash$ em que / e \ representam actuadores lineares que estão ancorados em pontos diferentes na base e no mesmo ponto no efector terminal.

**Figura 3.21.** Manipuladores paralelos

Na resolução de (3.35), para além dos pontos p_j , os vectores r_{ij} não são em geral conhecidos já que dependem da configuração das juntas não actuadas. O problema possui $3n$ equações e $3n + 3m$ incógnitas e portanto a cinemática directa de um manipulador Stewart-Gough pode ter múltiplas soluções.

De um ponto de vista puramente matemático os vectores r_{ij} poderiam ser obtidos colocando sensores apropriados no manipulador. No entanto, pequenas incertezas nos valores obtidos destes sensores poderiam facilmente levar a que (3.35) e (3.36) não fossem verificadas.

A solução do problema (3.35) pode ser obtida através de técnicas clássicas de optimização. Considere-se por exemplo o problema de optimização definido por

$$\min_{l_{ij}} J \quad (3.37)$$

com

$$J = \sum_{i,j} (l_{ij} - \|p_j - b_i\|)^2 \quad (3.37b)$$

com as restrições

$$p_j = b_i + l_{ij} r_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.37c)$$

$$g_{jk} \equiv \|p_j - p_k\| = h_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n \quad (3.37d)$$

em que (3.37c) representa as equações do movimento que definem as restrições de movimento do manipulador, (3.37d) as equações que definem P como um corpo rígido e h_{jk} são constantes.

Usando a técnica de optimização com restrições do Capítulo 2, a correspondente função Lagrangeana é

$$L = J + \lambda_{11}g_{11} + \dots + \lambda_{nn}g_{nn}$$

em que os λ_{jk} são os multiplicadores de Lagrange. A aplicação das condições de Karush-Kuhn-Tucker (vide por exemplo [4, 10]) requer que, nos pontos solução da cinemática directa, em que os vectores ∇g_{jk} sejam linearmente independentes, verifique

$$\nabla L = 0 \quad \text{Condição necessária}$$

$$\nabla^2 L > 0 \quad \text{Condição suficiente}$$

$$\lambda_{jk}g_{jk} = 0 \quad \text{Condições complementares}$$

Como exemplo considere-se o manipulador planar 3-2 ($/\backslash |$), com $g_1 \equiv \|p_1 - p_2\| = 1$, $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, $b_1 = (b_{1_x}, b_{1_y})$, $b_2 = (b_{2_x}, b_{2_y})$, $b_3 = (b_{3_x}, b_{3_y})$

A funcional de custo a optimizar é então,

$$J = (l_{11} - \|p_1 - b_1\|)^2 + (l_{21} - \|p_1 - b_2\|)^2 + (l_{32} - \|p_2 - b_3\|)^2$$

Os gradientes da funcional de custo e das restrições são,

$$\begin{aligned} \nabla J &= \left(\frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, \frac{\partial J}{\partial y_1}, \frac{\partial J}{\partial y_2} \right) = \left(\frac{-2(l_{11} - \|p_1 - b_1\|)(x_1 - b_{1_x})}{\|p_1 - b_1\|} + \frac{-2(l_{21} - \|p_1 - b_2\|)(x_1 - b_{2_x})}{\|p_1 - b_2\|}, \right. \\ &\quad \frac{-2(l_{32} - \|p_2 - b_3\|)(x_2 - b_{3_x})}{\|p_2 - b_3\|}, \\ &\quad \frac{-2(l_{11} - \|p_1 - b_1\|)(y_1 - b_{1_y})}{\|p_1 - b_1\|} + \frac{-2(l_{21} - \|p_1 - b_2\|)(y_1 - b_{2_y})}{\|p_1 - b_2\|}, \\ &\quad \left. \frac{-2(l_{32} - \|p_2 - b_3\|)(y_2 - b_{3_y})}{\|p_2 - b_3\|} \right) \\ \nabla g_1 &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \frac{\partial g_1}{\partial x_2}, \frac{\partial g_1}{\partial y_1}, \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \right) = \frac{1}{\|p_1 - p_2\|} (x_1 - x_2, -x_1 + x_2, y_1 - y_2, -y_1 + y_2) \end{aligned}$$

As soluções para o problema de optimização (3.37a-d), e portanto as soluções para a cinemática directa do manipulador 3-2 $/\backslash |$, são as raízes de

$$\begin{aligned}
\nabla L &= \nabla J + \lambda_1 \nabla g_1 \\
&= \left(\frac{-2(l_{11} - \|p_1 - b_1\|)(x_1 - b_{1x})}{\|p_1 - b_1\|} + \frac{-2(l_{21} - \|p_1 - b_2\|)(x_1 - b_{2x})}{\|p_1 - b_2\|}, \frac{-2(l_{32} - \|p_2 - b_3\|)(x_2 - b_{3x})}{\|p_2 - b_3\|}, \right. \\
&\quad \left. \frac{-2(l_{11} - \|p_1 - b_1\|)(y_1 - b_{1y})}{\|p_1 - b_1\|} + \frac{-2(l_{21} - \|p_1 - b_2\|)(y_1 - b_{2y})}{\|p_1 - b_2\|}, \frac{-2(l_{32} - \|p_2 - b_3\|)(y_2 - b_{3y})}{\|p_2 - b_3\|} \right) \\
&\quad + \lambda \frac{1}{\|p_1 - p_2\|} (x_1 - x_2, -x_1 + x_2, y_1 - y_2, -y_1 + y_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

sujeitas à condição complementar

$$\lambda (\|p_1 - p_2\| - 1) = 0$$

Neste exemplo simples, não fazendo uso explícito da condição complementar temos 4 equações e 5 incógnitas, $x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda$ o que requer a resolução através de métodos numéricos. A ideia base dos métodos numéricos de resolução é usar a informação local sobre a variação da funcional de custo para escolher uma direcção de optimização. Os métodos “steepest descent” e “Newton”, dos mais conhecidos, são definidos como,

$$(x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda)_{k+1} = (x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda)_k + \alpha_k \nabla L_k \quad \text{Steepest descent}$$

$$(x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda)_{k+1} = (x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda)_k + \alpha_k (\nabla^2 L_k)^{-1} \nabla L_k \quad \text{Newton}$$

onde k representa a iteração e α_k é o passo de actualização que minimiza L_{k+1} . Quando $(x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda)_{k+1} = (x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda)_k$ então $\nabla L_k = 0$ e portanto verificam-se as condições de Karush-Kuhn-Tucker.

O método de Newton requer o cálculo explícito da matriz Hessiana, $\nabla^2 L_k$. Para aplicações em tempo real este factor pode ser uma desvantagem. Existem diferentes algoritmos aproximam a matriz Hessiana com suficiente qualidade para muitas aplicações, e.g., BFGS, [10].

Representando o gradiente da função Lagrangeana na forma $\nabla L = (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5)$ obtém-se para a matriz Hessiana do problema,

$$\nabla^2 L = \begin{bmatrix} \nabla L_1 \\ \nabla L_2 \\ \nabla L_3 \\ \nabla L_4 \\ \nabla L_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{x_1} & \frac{\partial L_1}{x_2} & \frac{\partial L_1}{y_1} & \frac{\partial L_1}{y_2} & \frac{\partial L_1}{\lambda} \\ \frac{\partial L_2}{x_1} & \frac{\partial L_2}{x_2} & \frac{\partial L_2}{y_1} & \frac{\partial L_2}{y_2} & \frac{\partial L_2}{\lambda} \\ \frac{\partial L_3}{x_1} & \frac{\partial L_3}{x_2} & \frac{\partial L_3}{y_1} & \frac{\partial L_3}{y_2} & \frac{\partial L_3}{\lambda} \\ \frac{\partial L_4}{x_1} & \frac{\partial L_4}{x_2} & \frac{\partial L_4}{y_1} & \frac{\partial L_4}{y_2} & \frac{\partial L_4}{\lambda} \\ \frac{\partial L_5}{x_1} & \frac{\partial L_5}{x_2} & \frac{\partial L_5}{y_1} & \frac{\partial L_5}{y_2} & \frac{\partial L_5}{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Na Figura 3.22 pode ver-se a evolução do método de Newton na procura de uma solução, com $\alpha = 10^{-3}$, quando é inicializado em $p_1 = (1, 0), p_2 = (1.5, 1)$. O traço forte representa a evolução da posição dos pontos p_1 e p_2 ao longo das iterações do algoritmo.

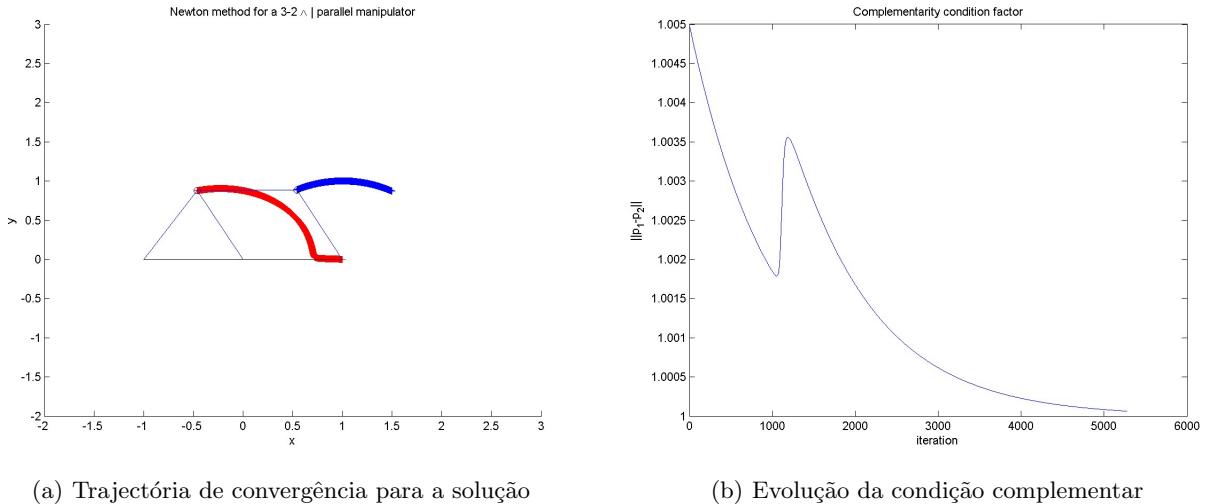


Figura 3.22. Cinemática directa para o manipulador 3-2 / \|

3.4 Plataformas móveis

A cinemática de uma plataformas móveis possui algumas diferenças relativamente à cinemática de manipuladores. Plataformas móveis são conjuntos de cadeias cinemáticas fechadas em que não possuem um ponto fixo no mundo. Em oposição, manipuladores série são cadeias cinemáticas abertas - só formam cadeias fechadas quando estão em contacto com objectos - e em que a junta da base tem uma ligação rígida ao mundo.

A convenção D-H assume que a cada grau de liberdade está associada, através da cinemática directa, 1 variável de junta (rotações em torno de um eixo e translações ao longo de 1 eixo). Em robots genéricos cada variável de junta numa plataforma móvel pode afectar mais do que 1 grau de liberdade. É este o caso de manipuladores com juntas em que o contacto entre troços é feito através de pontos ou ao longo de linhas (vide Figura 3.23, [2]). Nas juntas de rotação e prismáticas o contacto entre os troços dá-se através de superfícies.

Mais geralmente, a interação física entre uma plataforma móvel e o ambiente, por exemplo através das rodas, pernas ou lagartas, é do mesmo tipo da do manipulador na Figura 3.23. Na modelação cinemática de robots com este tipo de juntas é usada uma generalização da convenção D-H.

Tabela 3.10. Elementos da matrix Hessiana para o problema da Figura 3.22

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial x_1} &= \frac{-2(l_{11}-\|p_1-b_1\|)}{\|p_1-b_1\|} + \frac{(x_1-b_{1x})^2}{\|p_1-b_1\|^2} + \frac{-2(l_{11}-\|p_1-b_1\|)(x_1-b_{1x})^2}{\|p_1-b_1\|^3} + \frac{-2(l_{21}-\|p_1-b_2\|)}{\|p_1-b_2\|} \\
&\quad + \frac{2(x_1-b_{2x})^2}{\|p_1-b_2\|^2} + \frac{-2(l_{21}-\|p_1-b_2\|)(x_1-b_{2x})^2}{\|p_1-b_2\|^3} + \lambda \frac{1}{\|p_1-p_2\|} + \lambda \frac{(x_1-x_2)^2}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_1}{\partial x_2} &= \lambda \frac{-1}{\|p_1-p_2\|} - \lambda \frac{(x_1-x_2)^2}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_1}{\partial y_1} &= \frac{2(x_1-b_{1x})(y_1-b_{1y})}{\|p_1-b_1\|^2} + \frac{-2(l_{11}-\|p_1-b_1\|)(x_1-b_{1x})(y_1-b_{1y})}{\|p_1-b_1\|^3} + \frac{2(y_1-b_{2y})(x_1-b_{2x})}{\|p_1-b_1\|^2} \\
&\quad + \frac{-2(l_{21}-\|p_1-b_2\|)(x_1-b_{2x})(y_1-b_{2y})}{\|p_1-b_2\|^3} + \lambda \frac{(x_1-x_2)(y_1-y_2)}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_1}{\partial y_2} &= -\lambda \frac{(x_1-x_2)(y_1-y_2)}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_1}{\partial \lambda} &= \frac{x_1-x_2}{\|p_1-p_2\|} \\
\frac{\partial L_2}{\partial x_1} &= \lambda \frac{-1}{\|p_1-p_2\|} + \lambda \frac{(-x_1+x_2)(x_1-x_2)}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_2}{\partial x_2} &= \frac{-2(l_{32}-\|p_2-b_3\|)}{\|p_2-b_3\|} + \frac{2(x_2-b_{3x})^2}{\|p_1-b_1\|^2} + \frac{-2(l_{32}-\|p_2-b_3\|)(x_2-b_{3x})^2}{\|p_2-b_3\|^3} + \lambda \frac{1}{\|p_1-p_2\|} + \lambda \frac{(-x_1+x_2)(x_1-x_2)}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_2}{\partial y_1} &= \lambda \frac{(-x_1+x_2)(y_1-y_2)}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_2}{\partial y_2} &= \frac{2(x_2-b_{3x})(y_2-b_{3y})}{\|p_2-b_3\|^2} + \frac{-2(l_{32}-\|p_2-b_3\|)(x_2-b_{3x})(y_2-b_{3y})}{\|p_2-b_3\|^3} - \lambda \frac{(-x_1+x_2)(y_1-y_2)}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_2}{\partial \lambda} &= \frac{-x_1+x_2}{\|p_1-p_2\|} \\
\frac{\partial L_3}{\partial x_1} &= \frac{2(x_1-b_{1x})(y_1-b_{1y})}{\|p_1-b_1\|^2} + \frac{-2(l_{11}-\|p_1-b_1\|)(x_1-b_{1x})(y_1-b_{1y})}{\|p_1-b_1\|^3} + \frac{2(x_1-b_{2x})(y_1-b_{2y})}{\|p_1-b_2\|^2} \\
&\quad + \frac{-2(l_{21}-\|p_1-b_2\|)(x_1-b_{2x})(y_1-b_{1y})}{\|p_1-b_2\|^3} + \lambda \frac{(y_1-y_2)(x_1-x_2)}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_3}{\partial x_2} &= -\lambda \frac{(y_1-y_2)(x_1-x_2)}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_3}{\partial y_1} &= \frac{-2(l_{11}-\|p_1-b_1\|)}{\|p_1-b_1\|} + \frac{2(y_1-b_{1y})^2}{\|p_1-b_1\|^2} + \frac{-2(l_{11}-\|p_1-b_1\|)(y_1-b_{1y})^2}{\|p_1-b_1\|^3} + \frac{-2(l_{21}-\|p_1-b_2\|)}{\|p_1-b_2\|} + \frac{2(y_1-b_{2y})^2}{\|p_1-b_2\|^2} \\
&\quad + \frac{-2(l_{21}-\|p_1-b_2\|)(y_1-y_2)^2}{\|p_1-b_2\|^3} + \frac{\lambda}{\|p_1-p_2\|} + \lambda \frac{(y_1-y_2)^2}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_3}{\partial y_2} &= -\frac{\lambda}{\|p_1-p_2\|} - \lambda \frac{(y_1-y_2)^2}{\|p_1-p_3\|^3} \\
\frac{\partial L_3}{\partial \lambda} &= \frac{y_1-y_2}{\|p_1-p_2\|} \\
\frac{\partial L_4}{\partial x_1} &= \lambda \frac{(-y_1+y_2)(x_1-x_2)^3}{\|p_1-p_2\|} \\
\frac{\partial L_4}{\partial x_2} &= \frac{2(y_2-b_{3y})(x_2-b_{3x})}{\|p_2-b_3\|^2} + \frac{-2(l_{32}-\|p_2-b_3\|)(y_2-b_{3y})(x_2-b_{3x})}{\|p_2-b_3\|^3} - \lambda \frac{(-y_1+y_2)(x_1-x_2)}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_4}{\partial y_1} &= -\frac{\lambda}{\|p_1-p_2\|} + \lambda \frac{(-y_1+y_2)(y_1+y_2)}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_4}{\partial y_2} &= \frac{-2(l_{32}-\|p_2-b_3\|)}{\|p_2-b_3\|} + \frac{2(y_2-b_{3y})^2}{\|p_2-b_3\|^2} + \frac{-2(l_{32}-\|p_2-b_3\|)(y_2-b_{3y})^2}{\|p_2-b_3\|^3} + \frac{\lambda}{\|p_1-p_2\|} + \lambda \frac{(-y_1+y_2)(y_1+y_2)}{\|p_1-p_2\|^3} \\
\frac{\partial L_4}{\partial \lambda} &= \frac{-y_1+y_2}{\|p_1-p_2\|} \\
\frac{\partial L_5}{\partial x_1} &= \frac{x_1-x_2}{\|p_1-p_2\|} \\
\frac{\partial L_5}{\partial x_2} &= -\frac{x_1-x_2}{\|p_1-p_2\|} \\
\frac{\partial L_5}{\partial y_1} &= \frac{y_1-y_2}{\|p_1-p_2\|} \\
\frac{\partial L_5}{\partial y_2} &= -\frac{y_1-y_2}{\|p_1-p_2\|} \\
\frac{\partial L_5}{\partial \lambda} &= 0
\end{aligned}$$

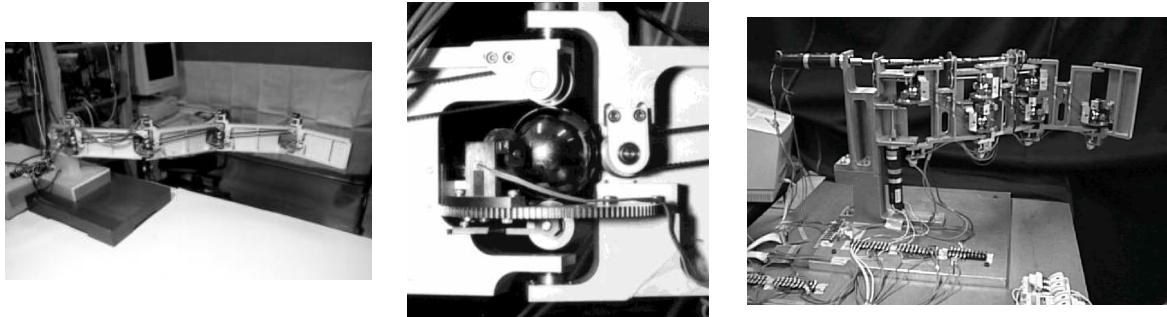


Figura 3.23. Manipulador não-holonómico

3.4.1 A convenção Sheth-Uicker

De forma semelhante ao estudo para os manipuladores, o modelo cinemático de uma plataforma móvel descreve a forma como as juntas que geram a locomoção influenciam a configuração do robot.

Para as plataformas mais simples é frequentemente possível obter a cinemática por simples inspecção do robot. No entanto, existe uma metodologia que permite a obtenção da cinemática de qualquer robot móvel, independentemente da sua complexidade, [9, 11]. Nesta metodologia a convenção Sheth-Uicker (S-U) tem um papel semelhante ao da convenção D-H estudada para os manipuladores série.

A convenção S-U é caracterizada por,

- A cada junta são atribuídos 2 referenciais,
- Cada um dos referenciais é colocado num dos troços conectados à junta,
- Os parâmetros de junta definem o deslocamento relativo entre o par de referenciais,
- Existem 2 tipos de transformações de troço: fixas, representadas por ${}^A_B T$, e variáveis, representadas por ${}^A_B \Phi$,
- Transformações fixas estão associadas a distâncias físicas entre os diversos componentes do robot,
- Transformações variáveis estão associadas às juntas do robot e aos pontos de contacto com o solo.

Para um apresentação formal da convenção S-U veja-se, por exemplo, [14, 9].

A transformação genérica ${}^A_B \Pi$ (com $\Pi \in \{T, \Phi\}$) mantém a semântica usada para manipuladores, ou seja, pontos em \mathcal{F}_B são transformados em pontos em \mathcal{F}_A através de Π .

Uma das características da convenção S-U é o permitir a identificação das capacidades de movimentação instantânea da plataforma.

As juntas formadas pela interacção física entre o ambiente e o robot, por exemplo entre as rodas e o solo são atribuídos pares de referenciais. Estes designam-se por referenciais de contacto e são instantaneamente coincidentes, ou seja, permitem a representação de velocidades. A transformação de posição entre referenciais de contacto é a transformação identidade já que se assume que os referenciais são instantaneamente coincidentes. No entanto a transformação de velocidade entre referenciais de contacto não é a transformação nula.

A notação usada para designar os pares de referenciais em cada junta/ponto de contacto é \mathcal{F}_A , $\mathcal{F}_{\bar{A}}$. Definem-se 2 tipos de pares de referenciais de contacto:

- Entre o corpo do robot e o chão, permite medir velocidades do robot relativamente ao mundo
- Em cada ponto de contacto com o chão, e.g., em cada roda, permite medir velocidades nos pontos de contacto com o chão

Ilustra-se de seguida a aplicação da convenção S-U a três robots de extrema simplicidade: uma roda simples, uma roda com direcção e uma plataforma de tipo uniciclo.

Roda simples

Considere-se uma roda simples, apenas capaz de movimento rectilíneo, ligada ao corpo, rígido, do robot. Assume-se que a roda e o solo são igualmente rígidos, não existindo qualquer deformação e portanto apenas existe 1 ponto de contacto entre ambos. Neste exemplo não se considera o equilíbrio do robot (esta é uma característica que depende dos parâmetros físicos e portanto a ser estudada na dinâmica).

A Figura 3.24 mostra a planta e alçado lateral para este robot simples e a colocação dos referenciais escolhida.

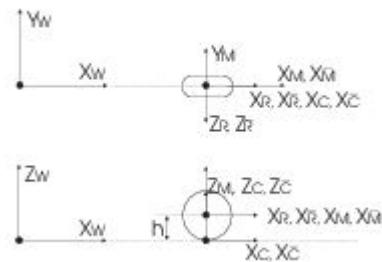


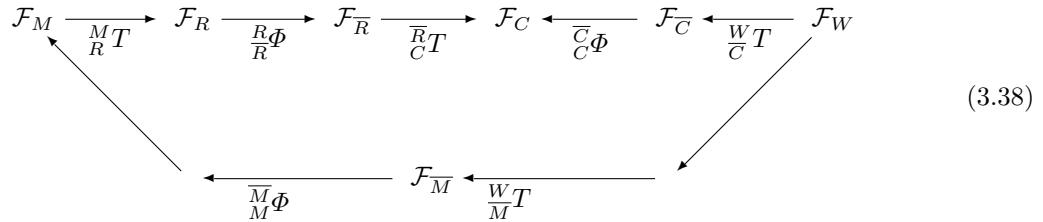
Figura 3.24. Roda simples

Existem 4 classes de referenciais neste problema (Tabela 3.11), colocados no mundo, no ponto de contacto entre a roda e o solo, no contacto entre a roda e o corpo do robot e no corpo do robot.

Tabela 3.11. Referenciais para o robot roda simples

\mathcal{F}_W	Referencial do mundo (fixo no solo)
\mathcal{F}_M	Referencial de contacto do robot (fixo no robot)
$\mathcal{F}_{\bar{M}}$	Referencial de contacto do robot (instantaneamente fixo no chão)
\mathcal{F}_R	Referencial da roda (eixo Z_R coincidente com o eixo de rotação da roda)
$\mathcal{F}_{\bar{R}}$	Referencial da roda (fixo relativamente a \mathcal{F}_R)
\mathcal{F}_C	Referencial de contacto da roda (fixo na extremidade da roda, com orientação fixa relativamente a $\mathcal{F}_{\bar{R}}$)
$\mathcal{F}_{\bar{C}}$	Referencial de contacto da roda (fixo no chão mas acompanhando o movimento de translação da roda)

À semelhança da cinemática de manipuladores série, cada par de referenciais está relacionado por uma transformação de coordenadas. O diagrama (3.38) ilustra as relações entre os referenciais da Figura 3.24. O sentido das setas define a direcção de composição das transformações. A origem é definida pelo superíndice posterior e o fim pelo subíndice posterior. O ciclo no diagrama indica uma cadeia cinemática fechada.



As transformações associadas são,

$$\begin{aligned}
{}^M_R T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^R_R \Phi &= \begin{bmatrix} c_R & -s_R & 0 & 0 \\ s_R & c_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^R_C T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^C_C \Phi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{P}_C \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^R_R \dot{\Phi} &= \begin{bmatrix} c_R & -s_R & 0 & 0 \\ s_R & c_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^C_C \dot{\Phi} &= \frac{d}{dt} {}^R_R \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{V}_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\left(\frac{R}{R} \dot{\Phi} \right)^{-1} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{R} \Phi \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -s_R \omega_R & c_R \omega_R & 0 & 0 \\ -c_R \omega_R & -s_R \omega_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

onde $c_R = \cos(\theta_R)$ e $s_R = \sin(\theta_R)$.

As equações do movimento obtém-se por composição das transformações (3.39) de acordo com o diagrama (3.38). A transformação

$$\overline{M} \Phi = \left({}^W_M T \right)^{-1} {}^W_C T \overline{C} \Phi \left({}^R_C T \right)^{-1} \left(\frac{R}{R} \Phi \right)^{-1} \left({}^M_R T \right)^{-1}$$

expressa a configuração do robot relativamente ao chão. Diferenciando obtém-se uma relação válida instantaneamente

$$\overline{M} \dot{\Phi} = \left({}^W_M T \right)^{-1} {}^W_C T \overline{C} \dot{\Phi} \left({}^R_C T \right)^{-1} \left(\frac{R}{R} \Phi \right)^{-1} \left({}^M_R T \right)^{-1} + \left({}^W_M T \right)^{-1} {}^W_C T \overline{C} \Phi \left({}^R_C T \right)^{-1} \left(\frac{R}{R} \dot{\Phi} \right)^{-1} \left({}^M_R T \right)^{-1} \tag{3.40}$$

onde ${}^W_C T$ e ${}^M_R T$ são, em geral, desconhecidas.

Dado que \mathcal{F}_M , $\mathcal{F}_{\overline{M}}$ e \mathcal{F}_C , $\mathcal{F}_{\overline{C}}$ são pares de referenciais de contacto verificam, respectivamente, $\overline{M} \Phi = \mathbb{I}$ e $\overline{C} \Phi = \mathbb{I}$. Circulando no diagrama (3.38) obtém-se facilmente a relação

$${}^W_C T = {}^W_M T \overline{M} \Phi {}^M_R T \frac{R}{R} \Phi \overline{R} C T \left(\overline{C} \Phi \right)^{-1}$$

e por substituição em (3.40) obtém-se,

$$\overline{M}\dot{\Phi} = \frac{M}{R}T \frac{R}{\bar{R}}\Phi \frac{\bar{R}}{C}T \frac{\bar{C}}{C}\dot{\Phi} \left(\frac{\bar{R}}{C}T \right)^{-1} \left(\frac{R}{\bar{R}}\Phi \right)^{-1} \left(\frac{M}{R}T \right)^{-1} + \frac{M}{R}T \frac{R}{\bar{R}}\Phi \left(\frac{R}{\bar{R}}\dot{\Phi} \right)^{-1} \left(\frac{M}{R}T \right)^{-1} \quad (3.41)$$

Substituindo as matrizes de transformação anteriormente obtidas obtém-se uma relação que facilmente se verifica ser coerente com os referenciais escolhidos,

$$\overline{M}\dot{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_R & 0 & c_R \bar{C}V_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_R & 0 & 0 & s_R \bar{C}V_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Roda com direcção

Este robot é semelhante ao do exemplo anterior mas introduz-se a capacidade da roda poder orientar-se através de uma rotação em torno de um eixo vertical. Tal como no exemplo anterior, apenas existe 1 ponto de contacto entre cada roda e o chão. Os referenciais de troço, na Figura 3.25, mantém-se idênticos aos do exemplo anterior.

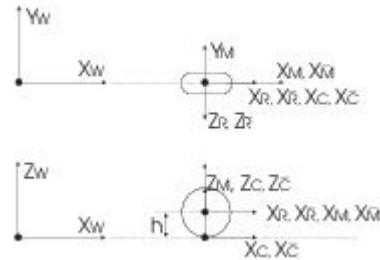


Figura 3.25. Roda simples com direcção

e consequentemente o diagrama com as transformações mantém-se inalterado.

A rotação sobre o eixo vertical que direciona a roda é aplicada em torno do eixo Z_C . As transformações são dadas por

$$\begin{aligned} {}^M T_R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (fixa)} & {}^R \Phi_R &= \begin{bmatrix} c_R & -s_R & 0 & 0 \\ s_R & c_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (variável)} & {}^R T_C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (fixa)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^C \Phi_C &= \begin{bmatrix} c_C & -s_C & 0 & \bar{P}_{C_x} \\ s_C & c_C & 0 & \bar{P}_{C_y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (variável)} & \dot{{}^C \Phi}_C &= \frac{d}{dt} {}^C \Phi_C = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_C & 0 & \bar{V}_{C_x} \\ \omega_C & 0 & 0 & \bar{V}_{C_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^R \dot{\Phi}_R &= \frac{d}{dt} \left(\frac{{}^R \Phi}{R} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -s_R \omega_R & c_R \omega_R & 0 & 0 \\ -c_R \omega_R & -s_R \omega_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde ω_R é a velocidade de rotação da roda e θ_C o ângulo da direcção.

Dado que os sistemas de referenciais é idêntico ao obtido para a roda simples, as equações de movimento continuam dadas pela composição de transformações obtida anteriormente.

$$\overline{{}^M \dot{\Phi}} = {}^M T_R {}^R \Phi {}^R T_C {}^C \dot{\Phi} \left({}^R T_C \right)^{-1} \left({}^R \Phi \right)^{-1} \left({}^M T_R \right)^{-1} + {}^M T_R {}^R \Phi \left(\frac{{}^R \dot{\Phi}}{R} \right)^{-1} \left({}^M T_R \right)^{-1} \quad (3.43)$$

Substituindo as matrizes,

$$\overline{{}^M \dot{\Phi}} = \begin{bmatrix} 0 & -c_R \omega_C & \omega_R & c_R \bar{V}_{C_x} \\ c_R \omega_C & 0 & s_R \omega_C & \bar{V}_{C_y} \\ -\omega_R & -s_R \omega_C & 0 & s_R \bar{V}_{C_x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

que se pode escrever

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{C_x} \\ V_{C_y} \\ \omega_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_R) V_C \\ \sin(\theta_R) V_C \\ \omega_C \end{bmatrix}$$

A cinemática directa obtida é uma transformação de velocidades entre \mathcal{F}_M e $\mathcal{F}_{\overline{M}}$. Esta forma de descrever a cinemática de um robot designa-se habitualmente por cinemática diferencial.

O robot uniciclo

Os robots com cinemática de tipo uniciclo são provavelmente os mais comuns dada a simplicidade da estrutura. A Figura 3.26 ilustra a estrutura típica de um uniciclo com o corpo paralelopípedico e duas rodas, dispostas topo a topo, para a locomoção. Tal como nos exemplos anteriores, assume-se que o equilíbrio do robot está assegurado, por exemplo por rodas livres e que cada roda tem um único ponto em contacto com o chão.

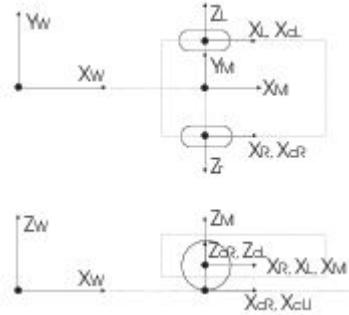


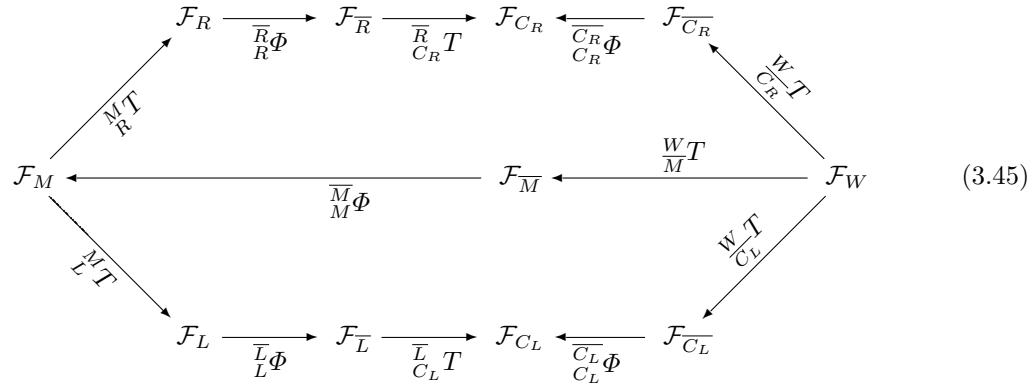
Figura 3.26. O robot uniciclo

A Tabela 3.12 mostra os referenciais escolhidos para este robot. Mantém-se os relacionados com o mundo e o corpo do robot e replica-se a estrutura de referenciais usada nos exemplos anteriores para cada uma das rodas.

Tabela 3.12. Referenciais para o robot uniciclo

\mathcal{F}_W	Referencial do mundo (fixo)
\mathcal{F}_M e $\mathcal{F}_{\bar{M}}$	Referenciais de contacto do robot
\mathcal{F}_L e $\mathcal{F}_{\bar{L}}$	Referenciais da roda esquerda
\mathcal{F}_R e $\mathcal{F}_{\bar{R}}$	Referenciais da roda direita
\mathcal{F}_{C_L} e $\mathcal{F}_{\bar{C}_L}$	Referenciais de contacto da roda esquerda
\mathcal{F}_{C_R} e $\mathcal{F}_{\bar{C}_R}$	Referenciais de contacto da roda direita

O diagrama que expressa as relações entre os diferentes referenciais tem agora um ciclo associado a cada roda.



Calculando todos os caminhos no grafo entre os nós \mathcal{F}_M e \mathcal{F}_W obtém-se a descrição cinemática do robot (cada caminho está associado a 1 variável de junta - roda)

3.4.2 Método geométrico

Como visto na secção anterior, determinar a cinemática de um robot móvel pelo método algébrico é em geral um procedimento complexo. Para os robots habitualmente usados a simples inspecção das suas características geométricas pode ser suficiente para a obtenção do modelo cinemático.

O robot uniciclo

Considere-se, de novo, o caso do robot uniciclo, com as dimensões representadas na Figura 3.27. Definem-se apenas os referenciais do mundo e do robot.

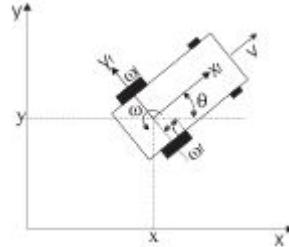


Figura 3.27. Robot uniciclo

Por inspecção da figura obtém-se facilmente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

onde v e ω são as variáveis de controlo do robot, respectivamente a velocidade linear (de translação) e a velocidade angular (de rotação).

O robot carro

Para o robot de tipo carro o método geométrico permite igualmente determinar a cinemática. Este robot, Figura 3.28, possui 2 rodas posteriores que podem ser usadas para livres ou como fonte de tração⁵ e uma roda anterior para tração e/ou direcção.

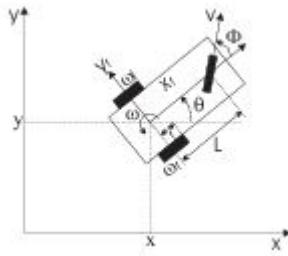


Figura 3.28. Robot de tipo carro

Por inspecção da figura obtém-se a cinemática,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) & 0 \\ \sin(\theta) \cos(\phi) & 0 \\ \sin(\phi)/L & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega_s \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

em que v e ω_s são as variáveis de controlo, respectivamente a velocidade linear e a velocidade de rotação da roda anterior.

Um modelo (3.47) alternativo obtém-se usando a velocidade linear da origem do referencial do robot. Por inspecção da Figura 3.29 obtém-se,

⁵ Quando usadas para tração é habitual acoplar estas rodas através de um mecanismo diferencial que evita o escorregamento nas curvas. Este mecanismo não tem efeito no cálculo da cinemática.

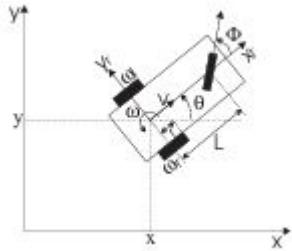


Figura 3.29. Modelo alternativo para o robot carro

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ \tan(\phi)/L & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega_s \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Robots omni-direccionalis

As rodas simples possuem uma característica não-holonómica intrínseca (como se viu nos exemplos de cinemáticas anteriormente estudados). Para obviar a este problema podem utilizar-se rodas omnidirecionais. Estas rodas possuem na periferia um conjunto de roletes que possuem movimento livre, permitindo que a roda “escorregue” se necessário (por exemplo quando o movimento de outras rodas o imponha). A Figura 3.30 mostra diversos exemplos destas rodas.

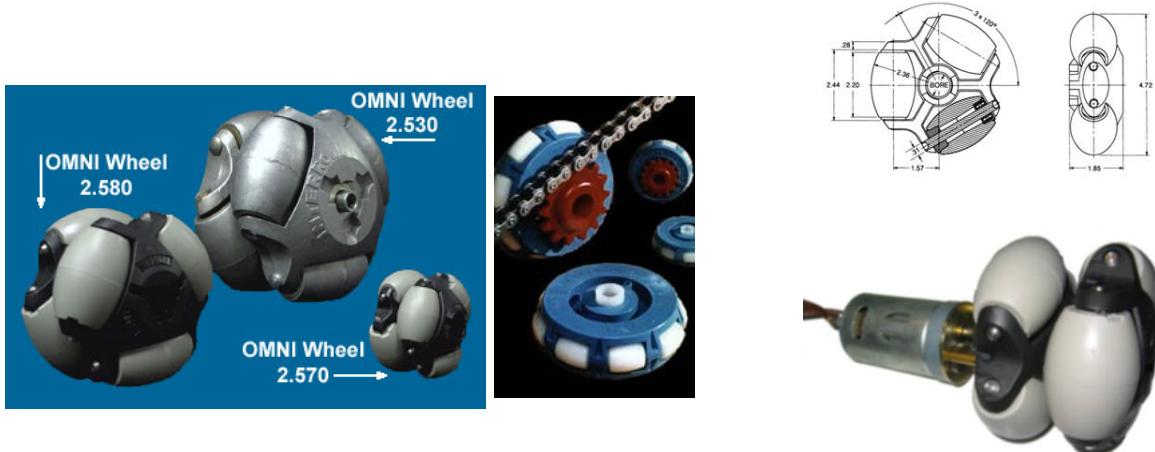


Figura 3.30. Rodas holónomicas

Para se obter capacidade de movimento omnidireccional podem colocar-se várias destas rodas numa plataforma. Na Figura 3.31 podem ver-se vários exemplos de robots construídos com rodas omni-direcccionais.



Figura 3.31. Exemplos de robots omni-direcccionais

A Figura 3.32 ilustra um exemplo simples de um robot omni-direccional. O triângulo representa a estrutura base do robot e v_1, v_2, v_3 as velocidades lineares resultantes da rotação de cada uma das rodas em torno do seu eixo. O referencial do robot está colocado no centro geométrico da base.

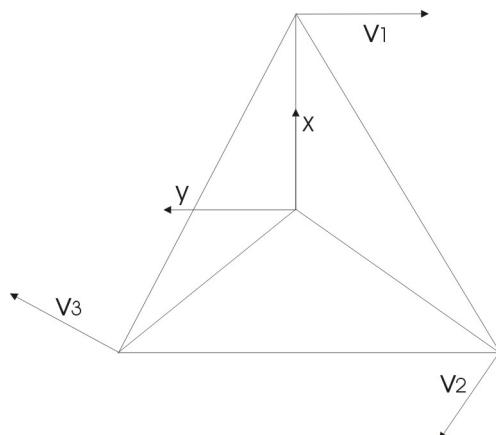


Figura 3.32. Esquema de um robot omni-direccional com 3 rodas

A posição de cada um dos pontos de ancoragem das rodas é dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^r v_1 \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^r v_2 \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^r v_3 \quad (3.49)$$

A velocidade total do robot pode ser obtida considerando que a base é formada por 3 pontos, com massas idênticas e rigidamente ligados numa disposição triangular, i.e., o robot é modelizado como se fosse um conjunto de 3 partículas de igual massa.

As velocidades linear e angular da origem do referencial do robot quando vistas no referencial do mundo são, respectivamente,

$$\begin{aligned} {}^w v = (\dot{x}, \dot{y}) &= ({}^w v_1 + {}^w v_2 + {}^w v_3) / 3 \\ {}^w \omega = \dot{\theta} &= {}^r \omega = \frac{r}{3L} (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \end{aligned} \quad (3.50)$$

e para cada uma das rodas,

$$\begin{aligned} {}^r v_1 &= (0, -\omega_1 r) \\ {}^r v_2 &= \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) \right) \omega_2 r = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \omega_2 r \\ {}^r v_3 &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) \right) \omega_3 r = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \omega_3 r \end{aligned} \quad (3.51)$$

O modelo cinemático completo é então

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{6} ((\sqrt{3}c_\theta - s_\theta) \omega_3 - (\sqrt{3}c_\theta + s_\theta) \omega_2 + 2s_\theta \omega_1) \\ \frac{r}{6} ((\sqrt{3}s_\theta + c_\theta) \omega_3 - (\sqrt{3}s_\theta - c_\theta) \omega_2 - 2c_\theta \omega_1) \\ \frac{r}{3L} (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

3.5 Incertezas nos Modelos Cinemáticos

Em geral as características geométricas de um robot têm sempre associadas algumas incertezas, por exemplo devidas a erros nas dimensões.

Para o caso do uniciclo umas das fontes de incerteza mais comuns é a diferença nos raios das rodas. Uma roda esquerda mais pequena gera desvios para a esquerda e similarmente para o caso da roda direita.

A Figura 3.33 representa os desvios ao longo do movimento, com dx/dt a velocidade linear do robot e dy/dt a velocidade lateral devida à diferença dos raios das rodas.

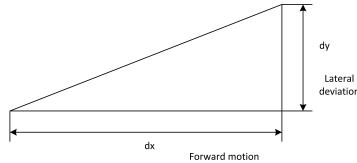


Figura 3.33. Different wheels in a cart

A componente de velocidade linear segundo a direcção perpendicular ao movimento gera uma rotação com velocidade,

$$\omega_{offset} = \frac{dy/dt}{dx}$$

e portanto o modelo clássico do uniciclo deve ser alterado para

$$\dot{\theta} = \omega + \omega_{offset}. \quad (3.53)$$

ω_{offset} pode ser obtida facilmente de forma experimental (assumindo que se mantém constante).

É importante notar que esta incerteza no modelo pode não ser directamente observável. De facto, dependendo da técnica usada para estimar a localização do robot em cada instante o erro pode não se reflectir na estimativa. Por exemplo, se a localização for estimada a partir do movimento de cada roda e não acautelar a possibilidade das rodas terem diâmetros ligeiramente diferentes então uma eventual correção aplicada directamente a ω , por exemplo fazendo $\omega - \omega_{offset}$ resultará numa trajectória estimada incorrecta (apesar do robot poder na realidade executar a trajectória correcta).

Admitindo que a única incerteza no modelo é a introduzida por (3.53), o modelo aproximado do uniciclo pode ser escrito na forma (usando as igualdades trigonométricas em apêndice),

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &\approx \cos(\theta(t) + \omega_{offset}t)v = \cos(\theta)\cos(\omega_{offset}t)v - \sin(\theta)\sin(\omega_{offset}t)v \\ \dot{y}(t) &\approx \sin(\theta(t) + \omega_{offset}t)v = \sin(\theta)\cos(\omega_{offset}t)v + \cos(\theta)\sin(\omega_{offset}t)v \\ \dot{\theta}(t) &= \omega + \omega_{offset}\end{aligned}$$

Linearizando as expressões no lado direito em torno de $\omega_{offset} = 0$ (o que se pode admitir como razoável se a diferença dos raios das rodas for pequena),

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &\approx \cos(\theta)v - \sin(\theta)\sin(\omega_{offset}t)v \\ \dot{y}(t) &\approx \sin(\theta)v + \cos(\theta)\sin(\omega_{offset}t)v \\ \dot{\theta}(t) &= \omega + \omega_{offset}\end{aligned}$$

vindo para a dinâmica do erro de localização,

$$\begin{aligned}\dot{e}_x(t) &\approx -\sin(\theta)\sin(\omega_{offset}t)v \\ \dot{e}_y(t) &\approx \cos(\theta)\sin(\omega_{offset}t)v \\ \dot{e}_\theta(t) &= \omega_{offset}\end{aligned}\tag{3.54}$$

No caso de se pretender corrigir a localização pode adicionar-se (3.54). A figura 3.34 ilustra dois exemplos em que um uniciclo deveria mover-se em linha recta mas, devido a um erro $\omega_{offset} = 0.01$ rad/s irá de facto mover-se num arco de circunferência (os exemplos diferem apenas na orientação inicial do robot).

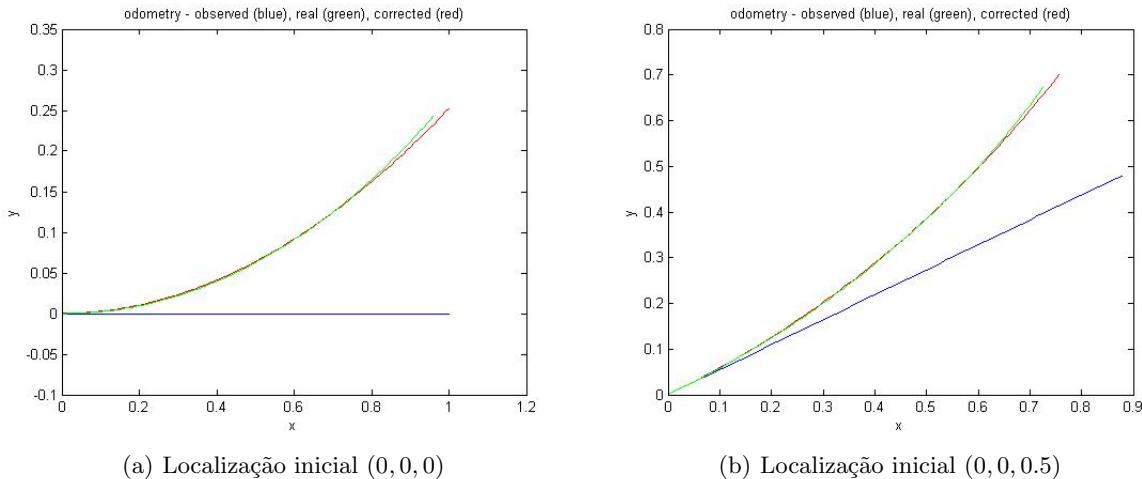


Figura 3.34. Estimação da localização a partir da dinâmica do erro

A figura mostra que o modelo de erro (3.54) permite estimar uma localização que se mantém próxima do valor real durante pequenos intervalos de tempo, mesmo com o erro de observação a aumentar.

Utilizando uma técnica de re-inicialização periódica do modelo das observações os resultados melhoram significativamente (vide figura 3.35, as marcas \circ ilustram os pontos de re-inicialização do modelo de observação).

Quando o modelo das incertezas é conhecido é possível usar, em alternativa, um estimador da localização baseado no Filtro de Kalman Extendido. Este assunto será retomado no capítulo ??.

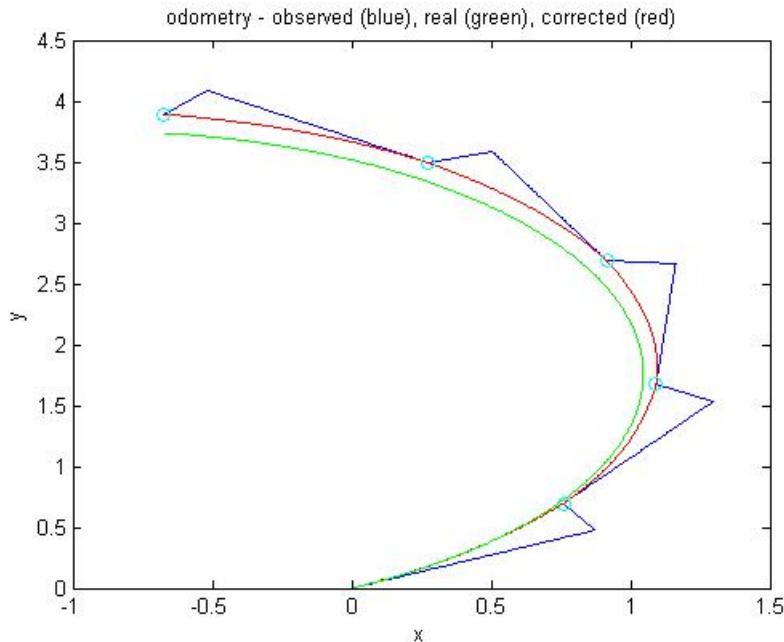


Figura 3.35. Estimação da localização a partir da dinâmica do erro com re-inicialização periódica do modelo de observação

3.6 Exercícios

1. Prove que os 4 parâmetros da convenção D-H são os necessários e suficientes para modelizar o troço
2. Modifique a convenção D-H por forma a que os eixos de movimentação das juntas passem a ser Y .
3. Demonstre que o posicionamento arbitrário do efector terminal de um manipulador série no espaço $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ requer um mínimo de 6 juntas.

Sugestão: demonstre que uma orientação arbitrária requer um mínimo de 3 juntas de revolução.

4. Para o Puma 560 haverá alguma convenção para expressar a orientação que simplifique o cálculo da cinemática inversa ?

Sugestão: explore a ideia desenvolvida na Secção 3.2.2 para o manipulador Rob3/Tr5.

5. Considere o manipulador série e respectivos referenciais de troço na figura 3.36 . O referencial 0 está colocado na base. As juntas 2 e 3 são de rotação e a junta 1 é linear. Para todas as juntas assuma que o eixo de movimento é z_i .

d_1 representa a variável da junta linear e mede o deslocamento da origem ro referencial 1 relativamente ao referencial 0. L_{12}, L_{23} representam distâncias físicas não-nulas. Os referenciais estão representados quando as respectivas variáveis de junta θ_2, θ_3 estão colocadas a 0.

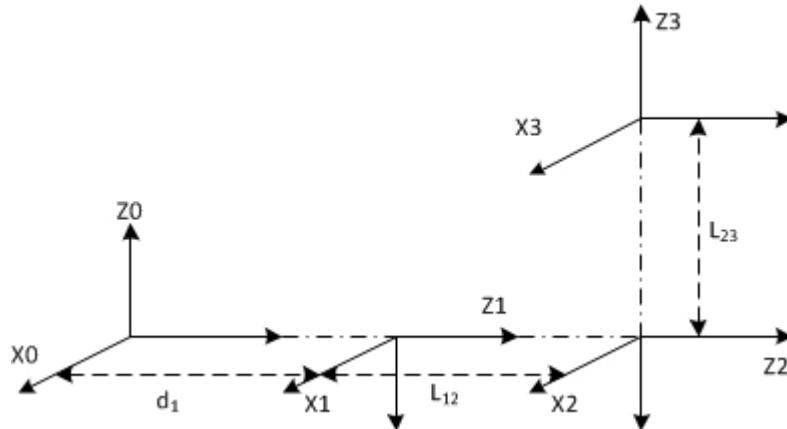


Figura 3.36. A serial PRR manipulator

- a) Determine um conjunto de parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH) para os referenciais ilustrados.
 - b) Escreva a cinemática directa do manipulador em termos de transformações homogéneas de coordenadas entre os referenciais indicados na figura.
 - c) Determine as singularidades de posição ou demonstre que não existem. Dê uma interpretação geométrica das mesmas, caso existam.
 - d) Assumindo que se usam ângulos de Euler-ZYZ para representar a orientação, determine a cinemática inversa.
 - e) Quantas soluções tem a cinemática inversa ?
6. Considere o manipulador série RPR da figura 3.37
- a) Atribua referenciais a cada troço por forma a que seja possível determinar um conjunto de parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH).
 - b) Determine um conjunto de parâmetros DH.
 - c) Calcule as singularidades de posição, se existirem.
 - d) Calcule as singularidades de orientação, se existirem.

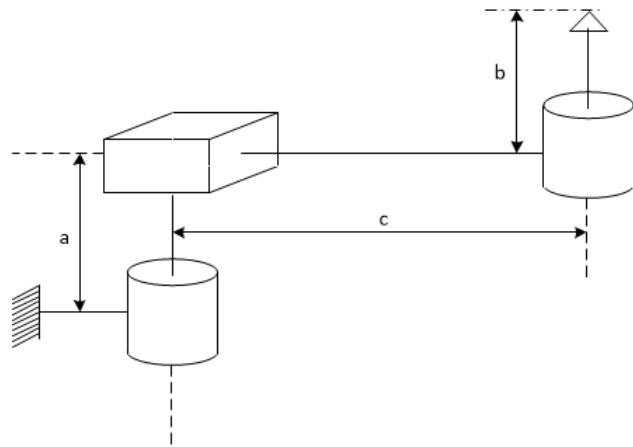


Figura 3.37. Manipulador série RPR

Referências

1. Dimitri P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 1999.
2. Woojin Chung, 2006. <http://humanrobot.kist.re.kr/~woojin/favorite.html>.
3. John Craig. *Introduction to Robotics*. Addison-Wesley, 1989.
4. Frederick Hillier and Gerald Lieberman. *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill, 8th edition, 2005.
5. Davendra Kalra. A general formulation of rigid body assemblies for computer graphics modeling. Technical report, Hewlett-Packard Labs, Palo-Alto, CA, 1995.
6. Jean-Claude Latombe. *Robot Motion Planning*. Kluwer Academic, 1992.
7. D. Luenberger. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, 1973.
8. Jean-Pierre Merlet. *Parallel Robots*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
9. Patrick F. Muir. *Modeling and Control of Wheeled Mobile Robots*. PhD thesis, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA 15213, 1988. Department of Electrical and Computer Engineering - The Robotics Institute.
10. Jorge Nocedal and Stephen Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research. Springer, 2nd edition, 2006.
11. R. Rajagopalan. A Generic Kinematic Formulation for Wheeled Mobile Robots. *Journal of Robotic Systems*, 14(2):77–91, 1997.
12. Paul E. Sandin. *Robot Mechanisms and Mechanical Devices Illustrated*. McGraw-Hill, 2003.
13. Lorenzo Sciavicco and Bruno Siciliano. *Modeling and Control of Robot Manipulators*. McGraw-Hill, 1996.
14. P. N. Sheth and J. J. Uicker, Jr. A generalized symbolic notation for mechanisms. *Journal of Engineering for Industry*, 93(70-Mech-19):102–112, 1971. Series B.

4

Cinemática diferencial

4.1 Introdução

A descrição cinemática de um robot pode ser feita directamente sobre o espaço de configuração ou sobre um espaço de velocidades definido sobre o espaço de configuração. Como se viu no Capítulo 3, existem metodologias que permitem a obtenção da cinemática de manipuladores série de forma relativamente simples. As cinemáticas obtidas expressam a influência das variáveis de junta nas configurações, vistas no espaço das matrizes de transformação homogéneas¹, de cada um dos troços. Em alternativa pode também dizer-se que a cinemática directa aplica o espaço de variáveis de controlo num espaço de velocidades.

No caso de plataformas móveis a obtenção de uma aplicação entre os espaços de controlo e de configuração não é trivial². A alternativa consiste em utilizar modelos diferenciais, ou seja, modelos que aplicam o espaço das variáveis de controlo num espaço de velocidades. Como veremos neste capítulo, os modelos cinemáticos obtidos para os manipuladores podem ser facilmente convertidos para a forma diferencial.

4.2 Propagação de velocidades em manipuladores série

Considere um passageiro viajando num avião e procurando resposta para as seguintes questões.

- Qual é a sua velocidade linear e angular quando vista relativamente ao solo (o referencial da base) ?
- De que forma o movimento do avião influencia a sua percepção de movimento ?

¹ Como referido no Capítulo 2, outros espaços de configuração podem ser utilizados, por exemplo o espaço dos quaterniões.

² Pelo menos para as plataformas móveis comuns.

O movimento do avião pode ser visto como estando “ligado” ao solo através de um manipulador imaginário, onde o efector terminal pode adoptar configurações nos espaços 3D de posições e orientações³.

Para ilustrar as ideias base pode considerar-se que avião e passageiro se movem num plano e o avião está a voar numa trajectória perfeitamente circular. Portanto, o hipotético manipulador pode ser do tipo RP (com 1 junta de revolução para definir a posição angular do avião e 1 junta linear para representar o deslocamento do passageiro dentro do avião, quando este decidiu começar a caminhar no meio do corredor, lutando contra o aborrecimento da viagem).

Os referenciais da Figura 4.1 representam respectivamente o referencial da base, \mathcal{F}_0 , do avião, \mathcal{F}_1 , e do passageiro, \mathcal{F}_2 . Se o passageiro se mover com velocidade linear ξ ao longo do corredor do avião, qual a descrição da velocidade do passageiro em \mathcal{F}_1 ? E em \mathcal{F}_2 ?

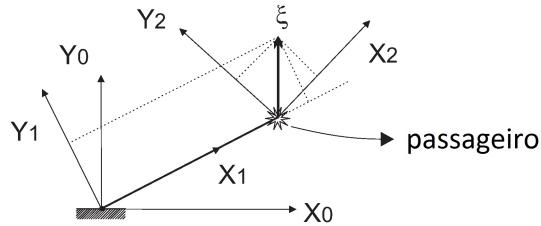


Figura 4.1. Percepção de velocidade do passageiro.

Esta descrição de ξ no referencial da base depende da orientação relativa entre \mathcal{F}_2 e \mathcal{F}_0 e portanto o conhecimento da cinemática do manipulador hipotético é fundamental.

Neste hipotético exemplo a velocidade angular do avião faz com que o passageiro tenha uma velocidade angular no referencial do mundo. Além disso, a sua velocidade linear no referencial do mundo inclui as componentes devidas à velocidade angular e à velocidade linear ao longo do corredor.

Considere agora que o passageiro, tendo decidido parar de se deslocar ao longo do corredor começa a rodopiar, i.e., move-se apenas com movimento de rotação $\dot{\theta}_2 {}^2Z_2$ no interior de um avião (claramente trata-se de um voo muito aborrecido). Se o movimento do avião possuir uma componente de rotação (por exemplo ${}^1\omega_1 = \dot{\theta}_1 {}^1Z_1$) esta componente afecta a velocidade angular total do passageiro ω_2 (mas não a que ele próprio gera) quer ela seja vista em \mathcal{F}_1 , ${}^1\omega_2$, quer seja vista em \mathcal{F}_2 , ${}^2\omega_2$. A velocidade angular total do passageiro será a soma das duas contribuições e pode ser descrita em \mathcal{F}_1 ou em \mathcal{F}_2 . Em \mathcal{F}_1 obtém-se $\dot{\theta}_1 {}^1Z_1 + {}^1R \dot{\theta}_2 {}^2Z_2$. Em \mathcal{F}_2 obtém-se ${}^2R \dot{\theta}_1 {}^1Z_1 + \dot{\theta}_2 {}^2Z_2$. Se o passageiro estiver parado e o avião estiver em rotação então não é produzido movimento de rotação local e ${}^2\omega_2 = {}^2R {}^1\omega_1$, o que significa que o passageiro apesar de estar quieto tem uma velocidade angular no seu próprio referencial.

³ De forma mais concisa, no espaço $SE(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$, o que significa o produto cartesiano do espaço de posições 3D e do espaço das orientações num espaço 3D.

(embora não seja ele a gerá-la, mas sim é o resultado da propagação da velocidade de rotação do avião para o referencial do passageiro).

Em robots articulados, como é o caso dos manipuladores série, é por vezes necessário especificar tarefas em termos da velocidade do efector terminal. Por exemplo, numa tarefa de pintura pode ser necessário que o dispensador de tinta, colocado no efector terminal do manipulador, se mova ao longo de uma trajectória pré-definida com uma velocidade precisa⁴. Esta restrição na velocidade do efector terminal tem reflexos nas velocidades de todas as outras juntas. Na terminologia típica da Robótica, este problema denomina-se propagação de velocidades. Como se verá no Capítulo 5 a propagação de velocidades é fundamental para determinar as características dinâmicas dos manipuladores.

4.2.1 Transformação de velocidades entre referenciais

O estudo da propagação das velocidades entre troços de um manipulador série inicia-se pela avaliação da forma como vectores velocidade linear e angular são descritos em sistemas de coordenadas com movimento relativo entre si. O desenvolvimento apresentado neste capítulo segue de perto a exposição em [3].

Dado um ponto BQ , descrito num referencial \mathcal{F}_B , o correspondente vector velocidade linear é descrito através da noção usual de derivada por (Figura 4.2),

$${}^B V_Q = \frac{d {}^B Q}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}^B Q(t+h) - {}^B Q(t)}{h}$$

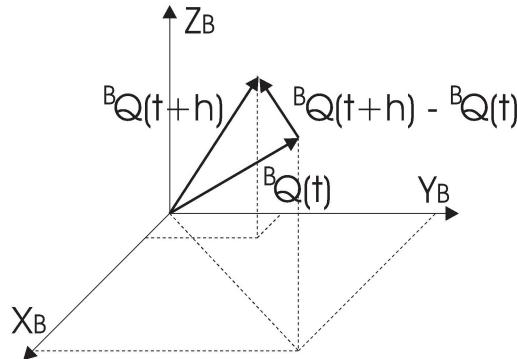


Figura 4.2. Velocidade de um ponto. \mathcal{F}_B é o referencial onde é feita a derivação.

Uma mudança de referencial obtém-se aplicando a transformação entre referenciais (neste caso apenas uma rotação) a cada um dos pontos da expressão anterior,

⁴ Por exemplo para permitir uma deposição uniforme da tinta sobre a superfície a pintar.

$${}^A({}^B V_Q) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}^A({}^B Q(t+h)) - {}^A({}^B Q(t))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}^A R {}^B Q(t+h) - {}^A R {}^B Q(t)}{h}.$$

Se a transformação ${}^A R$ não depender do tempo,

$${}^A({}^B V_Q) = {}^A R \lim_{h \rightarrow 0} \frac{{}^B Q(t+h) - {}^B Q(t)}{h} = {}^A R {}^B V_Q$$

O movimento de rotação relativa entre dois referenciais pode influenciar a velocidade linear relativa das respectivas origens. De facto a velocidade linear é uma propriedade de pontos mas a velocidade angular é propriedade de corpos⁵.

Considere-se a Figura 4.3 em que o referencial \mathcal{F}_B tem movimento de rotação em torno do eixo ${}^A \Omega_B$ relativamente a $\mathcal{F}_A \Rightarrow {}^B V_Q = 0$.

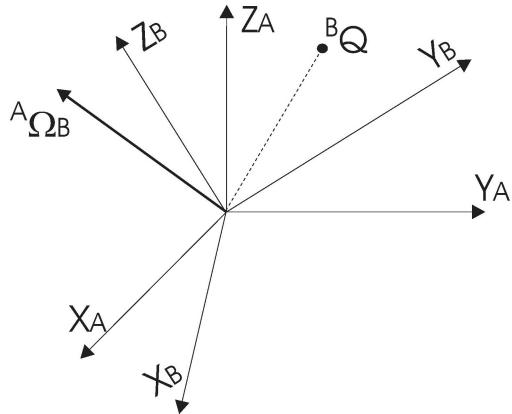


Figura 4.3. \mathcal{F}_B em rotação relativamente a \mathcal{F}_A .

A direcção do vector ${}^A \Omega_B$ indica o eixo instantâneo de rotação de \mathcal{F}_B relativamente a \mathcal{F}_A . O módulo de ${}^A \Omega_B$ indica o valor da velocidade de rotação. A Figura 4.4 ilustra graficamente a influencia da velocidade angular na velocidade linear de um ponto.

Por inspecção da figura constata-te que $\Delta Q \perp Q$ e também $\Delta Q \perp {}^A \Omega_B$ e portanto a variação de ${}^B Q$ devida ao movimento de \mathcal{F}_B em torno de \mathcal{F}_A durante o intervalo de tempo h é dada por

$$|\Delta Q| = |{}^A Q| \sin(\theta) |{}^A \Omega_B| h, \quad (4.1)$$

⁵ Não tem significado físico atribuir uma rotação a um ponto.

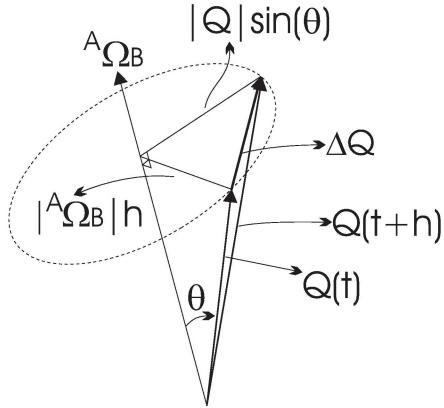


Figura 4.4. Movimento do ponto BQ durante um intervalo de tempo h pequeno.

Note que o termo $|{}^A\dot{Q}|\sin(\theta)$ define o raio da circunferência definida pelo movimento de BQ em torno do eixo de rotação enquanto que o termo $|{}^A\Omega_B|h$ determina o ângulo atingido em h . Usando a definição de produto externo, a velocidade linear do ponto ${}^A B$ obtém-se de (4.1) como

$${}^AV_Q = {}^A\Omega_B \times {}^AQ \quad (4.2)$$

ou, pretendendo manter a descrição do ponto em \mathcal{F}_B ,

$${}^AV_Q = {}^A\Omega_B \times ({}^A_B R \cdot {}^BQ) . \quad (4.3)$$

Se BQ tiver movimento de translacção em \mathcal{F}_B e \mathcal{F}_B tiver movimento de translação relativamente a \mathcal{F}_A pode completar-se a expressão (4.3) como

$${}^AV_Q = {}^A\Omega_B \times {}^A_B R \cdot {}^BQ + {}^A_B R \cdot {}^BV_Q + {}^AV_{Borg} \quad (4.4)$$

Esta descrição pode igualmente obter-se formalmente por derivação da expressão

$${}^AQ = {}^A_B R \cdot {}^BQ \quad (4.5)$$

Derivando ambos os lados de (4.5)

$${}^AV_Q = {}^A\dot{Q} = {}^A\dot{R} \cdot {}^BQ$$

(note que BQ está fixo em \mathcal{F}_B e portanto tem-se ${}^B\dot{Q} = 0$). Substituindo BQ

$${}^A V_Q = {}^A \dot{R} {}^B R^{-1} {}^A Q = {}^A \dot{R} {}^B R^T {}^A Q$$

onde ${}^A \dot{R} {}^B R^{-1}$ é a matriz velocidade angular Dado que ${}^A \dot{R} {}^B R^{-1}$ é skew-simétrica⁶ (vide exercício 4.6). Esta propriedade permite escrever,

$${}^A V_Q = {}^A \dot{R} {}^B R^{-1} {}^A Q = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} {}^A Q$$

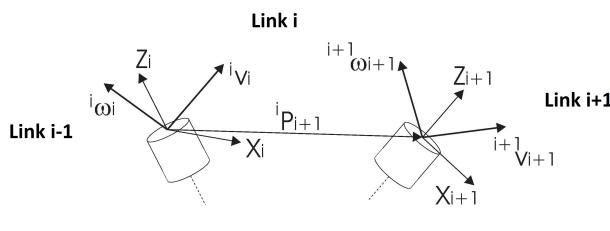
ou, definindo ${}^A \Omega_B = [\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z]'$ como vector velocidade angular temos

$${}^A V_Q = {}^A \Omega_B \times {}^A Q$$

que é a mesma fórmula que já tínhamos obtido através da interpretação geométrica da velocidade angular de um vector.

4.3 Propagação de velocidades entre troços

A estrutura particular dos manipuladores série permite especializar a terminologia da propagação das velocidades o que, como veremos adiante, permite simplificar a descrição da dinâmica de robots. A Figura 4.5 identifica a localização das principais variáveis usadas no estudo da propagação de velocidades numa estrutura articulada⁷⁸.



$i Z_i$ - eixo de movimento da junta i

$i \omega_i$ - velocidade angular do troço i descrita no referencial \mathcal{F}_i

$i v_i$ - velocidade linear do troço i descrita no referencial \mathcal{F}_i

$i P_{i+1}$ - posição da origem de \mathcal{F}_{i+1} descrita no referencial \mathcal{F}_i

Figura 4.5. Terminologia para o estudo da propagação de velocidades entre troços consecutivos de um manipulador, [3].

Como referido no Capítulo 2, as operações algébricas básicas com vectores apenas possuem significado físico se os vectores intervenientes estiverem descritos no mesmo referencial. Aplicando este princípio, duas velocidades podem ser somadas se estiverem descritas no mesmo referencial.

⁶ Uma matriz skew-simétrica, ou matriz hessiana, verifica $AA^T = I_n$.

⁷ Assume-se que as juntas (e logo os correspondentes troços) são numerados de 0 a n , com a base a ter o índice 0 e o efector terminal o índice n .

⁸ Ao longo desta secção segue-se a terminologia usada em [3].

O caso da velocidade angular é particularmente simples dado que não envolve contribuições das velocidades lineares. Por inspecção da Figura 4.5 obtém-se facilmente a velocidade angular do troço $i+1$ descrita em \mathcal{F}_i para o caso em que a junta $i+1$ é de rotação

$${}^i\omega_{i+1} = {}^i\omega_i + {}_{i+1}R \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \quad (4.6)$$

onde $\dot{\theta}_{i+1}$ representa o módulo da velocidade de rotação da junta $i+1$ e portanto $\dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} = [0, 0, \dot{\theta}_{i+1}]'$.

Multiplicando ambos os lados de (4.6) por ${}_i^{i+1}R$

$${}_i^{i+1}R {}^i\omega_{i+1} = {}_i^{i+1}R {}^i\omega_i + {}_i^{i+1}R {}_{i+1}R \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1}$$

ou seja

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}_i^{i+1}R {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \quad (4.7)$$

De notar que o primeiro termo no lado direito de (4.7) representa a contribuição do troço i para a velocidade do troço $i+1$ enquanto que o segundo termo representa a contribuição da junta $i+1$ para a velocidade do respectivo troço.

Para determinar a propagação de velocidades lineares utilizamos a expressão (4.4) anteriormente obtida, para a velocidade de um ponto num referencial. Os referenciais \mathcal{F}_A e \mathcal{F}_B na expressão (4.4) são identificados, respectivamente, com os referenciais de troço \mathcal{F}_i e \mathcal{F}_{i+1} . O ponto BQ é identificado com a origem de \mathcal{F}_B . A origem de \mathcal{F}_{i+1} não tem, obviamente, movimento em \mathcal{F}_{i+1} pelo que ${}^BV_Q = \mathbf{0}$. O termo ${}_B^A R$ BQ representa a origem de \mathcal{F}_{i+1} descrita em \mathcal{F}_i . O termo ${}^AV_{Borg}$ expressa o movimento da origem de \mathcal{F}_{i+1} em \mathcal{F}_i . Sendo o troço i rígido este termo apenas pode ser interpretado como a velocidade do troço i em \mathcal{F}_i . Por último, o termo ${}^A\Omega_B$ é identificado com a ajuda da Figura 4.4. Dado que o ponto AQ corresponde à origem de \mathcal{F}_{i+1} basta imaginar \mathcal{F}_{i+1} colocado sobre AQ para se interpretar ${}^A\Omega_B$ com a velocidade angular do troço i vista em \mathcal{F}_i . obtém-se então para a velocidade linear do troço $i+1$ descrita em \mathcal{F}_i ,

$${}^iv_{i+1} = {}^iv_i + {}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}. \quad (4.8)$$

Multiplicando ambos os lados de (4.8) por ${}_i^{i+1}R$ obtém-se a descrição em \mathcal{F}_{i+1}

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}_i^{i+1}R {}^iv_{i+1} = {}_i^{i+1}R ({}^iv_i + {}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) = {}_i^{i+1}R {}^iv_i + {}_i^{i+1}R ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) \quad (4.9)$$

A Tabela 4.1 sumariza as expressões anteriormente obtidas para a propagação de velocidades lineares e angulares⁹. Estas expressões definem a relação entre o espaço das velocidades de junta e as velocidades linear e angular dos troços do manipulador.

Junta de revolução	$\begin{cases} {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \\ {}^{i+1}v_{i+1} = {}^iR {}^i v_i + {}^iR ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) \end{cases}$
Junta prismática	$\begin{cases} {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^i\omega_i \\ {}^{i+1}v_{i+1} = {}^iR {}^i v_i + {}^iR ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \end{cases}$

Tabela 4.1. Sumário das expressões de propagação de velocidades; Z_{i+1} é o eixo de rotação das juntas.

4.4 Modelos diferenciais - Jacobianos

A expressão Jacobiano ou matriz Jacobiana é usada em múltiplas áreas, particularmente na Análise Matemática para designar transformações entre espaços de velocidades. As expressões na Tabela 4.1 podem ser usadas para definir o Jacobiano que transforma as velocidades de junta em velocidades no espaço cartesiano (i.e., no mundo).

Na Robótica o estudo de Jacobiano está intimamente ligado ao cálculo das direcções de movimento¹⁰ no espaço de configuração que um robot pode utilizar. No que respeita a manipuladores, o Jacobiano permite determinar as direcções de movimento do efector terminal como função das velocidades de junta. Relativamente a plataformas móveis, as direcções de movimento são determinadas pelas velocidades dos respectivos eixos motores.

Dado um conjunto de n funções $f_i : X \mapsto Y$ com $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_m) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

o correspondente Jacobiano que expressa a transformação de velocidades em X em velocidades em Y obtém-se diferenciando em ordem ao tempo

⁹ Considera-se o eixo de movimento da junta é coincidente com o eixo Z do referencial de troço.

¹⁰ De notar que uma direcção de movimento tomada durante um instante de tempo infinitesimal tem correspondência num vector velocidade.

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \dot{x}_m \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \dot{x}_m\end{aligned}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

onde a matriz $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$ é a matriz Jacobiana (ou Jacobiano).

Para um manipulador com n juntas

$$[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \omega_x, \omega_y, \omega_z]' = J(\theta_1, \dots, \theta_n) [\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_n]'$$

onde o número de colunas da matriz $J(\theta_1, \dots, \theta_n)$ é idêntico ao número de juntas. O espaço de configuração é formado pelos subespaços de posição, gerado pelas coordenadas $\{x, y, z\}$, e orientação, gerado pelas coordenadas $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Transportando esta separação para os correspondentes espaços de velocidades permite separar o Jacobiano em duas partes

$$J(\theta_1, \dots, \theta_n) = \begin{bmatrix} J_p(\theta_1, \dots, \theta_n) \\ J_o(\theta_1, \dots, \theta_n) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Jacobiano da velocidade linear} \\ \text{Jacobiano da velocidade angular} \end{array}$$

O Jacobiano de posição, J_p , pode calcular-se por derivação das equações da cinemática directa ou através da fórmula de propagação de velocidades lineares

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^i{}_i R {}^i v_i + {}^i{}_i R ({}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1})$$

O Jacobiano de orientação, J_o , pode calcular-se através da fórmula de propagação de velocidades angulares

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^i{}_i R {}^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1}$$

Dados dois referenciais \mathcal{F}_A e \mathcal{F}_B sem movimento relativo entre si os vectores velocidade linear e angular em \mathcal{F}_B são descritos em \mathcal{F}_A através de ${}^A v = {}^A_B R {}^B v$ e ${}^A \omega = {}^A_B R {}^B \omega$.

$$\begin{bmatrix} {}^A v \\ {}^A \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^B R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B v \\ {}^B \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^B R \end{bmatrix} {}^B J \dot{\theta} = {}^A J \dot{\theta}$$

Considere-se o manipulador planar da Figura 4.6 e os referenciais de troço associados.

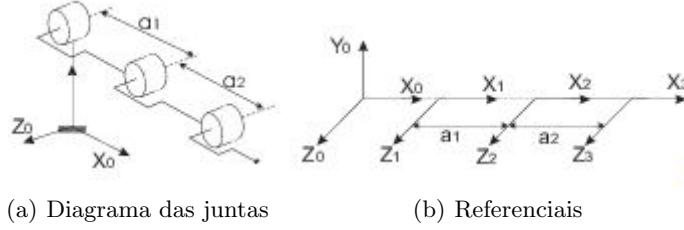


Figura 4.6. Manipulador RRR planar e referenciais de troço

Os correspondentes parâmetros D-H são,

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	a_1	0	θ_2
3	0	a_2	0	θ_3

a que correspondem as transformações de troço,

$${}^0 T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1 T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2 T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3 T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_2 c_{12} + a_1 c_1 \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_2 s_{12} + a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

proporcionam toda a informação necessária para o cálculo do Jacobiano através das expressões da Tabela 4.1.

$${}^1 \omega_1 = {}^0 R {}^0 \omega_0 + \dot{\theta}_1 {}^1 Z_1 \quad {}^1 v_1 = {}^0 R ({}^0 v_0 + {}^0 \omega_0 \times {}^0 P_1)$$

$${}^2 \omega_2 = {}^1 R {}^1 \omega_1 + \dot{\theta}_2 {}^2 Z_2 \quad {}^2 v_2 = {}^1 R ({}^1 v_1 + {}^1 \omega_1 \times {}^1 P_2)$$

$${}^3 \omega_3 = {}^2 R {}^2 \omega_2 + \dot{\theta}_3 {}^3 Z_3 \quad {}^3 v_3 = {}^2 R ({}^2 v_2 + {}^2 \omega_2 \times {}^2 P_3)$$

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^2v_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 \dot{\theta}_1 s_2 \\ a_1 \dot{\theta}_1 c_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3\omega_3 = \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$${}^3v_3 = \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ a_1 c_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 s_{23} \dot{\theta}_1 + a_2 s_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ a_1 c_{23} \dot{\theta}_1 + a_2 c_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que, para qualquer junta, ${}^0\omega_i = {}_i^0R \ {}^i\omega_i$ e ${}^0v_i = {}_i^0R \ {}^i\omega_i$ as expressões anteriores podem ser escritas relativamente ao referencial colocado na base do manipulador

$${}^0\omega_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 \\ s_{123} & c_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$${}^0v_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 \\ s_{123} & c_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 s_{23} \dot{\theta}_1 + a_2 s_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ a_1 c_{23} \dot{\theta}_1 + a_2 c_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 \dot{\theta}_1 - a_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ a_1 c_1 \dot{\theta}_1 + a_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

O jacobiano é então

$$\begin{bmatrix} {}^0v_3 \\ {}^0\omega_3 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} & -a_2s_{12} & 0 \\ a_1c_1 + a_2c_{12} & a_2c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_p \\ J_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

onde J_p e J_o representam os jacobianos associados à velocidade linear e velocidade angular, respectivamente (por vezes também chamados de posição e orientação).

4.4.1 Singularidades em modelos da cinemática diferencial

Os modelos diferenciais estão intrinsecamente associados à capacidade dos robots se moverem segundo determinadas direcções de movimento; na prática as direcções que podem ser geradas pelo modelo. A análise do Jacobiano permite inferir quais as limitações de movimentação quando o robot se encontra numa dada configuração. De notar que usando modelos de posição, como os dados pela cinemática directa de manipuladores, é necessário avaliar exaustivamente cada ponto do espaço de junta para se determinarem os pontos do espaço de trabalho (i.e., do referencial do mundo) que podem ser atingidos.

A análise das restrições de movimento a partir do Jacobiano corresponde à procura das configurações em que há perca de graus de liberdade na movimentação, ou seja o robot encontra-se numa singularidade. Numa configuração singular o robot fica incapaz de se movimentar numa direcção ou num conjunto de direcções do espaço de trabalho. O movimento de 1 junta ou a combinação de movimentos de várias juntas não produz qualquer efeito na posição ou na orientação.

As singularidades no espaço de trabalho podem classificadas como sendo de posição ou de orientação.

Para manipuladores série o Jacobiano de posição pode obter-se facilmente por derivação das equações de posição. Para o exemplo do manipulador RRR planar da Figura 4.6,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} & -a_2s_{12} & 0 \\ a_1c_1 + a_2c_{12} & a_2c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Claramente, $\det(J_p) = 0$, porque o manipulador não tem capacidade de movimento em Z . No entanto, dada a estrutura planar do robot, com movimento apenas no plano xy , a análise das singularidades faz-se apenas neste plano. Portanto considera-se apenas a submatriz correspondente. As singularidades do robot são dadas pelas configurações em que o determinante se anula, ou seja, as configurações solução da equação,

$$\begin{vmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 - a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{vmatrix} = -a_1 a_2 \sin(\theta_2) = 0 \quad (4.12)$$

As configurações singulares são então descritas por $\theta_2 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, correspondendo ao manipulador completamente esticado e completamente recolhido sobre si próprio.

As direcções factíveis de movimento no espaço (x, y, z) , quando o manipulador está numa das configurações singulares, obtém-se substituindo $\theta_2 = k\pi$ e $\dot{\theta}_2 = 0$ em (4.11).

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 (a_1 + a_2)$$

A Figura 4.7 ilustra as direcções factíveis e não factíveis quando o manipulador se encontra nas configurações singulares. As singularidades deste manipulador classificam-se em duas classes: na fronteira e no interior do espaço de trabalho.



Figura 4.7. Manipulador RRR em configurações singulares

Relativamente às singularidades de orientação, é evidente da estrutura do manipulador que apenas pode haver movimento no sub-espaco das orientações $(\alpha, 0, 0)$. As direcções factíveis de movimento no espaço (α, β, γ) são dadas por

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}.$$

Para o caso do Puma 500 as equações da cinemática directa são,

$$\begin{aligned} p_x &= c_1 [a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23}] - d_3 s_1 \\ p_y &= s_1 [a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23}] + d_3 c_1 \\ p_z &= -a_3 s_{23} - a_2 s_2 - d_4 c_{23} \end{aligned}$$

Considerando, para simplificar, $a_3 = 0, d_3 = 0$, e derivando obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1(a_2 c_2 - d_4 s_{23}) & -c_1(a_2 s_2 + d_4 c_{23}) & -c_1 d_4 c_{23} \\ c_1(a_2 c_2 - d_4 s_{23}) & -s_1(a_2 s_2 + d_4 c_{23}) & -s_1 d - 4 c_{23} \\ 0 & -a_2 c_2 + d_4 s_{23} & d_4 s_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

O determinante do Jacobiano de posição é então

$$\begin{aligned} \det(J_p) &= (a_2 c_2 - d_4 s_{23}) [s_1^2 d_4 c_{23} (a_2 c_2 - d_4 s_{23}) + c_1^2 d_4 c_{23} (a_2 c_2 - d_4 s_{23})] + \\ &\quad d_4 s_{23} [s_1^2 (a_2 c_2 - d_4 s_{23}) (a_2 s_2 - d_4 c_{23}) + c_1^2 (a_2 c_2 - d_4 s_{23}) (a_2 s_2 - d_4 c_{23})] \\ &= d_4 (a_2 c_2 - d_4 s_{23}) [c_{23} (a_2 c_2 - d_4 s_{23}) + s_{23} (a_2 s_2 + d_4 c_{23})] \end{aligned}$$

As singularidades de posição do mecanismo são as soluções de $\det(J_p) = 0$. Cada um dos factores que anula o determinante define uma classe de singularidades. As singularidades definidas por

$$a_2 c_2 - d_4 s_{23} = 0$$

são chamadas singularidades de tipo 1 enquanto que as definidas por

$$c_{23} (a_2 c_2 - d_4 s_{13}) + s_{23} (a_2 s_2 + d_4 c_{23}) = 0$$

são chamadas singularidades de tipo 2.

Desenvolvendo a expressão das singularidades de tipo 2

$$a_2 c_2 c_{23} - d_2 s_{23} c_{23} + a_2 s_2 s_{23} + d_4 c_{23} s_{23} = a_2 \cos(\theta_2 - (\theta_2 + \theta_3)) = -a_2 \cos(\theta_3) = 0$$

obtém-se

$$\theta_3 = (2k+1)\pi/2$$

correspondendo às configurações singulares na fronteira do espaço de trabalho, em que o manipulador está todo esticado. Desenvolvendo a expressão das singularidades de tipo 1

$$a_2c_2 - d_4s_{23} = 0$$

obtém-se

$$a_2c_2 = d_4s_{23}$$

Substituindo $a_2c_2 - d_4s_{23} = 0$ em J_p obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_1a_2(s_2 - c_2) & -c_1d_4c_{23} \\ 0 & -s_1a_2(s_2 + c_2) & -s_1d_4c_{23} \\ 0 & 0 & d_4s_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

A coluna 1 de zeros na matriz J_p indica que o correspondente grau de liberdade, θ_1 não influencia o movimento. Substituindo $a_2c_2 - d_4s_{23} = 0$ na cinemática directa

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_2s_2 - d_4c_{23} \end{bmatrix}$$

o que indica que só há movimento segundo o eixo Z

4.5 Jacobianos em plataformas móveis

Os modelos vistos anteriormente para a cinemática de plataformas móveis são modelos diferenciais, i.e., transformam velocidades no referencial do robot em velocidades no referencial do mundo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$

Para o caso do robot uniciclo o facto do Jacobiano ser uma matriz de dimensões 3×2 indica que há graus de liberdade no espaço de junta (i.e. no referencial do robot) que afectam múltiplos graus de liberdade no referencial do mundo. Dadas as variáveis de controlo, v , velocidade linear (no referencial do robot) e ω , velocidade angular (no referencial do robot) quaisquer que sejam os valores v e ω , instantaneamente, o robot não se pode mover numa direcção \perp ao vector velocidade linear.

Da cinemática do robot uniciclo observa-se facilmente que

$$\dot{y}/\dot{x} = \tan(\theta)$$

ou seja as velocidades de cada uma das coordenadas do espaço cartesiano são interdependentes. Esta expressão não pode ser re-escrita apenas em função da configuração e portanto diz-se *não-holonómica*, [8].

Um robot sujeito a restrições não-holonómicas não se pode movimentar livremente no respectivo espaço de configuração (embora possa, eventualmente, atingir qualquer ponto utilizando as manobras adequadas). Ou seja, em cada configuração apenas um conjunto limitado de velocidades é admissível, se o número de variáveis de controlo for inferior ao número de variáveis de estado, [5]. Em contraponto, um robot holonómico pode movimentar-se em qualquer direcção, independentemente da configuração em que se encontre. No espaço euclideano 2D um robot hipotético com cinemática definida por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

onde u_1 e u_2 são as variáveis de controlo, é de tipo holonómico.

Na movimentação de um robot uniciclo é comum utilizar trajectórias rectilíneas, obtidas com os controlos $(v, \omega) = (\text{cte}, 0)$, rotações puras, obtidas com $(v, \omega) = (0, \text{cte})$, circulares, obtidas para $(v, \omega) = (\text{cte}_1, \text{cte}_2)$, e em espiral, obtidas com $(v, \omega) = (\text{cte}_1, \text{cte}_2 \cdot t)$.

A Figura 4.8 ilustra a trajectória em espiral de um robot uniciclo. Esta trajectória, também chamada clotóide, é uma espiral em que a curvatura - reciprocamente do raio de curvatura - varia linearmente no tempo.

Os modelos cinemáticos de robots definidos através de sistemas dinâmicos, e.g., equações diferenciais, sugerem desde logo questões como (i) qual o conjunto de pontos de Q que é possível alcançar (problema da controlabilidade do robot), (ii) qual o controlo que permite conduzir o robot, descrito pelo modelo cinemático, entre dois pontos de Q , ou (iii) qual o controlo que permite que o robot, descrito pelo modelo cinemático, siga uma determinada trajectória.

A questão da holonomia e não-holonomia de robots é de grande importância e será abordada com maior detalhe no capítulo 7 a propósito do controlo de robots com restrições no movimento. A literatura sobre o assunto é extensa, e.g., [1, 9, 4, 7, 2] e vai muito além da Robótica. Das referências de grande relevo sobre este assunto na área de sistemas não lineares podem salientar-se [6, 10].

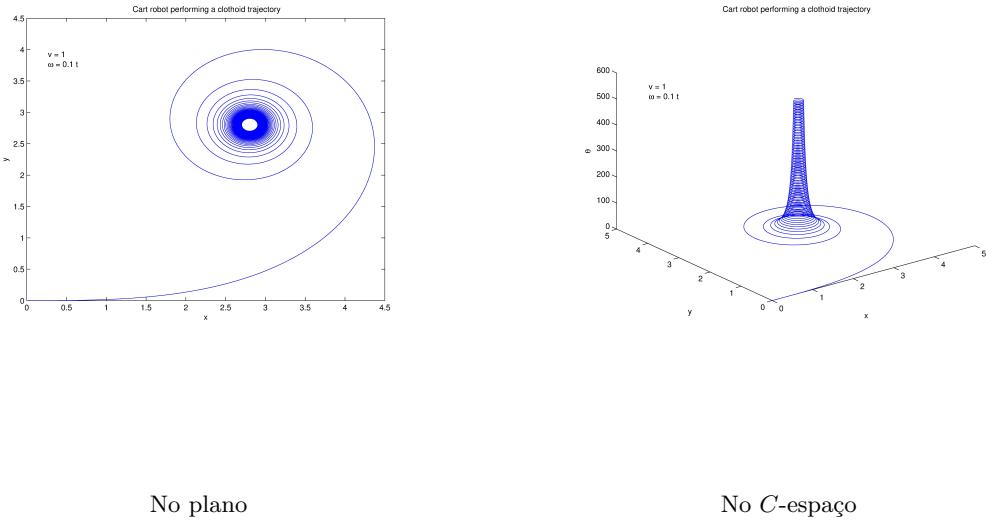


Figura 4.8. Trajectória em espiral para um robot uniciclo

4.6 Exercícios

1. Considere uma matriz de rotação ${}^A_B R$. Prove que a matriz

$${}^A_B \dot{R} {}^A_B R^{-1}$$

é skew-simétrica (ou hermitiana).

$$\dot{A}A^T + A\dot{A}^T = 0_n \quad \rightarrow \quad \dot{A}A^T = -A\dot{A}^T$$

2. Calcule as expressões que definem as coordenadas x, y da trajectória de um robot uniciclo quando os controlos são $v = \text{cte}, \omega = \text{cte}$.
Qual o raio de curvatura da trajectória ?

3. Considere um manipulador do tipo PUMA 500 apenas com as 3 primeiras juntas. Relacione as singularidades do Jacobiano de posição com as múltiplas soluções da cinemática inversa.

Referências

1. A.M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer, 2003.
2. R. Brocket. Asymptotic Stability and Feedback Stabilization. In R. Brocket and R.S. Millman and H.J. Sussmann, editor, *Differential Geometric Control Theory*, volume 27 of *Progress in Mathematics*, pages 181–208. Birkhäuser, 1983.
3. John Craig. *Introduction to Robotics*. Addison-Wesley, 1989.
4. I. Duleba. On use of Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin formulas in nonholonomic motion planning. In *Procs. of 1st Workshop on Robot Motion Control, ROMOCO'1999*, pages 177–182, 1999.
5. Gu and Hu, 2004.
6. R. Hermann and A. Krener. Nonlinear Controllability and Observability. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 22(5):728–740, October 1977.
7. Velimir Jurdjevic. *Geometric Control Theory*. Number 52 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.
8. Jean-Claude Latombe. *Robot Motion Planning*. Kluwer Academic, 1992.
9. Zexiang Li and J.F. Canny, editors. *Nonholonomic Motion Planning*. Kluwer Academic, 1993.
10. H. Sussmann and V. Jurdjevic. Controllability of Nonlinear Systems. *Journal of Differential Equations*, 12:95–116, 1972.

Dinâmica

5.1 Introdução

A dinâmica estuda o movimento considerando as forças envolvidas¹. O principal objectivo do estudo da dinâmica de um robot é a obtenção de um modelo matemático capaz de descrever a trajectória do robot em função das forças internas (aplicadas pelos actuadores do robot) e externas (aplicadas pelo ambiente sobre o robot)².

A noção de força é muitas vezes genericamente associada à capacidade de gerar movimento. Esta interpretação é refinada pelas leis da Mecânica Clássica. A lei de Newton indica que, na ausência de restrições ao movimento, forças estão associadas à capacidade de gerar movimento de translação. Por outro lado, a lei de Euler estabelece uma relação semelhante entre binários e rotações.

Para o cálculo do modelo da dinâmica de um robot distinguem-se essencialmente duas abordagens: Newton-Euler e Lagrange, [17, 1, 27, 3]. Obviamente, as duas abordagens geram modelos equivalentes.

A abordagem de Newton-Euler utiliza as equações,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m\ddot{x} && \text{Equação de Newton} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{I}\dot{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} && \text{Equação de Euler,} \end{aligned} \tag{5.1}$$

para descrever o movimento de um corpo rígido, com m a massa total do robot e x e $\boldsymbol{\omega}$ representam, respectivamente, os vectores de posição do centro de massa do corpo e velocidade angular de um referencial com origem no centro de massa relativamente ao referencial inercial, \mathbf{I} é a matriz 3×3 que representa a distribuição de massa pelo robot³, descrita no referencial do centro de massa, e \mathbf{F} e \mathbf{N} representam, respectivamente, a força e binário em actuação no centro de massa do corpo, responsáveis pelo movimento.

¹ A raiz etimológica vem do grego *dūnamis*, que significa força.

² A noção de força deve ser entendida aqui em sentido generalizado, i.e., incluindo as forças que produzem movimento de translação e os binários (ou torques) que produzem movimento de rotação.

³ Habitualmente chamada *matriz de inércia* ou *tensor de inércia*.

Note-se que a equação de Euler em (5.1) é a forma mais comum na Robótica e assume que \mathbf{I} não varia (ou que variam muito lentamente). A formulação geral é $\mathbf{N} = \mathbf{I}\dot{\omega} + \dot{\mathbf{I}}\omega + \mathbf{I}\omega \times \mathbf{I}\omega$, usada em aplicações mais específicas como, por exemplo, controlo de veículos espaciais (veja-se por exemplo [5]).

Analizando as equações (5.1) com alguma ingenuidade pode afirmar-se que a estrutura geométrica do robot está embebida nos referenciais usados para calcular as grandezas envolvidas enquanto que as propriedades físicas são consideradas na matriz de inércia e na massa.

A abordagem de Lagrange utiliza as equações,

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q) \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial L}{\partial q} = \eta \quad (5.2b)$$

onde q representa o vector de configuração do robot, $U(q)$ e $T(\dot{q})$ representam, respectivamente, as energias cinética e potencial do robot na configuração q e velocidade \dot{q} , e η é um vector de forças generalizadas.

Em sistemas sujeitos a restrições algébricas de tipo $P(q) = 0$, e.g., robots com cadeias cinemáticas fechadas, o lado direito de (5.2b) é desenvolvido por forma a incluir a informação das restrições

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) &= T(\dot{q}) - U(q) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial L}{\partial q} &= B\eta + \nabla P^T \lambda \\ P(q) &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde B é uma matriz que permite especificar sistemas sub-actuados, ∇P é o Jacobiano de $P(q)$, e λ é um vector de multiplicadores de Lagrange.

Em situações mais complexas, por exemplo em que o e.t. deve deslizar com uma determinada velocidade em contacto com uma superfície, as restrições podem ser descritas por $P(q)\dot{q} = b$. Este tipo de restrições é incluído na dinâmica de forma semelhante às restrições de posição (vide por exemplo [11]).

Dado o carácter introductório deste texto, a utilização prática da expressão (5.3) é reduzida. De notar que a dinâmica de sistemas com múltiplos corpos rígidos sujeitos a restrições é uma área bastante activa em termos de investigação (veja-se por exemplo [6, 26, 15, 16] para um conjunto de exemplos usando ambas as formulações).

Exceptuando os casos de robots muito simples (e sem interesse práctico nesta introdução à Robótica) o modelo dinâmico de um robot é representado através de um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Fora do âmbito deste texto, existem modelos da dinâmica de robots incluindo equações às derivadas parciais, e.g., manipuladores em que os troços são flexíveis.

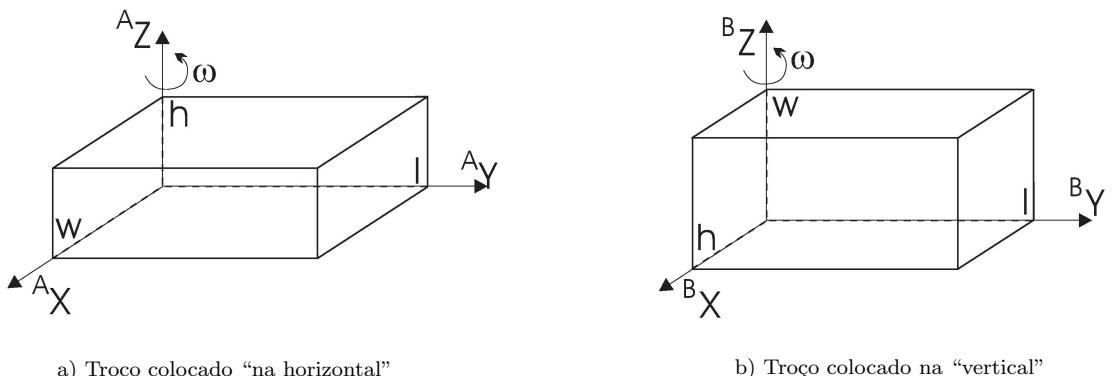
5.2 Influência de distribuição de massa no movimento de um robot

A distribuição de massa de um robot é em geral uma propriedade de importância vital para a correcta execução de tarefas. Por exemplo, uma nave espacial em voo controlado tem necessidade de efectuar correções na trajectória nas quais gasta combustível e portanto a sua massa e a distribuição da mesma na nave varia no tempo. O cálculo do controlo para corrigir a trajectória deve ser feito levando em conta estas variações nas propriedades de massa. É comum haver requisitos de precisão na ordem de 1 – 3% na determinação dos valores num tensor de inércia e centro de massa.

Outros exemplos onde é fundamental conhecer bem a distribuição de massa em cada instante incluem aviões de grande porte, e.g., Airbus A380, e automóveis de alto desempenho. O leitor interessado em aprofundar esta matéria pode consultar, por exemplo [23, 28, 29, 14, 19, 24]

A percepção do efeito causado pela geometria de um robot articulado, e.g., um manipulador, é mais facilmente adquirida do que o efeito causado pela distribuição de massa no corpo do robot. O transporte das experiências com blocos de forma paralelipípedica, comuns no ensino da Física básica, para o domínio da Robótica, permite uma primeira intuição sobre os esforços de uma junta para se obter um movimento simples.

Considerem-se os manipuladores de tipo R da Figura 5.1, em que o único troço é constituído por um bloco rígido de forma paralelipípedica. Ambos os manipuladores têm uma rotação em torno do eixo Z. Os troços são idênticos, diferindo apenas na sua colocação relativamente ao eixo de rotação.



$${}^A I = \begin{bmatrix} \frac{m}{3}(l^2 + h^2) & -\frac{m}{4}wl & -\frac{m}{4}hw \\ -\frac{m}{4}wl & \frac{m}{3}(w^2 + h^2) & -\frac{m}{4}hl \\ -\frac{m}{4}hw & -\frac{m}{4}hl & \frac{m}{3}(l^2 + w^2) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$${}^B I = \begin{bmatrix} \frac{m}{3}(l^2 + w^2) & -\frac{m}{4}hl & -\frac{m}{4}hw \\ -\frac{m}{4}hl & \frac{m}{3}(w^2 + h^2) & -\frac{m}{4}wl \\ -\frac{m}{4}hw & -\frac{m}{4}wl & \frac{m}{3}(l^2 + h^2) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Figura 5.1. Manipuladores de tipo R, com rotação em torno do eixo Z e respectivos tensores de inércia descritos nos respectivos referenciais dos corpos, \mathcal{F}_A e \mathcal{F}_B

Admitindo uma distribuição uniforme de massa nos dois casos, a aplicação do teorema do eixo paralelo, [27], aos dois tensores ${}^A I$ em (5.4) e ${}^B I$ em (5.5) resulta em

$${}^{CM} I_A = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(w^2 + l^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(w^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(l^2 + h^2) \end{bmatrix} \quad {}^{CM} I_B = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(h^2 + l^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(h^2 + w^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(w^2 + l^2) \end{bmatrix}$$

Para uma rotação exclusivamente em torno de Z obtém-se os binários

$$N_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m}{12}(l^2 + h^2)\dot{\omega}_z \end{bmatrix} \quad N_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m}{12}(w^2 + l^2)\dot{\omega}_z \end{bmatrix}$$

N_A é o binário que deve actuar no centro de massa de corpo A para gerar o movimento de rotação com a velocidade e aceleração angulares pretendidas quando o corpo A está restringido a rodar em torno do eixo Z_A . Identicamente para N_B relativamente ao corpo B .

Admitindo $w = \frac{l}{2}$, $h = \frac{w}{2} = \frac{l}{4}$,

$$N_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m}{12}\dot{\omega}_z \frac{17}{16} \end{bmatrix} \quad N_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m}{12}\dot{\omega}_z \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

Conclui-se que $N_B = \frac{20}{17}N_A$. Portanto, para a mesma aceleração angular $\dot{\omega}_z$, a colocação do troço na postura em (b) requer um binário 18% maior quando aplicado no centro de massa de B , quando comparado com o binário requerido para a postura em (a) e o mesmo movimento.

Esta conclusão pode ser obtida de forma mais intuitiva notando que a distância dos centros de massa ao eixo de rotação não é idêntica para os dois casos. O centro de massa de A está localizado em $(l/4, l/2, l/8)$ pelo que a distância ao eixo Z_A é $d_A = \frac{l}{4}\sqrt{5} = 0.559l$. O centro de massa de B está localizado em $(l/8, l/2, l/4)$ pelo que a distância ao eixo Z_B é $d_B = \frac{l}{8}\sqrt{17} = 0.515l$. Como $d_B < d_A$ a força que tem de actuar no centro de massa de B é superior à força que tem de actuar em A o que está de acordo com o resultado obtido (note que o binário produzido por esta força está, implicitamente, descrito no referencial colocado no eixo de rotação).

Através deste exemplo simples concluiu-se que a forma como cada troço de um manipulador é projectado influencia a sua capacidade de movimento.

Determinar com exactidão a matriz de inércia de um corpo rígido requer em geral métodos experimentais (vide o exemplo de identificação das propriedades de massa referido atrás). No entanto, em muitos casos é possível usar métodos computacionais para calcular um boa aproximação à distribuição de massa real, decompondo corpos complexos em corpos mais simples (vide Exercícios no fim do capítulo), [10].

Frequentemente, usa-se a hipótese das massas pontuais para simplificar o cálculo da dinâmica. Esta hipótese admite que toda a massa do corpo rígido está concentrada num só ponto, colocado no centro de massa, o seja a densidade de massa é $\rho\delta(x - x_{CM}, y - y_{CM}, z - z_{CM})$, em que $\delta(\cdot)$ representa a função de Dirac(vide Apêndice D). Usando as expressões (E.2) e (E.3), no Apêndice E,

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int \int \int_V (y^2 + z^2) M\delta(x - x_{CM}, y - y_{CM}, z - z_{CM}) dV = M(y_{CM}^2 + z_{CM}^2) \\ I_{yy} &= \int \int \int_V (x^2 + z^2) M\delta(x - x_{CM}, y - y_{CM}, z - z_{CM}) dV = M(x_{CM}^2 + z_{CM}^2) \\ I_{zz} &= \int \int \int_V (x^2 + y^2) M\delta(x - x_{CM}, y - y_{CM}, z - z_{CM}) dV = M(x_{CM}^2 + y_{CM}^2) \\ I_{xy} &= \int \int \int_V xyM\delta(x - x_{CM}, y - y_{CM}, z - z_{CM}) dV = Mx_{CM}y_{CM} \\ I_{xz} &= \int \int \int_V xzM\delta(x - x_{CM}, y - y_{CM}, z - z_{CM}) dV = Mx_{CM}z_{CM} \\ I_{yz} &= \int \int \int_V yzM\delta(x - x_{CM}, y - y_{CM}, z - z_{CM}) dV = My_{CM}z_{CM} \end{aligned}$$

Se o referencial for colocado no centro de massa então $(x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}) = (0, 0, 0)$ e portanto ${}^{CM}I = 0$, o que basicamente elimina a dinâmica rotacional dada pela lei de Euler.

5.3 Formulação iterativa de Newton-Euler para a dinâmica de robots

Das equações do movimento, (5.1), resulta clara a necessidade de estudar as velocidades e acelerações, lineares e angulares, de todas as partes do robot que possam ter algum tipo de movimento próprio e a forma como estas velocidades e acelerações se relacionam entre si.

Quaisquer relações entre velocidades e acelerações entre pontos de um mesmo robot dependem exclusivamente da geometria do mesmo. Estas dependências podem estudar-se atribuindo referenciais a todos os pontos que tenham movimento relativo, de rotação e/ou translação. A estrutura de um manipulador série permite desenvolver um algoritmo iterativo para calcular o modelo da dinâmica. O desenvolvimento apresentado nesta secção segue de perto o descrito em [7].

5.3.1 Aceleração de um corpo rígido

Os vectores aceleração linear e aceleração angular de um corpo rígido podem obter-se recorrendo diretamente à definição de derivada.

$${}^A\dot{V}_Q = \frac{d^A V_Q}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^A V_Q(t + \Delta t) - {}^A V_Q(t)}{\Delta t}, \quad \text{para a aceleração linear}$$

$${}^A\dot{\Omega}_Q = \frac{d^A \Omega_Q}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^A \Omega_Q(t + \Delta t) - {}^A \Omega_Q(t)}{\Delta t}, \quad \text{para a aceleração angular}$$

A fórmula para a velocidade de um ponto BQ descrito num referencial \mathcal{F}_B em rotação relativamente a um referencial \mathcal{F}_A (com origens coincidentes) é

$${}^AV_Q = {}_B^A R {}^BV_Q + {}^A\Omega_B \times {}_B^A R {}^BQ \quad (5.6)$$

onde ${}^A\Omega_B$ é o vector velocidade angular que expressa a rotação de \mathcal{F}_B relativamente a \mathcal{F}_A . Note-se que as origens de \mathcal{F}_B e \mathcal{F}_A são coincidentes uma vez que a expressão (5.6) não inclui nenhum termo expressando velocidade linear de \mathcal{F}_B relativamente a \mathcal{F}_A . A aceleração linear do ponto BQ descrita em \mathcal{F}_A obtem-se por derivação em ordem ao tempo da velocidade descrita por (5.6).

$${}^A\dot{V}_Q = \frac{d}{dt}({}_B^A R {}^BV_Q) + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}_B^A R {}^BQ + {}^A\Omega_B \times \frac{d}{dt}({}_B^A R {}^BQ) \quad (5.7)$$

A expressão (5.6) pode ser re-escrita por forma a tornar explícita a derivada,

$$\frac{d}{dt}({}_B^A R {}^BQ) = {}_B^A R {}^BV_Q + {}^A\Omega_B \times {}_B^A R {}^BQ \quad (5.8)$$

obtendo-se assim uma expressão que expressa, em \mathcal{F}_A , a derivada de um ponto BQ quando \mathcal{F}_B tem movimento de rotação relativamente a \mathcal{F}_A .

Identificando BQ com BV_Q , a expressão (5.8) pode ser usada em (5.7), obtendo-se

$$\begin{aligned} {}^A\dot{V}_Q &= {}_B^A R {}^B\dot{V}_Q + {}^A\Omega_B \times {}_B^A R {}^BV_Q + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}_B^A R {}^BQ + {}^A\Omega_B \times ({}_B^A R {}^BV_Q + {}^A\Omega_B \times {}_B^A R {}^BQ) \\ &= {}_B^A R {}^B\dot{V}_Q + 2{}^A\Omega_B \times {}_B^A R {}^BV_Q + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}_B^A R {}^BQ + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}_B^A R {}^BQ). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Se \mathcal{F}_A e \mathcal{F}_B estiverem em movimento relativo (5.9) transforma-se em

$${}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{V}_{B_{\text{org}}} + {}_B^A R {}^B\dot{V}_Q + 2{}^A\Omega_B \times {}_B^A R {}^BV_Q + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}_B^A R {}^BQ + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}_B^A R {}^BQ). \quad (5.10)$$

Se BQ for constante, ${}^BV_Q = 0$ e ${}^B\dot{V}_Q = 0$, obtendo-se

$${}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{V}_{B_{\text{org}}} + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}_B^A R {}^BQ + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}_B^A R {}^BQ).$$

Derivando a expressão para a propagação da velocidade angular entre referenciais

$${}^A\Omega_C = {}^A\Omega_B + {}_B^A R {}^B\Omega_C \quad (5.11)$$

obtem-se

$${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + \frac{d}{dt} \left({}_B^A R {}^B\Omega_C \right).$$

Usando de novo a expressão (5.8), identificando ${}^B\Omega_C$ com BQ , obtem-se

$${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + {}_B^A R {}^B\dot{\Omega}_C + {}^A\Omega_B \times {}_B^A R {}^B\Omega_C \quad (5.12)$$

As fórmulas atrás podem ser transpostas para o contexto dos manipuladores série simplesmente adaptando a terminologia, i.e., identificando os referenciais \mathcal{F}_A , \mathcal{F}_B , \mathcal{F}_C com referenciais de troço de um manipulador. A Tabela 5.1 define a terminologia relativa às grandezas envolvidas na dinâmica de um troço.

\mathcal{F}_i	Referencial atribuído ao troço i de um manipulador
${}^i v_i$	Velocidade linear da origem de \mathcal{F}_i descrita em \mathcal{F}_i
${}^i \dot{v}_i$	Aceleração linear idem
${}^i \omega_i$	Velocidade angular do troço i (i.e., do referencial \mathcal{F}_i) descrita em \mathcal{F}_i
${}^i \dot{\omega}_i$	Aceleração angular idem
${}^i P_{i+1}$	Origem de \mathcal{F}_{i+1} descrita em \mathcal{F}_i
F_i	Força a actuar no CM do troço i
N_i	Momento descrito num referencial colocado no CM com a mesma orientação de \mathcal{F}_i
${}^i f_i$	Força exercida pelo troço $i - 1$ no troço i descrita em \mathcal{F}_i
${}^i \eta_i$	Binário exercido pelo troço $i - 1$ no troço i descrito em \mathcal{F}_i
${}^i I$	Tensor de inércia descrito do troço i descrito em \mathcal{F}_i
${}^{C_i} I$	Tensor de inércia descrito num referencial com a mesma orientação de \mathcal{F}_i mas com origem colocada no CM do troço

Tabela 5.1. Grandezas na dinâmica num troço de manipulador série

Re-escrevendo a expressão (5.11), relativa à propagação de velocidades angulares entre referenciais de acordo com a terminologia da Tabela 5.1,

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}_i^{i+1}R {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1}.$$

Utilizando a fórmula (5.12) para a descrição da aceleração de um corpo rígido relativamente a referenciais em movimento com $\mathcal{F}_A \equiv \mathcal{F}_{i+1}$, $\mathcal{F}_B \equiv \mathcal{F}_i$ e $\mathcal{F}_C \equiv \mathcal{F}_{i+1}$ obtem-se

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} &= {}^{i+1}\dot{\omega}_i + {}_i^{i+1}R {}^i\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_i \times {}_i^{i+1}R {}^i\omega_{i+1} \\ &= {}_i^{i+1}R {}^i\dot{\omega}_i + {}_i^{i+1}R \ddot{\theta}_{i+1} {}^iZ_{i+1} + {}_i^{i+1}R {}^i\omega_i \times \left({}_i^{i+1}R \dot{\theta}_{i+1} {}^iZ_{i+1} \right) \\ &= {}_i^{i+1}R {}^i\dot{\omega}_i + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} + {}_i^{i+1}R {}^i\omega_i \times \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1}. \end{aligned}$$

Se a junta $i+1$ for prismática $\ddot{\theta}_{i+1} = 0$ e

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}_i^{i+1}R {}^i\dot{\omega}_i.$$

A expressão para a propagação das acelerações lineares ao longo dos troços pode ser obtida a partir de (5.10), deduzida anteriormente, para a aceleração linear de um ponto BQ descrita num referencial \mathcal{F}_B em movimento relativamente a um referencial \mathcal{F}_A .

$${}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{V}_{B\text{org}} + {}^A\Omega_B \times ({}^A\Omega_B \times {}_B^A R {}^B Q) + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}_B^A R {}^B Q + {}_B^A R {}^B\dot{V}_Q + 2 {}^A\Omega_B \times {}_B^A R {}^B V_Q$$

com as identificações $\mathcal{F}_A \equiv \mathcal{F}_{i+1}$, $\mathcal{F}_B \equiv \mathcal{F}_i$, ${}^{i+1}\Omega_i \equiv {}^{i+1}\omega_i$, ${}^BQ \equiv {}^iP_{i+1}$ \equiv origem de \mathcal{F}_{i+1} em \mathcal{F}_i .

Para uma junta de revolução, onde ${}^B\dot{V}_Q = 0$ e ${}^B V_Q = 0$,

$${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}_i^{i+1}R [{}^i\dot{v}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1}]$$

$$\text{com } {}_i^{i+1}R {}^i\omega_i \times {}_i^{i+1}R {}^iP_{i+1} = {}_i^{i+1}R ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}).$$

Para uma junta prismática, ${}^B\dot{V}_Q \neq 0$ e ${}^B V_Q \neq 0$ e ${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}\omega_i$ (da propagação de velocidades angulares), tem-se

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} &= {}_i^{i+1}R [{}^i\dot{v}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1}] + {}_i^{i+1}R \left[{}_{i+1}^i R \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} + \right. \\ &\quad \left. + 2 {}_{i+1}^i R {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}_{i+1}^i R \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \right] \\ &= {}_i^{i+1}R [{}^i\dot{v}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1}] + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} + 2 {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} \end{aligned}$$

Neste ponto, estão deduzidas as expressões que propagam velocidades e acelerações lineares e angulares da base do manipulador (índice de junta 0) para o efector terminal. De acordo com as leis de Newton e Euler é necessário obter expressões para a propagação de forças e binários.

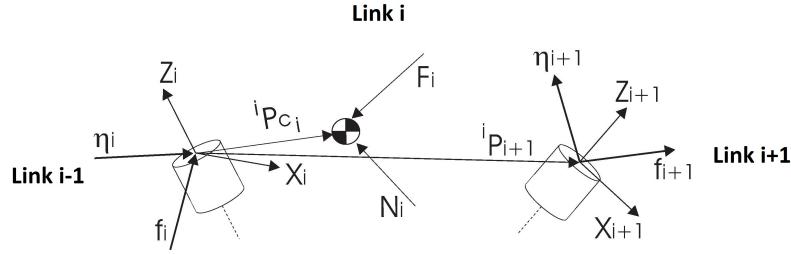


Figura 5.2. Forças e binários em actuação no troço i

A Figura 5.2 ilustra as forças e binários em acção em cada troço,

e permite obter directamente, por inspecção, equações de balanço de forças e binários.

$$\begin{aligned} {}^i F_i &= {}^i f_i - {}^i_{i+1} R {}^{i+1} f_{i+1} \\ {}^i N_i &= {}^i \eta_i - {}^i \eta_{i+1} + (-{}^i P_{c_i}) \times {}^i f_i - ({}^i P_{i+1} - {}^i P_{c_i}) \times {}^i f_{i+1} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Na situação estática, i.e., em que todas as juntas têm velocidade nula,

$$\begin{aligned} {}^i F_i &= \mathbf{0} \\ {}^i N_i &= \mathbf{0} \quad \text{e} \\ {}^i f_i &= {}^i_{i+1} R {}^{i+1} f_{i+1} = {}^i_{i+1} R {}^{i+1} R {}^i f_{i+1} = {}^i f_{i+1} \end{aligned}$$

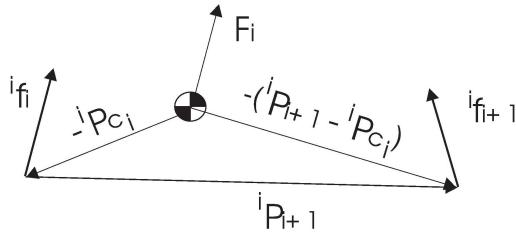
e as equações (5.13) resultam em

$$\begin{aligned} 0 &= {}^i f_i - {}^i_{i+1} R {}^{i+1} f_{i+1} \\ 0 &= {}^i \eta_i - {}^i \eta_{i+1} - {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1} \end{aligned}$$

A Figura 5.3 permite identificar facilmente as componentes na expressão do binário em actuação num troço que são devidas às forças.

Utilizando as expressões (5.13) obtém-se

$$\begin{aligned} {}^i N_i &= {}^i \eta_i - {}^i_{i+1} R {}^{i+1} \eta_{i+1} - {}^i P_{c_i} \times ({}^i f_i - {}^i f_{i+1}) - {}^i P_{i+1} \times {}^i_{i+1} R {}^{i+1} f_{i+1} \\ {}^i N_i &= {}^i \eta_i - {}^i_{i+1} R {}^{i+1} \eta_{i+1} - {}^i P_{c_i} \times {}^i F_i - {}^i P_{i+1} \times {}^i_{i+1} R {}^{i+1} f_{i+1} \end{aligned}$$

**Figura 5.3.** Forças em actuação num troço

Reorganizando

$$\begin{aligned} {}^i f_i &= {}^i_{i+1} R {}^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i \\ {}^i \eta_i &= {}^i N_i + {}^i_{i+1} R {}^{i+1} \eta_{i+1} + {}^i P_{c_i} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}^i_{i+1} R {}^{i+1} f_{i+1} \end{aligned} \quad (5.14)$$

As forças e binários efectivamente gerados pelos actuadores correspondem à projecção dos vectores ${}^i f_i$ e ${}^i \eta_i$ sobre os eixos de actuação. Para um troço com junta de revolução esta projecção é $\tau_i = {}^i \eta_i^T {}^i Z_i$ enquanto que para um troço com junta prismática é $\tau_i = {}^i f_i^T {}^i Z_i$.

As expressões atrás definem o chamado algoritmo iterativo de Newton-Euler para a dinâmica de um robot com estrutura cinemática série. A Tabela 5.2 reúne todas estas expressões na forma de algoritmo, assumindo que ${}^i Z_i$ é o eixo de junta do troço i e que $\mathcal{F}_{c_{i+1}}$ tem a mesma orientação de \mathcal{F}_{i+1} . De notar que o tensor de inércia associado a cada troço, ${}^{c_{i+1}} I_{i+1}$ é calculado num referencial colocado no centro de massa do troço mas com a mesma orientação do referencial de troço.

Em espaço livre, i.e., se o efector terminal não estiver a exercer força no ambiente, ${}^{n+1} f_{n+1} = \mathbf{0}$ e ${}^{n+1} \eta_{n+1} = \mathbf{0}$.

O algoritmo N-E tem como “entradas” ${}^{n+1} f_{n+1}$, ${}^{n+1} \eta_{n+1}$, ${}^0 \dot{v}_0$, ${}^0 \dot{\omega}_0$. Estas podem ser usadas para incluir efeitos devidos ao ambiente. Por exemplo, quando o efector terminal é sujeito a uma força, ${}^{n+1} f_{n+1}$, a propagação das forças exteriores segundo o algoritmo N-E conduz a

$$\begin{aligned} {}^n f_n &= {}^n_{n+1} R {}^{n+1} f_{n+1} + {}^n F_n \\ &\vdots \\ {}^2 f_2 &= {}^2_3 R {}^3 f_3 + {}^2 F_2 \\ {}^1 f_1 &= {}^1_2 R {}^2 f_2 + {}^1 F_1 = \\ &= {}^1_2 R {}^2_3 R \cdots {}^n_{n+1} R {}^{n+1} f_{n+1} + {}^1 F_1 + {}^1_2 R {}^2 F_2 + {}^1_2 R {}^2_3 R {}^3 F_3 + \cdots + {}^1_2 R \cdots {}^n_{n+1} R {}^n F_n \\ &= {}^1_{n+1} R {}^{n+1} f_{n+1} + {}^1 F_1 + {}^1_2 R {}^2 F_2 + \cdots + {}^1_n R {}^n F_n \end{aligned}$$

Iterações “para fora”	$i = 0 \longrightarrow n - 1$
${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^i\dot{R} {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1}$	
${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^i\ddot{R} {}^i\dot{\omega}_i + {}^i\dot{R} {}^i\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1}$	
Se a junta for de revolução	
${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^i\ddot{R} [{}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i]$	
Se a junta for prismática	
${}^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^i\ddot{R} [{}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + {}^i\dot{v}_i] +$	
$2 {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1} + \ddot{d}_{i+1} {}^{i+1}Z_{i+1}$	
${}^{i+1}\dot{v}_{c_{i+1}} = {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{c_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{c_{i+1}}) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1}$	
${}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1} {}^{i+1}\dot{v}_{c_{i+1}}$	
${}^{i+1}N_{i+1} = {}^{c_{i+1}}I_{i+1} {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{c_{i+1}}I_{i+1} {}^{i+1}\omega_{i+1}$	
Iterações “para dentro”	$i = n \longrightarrow 1$
${}^i f_i = {}_{i+1}^i R {}^{i+1}f_{i+1} + {}^i F_i$	
${}^i \eta_i = {}^i N_i + {}_{i+1}^i R {}^{i+1} \eta_{i+1} + {}^i P_{c_i} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}_{i+1}^i R {}^{i+1} f_{i+1}$	
Se a junta for de revolução	
$\tau_i = {}^i \eta_i^T {}^i Z_i$	
Se a junta for prismática	
$\tau_i = {}^i f_i^T {}^i Z_i$	

Tabela 5.2. O algoritmo iterativo de Newton-Euler para cálculo da dinâmica de um manipulador série com n juntas

em que o termo ${}_{n+1}^1 R {}^{n+1} f_{n+1} + {}^1 F_1 = {}^1 F'_1$ representa a força no centro de massa do troço 1 devida à perturbação, e ao movimento do próprio do troço. Usando a lei de Newton, esta força pode ser convertida numa aceleração,

$$\begin{aligned} {}^1 F'_1 &= m {}^1 \dot{v}_{c_1} + {}_{n+1}^1 R {}^{n+1} f_{n+1} = m {}^1 \dot{v}_{c_1} + {}^1 f_{n+1} = m {}^1 \dot{v}_{c_1} + {}_0^1 R {}^0 f_{n+1} \\ &= m ({}^1 \dot{v}_{c_1} + {}_0^1 R {}^0 \dot{v}_0) \end{aligned}$$

para algum ${}^0\dot{v}_0$ e portanto o efeito da perturbação ${}^{n+1}f_{n+1}$ pode ser considerado como uma perturbação aplicada à base do manipulador. Se ${}^{n+1}f_{n+1}$ for interpretada como a força que o efector terminal tem de fazer sobre o ambiente para resistir à ação da gravidade então ${}^0\dot{v}_0 \equiv -\mathbf{g}$.

Uma interpretação alternativa de avaliar o efeito da gravidade na dinâmica do manipulador consiste em considerar o manipulador em queda livre (gravidade 0) quando na ausência de perturbações. Nesta situação o efeito da gravidade não se faz sentir nas juntas. Imprimindo uma aceleração ${}^0\ddot{v}_0 = -\mathbf{g}$ à base do manipulador corresponde a tornar a base imóvel e o efeito da gravidade é propagado pelas iterações para fora do algoritmo iterativo de Newton-Euler.

5.3.2 Exemplo 1 - Manipulador RP

Para ilustrar a aplicação do algoritmo iterativo de Newton-Euler considere o manipulador RP da Figura 5.4a com os referenciais de troço da Figura 5.4b. Para simplificar os cálculos, admite-se que o centro de massa da junta prismática está sempre a meio da extensão do troço.

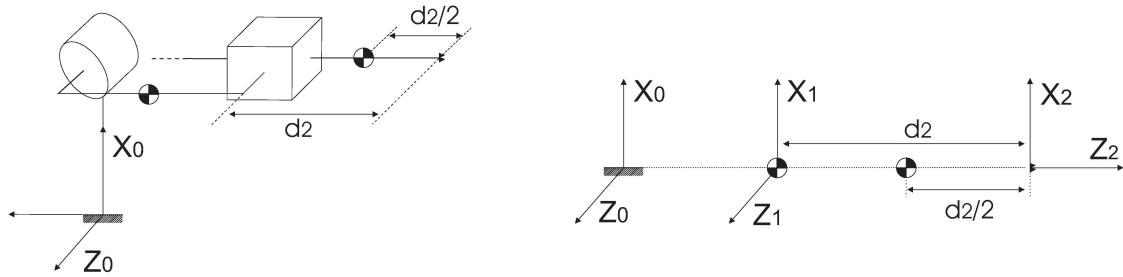


Figura 5.4. Manipulador série RP

Os correspondentes parâmetros de Denavit-Hartenberg são,

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$\pi/2$	0	d_2	0

vindo para as matrizes de transformação de troço

$${}^0T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A posição dos centros de massa de cada troço é

$${}^1P_{cm_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2P_{cm_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_2/2 \end{bmatrix}$$

e a posição da origem de cada um dos referenciais de troço,

$${}^0P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -d_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando a hipótese de massas pontuais, as iterações para fora do algoritmo de Newton-Euler conduzem a

$$\begin{aligned} {}^1\omega_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} & {}^1\dot{\omega}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} & {}^1\dot{v}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & {}^1F_1 &= m_1 {}^1\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & {}^1N_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}^2\omega_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} & {}^2\dot{\omega}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} & {}^2\dot{v}_2 &= \begin{bmatrix} 2\dot{\theta}\dot{d}_2 \\ 0 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} & {}^2F_2 &= m_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}d_2\ddot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 \\ 0 \\ \frac{1}{2}d_2\dot{\theta}_1^2 + \ddot{d}_2 \end{bmatrix} & {}^2N_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

As correspondentes iterações para dentro são dadas por,

$$\begin{aligned} {}^2f_2 &= m_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}d_2\ddot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 \\ 0 \\ \frac{3}{2}d_2\dot{\theta}_1^2 + \ddot{d}_2 \end{bmatrix} & {}^2\eta_2 &= m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}d_2^2\ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1d_2\dot{d}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}^1f_1 &= m_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}d_2\ddot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 \\ -\frac{3}{2}d_2\dot{\theta}_1^2 - \ddot{d}_2 \\ 0 \end{bmatrix} & {}^1\eta_1 &= m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{4}\ddot{\theta}_1d_2^2 - 3\dot{\theta}_1\dot{d}_2d_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Projectando as forças e torques obtidos com as iterações para dentro sobre os eixos de movimento de cada junta ficam definidas as equações da dinâmica,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{9}{4}m_2d_2^2\ddot{\theta}_1 - 3m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2d_2 \\ \tau_2 &= m_2\ddot{d}_2 + \frac{3}{2}m_2\dot{\theta}_1^2d_2 \end{aligned}$$

5.3.3 Exemplo 2 - Manipulador RPR

Este exemplo ilustra um dos problemas no uso da hipótese simplificativa das massas pontuais. Considere-se o manipulador RPR da Figura 5.5, com os parâmetros D-H dados por,

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	0	d_2	0
3	0	0	0	θ_3

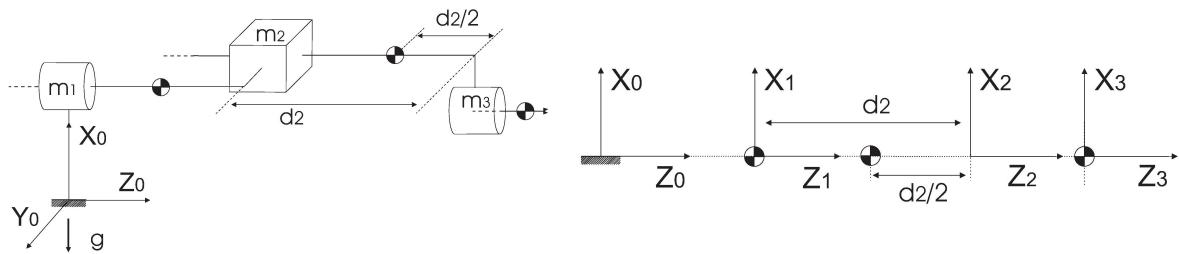


Figura 5.5. Manipulador série RPR

As posições dos centros de massa de cada troço são dadas por

$${}^1P_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2P_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_2/2 \end{bmatrix} \quad {}^3P_{c_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sendo as posições das origens dos referenciais de troço dadas por,

$${}^0P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad {}^2P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando de novo a hipótese das massas pontuais e considerando a ação da gravidade, as iterações para fora do algoritmo de Newton-Euler são dadas por,

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad {}^1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad {}^1\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} c_1 g \\ -s_1 g \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} c_1 g \\ -s_1 g \\ 0 \end{bmatrix} \quad F_1 = \begin{bmatrix} m_1 c_1 g \\ m_1 s_1 g \\ 0 \end{bmatrix} \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad {}^2\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad {}^2\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} c_1 g \\ -s_1 g \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} \quad {}^2\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} c_1 g \\ -s_1 g \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} m_2 c_1 g \\ -m_2 s_1 g \\ m_2 \ddot{d}_2 \end{bmatrix} \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3\omega_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad {}^3\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad {}^3\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} c_{13} g \\ -s_{13} g \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} \quad {}^3\dot{v}_{c_3} = \begin{bmatrix} c_{13} g \\ -s_{13} g \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} \quad {}^3F_3 = \begin{bmatrix} m_3 c_{13} g \\ -m_3 s_{13} g \\ m_3 \ddot{d}_2 \end{bmatrix} \quad {}^3N_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As correspondentes iterações para dentro são dadas por,

$${}^3f_3 = \begin{bmatrix} m_3 c_{13} g \\ -m_3 s_{13} g \\ m_3 \ddot{d}_2 \end{bmatrix} \quad {}^3\eta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau_3 = 0$$

$${}^2f_2 = \begin{bmatrix} (m_2 + m_3)c_1 g \\ -(m_2 + m_3)s_1 g \\ (m_2 + m_3)\ddot{d}_2 \end{bmatrix} \quad {}^2\eta_2 = \begin{bmatrix} -m_2 \frac{d_2}{2} s_1 g \\ -m_2 \frac{d_2}{2} c_1 g \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau_2 = (m_2 + m_3)\ddot{d}_2$$

$${}^1f_1 = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3)c_1 g \\ -(m_1 + m_2 + m_3)s_1 g \\ (m_2 + m_3)\ddot{d}_2 \end{bmatrix} \quad {}^1\eta_1 = \begin{bmatrix} g s_1 d_2 \left(m_3 + \frac{m_2}{2}\right) \\ g c_1 d_2 \left(m_3 + \frac{m_2}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tau_1 = 0$$

conduzindo a resultados incorrectos para as juntas 1 e 3. O leitor pode verificar como exercício que o facto da posição do centro de massa das juntas 1 e 3 ser a origem dos respectivos referenciais de troço não é a causa da anulação dos binários τ_1 e τ_3 .

5.4 Formulação Lagrangeana para a dinâmica de robots

Esta abordagem resulta da aplicação directa da equação de Lagrange, (5.2)-(5.2b) para o movimento de um conjunto de partículas. Entre os textos de referência nesta área destacam-se [1, 3].

A aplicação deste método requer que se estabeleçam expressões para as energias cinética e potencial do robot. No caso de manipuladores ou robots articulados, a energia cinética total, $T(q, \dot{q})$, é dada pelo somatório das energias cinéticas dos troços

$$T(\dot{q}) = \sum_{i=1}^n T_i(\dot{q}) \quad (5.15)$$

com

$$T_i(\dot{q}) = \frac{1}{2} m_i v_{c_i}^T v_{c_i} + \frac{1}{2} {}^i\omega_i^T {}^{C_i} I_i {}^i\omega_i \quad (5.16)$$

enquanto que a energia potencial total, $U(q)$, é o somatório das energias potenciais dos troços,

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (5.17)$$

com

$$U_i = -m_i {}^0g^T {}^0P_{c_i} + U_{\text{ref}} \quad (5.18)$$

onde U_{ref} é uma constante que determina a energia potencial mínima do robot (atendendo à estrutura de (5.2) esta constante não é de facto importante para a dinâmica).

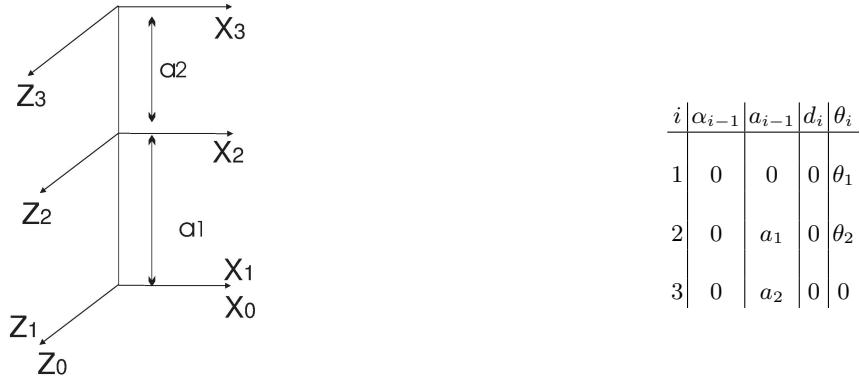
5.4.1 Exemplo 1 - Manipulador RR planar

Considere-se o manipulador RR planar com a atribuição de referenciais da Figura 5.6. A massa de cada troço é pontual e admite-se que o centro de massa está colocado na extremidade de cada troço. O referencial \mathcal{F}_3 serve apenas para definir a orientação do efector terminal.

A cinemática directa obtem-se facilmente a partir das transformações de troço,

$${}^0T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & c_{12}a_2 + c_1a_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & s_{12}a_2 + s_1a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que o manipulador se move apenas no plano horizontal, a energia potencial é constante pelo que não influência dinâmica. Na hipótese de massas pontuais $I_{c_i} = \mathbf{0}$ e a função de Lagrange é então,

**Figura 5.6.** Manipulador RR planar horizontal

$$L = T_1 + T_2 = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} m_1 {}^0 v_{c_i}^T {}^0 v_{c_i} + \frac{1}{2} {}^0 \omega_i^T I_{c_i}^0 \omega_i \right) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} m_1 {}^0 v_{c_i}^T {}^0 v_{c_i} \right)$$

Admitindo que CM₂ está em ${}^2 P_{c_2} = [a_2, 0, 0]'$, então ${}^0 v_{c_2} \equiv {}^0 v_3$. A cinemática directa indica a origem de \mathcal{F}_3 . Derivando as correspondentes expressões,

$${}^0 v_{c_2} = \begin{bmatrix} (-s_{12}a_2 - s_1a_1)\dot{\theta}_1 - s_{12}a_2\dot{\theta}_2 \\ (c_{12}a_2 + c_1a_1)\dot{\theta}_1 + c_{12}a_2\dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Identicamente, se CM₁ está em ${}^1 P_{c_1} = [a_1, 0, 0]'$ então ${}^0 v_{c_1} \equiv {}^0 v_1$

$${}^0 v_{c_1} = \begin{bmatrix} -s_1a_1\dot{\theta}_1 \\ c_1a_1\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtendo-se para a energia cinética de cada troço

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 a_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(a_2^2 \dot{\theta}_2^2 + (a_2^2 + a_1^2 + 2c_2a_1a_2) \dot{\theta}_1^2 + 2(a_2^2 + c_2a_1a_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right)$$

Os termos intervenientes na equação da dinâmica (5.2) são

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2s_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1^2 - 2s_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \begin{bmatrix} m_1 \dot{\theta}_1 a_1^2 + m_2 (a_2^2 + a_1^2 + 2c_2 a_1 a_2) \dot{\theta}_1 + m_2 (a_2^2 + c_2 a_1 a_2) \dot{\theta}_2 \\ m_2 a_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 (a_2^2 + c_2 a_1 a_2) \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = \begin{bmatrix} m_1 a_1^2 \ddot{\theta}_1 - 2m_1 s_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 (a_2^2 + a_1^2 + 2c_2 a_1 a_2) \ddot{\theta}_1 - m_2 s_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 (a_2^2 + c_2 a_1 a_2) \ddot{\theta}_2 \\ m_2 a_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 s_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 (a_2^2 + c_2 a_1 a_2) \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

resultando para a dinâmica

$$\begin{aligned} \tau_1 &= m_2 a_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 a_1 a_2 c_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) a_1^2 \dot{\theta}_1 - -m_2 a_1 a_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 - 2m_2 a_1 a_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \tau_2 &= m_2 a_1 a_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 a_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - m_2 a_1 a_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

ou, na forma vectorial,

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 a_2^2 + 2m_2 a_1 a_2 c_2 + (m_1 + m_2) a_1^2 & m_2 a_2^2 + 2m_2 a_1 a_2 c_2 \\ m_2 a_2^2 + 2m_2 a_1 a_2 c_2 & m_2 a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_2 a_1 a_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 + 2m_2 a_1 a_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ m_2 a_1 a_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Note-se a estrutura simétrica característica da matriz de massas.

5.4.2 Exemplo 2 - Plataforma móvel tipo uniciclo

Considere-se o robot uniciclo na Figura 5.7. Assume-se o corpo de formato cilíndrico e com massa uniformemente distribuída.

$$L = \frac{1}{2} m [v, 0, 0] \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [0, 0, \omega] I_c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_{czz} \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{12} \frac{H^3 D^3}{144} \pi \omega^2$$

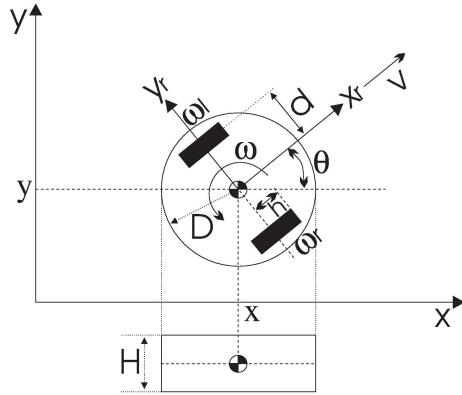


Figura 5.7. Robot uniciclo com corpo circular

Os termos diferenciais na equação de Lagrange são,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \equiv \begin{bmatrix} mv \\ I_{czz}\omega \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) \equiv \begin{bmatrix} m\dot{v} \\ I_{czz}\dot{\omega} \end{bmatrix}$$

vindo para a dinâmica do robot,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \tau \quad (5.19)$$

ou seja, substituindo os termos correspondentes,

$$\begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\dot{v} \\ I_{czz}\dot{\omega} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

A força e binário obtidas em (5.19) actuam no centro de massa do robot. Numa perspectiva de projecto interessa conhecer os binários actuando em cada uma das rodas do robot, i.e., os binários que cada motor deve desenvolver para obter o movimento. Re-escrevendo a equação de Lagrange no espaço das velocidades angulares das rodas,

$$L = \frac{1}{2}m \left(h \frac{\omega_e + \omega_d}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}I_{czz} \left(h \frac{\omega_e - \omega_d}{2d} \right)^2$$

Os termos diferenciais na equação da dinâmica são,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \equiv \begin{bmatrix} \frac{h}{2}m(\omega_e + \omega_d) + \frac{h}{2d}I_{czz}(\omega_e - \omega_d) \\ \frac{h}{2}m(\omega_e + \omega_d) - \frac{h}{2d}I_{czz}(\omega_e - \omega_d) \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) \equiv \begin{bmatrix} \frac{h}{2}m(\dot{\omega}_e + \dot{\omega}_d) + \frac{h}{2d}I_{czz}(\dot{\omega}_e - \dot{\omega}_d) \\ \frac{h}{2}m(\dot{\omega}_e + \dot{\omega}_d) - \frac{h}{2d}I_{czz}(\dot{\omega}_e - \dot{\omega}_d) \end{bmatrix}$$

Os binários desenvolvidos por cada roda são então,

$$\begin{aligned} N_{\text{esquerda}} &= \frac{h}{2} \left(m + \frac{I_{czz}}{2d} \right) \dot{\omega}_e + \frac{h}{2} \left(m - \frac{I_{czz}}{2d} \right) \dot{\omega}_d \\ N_{\text{direita}} &= \frac{h}{2} \left(m - \frac{I_{czz}}{2d} \right) \dot{\omega}_e + \frac{h}{2} \left(m + \frac{I_{czz}}{2d} \right) \dot{\omega}_d \end{aligned} \quad (5.21)$$

Como referido atrás, o modelo (5.21) é simples mas não captura aspectos como a restrição ao movimento imposta pelo contacto entre as rodas e o chão.

Note-se que esta expressão não inclui qualquer termo que possa ser associado ao facto das rodas estarem em contacto com o chão e não permitirem o deslocamento lateral (i.e., a não holonomia do robot não está presente neste “modelo”. Este “modelo” é apenas uma simplificação grosseira da dinâmica do robot uniciclo. Na prática assume que o robot se comporta como um corpo com total liberdade de movimento (sem restrições), o que não corresponde à realidade.

A restrição de movimento do uniciclo que representa a impossibilidade de escorregamento lateral é dada por

$$\dot{x} \sin(\theta) - \dot{y} \cos(\theta) = 0 \quad (5.22)$$

e pode também ser escrita como

$$v = \omega \rho \quad (5.23)$$

onde ρ é o raio de curvatura da trajectória.

No entanto pode ainda considerar-se uma outra restrição que representa o facto do movimento do uniciclo ao longo de trajectórias que não violam (5.22) é feita com as rodas a rolarem (por oposição a arrastarem-se). Esta restrição é representada por,

$$\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) = v \quad (5.24)$$

A inclusão destas restrições na dinâmica não-restringida tem algumas particularidades complexas (vide por exemplo [20, 4, 32, 11]).

Dado a dinâmica genérica,

$$M(\theta)\ddot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) = \tau + \tau_c \quad (5.25)$$

onde τ_c representa a força/torque generalizada imposta pelas restrições considerem-se os seguintes tipos de restrições,

$$A(\theta) = 0 \quad \text{Restrição de posição} \quad (5.26)$$

$$J(\theta)\dot{\theta} = B(\theta) \quad \text{Restrição de velocidade} \quad (5.27)$$

onde λ é uma incógnita a determinar⁴.

Os torques generalizados impostos por cada uma das restrições são dados por

$$\tau_c = \left[\frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} \right]^T \lambda \quad \text{Para restrições de posição}$$

$$\tau_c = J(\theta)^T \lambda \quad \text{Para restrições de velocidade}$$

Substituindo na equação da dinâmica genérica obtém-se um sistema algébrico-diferencial em que θ, λ são as variáveis a determinar. Para o caso de restrições de posição $A(\theta) = 0$ (restrições holonómicas) tem-se

$$\begin{aligned} A(\theta) &= 0, \\ \dot{A}(\theta)\dot{\theta} &= 0 = J(\theta)\dot{\theta}, \\ \ddot{A}(\theta) &= 0 = J(\theta)\ddot{\theta} + \dot{J}(\theta)\dot{\theta}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\ddot{\theta} = M^{-1}(-N + \tau + \tau_c) = M^{-1}(-N + \tau + J^T \lambda) \quad (5.29)$$

já que M tem sempre inversa. Substituindo (5.29) em (5.28) obtém-se

$$JM^{-1}J^T\lambda = -\dot{J}\dot{\theta} - JM^{-1}(-N + \tau),$$

$$\lambda = (JM^{-1}J^T)^{-1} \left(-\dot{J}\dot{\theta} - JM^{-1}(-N + \tau) \right) \quad (5.30)$$

⁴ De facto é um multiplicador de Lagrange.

Assumindo que J^{-1} existe e substituindo (5.30) em (5.29) obtém-se

$$\ddot{\theta} = J^{-1}\dot{\theta}$$

Obter soluções de sistemas algébrico-diferenciais é no caso geral bastante mais complexo que (5.29)-(5.30). A não existência de J^{-1} obriga ao uso de métodos numéricos (vide por exemplo [12, 18])⁵.

Para o caso do uniciclo, usando a restrição na forma (5.22), resulta para a equação principal

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_{c_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ N_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \lambda \quad (5.31)$$

Quando o sistema está em equilíbrio, $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{\theta} = 0$ e λ deve apenas compensar o controlo F_x, F_y, N_z .

Esta dinâmica restringida mostra que se o robot quiser andar livremente por acção dos controlos F_x, F_y, N_z então tem de vencer as forças/torques impostos pela restrição.

A Figura 5.8 mostra a trajectória de um uniciclo com massa $m = 1$ Kg e inércia $I_{c_{zz}} = 0.1$ Kg.m², quando o controlo é $(F_x, F_y, N_z) = (1, 0.1, 1)$.

Note que especificando uma entrada de controlo $F_y \neq 0$ não gera movimento na direcção perpendicular ao eixo de movimento do robot, como seria de esperar num uniciclo. A dinâmica (5.31) tem apenas dois graus de liberdade, F_x , responsável pelo movimento de translação, e N , responsável pelo movimento de rotação.

Em alternativa, se o modelo usar a restrição na forma (5.23)

$$\omega_r \left(1 - \frac{\rho}{d}\right) + \omega_l \left(1 + \frac{\rho}{d}\right) = 0$$

$$\tau_c = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\rho}{d} \\ 1 + \frac{\rho}{d} \end{bmatrix} \lambda$$

Uma forma alternativa de resolver o sistema algébrico-diferencial (5.25)-(5.26) consiste em multiplicar ambos os lados de (5.25) por uma matriz $S(\theta)$ tal que

$$S(\theta)\tau_c = 0$$

ou seja $S(\theta)$ deve ser escolhida no espaço nulo de $J^T(\theta)$, i.e., $S(\theta)J^T(\theta) = 0$, obtendo-se a dinâmica (vide [32] para uma aplicação a um manipulador móvel),

⁵ Existem actualmente pacotes de software dedicados à solução deste tipo de sistemas, e.g., Mathematica.

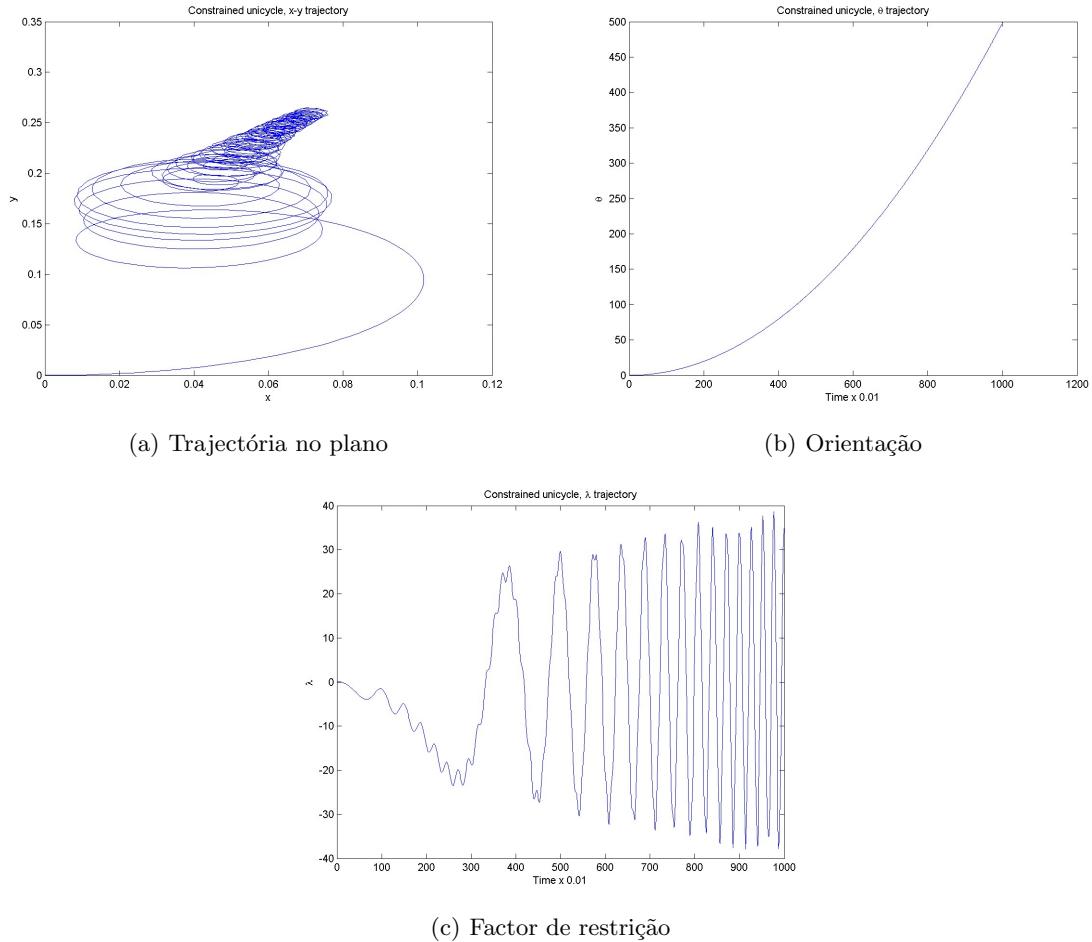


Figura 5.8. Solução do sistema algébrico-diferencial para o uniciclo

$$S(\theta)M(\theta)\ddot{\theta} + S(\theta)N(\theta, \dot{\theta}) = S(\theta)\tau. \quad (5.32)$$

5.5 Estrutura das equações da dinâmica de um robot

A equação da dinâmica de um robot possui uma estrutura própria em que se pode dar uma interpretação física a cada um dos termos.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tau & = M(q)\ddot{q} & + & V(q, \dot{q}) & + & G(q) \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Vector de} & \text{Matriz de mas-} & \text{Vector de termos} & \text{Vector de ter-} \\
 \text{forças/binários} & \text{sas } (n \times n) & \text{centrífugos e de Co-} & \text{mos gravíticos} \\
 \text{de junta } (n \times 1) & & \text{riolis } (n \times 1) & & (n \times 1)
 \end{array} \tag{5.33}$$

A equação (5.33) pode ser escrita em qualquer outro espaço de configuração. Considerem-se os espaços X e Q relacionados através do Jacobiano $\dot{x} = J(q)\dot{q}$. Multiplicando ambos os lados de (5.33) por J^{-1} (uma pseudo-inversa da matriz Jacobiana) obtem-se

$$J^{-T}\tau = J^{-T}M\ddot{\theta} + J^{-T}V + J^{-T}G$$

e usando as relações, $F = J^{-T}\tau$, $\dot{x} = J\dot{\theta}$ e $\ddot{x} = J\ddot{\theta} + J\dot{\theta}$ obtem-se

$$\begin{aligned}
 F &= J^{-T}M \left(J^{-1}\ddot{x} - J^{-1}J\dot{\theta} \right) + J^{-T}V + J^{-T}G \\
 &= J^{-T}MJ^{-1}\ddot{x} - J^{-T}MJ^{-1}J\dot{\theta} + J^{-T}V + J^{-T}G \\
 &= M_x(q)\ddot{x} + V_x(q, \dot{q}) + G_x(q)
 \end{aligned}$$

No estudo de manipuladores Q e X são habitualmente identificados com o espaço junta e espaço cartesiano, respectivamente. Neste caso, F representa as forças geradas em cada junta.

5.6 Inclusão de efeitos dissipativos na dinâmica de robots

A equação (5.33) não contempla efeitos dissipativos. Estes efeitos dependem de múltiplos factores, como por exemplo, o tipo de materiais usados nas juntas, a velocidade a que o robot se desloca ou o tipo de superfície sobre a qual se desloca. A sua inclusão na dinâmica é normalmente feita estimando as forças e binários que produzem e adicionando-os directamente à equação (5.33).

As forças dissipativas criam resistência ao movimento. Esta secção descreve alguns dos tipos de atrito mais usados na Robótica (para uma análise mais detalhada veja-se, por exemplo, [27, 22, 9, 25]).

A ideia base na construção de modelos de forças resistivas consiste em modelizar separadamente as diversas forças que se opõem ao movimento.

O atrito estático é também conhecido por *stiction*⁶ e não depende da velocidade.

⁶ Abreviatura de "Static Friction".

O atrito dinâmico pode dividir-se em diversas componentes. Os atritos viscosos e de Coulomb constituem alguns dos fenómenos de tipo resistivo mais importantes. Um atrito viscoso gera uma força generalizada da forma,

$$\tau_{\text{viscoso}} = \nu \dot{q}$$

onde ν é uma constante dependente do tipo de materiais em contacto e da lubrificação entre eles. Por sua vez um atrito de Coulomb gera uma força generalizada da forma,

$$\tau_{\text{coulomb}} = c \operatorname{sgn}(\dot{q})$$

com c uma constante. Deficiências no fabrico das engrenagens de um manipulador podem, por exemplo, levar a que ν e c dependam também da configuração do robot.

No caso do robot se mover em fluídos com densidade elevada ou com velocidades elevadas as forças de arrasto devidas a efeitos hidrodinâmicos/aerodinâmicos podem gerar contribuições importantes para a dinâmica. Um modelo habitual destas forças é dado por

$$f_{\text{aero}} = \gamma \dot{\theta}^2$$

com γ uma constante relacionada com o coeficiente de penetração hidrodinâmico/aerodinâmico.

O atrito de fricção é gerado no contacto entre corpos, como por exemplo as rodas de um robot e o chão, e dependem do peso do robot em contacto com o chão,

$$f_{\text{atrito}} = \mu P$$

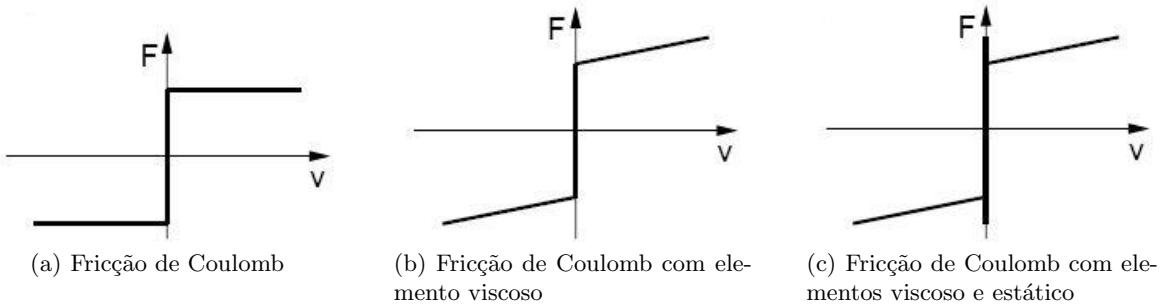
onde P corresponde ao peso do robot sobre a superfície e μ é uma constante denominada coeficiente de atrito.

Para iniciar o movimento o robot necessita de vencer uma força de atrito estático, onde o coeficiente de atrito é $\mu_{\text{estático}}$. Logo que se inicia o movimento o coeficiente de atrito decresce para um valor constante $\mu_{\text{cinético}} < \mu_{\text{estático}}$ e portanto a força necessária para o manter o movimento decresce. Este atrito impede que o robot não se move mesmo quando sob acção de forças externas de grandeza limitada.

Um modelo simples, incluindo atrito estático e dinâmico simples é descrito por

$$F = \begin{cases} F_e & \text{if } v = 0 \text{ and } |F_e| < F_S \\ F_S \operatorname{sgn}(F_e) & \text{if } v = 0 \text{ and } |F_e| \geq F_S \end{cases}$$

onde F_S é a força correspondente ao atrito estático e F_e ao atrito dinâmico simples. A Figura 5.9 exemplifica diferentes composições com elementos de atrito de Coulomb, viscoso e estático.

**Figura 5.9.** Exemplos de modelos clássicos de atrito

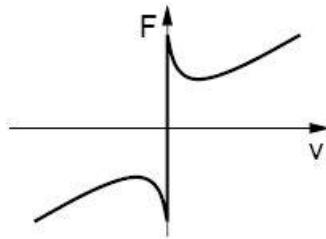
O modelo de Stribeck elimina a descontinuidade na transição estático-dinâmico propondo uma descrição mais geral,

$$F = \begin{cases} F(v) & \text{if } v \neq 0 \\ F_e & \text{if } v = 0 \text{ and } |F_e| < F_S \\ F_S \operatorname{sgn}(F_e) & \text{otherwise} \end{cases}$$

onde $F(v)$ é uma função arbitrária. Um modelo típico na literatura para este termo é

$$F(v) = F_C + (F_S - F_C)e^{-|v/v_S|^{\delta_S}} + F_v v$$

onde v_S é chamada velocidade de Stribeck (vide exemplo na Figura 5.10).

**Figura 5.10.** Comportamento típico do modelo de Stribeck

Uma classe diferente de modelos, chamados dinâmicos, descrevem a forma como o atrito varia com uma trajectória. Na perspectiva da Robótica este tipo de modelos é interessante para expressar a evolução do atrito quando o robot se movimenta sobre superfícies de diferentes tipos, e.g., um veículo que se movimente entre estradas pavimentadas com alcatrão e estradas de terra batida.

O modelo de Dahl define uma dinâmica para a fricção tendo como limites uma fricção de Coulomb. A correspondente expressão é,

$$dF/dx = \sigma(1 - F/F_c \operatorname{sgn}(v))^\alpha$$

onde x é a trajectória, F o atrito, F_c o atrito de Coulomb que estabelece os limites de variação de F , σ é o coeficiente de rigidez e α é um parâmetro que determina a forma da curva ($\alpha = 1$ é um valor comum). A Figura 5.11 exemplifica um comportamento para esta classe de modelos

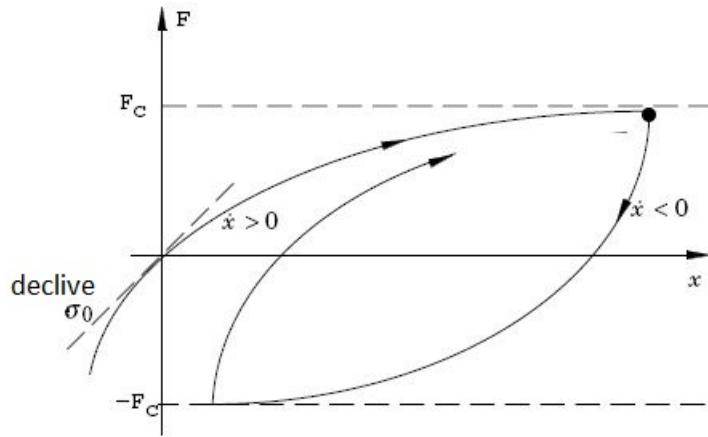


Figura 5.11. Exemplo do modelo Dahl

Vários outros modelos são descritos na literatura. Para um estudo mais detalhado veja-se, por exemplo, [22].

5.6.1 Exemplo 3 - Plataforma móvel simplificada com atrito nos veios dos motores

Se no modelo da dinâmica para o robot uniciclo simplificado, sem o termo da restrição não holonómica, descrito em (5.21), for considerado um atrito viscoso, correspondente à fricção gerada pela rotação dos veios dos motores em contacto com os respectivos apoios, o modelo é simplesmente alterado para

$$N_{\text{esquerda}} = \frac{h}{2} \left(m + \frac{I_{czz}}{2d} \right) \dot{\omega}_e + \frac{h}{2} \left(m - \frac{I_{czz}}{2d} \right) \dot{\omega}_d + \nu_e \omega_e$$

$$N_{\text{direita}} = \frac{h}{2} \left(m - \frac{I_{czz}}{2d} \right) \dot{\omega}_e + \frac{h}{2} \left(m + \frac{I_{czz}}{2d} \right) \dot{\omega}_d + \nu_d \omega_d$$

ou seja, cada actuator (motor) tem agora que gerar um torque adicional para compensar o atrito gerado pela rotação dos motores.

5.6.2 Exemplo 4 - Plataforma móvel simplificada com atrito no contacto com o chão

Em geral, na dinâmica do robot uniciclo ideal o atrito de fricção entre as rodas e o chão não é considerado. Um argumento para esta simplificação consiste em considerar a correspondente incerteza no modelo da dinâmica como sendo uma perturbação limitada. Utilizando as equações (5.21) para ilustrar a ideia,

$$\begin{bmatrix} N_{\text{esquerda}} \\ N_{\text{direita}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \left(m + \frac{I_{czz}}{2d} \right) & \frac{h}{2} \left(m - \frac{I_{czz}}{2d} \right) \\ \frac{h}{2} \left(m - \frac{I_{czz}}{2d} \right) & \frac{h}{2} \left(m + \frac{I_{czz}}{2d} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_e \\ \dot{\omega}_d \end{bmatrix} + \Delta(\omega_e, \omega_d) \quad (5.34)$$

com a incerteza na dinâmica verificando,

$$\|\Delta(\omega_e, \omega_d)\|_2 < \delta \quad (5.35)$$

O correspondente problema de controlo verifica-se qual o efeito da perturbação na velocidade de rotação de cada uma das rodas. Considere-se a função de Lyapunov $V(\omega_e, \omega_d) = \frac{1}{2}[\omega_e, \omega_d]H[\omega_e, \omega_d]^T$ com H uma matriz definida positiva. Substituindo, (5.34) na derivada obtém-se

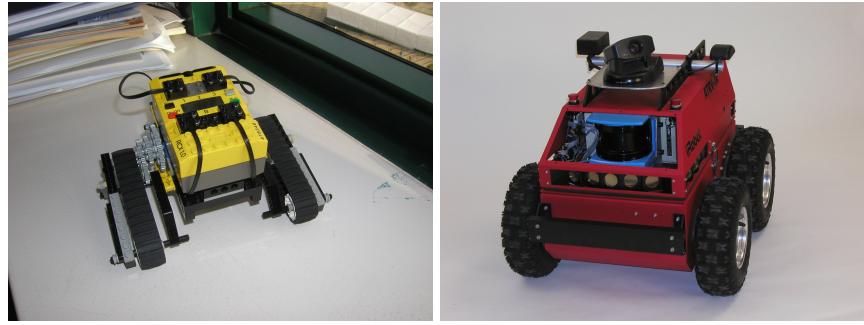
$$\dot{V} = HM^{-1}(N - \Delta)$$

Como M^{-1} é uma matriz simétrica, é sempre possível encontrar H diagonal tal que HM^{-1} é definida negativa (a demonstração é deixada como exercício). Basta que o controlo N se sobreponha sempre às perturbações para que $\dot{V} < 0$ e ficam garantidas as condições do teorema 2.1 (vide Secção 2.11). Na prática isto significa que existe um controlador capaz de fazer o sistema (5.34) atingir um ponto de equilíbrio estável, ou seja, de colocar as rodas a rodar a uma velocidade constante. Cabe ao controlador fazer com que a velocidade das rodas no equilíbrio seja a adequada à tarefa a desempenhar pelo robot. Assim, para níveis de actuação, N , suficientemente elevados a perturbação induzida pelo atrito pode ser desprezada.

Para operação em terrenos difíceis é comum substituir as rodas por lagartas como forma de aumentar a tracção. As Figuras 5.12a e 5.12c ilustram exemplo de robot com estrutura cinemática de tipo uniciclo usando lagartas e rodas laterais múltiplas. Para este tipos de robots o atrito influencia fortemente a dinâmica.

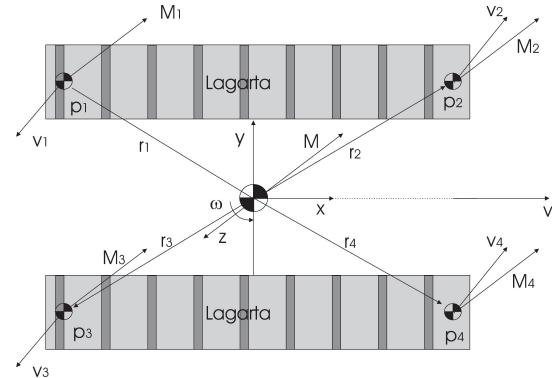
Para estes veículos a modelização precisa do atrito depende do tipo particular da lagarta e da forma como se faz o contacto com o solo. Em geral o modelo deverá considerar o escorregamento das lagartas sendo normal adaptar o modelo do uniciclo (vide por exemplo [21, 30, 31, 13]).

A Figura 5.12b mostra uma simplificação aplicável a ambos os exemplos. Considera-se que o peso M do robot se distribui pontualmente sobre 4 pontos, p_1, p_2, p_3, p_4 colocados nas extremidades das lagartas da Figura 5.12a ou correspondendo aos pontos de contacto das rodas com o solo, no caso da Figura 5.12c. Cada um destes pontos move-se de acordo com um vector velocidade linear v_i resultante das velocidades



(a) Robot com lagartas

(b) Robot com rodas laterais múltiplas



(c) (Vista de cima) principais grandezas físicas

Figura 5.12. Robot uniciclo com movimentação com escorregamento

linear e angular, v, ω , impostas ao veículo. Considerando apenas o atrito resultante da fricção entre os pontos p_i e o solo, cada ponto está sujeito a uma força de atrito

$$F_{\text{atrito}_i} = \mu \|M_i\| \frac{v_i}{\|v_i\|}$$

que deve ser equilibrada por um binário no centro de massa dado por

$$N_{\text{atrito}} = \sum_i F_{\text{atrito}_i} \times r_i \quad (5.36)$$

Assim, o modelo da dinâmica (5.21) pode ser complementado com o torque dado por (5.36)

$$N = M\omega + N_{\text{atrito}} \quad (5.37)$$

De notar que (5.37) não inclui a componente não-holonómica.

5.7 Comentários

Ao longo deste capítulo foram discutidos diversos modelos, utilizando diferentes aproximações. Claramente cada aproximação terá zonas de operação em que não é válida e portanto é fundamental proceder criteriosamente na escolha da técnica de modelização. O exemplo imediato é a aproximação das massas pontuais. Num exemplo em que seja clara a importância da dinâmica rotacional não é desejável usar esta simplificação.

Esta questão, quando vista de uma perspectiva mais abrangente, pode ser colocada na forma de: Qual o modelo da dinâmica adequado a uma dada utilização? Como exemplo, um robot uniciclo que se desloque lentamente em movimento de rotação e translação puras pode em muitas aplicações ser descrito por um modelo holonómico do tipo (4.13). No entanto se o robot for muito pesado este modelo não terá correspondência com a realidade. De facto pode ter-se uma situação em que o utilizador especifica uma velocidade tão elevada que requeira demasiada energia das baterias levando a que a trajectória desejada não possa ser realizada.

Robots com dinâmica mais complexa incluem, por exemplo, corpos flexíveis. Para uma análise mais completa vide [8, 2]

5.8 Exercícios

1. Como compatibiliza as abordagens de Newton-Euler e Lagrange ?

Sugestão: Admita que a energia cinética, T , depende exclusivamente de velocidades e que a energia potencial, U , depende exclusivamente de posições.

Dê um exemplo de um sistema em que as duas abordagens não sejam equivalentes. Será possível que tal sistema tenha realidade física ?

2. Verifique que o tensor de inércia, calculado no centro de massa, de um corpo rígido com massa pontual é a matriz nula.

3. Utilize o algoritmo iterativo de Newton-Euler para modelizar a dinâmica de um manipulador R (1 troço) considerando a acção da gravidade.

4. Prove que a energia cinética total de um robot não depende do referencial em que as velocidades estão calculadas.

5. Prove que a matriz de massas na equação geral da dinâmica de um robot tem uma estrutura simétrica.

Sugestão: Use a formulação de Lagrange para verificar a estrutura dos termos envolvendo acelerações.

6. Justifique a validade da inclusão dos efeitos dissipativos na equação da dinâmica através da estimação independente dos mesmos e adição directa na equação.

7. Considere o paralelepípedo da figura 5.13, com uma distribuição de massa uniforme mas com o orifício cilíndrico que se mostra.

Determine o tensor de inércia para um corpo deste tipo. As medidas exactas não são importantes (como curiosidade a figura 5.14 ilustra a estimação experimental da inércia deste corpo em ambiente laboratorial)

Sugestão: Escreva a expressão do tensor de inércia como uma decomposição do corpo e orifício.

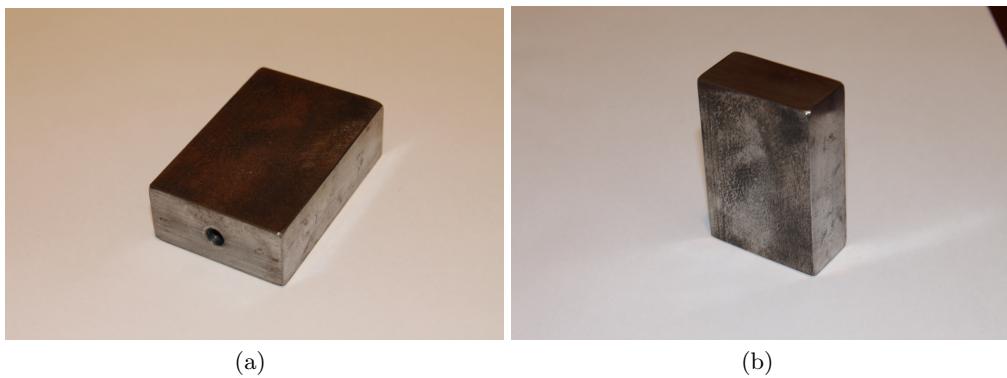


Figura 5.13. Corpo com orifício



Figura 5.14. Setup experimental para estimativa da inércia do corpo

Referências

1. V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 1989.
2. H. Baruh and V. Radisavljevic. Modeling of Closed Kinematic Chains With Flexible Links, 0000.
3. A.M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer, 2003.
4. G. Campion, G. Bastin, and B. D'Andréa-Novel. Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 12(1), February 1996.
5. V. Chabokov. *Spacecraft Attitude Dynamics and Control*. Krieger Publishing Company, 1991.
6. S. Chessé and G. Bessonnet. Optimal dynamics of constrained multibody systems. application to bipedal walking synthesis. In *Proc 2001 IEEE Int. Conf. Robotica and Automation*, 2001. Seoul, Korea, May 21-26.
7. John Craig. *Introduction to Robotics*. Addison-Wesley, 1989.
8. C.J. Damaren. On the Dynamics and Control of Flexible Multibody Systems with Closed Loops. *The International Journal of Robotics Research*, 19(3):238–253, 2000.
9. C. Canudas de Wit, P. Tsotras, E. Velenis, M. Basset, and G. Gissinger. Dynamic friction models for road/tire longitudinal interaction. *Journal of Vehicle and System Dynamics*, 39(3):189–226, 2003.
10. Danwei Di Carlo and A. Paoluzzi. Fast computation of inertia through affinely extended Euler tensor. *Journal of Computer-Aided Design*, 38:1145–1153, 2006.
11. M.R. Flannery. The enigma of nonholonomic constraints. *American Journal of Physics*, 73(3), March 2005.
12. C.W. Gear. Simultaneous Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations. *IEEE Trans. on Circuitry Theory*, 18(1), January 1971.
13. M. Giergiel, K. Kurc, P. Malka, T. Buratowski, and D. Szybicki. Kinematics of underwater inspection robot. *Pomiary Automatyka Robotyka*, (12), 2012.
14. Liu Jiafu, Rong Siyuan, Li Jianguo, and Cui Naigang. Attitude Dynamics Modeling and Control of Large Flexible Solar Sail Spacecraft. In *Procs. 3rd International Symposium on Systems and Control in Aeronautics and Astronautics (ISSCAA)*, 2010.
15. Fu Ke and J.K. Mills. A planar parallel manipulator - dynamics revisited and controller design. In *Procs. 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, (IROS 2005)*, pages 331–336, 2005. 2-6 Aug.
16. Waseem A. Khan, Venkat N. Krovi, Subir K. Saha, and Jorge Angeles. Recursive kinematics and inverse dynamics for a planar 3r parallel manipulator. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 127:529–536, December 2005.
17. L. Landau and E. Lifshitz. *Mecânica*. Mir, 1978.
18. P.C. Müller. Aspects of Modeling dynamical Systems by Differential-Algebraic Equations. In *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems: Methods, Tools and Applications in Engineering and Sciences*, volume 7, pages 133–143. 2001.

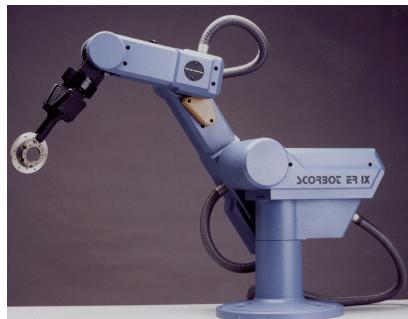
19. Hyunsam Myung, Ki-Lyuk Yong, and Hyochoong Bang. Hybrid Estimation of Spacecraft Attitude Dynamics and Rate Sensor Alignment Parameters. In *Procs. Int.l Conf. on Control, Automation and Systems*, October 17-20 2007. Seoul, Korea.
20. McClamroch N. Harris and D. Wang. Feedback Stabilization and Tracking of Constrained Robots. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 11(5), May 1988.
21. K. Nagatani, D. Endo, and K. Yoshida. Improvement of thee Odometry Accuracy of a Crawler Vehicle with Consideration of Sliuppage. In *Procs. ICRA 2007*, 2007.
22. H. Olsson, K. Aström, C. Canudas de Wit, M. Gafvert, and P. Lischinsky. Friction models and friction compensation, 2006. <http://www.control.lth.se/kja/friction.pdf>.
23. Chunlei Rui, Ilya V. Kolmanovsky, and N. Harris McClamroch. Nonlinear Attitude and Shape Control of Spacecraft with Articulated Appendages and Reaction Wheels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8), August 2000.
24. M.A. Santillo, N.A. Chaturvedi, N.H. McClamroch, and D.S. Bernstein. 3D Pendulum Experimental Setup for Earth-based Testing of the Attitude Dynamics of an Orbiting Spacecraft. In *Procs . American Control Conference (ACC '07)*, 2007.
25. E. Velenis, P. Tsotras, C. Canudas de Wit, and M. Sorine. Dynamic tire friction models for combined longitudinal and lateral vehicle motion. *Journal of Vehicle and System Dynamics*, 43(1):3–29, 2005.
26. Jiegao Wang and Clément M. Gosselin. A new approach for the dynamic analysis of parallel manipulators. *Journal Multibody System Dynamics*, 2(3):317–334, Sept. 1998.
27. David Williams. *Elements of Mechanics*. Oxford University Press, 1997.
28. E. Wilson, C. Lages, and R. Mah. On-line gyro-based, mass-property identification for thruster-controlled spacecraft using recursive least squares". In *Procs. 45th Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS-2002)*, volume 2, 2002.
29. E. Wilson, D.W. Shutter, and R.W. Mah. Motion-Based Mass and Thruster-Property Identification for Thruster Controlled Spacecraft. In *Procs. of AIAA InfotechAerospace Conference*, 2005. Arlington, VA, USA.
30. W. Yu, O.Y. Chuy Jr., E.G. Collins Jr., and P. Hollis. Analysis and Experimental Verification for Dynamics Modeling of a Skid-Steered Wheeled Vehicle. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(2), April 2010.
31. W. Yu, E. Collins, and O. Chuy. Dynamics Modeling and Power Modeling of Robotics Skid-Steered Wheeled Vehicles. In Zoran Gacovski (Ed.), editor, *Mobile Robotics - Current Trends*, pages 291–318. InTech, 2011.
32. Liu Yugang. *Kinematics, Dynamics and Intelligent Control for Nonholonomic Mobile Modular Manipulators*. PhD thesis, Faculty of Science and Technology, University of Macau, 2005.

6

Sensores e actuadores

6.1 Introdução

Os modelos de robots vistos nos capítulos anteriores, sejam eles manipuladores ou plataformas móveis (como os dois exemplos na Figura 6.1) necessitam de sensores e actuadores. Os sensores adquirem a informação relevante para a determinação das variáveis de estado adequadas. Por seu lado, os actuadores fazem a transposição das ordens vindas do sistema de comando e controlo do robot para o ambiente, ou seja, interagem directamente com o ambiente gerando a locomoção do robot.



Manipulador Scrbot ER9



Plataforma móvel uniciclo Nomad Scout

Figura 6.1. Robots típicos, com sensores

6.2 Sensores

Os sensores usados na Robótica são habitualmente classificados em duas categorias. Os *proprioceptivos* são usados para medir o estado (interno) do robot; os *heteroceptivos* usados para adquirir informação sobre o ambiente.

Entre os sensores proprioceptivos destacam-se os usados para a aquisição de informação de posição, velocidade, aceleração e força.

Relativamente aos heteroceptivos, distinguem-se os sensores de proximidade e distância como por exemplo de tacto, por ultrasons, infravermelhos, vídeo, força e por laser.

Por vezes usa-se a noção de sensor como sendo um dispositivo que já faz algum processamento sobre os dados que adquire do exterior. Por exemplo, imagine-se uma câmara de vídeo capaz de detectar pessoas que passam. Tal “sensor” é composto pela aquisição da informação em bruto, a imagem, e por um dispositivo que faz o processamento dessa imagem por forma a indicar se estão pessoas na imagem adquirida. Este tipo de sensores são por vezes chamados “inteligentes”.

Neste capítulo apenas se fará referência à componente do sensor que permite a aquisição de informação em bruto.

6.2.1 Potenciómetro - Resistência eléctrica variável

Estes sensores são intensivamente usados para medir a posição angular de um eixo de junta. São normalmente acoplados ao eixo do motor directamente ou através de engrenagens. Utilizam uma resistência eléctrica variável com a posição angular do eixo. A Figura 6.2 mostra um exemplo de um potenciómetro.



Figura 6.2. Potenciómetro

Em geral, a construção destes sensores limita o seu alcance angular. Os potenciômetros correntes admitem um deslocamento angular inferior a 360° . Em robots é normal o uso de potenciômetros multi-volta, admitindo deslocamentos superiores mas limitados. Em determinadas aplicações usam-se também

potenciômetros de deslocamento linear. Habitualmente, os limites de deslocamento restringem o uso à medição de posição angular ou linear.

6.2.2 Encoders ópticos

Estes sensores são usados para medir deslocamentos angulares. Apresentam a vantagem de não possuirem limites no seu deslocamento. Devido à quantização inherente ao seu princípio de funcionamento possuem um erro não nulo.

Existem dois tipos de encoders ópticos: incrementais e absolutos.

A Figura 6.3 ilustra o princípio de funcionamento dos encoders incrementais.

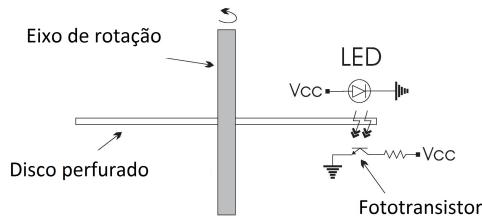


Figura 6.3. Princípio de funcionamento de um encoder incremental

A luz emitida pelo LED passa pelos orifícios estrategicamente colocados no disco solidário com o veio motor. A correspondente variação da corrente que percorre o fototransistor indica que o disco foi atravessado pela luz. Se os orifícios forem dispostos de forma conhecida ao longo da periferia do disco então o número de impulsos detectados pelo fototransistor é uma medida do deslocamento angular do disco e logo do próprio eixo relativamente ao qual está solidário. A Figura 6.4 mostra um exemplo de encoder incremental disponível comercialmente.



Módulo com os emissores e receptores de luz,
Hewlet-Packard HEDS-9730-A50



Disco codificado, Hewlet-Packard HEDS5120-A06

Figura 6.4. Encoder óptico incremental

Os encoders incrementais são construídos com, pelo menos, duas pistas desfasadas (Figura 6.5a). Cada uma destas pistas (ou canal) gera o seu próprio trem de impulsos (Figura 6.5b). A partir da sequência

de impulsos é possível distinguir se o eixo do disco está a rodar no sentido horário ou anti-horário. Estes encoders possuem ainda uma marca especial, chamada índice, que permite estabelecer uma referência inicial de posição angular.

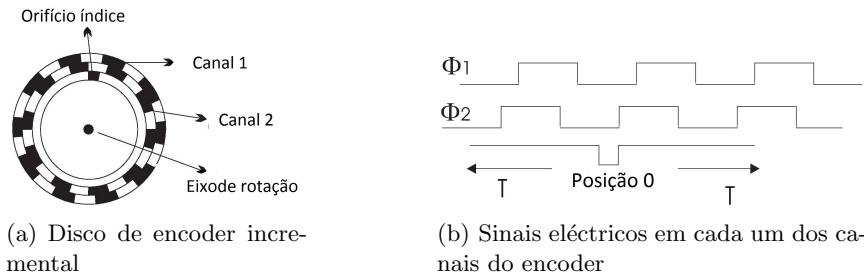


Figura 6.5. Encoder incremental

Uma rotação no sentido anti-horário conduz à sequência $(\Phi_1, \Phi_2) = (0, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (0, 0)$. Se a rotação for no sentido horário a sequência obtida é $(\Phi_1, \Phi_2) = (0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (0, 1)$.

A posição angular é obtida através do incremento/decremento de um contador por

$$\theta = \left(\sum \Phi^+ - \sum \Phi^- \right) \frac{360^\circ}{n^\circ\text{-ciclos}} 4 \mod 2\pi$$

A Figura 6.6 ilustra a colocação de um encoder incremental num robot Lego. O disco óptico visível na figura está acoplado directamente ao eixo da roda (e não ao eixo do motor) para minimizar as perturbações introduzidas pelas engrenagens de transmissão de movimento entre o motor e a roda (e.g., folgas e flexibilidade dos materiais).

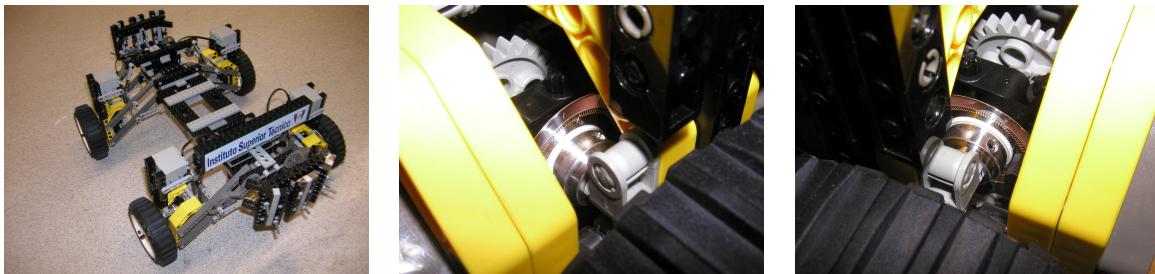
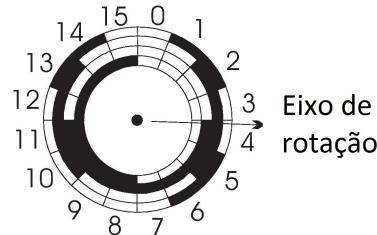


Figura 6.6. Exemplo da colocação de um encoder óptico incremental (com 512 pontos) num robot multi-usos

Uma das vantagens dos encoders incrementais é o possuirem apenas duas pistas, o que diminui o custo de fabrico. As principais desvantagens residem no facto de (i) erros na detecção dos impulsos em Φ_1 ou Φ_2 poderem requerer a espera pelo sinal de índice para re-iniciar o processo de contagem, e (ii) na resolução que, dependendo do processo de fabrico pode ser baixa.

Em alternativa aos encoders ópticos incrementais (ou relativos) existem os chamados encoders absolutos. O princípio de funcionamento baseia-se igualmente na detecção de uma fonte de luz que atravessa um disco em rotação e sobre o qual está gravado um sistema de pistas. A diferença para os encoders incrementais está no facto de a cada posição angular do veio do encoder corresponder uma combinação de bits única. A Figura 6.7 mostra um esquema de um disco de quatro pistas com código Gray¹. Este encoder tem uma resolução de $\frac{360^\circ}{16} = 22.5^\circ$



#	código	#	código	#	código	#	código
0	0 0 0 0	4	0 1 1 0	8	1 1 0 0	12	1 0 1 0
1	0 0 0 1	5	0 1 1 1	9	1 1 0 1	13	1 0 1 1
2	0 0 1 1	6	0 1 0 1	10	1 1 1 1	14	1 0 0 1
3	0 0 1 0	7	0 1 0 0	11	1 1 1 0	15	1 0 0 0

Figura 6.7. Disco de 4 pistas de um encoder óptico absoluto e respectivo código Gray

A fabricação de encoders absolutos é mais elaborada (e dispendiosa). Por exemplo para se obter uma resolução de 0.5° são necessárias 10 pistas (ou seja, $\frac{360}{0.5}$ sectores circulares que devem ser univocamente identificados - $2^9 < \frac{360}{0.5} < 2^{10}$). A principais vantagens deste tipo de encoders é que não necessitam de nenhum procedimento de inicialização nem de um sistema dinâmico (um integrador) para contabilizar os impulsos.

A Figura 6.8 mostra dois exemplos de encoders ópticos absolutos. O dispositivo da esquerda possui uma resolução de 13 bits (13 pistas) enquanto que o da imagem à direita possui uma resolução de 25 bits.



Figura 6.8. Encoders ópticos absolutos

¹ Entre números consecutivos apenas varia um bit.

6.2.3 Sensores de velocidade

A velocidade de rotação de um eixo ou de uma junta pode ser obtida a partir de um sinal de posição adquirido através de um encoder ou directamente através de um sensor de velocidade de rotação, ou taquímetro. Entre os dispositivos que medem directamente velocidades de rotação destacam-se os baseados em motores eléctricos DC e os baseados em motores AC ou *resolvers*.

Os taquímetros DC utilizam o princípio da reversibilidade dos motores DC. Quando o veio de um motor DC é colocado em rotação desenvolve-se uma tensão eléctrica aos seus terminais. Por construção adequada é possível obter um comportamento linear (i.e., em que a tensão de saída varia lineramente com a rotação do veio).

Os taquímetros AC, ou resolvers, são baseados em motores eléctricos AC. A Figura 6.9 ilustra o princípio de funcionamento. Quando excitados com uma tensão AC apropriada, a amplitude da tensão medida no estator é proporcional à velocidade de rotação do rotor

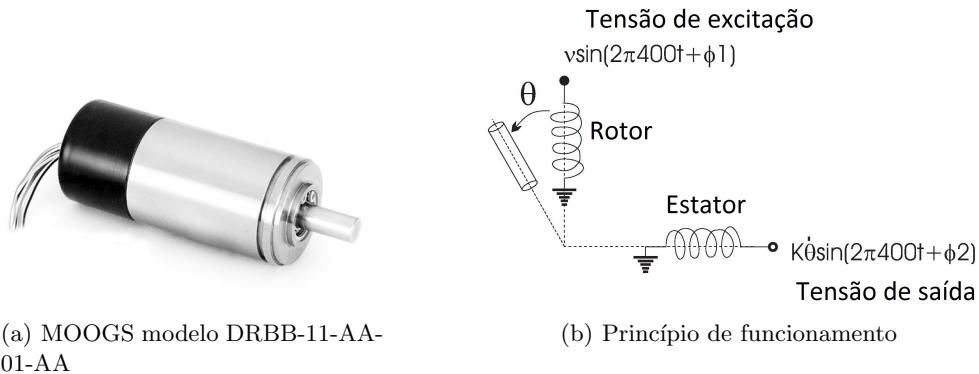


Figura 6.9. Resolver para medição de velocidade de rotação

6.2.4 Sensores de força

Os sensores de força são construídos a partir de materiais em que a resistência eléctrica varia com a tensão mecânica a que estão sujeitos. Estão neste caso os materiais piezoeléctricos, um composto de carbono denominado Inastomer, [7], materiais compostos por eléctrodos condutores colocados entre camadas de poliéster, [5] e materiais cuja capacidade varia com a aceleração, [4].

A Figura 6.10 mostra alguns exemplares de sensores de força. Para melhorar a sensibilidade o sensor é habitualmente ligado em ponte de Wheatstone (R_1 ou R_2 ou R_3 ou R_4 são resistências variáveis com a

tensão mecânica²). Combinando várias destas pontes podem obter-se sensores de força segundo os 3 eixos coordenados.

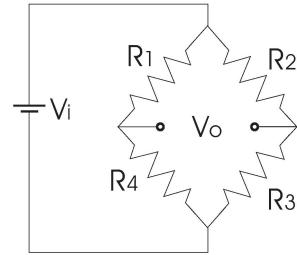
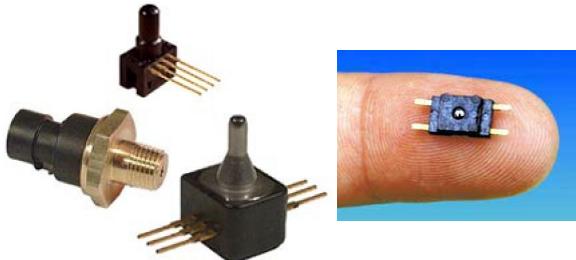


Figura 6.10. Sensores de força

6.2.5 Acelerómetros

Estes sensores são usados para medir acelerações. Existem em diversos formatos e com diferentes princípios de funcionamento. O princípio físico mais simples que pode ser usado para medir acelerações consiste em medir o deslocamento de uma massa ligada a uma mola (sistema massa-mola) e usar a 1^a Lei de Newton, $F = m a$, e um sensor adicional para medir a força F , onde m é uma massa que se pode assumir conhecida e a a aceleração. Este sensor adicional é simplesmente uma mola. Em condições razoáveis, o modelo de funcionamento de uma mola é bem aproximado por $F = k \Delta x$, em que F é a força exercida na mola, Δx o deslocamento (compressão ou extensão) da mola, e K a constante de proporcionalidade entre o deslocamento observado e a força exercida.

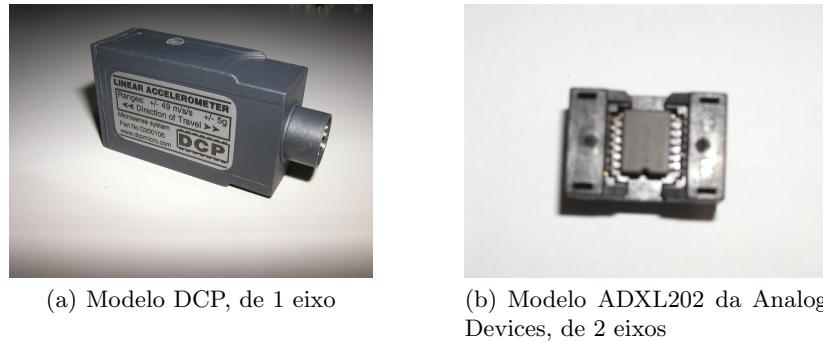
Igualando $m a = K \Delta x$, obtém-se facilmente a em função do deslocamento Δx da mola. Medindo este deslocamento, por exemplo com uma resistência eléctrica variável, obtém-se a aceleração.

Os efeitos piezo-eléctrico (geração de energia eléctrica quando o material é sujeito a uma deformação) e piezo-resistivo (variação da resistência eléctrica com a deformação) são mais usados como princípio de funcionamento em acelerómetros comerciais.

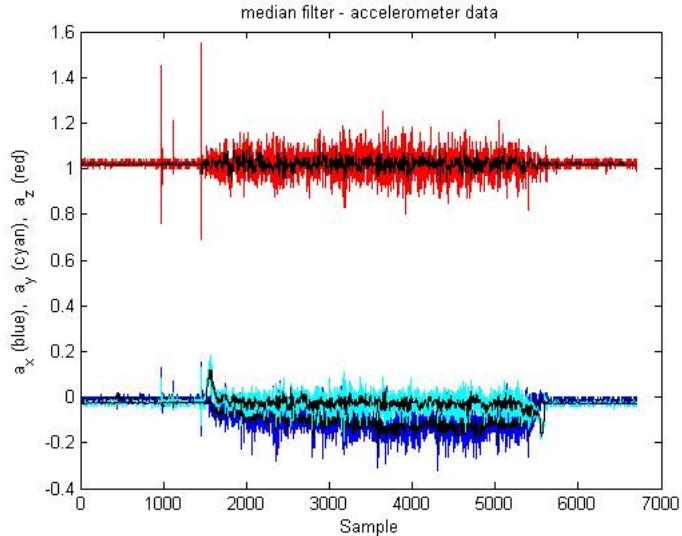
Os sensores de baixo custo disponíveis comercialmente são essencialmente sensores de força utilizando materiais piezoeléctricos. A Figura 6.11 mostra dois exemplos. No lado esquerdo pode ver-se um sensor de 1 eixo, i.e., que apenas mede acelerações segundo 1 direcção (neste caso segundo o eixo longitudinal do invólucro). O sensor no lado direito combina dois sensores de 1 eixo e mede acelerações segundo 2 direcções perpendiculares.

A figura 6.12 mostra os sinais correspondentes a um conjunto de 3 acelerómetros montados segundo eixos ortogonais. Este conjunto de acelerómetros é feito percorrer uma trajectória circular, no plano horizontal.

² O leitor é convidado a explorar as várias combinações possíveis.

**Figura 6.11.** Acelerómetros

O(A) leitor(a) deverá ser capaz de identificar qual dos eixos tem a direcção vertical, a direcção do movimento, e a direcção perpendicular à direcção de movimento.

**Figura 6.12.** Sinais típicos de um conjunto de 3 acelerómetros em movimento segundo uma trajectória circular no plano horizontal

Como se pode ver na figura, os valores da aceleração em qualquer das três direcções são bastante ruidosos. Em geral, é boa prática tentar filtrar (i.e., reduzir o mais possível) este ruído antes de usar estes sinais. Os sinais a preto sobrepostos correspondem às versões filtradas dos sinais representados a cores. Repare-se que a filtragem permite eliminar medidas que com toda a probabilidade estão erradas, e.g., os picos no acelerómetro colocado segundo o eixo zz (sinal a vermelho) que se pode observar no início do movimento.

6.2.6 Sensores de campo magnético

Os sensores de campo magnético dão as componentes locais do vector campo magnético da Terra. No essencial são bussólas montadas segundo eixos ortogonais. Existem vários princípios de funcionamento. Um dos mais comuns é o chamado efeito de Hall, em que uma voltagem pode ser observada quando uma folha metálica é colocada perpendicularmente a um campo magnético forte.

A figura 6.13 ilustra de que forma as 3 componentes do vector campo magnético, observadas directamente pelo magnetómetro, variam ao longo da mesma trajectória circular utilizadas para o acelerómetro e giroscópio.

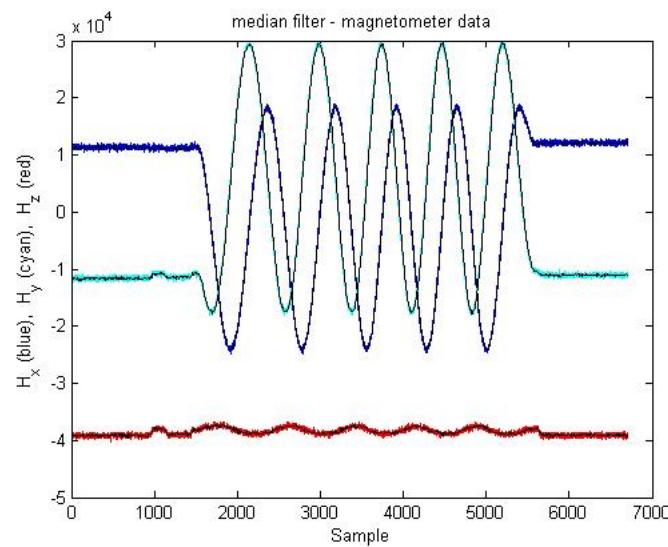


Figura 6.13. Sinais típicos de um magnetómetro

Note-se o carácter sinusoidal destas componentes, indicando precisamente que a trajectória seguida é circular. Tal como nos sensores anteriores, o ruído é claramente visível.

6.2.7 Giroscópios

O giroscópio é um dispositivo que permite medir desvios de orientação relativamente a um referencial inercial. A Figura 6.14 ilustra os componentes principais de um giroscópio.

Uma massa, relativamente elevada, é colocada numa estrutura mecânica que lhe permite movimentar-se em torno dos três eixos de um sistema de coordenadas colocado na estrutura. Quando a massa é colocada em rotação adquire um determinado momento angular. A lei de conservação do momento angular

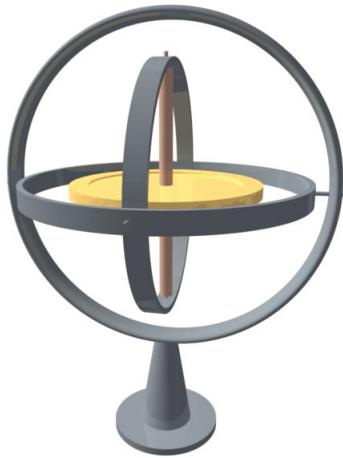


Figura 6.14. Giroscópio elementar para demonstração do conceito (fonte: www.sciencekids.co.nz/pictures/physics/gyroscope.html)

é o princípio de funcionamento de um giroscópio; um corpo em movimento num sistema isolado tende a conservar o correspondente momento angular. Quando perturbado, um giroscópio tende a compensar a perturbação. A magnitude das forças geradas nesta compensação permite determinar o desvio relativamente à situação inicial.

Uma variante do giroscópio, denominada rate-gyro, permite medir velocidades de rotação em redor dos eixos de um referencial. A Figura 6.15 ilustra dois modelos de giroscópios disponíveis comercialmente.



Giroscópio de orientação da XSens Motion Technologies, modelo MTi



Rate-gyro Silicon Sensing Systems Japan, modelo CRS03

Figura 6.15. Giroscópios

A Figura 6.16 exemplifica os sinais obtidos de um rate-gyro SparkFun PS-ITG-3200 numa trajectória circular. Este sensor engloba acelerómetros e rate-gyros em 3 eixos e magnetómetro.

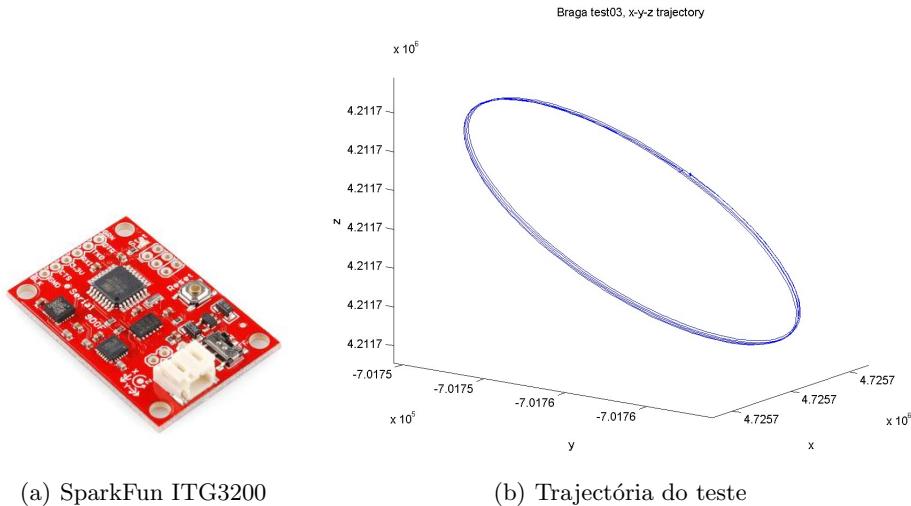


Figura 6.16. Sensor de baixo custo e trajectória circular de teste

As velocidades angulares segundo cada um dos eixos coordenados do sensor estão representadas na Figura 6.17a ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$ respectivamente em azul, anil, vermelho). Para comparação mostram-se sobrepostos os sinais filtrados por um filtro RC de ordem 2.

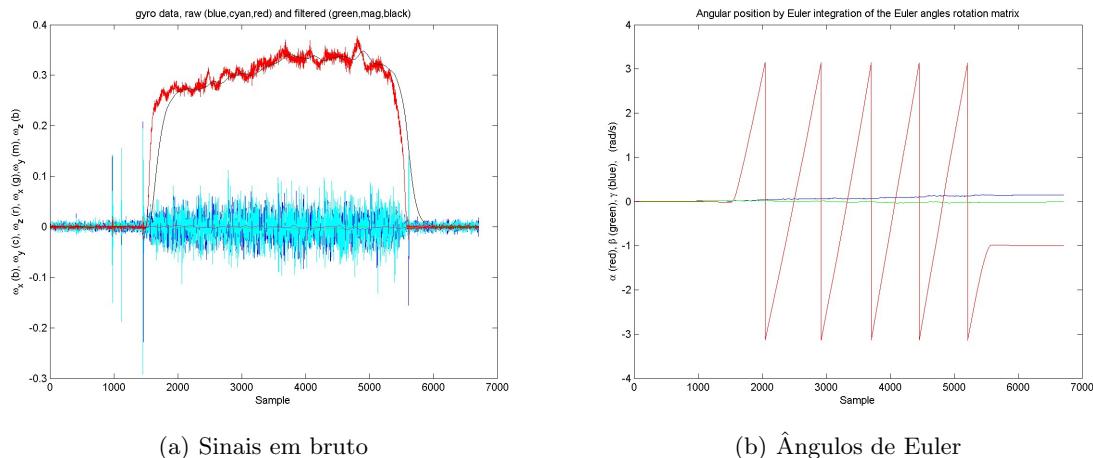


Figura 6.17. Sensor rate-gyro e sinais obtidos

Os ângulos de Euler da orientação do sensor, correspondentes aos sinais observados directamente do sensor $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, são calculados usando integração de Euler para calcular a evolução temporal de uma matriz de rotação R_k .

$$R_{k+1} = \left(\mathbb{I}_3 + h \begin{bmatrix} -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 \\ -\omega_y & \omega_x \end{bmatrix} \right) R_k \quad (6.1)$$

onde k é o índice correspondente ao instante de amostragem, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ são os valores medidos pelo rate-gyro para os eixos x, y, z , h é o intervalo de tempo entre amostras, e \mathbb{I}_3 a matriz identidade de ordem 3.

Utilizando as expressões (2.24) e (2.25) obtém-se facilmente os valores para os ângulos de Euler, convenção $z-y-x$, da Figura 6.17b. A evolução de α, β, γ é compatível com uma trajectória circular (o número total de circumferências efectuadas durante o teste é claramente visível na figura). Note-se ainda o pequeno desvio em γ no final do teste devido à integração do ruído do sensor.

6.2.8 Sensores para nanopositionamento

A nano-robótica constitui actualmente uma área em grande expansão. A crescente miniaturização dos componentes electrónicos tem permitido desenvolver sensores para nano-posicionamento aproveitando as propriedades de algumas classes de materiais.

Nos chamados *materiais electroactivos* o funcionamento utiliza o efeito piezo-eléctrico em que uma tensão mecânica produz a polarização de um material dielétrico gerando-se um campo eléctrico. O PZT é uma cerâmica baseada em Chumbo (P) e óxidos de Zircónio (Z) e Titânia (T) capaz de exibir efeito piezo-eléctrico. Com este material conseguem-se precisões da ordem do picómetro (10^{-12} metros).

A técnica de *micrometria de capacidade* permite fazer medições sem haver contacto físico. Utiliza o princípio de que a impedância de um condensador varia quando a carga ou o espaço entre placas variam (identificando as placas do condensador com os objectos entre a distância a medir). Entre os materiais comuns destacam-se o Invar (liga metálica) e o Zerodur (cerâmica de vidro). As capacidades típicas são da ordem de 2pF, obtendo-se precisões da ordem de 10^{-14} (10000 vezes menor que 1 átomo).

Na gama de sensores da Figura 6.18, fabricados em Super Invar e disponíveis comercialmente, usa-se micrometria de capacidade para obter resoluções melhores que $0.1\mu\text{m}$. Estes sensores possuem uma extensão máxima de 1.25mm e largura de banda de 5kHz.

6.2.9 Ultrasons

Os sensores de ultrasons são actualmente de uso comum em variadas aplicações não directamente ligadas à Robótica. O custo relativamente baixo torna-os ideais para uso como sensores de intrusão em alarmes e de proximidade em, por exemplo, automóveis.



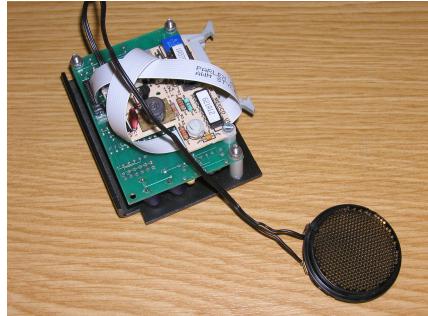
Figura 6.18. Sensores para nanoposicionamento Queensgate NX Series

O princípio de funcionamento do sonar (ou sensor de ultrasom para medição de distância) consiste na medição do intervalo de tempo que um impulso de som demora a ser recebido junto da fonte que o emitiu. Usando relações conhecidas para a velocidade do som em diferentes meios obtém-se a distância percorrida pelo impulso sonoro. Para o caso do ar a velocidade do som pode ser aproximada por, [3],

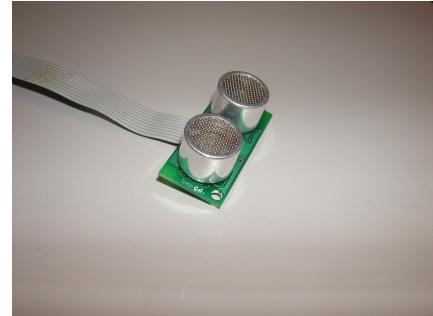
$$c_{ar} = 331.5 + 0.6T, \quad \text{em m/s.}$$

onde T é a temperatura ambiente (em graus Celsius).

A Figura 6.19 mostra dois tipos de sensores de ultrasons de baixo custo. O sonar da Polaroid opera a 50 kHz enquanto que o da Devantech opera a 40 kHz. A gama de distância utilizável é de cerca de 2.5cm-15m para o Polaroid e 3cm-3m para o Devantech.



(a) Sonar Polaroid Série 600



(b) Sonar Devantech SRF05

Figura 6.19. Sensores de ultrasons

A Figura 6.20 mostra os diagramas de radiação para os dois sensores da Figura 6.19. Os diagramas apresentados (a duas dimensões) representam um corte horizontal na superfície em que a atenuação do feixe é de -6 dB. O diagrama tridimensional é do tipo cónico.

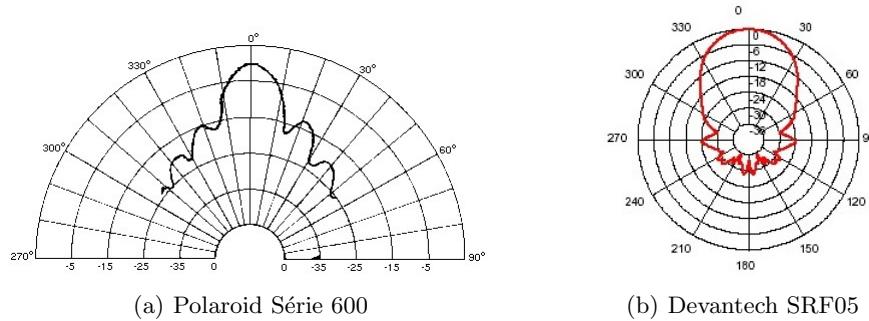


Figura 6.20. Diagramas de radiação de sensores ultrasónicos comuns

Os lobos de radiação da figura mostram as zonas em que a intensidade de energia radiada pelo sensor tem um dado valor. Ao longo da direcção radial a linha mostra a potência radiada em função da distância à fonte. A direcção angular indica a forma como um mesmo nível de potência se dispersa.

Na modelação matemática de um sonar é especialmente importante ter em conta a representação da incerteza da medição. O modelo em [8] usa uma distribuição gaussiana para atribuir uma probabilidade a cada medição. A Figura 6.21 ilustra a ideia do modelo. A partir da fonte, o feixe de ultrasons percorre um sector circular com abertura ω e qualquer objecto colocado no correspondente sector de coroa circular entre a distância $O - \epsilon$ e $O + \epsilon$ dá origem a uma medição com valor O .

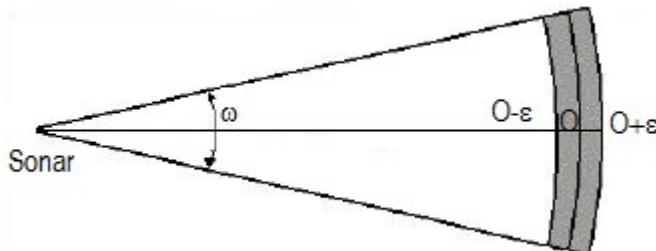


Figura 6.21. Modelo simples de um sonar

Se ϵ for interpretado como o desvio padrão de uma distribuição normal com média O então este modelo corresponde a sobrepor uma distribuição de probabilidade normal centrada em cada ponto do arco com raio O . Pode facilmente estender-se esta ideia e tornar esta distribuição bi-varável, em O e ω , por

exemplo, colocando a média em $(O, 0)$ e os desvios padrão em $(\epsilon, \omega/2)$ (assumindo uma matriz de covariância diagonal³.

Este modelo captura com razoável qualidade as incertezas nas observações e é por vezes usado na construção de mapas de ambiente a partir de informação de ultrasons. O princípio destes mapas consiste em dividir o sector circular numa grelha e atribuir a cada célula uma probabilidade de ocupação calculada de acordo com a distribuição escolhida para o modelo do sonar. Este assunto será novamente abordado no Capítulo ??.

As medições obtidas com sonares estão sujeitas a perturbações importantes (para além do ruído eléctrico que o próprio sensor e a electrónica associada introduzem. Em geral, um feixe de ultrasons ao embater numa superfície é reflectido parcialmente como se de uma colisão elástica se tratasse (reflexão especular) ou é reflectido de tal forma que o feixe dispersa em várias direcções (reflexão difusa). A Figura 6.22 ilustra as duas formas de reflexão.

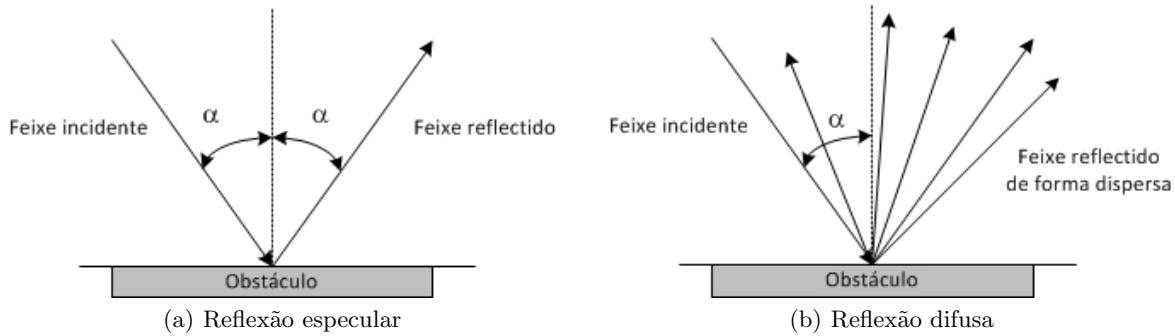


Figura 6.22. Tipos de reflexões de um feixe de ultrasons.

O tipo de difusão depende da frequência do ultrasom e do tipo de superfície sobre a qual o feixe incide. Superfícies muito lisas tendem a gerar reflexões especulares enquanto que superfícies rugosas são mais propícias a gerar reflexões difusas. Algumas superfícies com padrões regulares podem inclusive absorver por completo o feixe incidente e não permitir a reflexão. As superfícies interiores das câmaras anecóicas são revestidas com materiais com esta propriedade.

A Figura 6.23 ilustra um mapa horizontal de um ambiente real realizado através das medidas obtidas com sensores de ultrasons Polaroid (do tipo mostrado na Figura 6.20a) e sem qualquer processamento adicional. Note-se a dificuldade em fazer corresponder os pontos do mapa de distâncias ao ambiente real.

Os sonares da Figura 6.19 destinam-se à operação terrestre, onde o meio de propagação do som é o ar. Em aplicações marítimas usam-se sonares na gama 100kHz-2400kHz. A Figura 6.24 mostra imagens de um pneu no fundo do mar (a) e do submarino U-166 (b).

³ Qual seria a interpretação no caso da covariância não ser diagonal ?

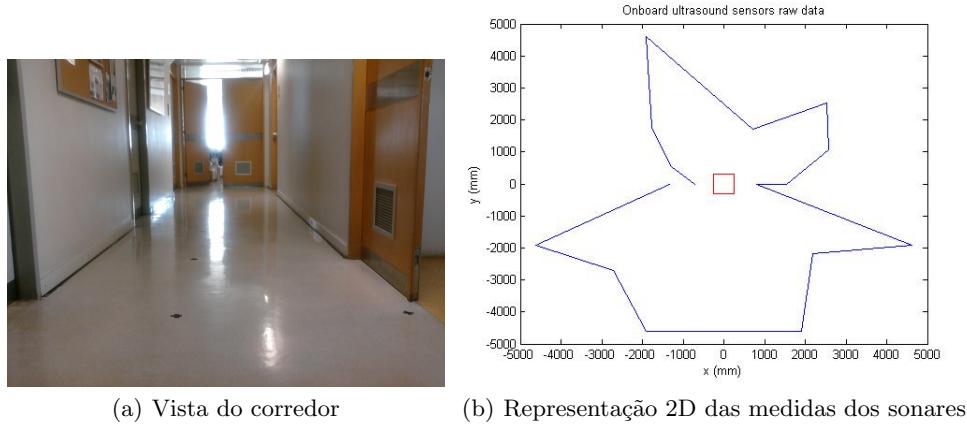


Figura 6.23. Medidas obtidas com um conjunto de sonares num corredor

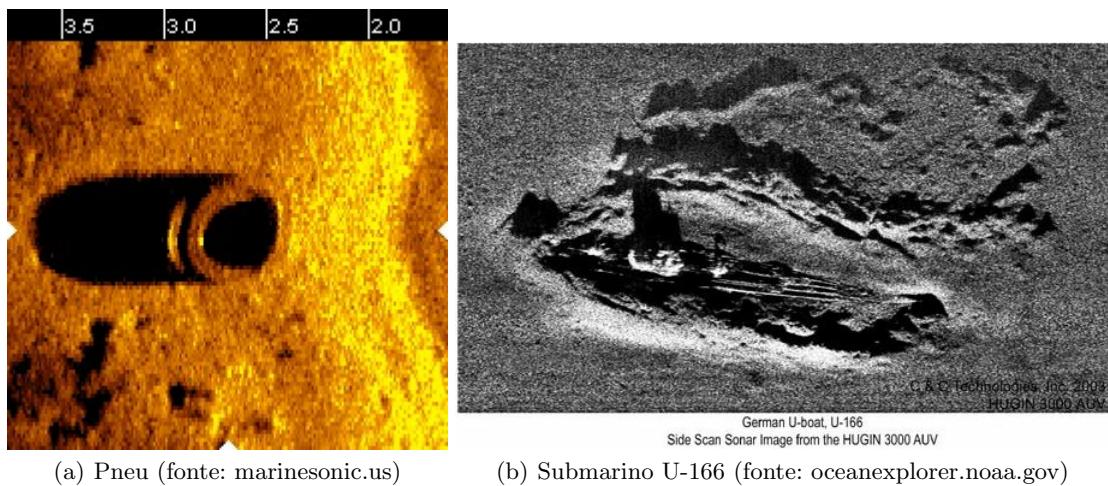


Figura 6.24. Imagens de distância obtidas através de sonares marítimos de varrimento lateral

6.2.10 Sensores de distância por infravermelhos

A medição de distâncias pode ser feita recorrendo à emissão/recepção de um feixe de infravermelhos. Estes sensores são constituídos por um LED emissor de luz e um fotodíodo para recepção. A distância percorrida é estimada através energia reflectida que atinge o fotodíodo.

Os sensores da Figura 6.25 operam com um comprimento de onda na região dos 940 nm (região infravermelha do espectro) e são capazes de medir distâncias na gama 0-60mm.



Figura 6.25. Sensores de proximidade por infravermelhos, HSDL-9100-021 da Avago Technologies

De notar que estes sensores podem também ser modelados com a mesma técnica dos sonares (vide Figura 6.21).

6.2.11 Sensores de distância através de laser

Este tipo de sensores são habitualmente chamados *laser range finders*. O princípio de funcionamento mais comum consiste em medir o tempo-de-voo entre a emissão e a recepção da luz laser. Dado que a velocidade da luz é bastante elevada, medir distâncias pequenas com estes sensores requer electrónica sofisticada. Estes sensores conseguem precisões milimétricas em distâncias de várias dezenas de metros. Além disso são menos susceptíveis a leituras erradas por reflexões.

A Figura 6.26 ilustra um dos modelos mais usados em robots, [1]. Este modelo possui um sistema de espelhos móvel que permite ao feixe de luz laser fazer um varrimento de 180°. O sistema transmite os dados relativos às medições através de uma linha série RS232/RS422.

O sistema SICK LMS 200 mede a distância usando o “tempo-de-voo” do feixe de luz, i.e., medindo o intervalo de tempo entre a emissão de um impulso de luz e a recepção da correspondente reflexão. Possui uma resolução angular de 0.25° e resolução linear entre 0.1 e 10 mm para um alcance útil entre 4 e 80 m (dependente da reflectividade dos materiais e da precisão).

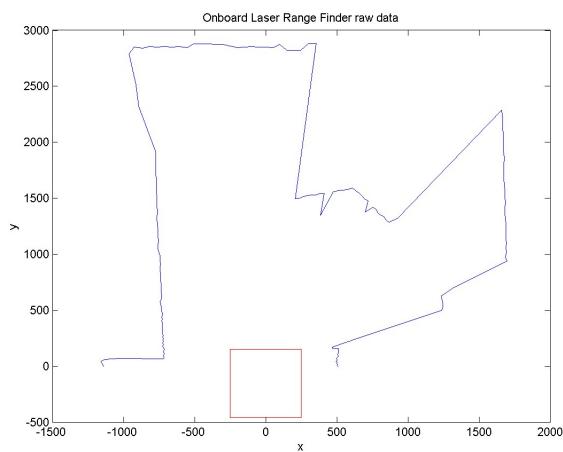
A Figura 6.27 ilustra um mapa horizontal obtido com um LRF de um ambiente real. A correspondência entre os pontos do mapa de distâncias e o ambiente real é neste caso imediata (comparam-se os mapas de distância obtidos com sensores de ultrasons e com o laser range finder).

A figura 6.28 ilustra um outro conjunto de medidas obtidas num corredor usando um LRF Sick LMS 200 colocado num robot móvel uniciclo Pioneer AT.

É visível que as medidas de distância obtidas com o LRF proporcionam uma imagem do ambiente que rodeia o robot bastante mais fiel do que as obtidas com os ultrasons. Também são bastante visíveis as pequenas perturbações nas medições. Por exemplo, repare-se que as paredes do corredor não são comple-



Figura 6.26. Laser range finder SICK LMS200



(a) Mapa de distâncias



(b) Ambiente real

Figura 6.27. Exemplo de mapa de distâncias usando as medidas em bruto obtidas com um SICK LMS 200

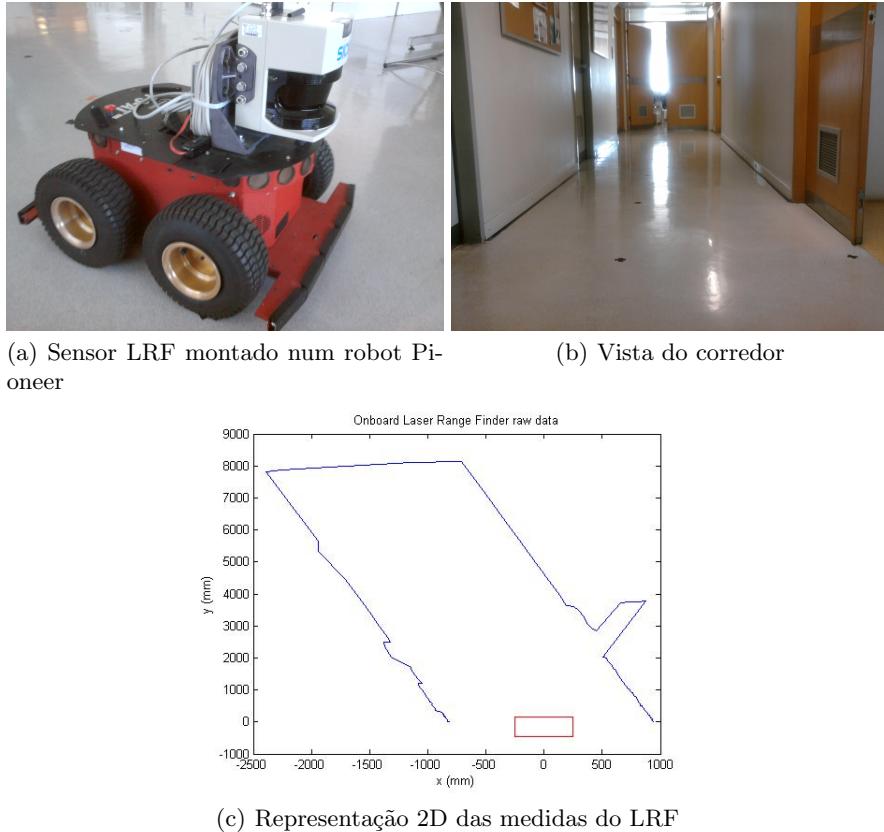


Figura 6.28. Medidas obtidas com um LRF num corredor

tamente regulares. Podem notar-se pequenas variações ao longo das superfícies planas correspondendo ao ruído de observação.

A figura 6.29 mostra um outro LRF de grande utilização usado por múltiplos robots. Este sensor retorna um conjunto de medidas correspondentes a um varrimento angular de 270° , com uma resolução de 0.25° e um alcance de 30 metros.

6.2.12 Imagem

As câmaras de vídeo são dos sensores mais utilizados na Robótica. A variedade de técnicas de processamento de imagem disponíveis permitem extrair diferentes tipos de informação de uma imagem, e.g., a velocidade de um objecto, ou um modelo da sua forma geométrica.

Os modelos disponíveis comercialmente possuem uma enorme diversidade de características. A Figura 6.30 mostra dois modelos de baixo custo.

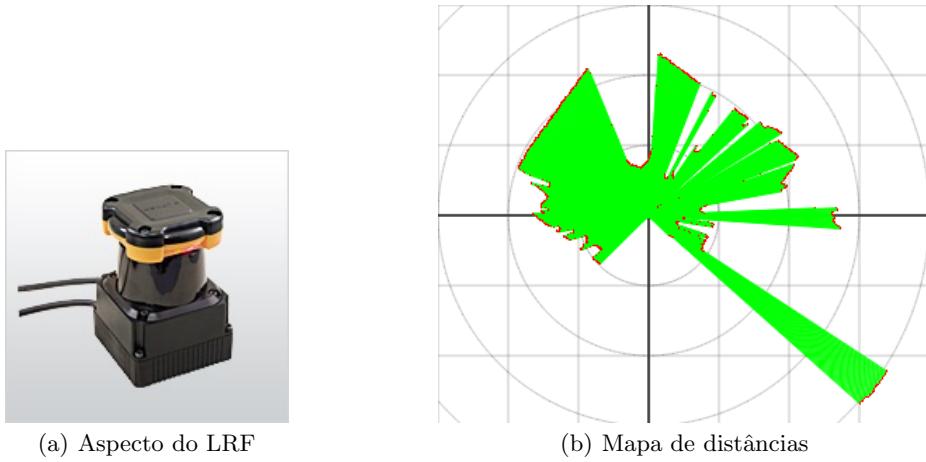


Figura 6.29. Sensor LRF Hokuyo UTM30-LX

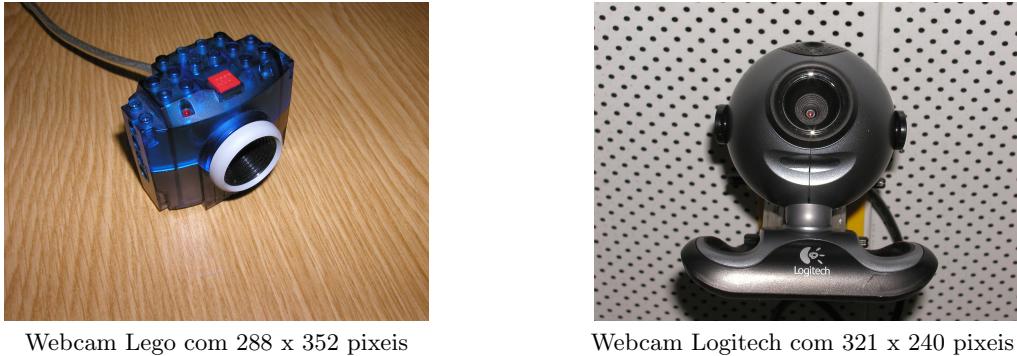


Figura 6.30. Mini-câmeras de vídeo

Este tipo de sensores devolve uma matriz com as dimensões da imagem correspondente. Cada entrada desta matriz é um ponto num espaço tridimensional que permite codificar a cor detectada pelo pixel associada a essa posição.

Habitualmente usam-se três tipos de espaços para codificar a cor. O espaço RGB codifica cada cor utilizando as cores primárias, vermelho, verde e azul. Cada coordenada neste espaço contém a quantidade da correspondente cor primária num valor entre 0 e 1. Como exemplo, no espaço RGB o branco, preto e cobre correspondem aos pontos $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$ e $(1, 0.62, 0.40)$, respectivamente.

O espaço HSV codifica cada cor através do tom, saturação e brilho. As três coordenadas tomam valores entre 0 e 1. Quando o tom varia entre 0 e 1 a cor varia entre o vermelho, amarelo, verde, azul, violeta e, de novo, vermelho. A saturação permite variar a quantidade de branco da cor entre o valor máximo, no 0, e o mínimo, no 1. O valor 0 para a saturação corresponde ao tom de cinzento associado à cor. O brilho mínimo corresponde ao valor 0 para a terceira coordenada deste espaço.

O espaço YCbCr codifica cada cor através de luminância, (Y), e crominância nas componentes azul, (Cb), e vermelha, (Cr), sendo que estas componentes são de facto diferenças para valores de referência.

Estes espaços são equivalentes, possuindo cada um deles vantagens específicas dependentes do processamento a efectuar sobre a imagem.

A detecção de cores primárias é simplificada no espaço RGB. Para detecção de uma cor específica é preferível usar o espaço HSV já que a cor está codificada apenas em 1 coordenada. O espaço YCbCr é especialmente útil em vídeo digital porque permite maior compressão de imagens sem perda aparente de qualidade. O princípio subjacente é de que o olho humano é mais sensível a variações de branco e preto, contidas na coordenada de luminância, do que a variações de cor, contidas nas coordenadas de crominância.

Sensores mais sofisticados, como os de tipo Kinect devolvem imagens ópticas, em formato RGB, e imagens de profundidade, i.e., em que cada pixel representa uma distância entre o sensor e o obstáculo em linha de vista. A figura 6.31b ilustra a nuvem de pontos obtida no cenário ilustrado na figura 6.31a.

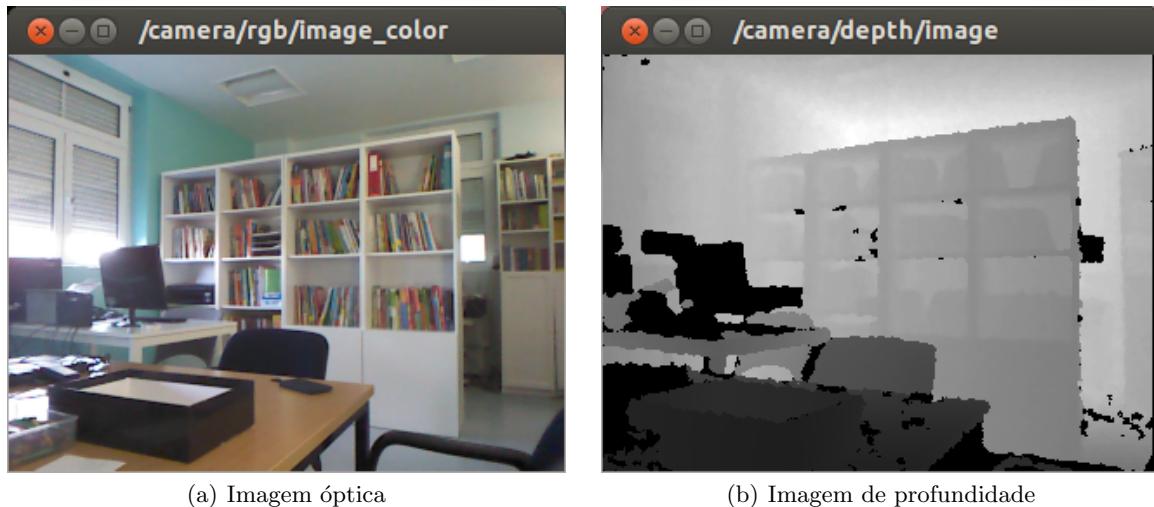
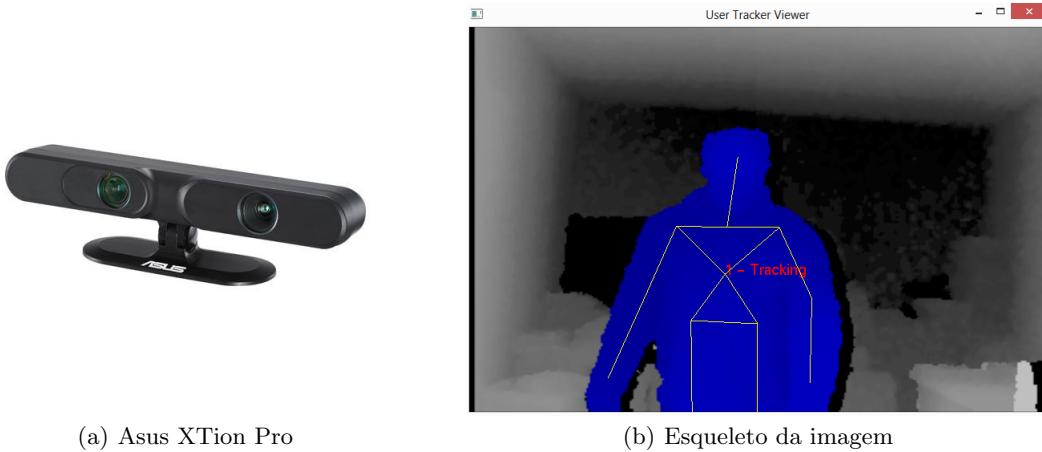


Figura 6.31. Câmara RGBD

A combinação dos dois tipos de imagem tem múltiplas utilizações, e.g. podem ser usados como sensores de pessoas. A figura 6.32 mostra um “esqueleto” detectado através das imagens obtidas por um sensor deste tipo.

**Figura 6.32.** Detecção de pessoas

6.2.13 Sistema de Posicionamento Global (GPS)

O sistema de posicionamento global é constituído por uma rede de satélites colocados em órbita terrestre em posições geo-estacionárias. Conhecendo a distância entre o receptor terrestre e cada um dos satélites e a respectiva posição real é possível estimar com bastante precisão a posição do receptor. Em termos formais tem-se (vide por exemplo [2, 10]),

$$r_i = \sqrt{(x - x_{s_i})^2 + (y - y_{s_i})^2 + (z - z_{s_i})^2} + c\delta t, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.2)$$

onde (x, y, z) é a posição do receptor, n é o número de satélites, $(x_{s_i}, y_{s_i}, z_{s_i})$ a posição do satélite i , c a velocidade da luz e δt um offset temporal devido à não completa sincronização entre os relógios internos do receptor e dos satélites. De notar que o modelo (6.2) é muito simples, não incluindo ruído.

A posição (x, y, z) pode ser obtida minimizando um erro quadrático médio entre as distâncias r_i e as estimativas obtidas a partir do lado direito de (6.2). A precisão nominal deste sistema é da ordem de 1m.

Este modelo pode ainda ser complementado com informação obtida a partir de receptores terrestres com posições conhecidas, obtendo-se precisões nominais da ordem dos 10cm.

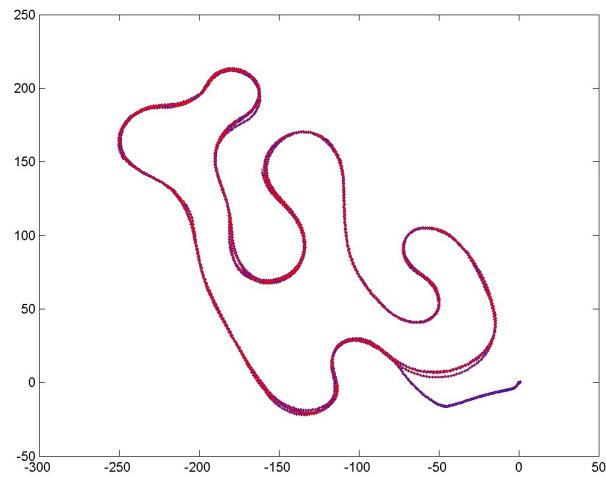
6.2.14 Sistema de Detecção/Identificação por Rádiofrequência (RFID)

6.2.15 Código QR

O sistema de código QR (*Quick Response*) estende a ideia do código de barras a duas dimensões. No essencial, um código QR é uma matriz quadrada em que cada posição é codificada com valores binários,



(a) Antenas GPS NOVATEL

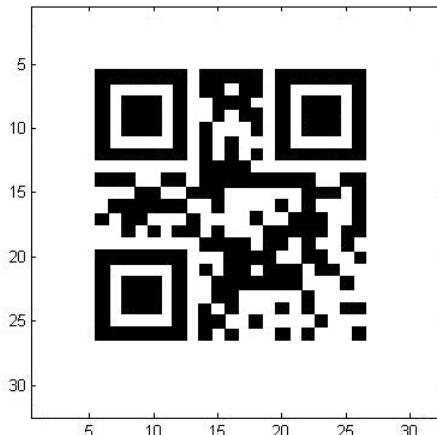


(b) Mapa GPS

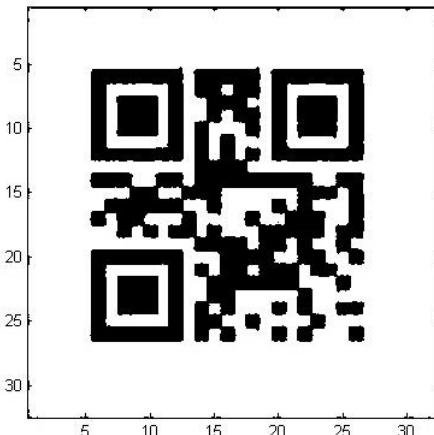
Figura 6.33. Exemplo de mapa obtido directamente com medidas GPS

e.g., 0/1 ou branco/preto. Marcações especiais definem um referencial da matriz que permite calcular a orientação do código relativamente ao observador (vide por exemplo [6] para aspectos de implementação).

A figura 6.34 ilustra um código QR que codifica a palavra “Robotica”. O ruído visível na imagem (b) não constitui problema para o algoritmo de descodificação (note-se o ruído nas fronteiras das células que formam a matriz e os eixos que não fazem parte do código).



(a) Imagem sem ruído



(b) Imagem com ruído

Figura 6.34. Código QR para a palavra “Robotica”

O código da imagem da figura tem resolução 32x32. Maiores resoluções permitem a representação de informação mais complexa, sendo ainda possível expandir esta capacidade através da utilização de cores na codificação do conteúdo do QR-code.

Implementações dos algoritmos de codificação e descodificação encontram-se facilmente na web (vide por exemplo [9]). Apesar de ser tecnologia patenteada⁴ a informação sobre as diferentes variantes é facilmente acessível online. A robustez deste algoritmo permite usar os QR-codes como marcadores de posições especiais para uso, por exemplo, por robots móveis, que assim podem reconhecer facilmente locais onde seja necessário executar uma acção/tarefa específica, e.g., uma reinicialização da odometria.

6.3 Actuadores

Os actuadores presentes num robot estão associados aos graus de liberdade no respectivo espaço de configuração. Em geral, em manipuladores série cada grau de liberdade no espaço de junta tem associado um actuador. Já no caso de manipuladores paralelos há graus de liberdade no espaço junta que não são actuados. Nas plataformas móveis comuns, por exemplo o uniciclo, todos os graus de liberdade no espaço de controlos são actuados.

A actuação dos eixos motores de um robot é normalmente realizada por motores pneumáticos, usando ar comprimido, motores hidráulicos, usando fluidos pouco compressíveis, e motores elétricos.

6.3.1 Motores eléctricos DC e AC

Em robots de dimensões reduzidas, os actuadores mais comuns são os motores eléctricos DC e AC e passo-a-passo.

Os motores eléctricos DC (de corrente contínua) são formados por indutor e induzido. O indutor é normalmente um sistema de ímans permanentes que são colocados na periferia do motor em posição fixa. O induzido é formado por um conjunto de bobinas eléctricas que, quando percorridas por corrente eléctrica geram um campo magnético. A repulsão entre o campo magnético criado pelas bobinas e o dos ímans permanentes faz o motor rodar ligando e desligando, alternadamente as diferentes bobinas à medida que a posição angular do veio do motor varia. Esta comutação pode ser realizada de forma mecânica, com o comutador integrado no veio do motor, ou de forma electrónica.

Alguns motores, denominados *servomotores*, incluem um sistema de controlo do posicionamento angular. O diagrama de blocos de um servomotor na Figura 6.35 ilustra a realimentação da saída do motor (posição angular) para se obter o sinal de erro à entrada do controlador K .

Os motores eléctricos AC (de corrente alternada) são formados por um estator incluindo bobinas que geram um campo magnético rotativo e um rotor, integrado no eixo de rotação, onde é aplicado um torque gerado pelo campo magnético em rotação. O campo magnético rotativo é obtido fornecendo ao estator

⁴ Pela Denso Wave, Japão.

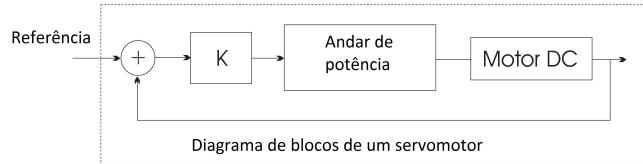


Figura 6.35. Diagrama de blocos de um servomotor DC

uma corrente alternada. Para motores de velocidade constante o rotor é constituído por um conjunto de barras condutoras, habitualmente de cobre ou alumínio, (Figura 6.36). O campo magnético rotativo, produzido pelo estator, induz correntes eléctricas nas barras do rotor que por vez geram um campo magnético. A interação com o campo magnético do estator produz o movimento de rotação.

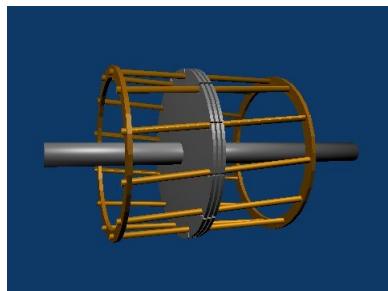
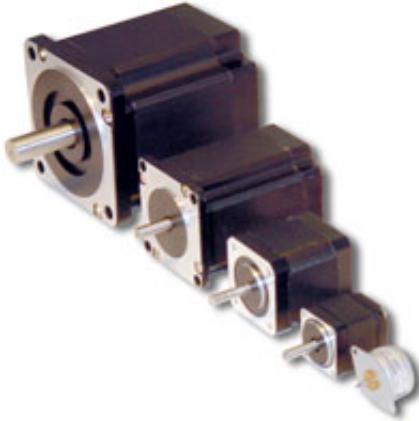


Figura 6.36. Modelo de um rotor de gaiola para um motor AC

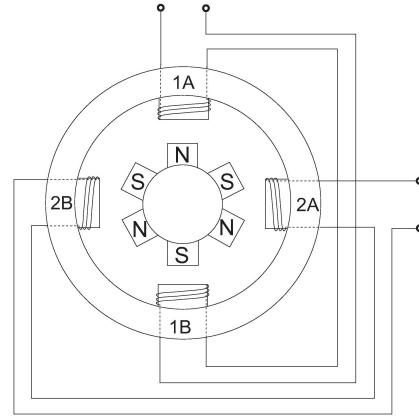
Nos motores síncronos a velocidade de rotação é determinada pela frequência do campo magnético em rotação. Nos chamados motores de indução esta velocidade é mais baixa. Actualmente, a possibilidade de variar a frequência da tensão de alimentação através de sistemas electrónicos possibilita o uso dos motores AC na Robótica, sendo já comuns os servomotores AC.

Os motores passo-a-passo (ou *steppers*) permitem o posicionamento angular sem o recurso a um sistema de controlo do tipo dos servomotores (Figura 6.37a). Estes motores permitem o deslocamento angular do veio num conjunto discreto de posições, determinadas pela construção do motor.

A Figura 6.37b esquematiza a constituição de um motor passo a passo. O rotor é constituído por um conjunto de imans permanentes dispostos por forma a alternarem os correspondentes pólos magnéticos. No exemplo da figura, os 6 pólos permitem posicionar o veio do motor a espaços de 30° . O estator do motor (o corpo do motor) contém um conjunto de bobinas formando um conjunto de electroímãs dispostos em torno do rotor. Quando um destes conjuntos de electroímãs é activado o rotor desloca-se por forma a alinhar um par de pólos com os correspondentes opostos formados pelos electroímãs do estator. No exemplo da Figura 6.37b, com dois pares de electroímãs, a activação alternada das bobinas A e B gera a rotação contínua do rotor. Para uma rotação completa são necessários 12 impulsos, 6 em cada conjunto de bobinas.



a) Nanotec, SP e ST Series



b) Esquema simplificado

Figura 6.37. Motores passo-a-passo

6.3.2 Micromotores eléctricos

A crescente miniaturização na manufactura de componentes semicondutores permite a realização de motores e engrenagens a escalas micrométricas. A Figura 6.38 ilustra diversos tipos destes motores e engrenagens realizadas sobre material semicondutor.

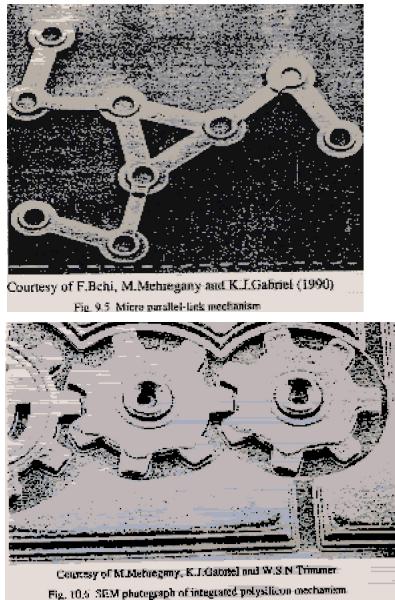
6.3.3 Motores pneumáticos e hidráulicos

Em robots de grandes dimensões ou grande capacidade de movimentação de cargas a energia eléctrica tende a ser substituída por energia mecânica obtida através de fluidos. Neste caso os motores eléctricos usados nos actuadores são substituídos por motores pneumáticos ou hidráulicos. O funcionamento deste tipo de motores baseia-se em princípios da Mecânica de fluidos que permite transformar em movimento rotativo a energia de um fluido em movimento. A Figura 6.39 ilustra alguns exemplos de motores hidráulicos e pneumáticos.

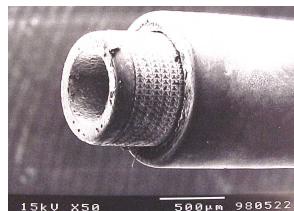
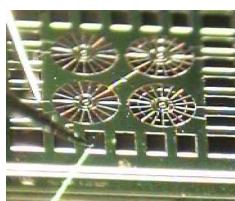
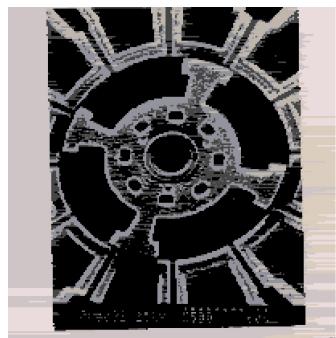
6.3.4 Músculos artificiais

A inspiração na zoologia levou à investigação de actuadores alternativos aos clássicos motores rotativos ou lineares. Os animais utilizam a acção dos músculos para se locomoverem e manipularem o ambiente. A procura de materiais capazes de se contrairem e expandirem sob a acção de variáveis de controlo constitui uma área de intensa pesquisa.

Os principais materiais actualmente usados na criação de músculos artificiais são os polímeros electro-activos e materiais elásticos com a deformação controlada por um fluido.

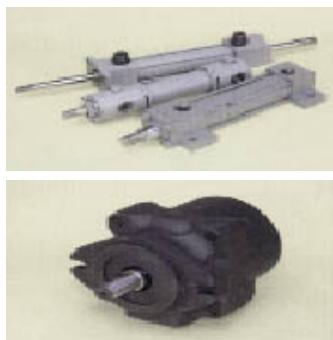


Sistemas de engrenagens



Motor linear

Figura 6.38. Motores e engrenagens realizadas em silício



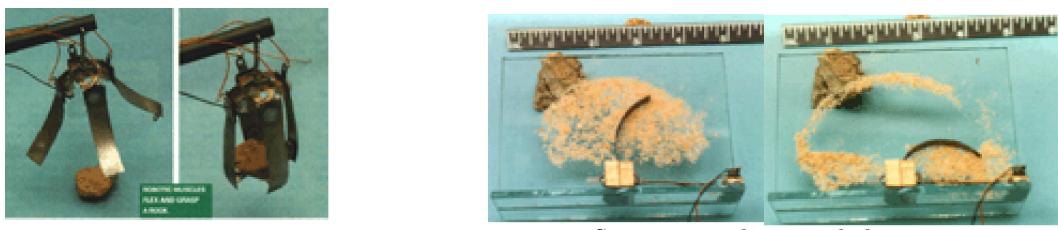
Hidráulicos



Pneumáticos

Figura 6.39. Motores hidráulicos e pneumáticos

A expansão e contracção de materiais é possível por acção química. A Figura 6.42 ilustra um esquema de um sistema muscular artificial composto por fibras de um polímero denominado PAN Hydrogel. O comprimento do músculo é controlado através do pH da solução que as fibras estão embebidas.



Garra de manipulador

Sistema para limpeza de lentes

Figura 6.40. Músculos artificiais realizados em polímeros electro-activos

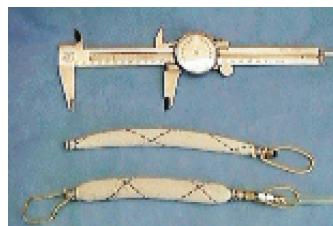


Figura 6.41. Músculos artificiais operados por ar comprimido

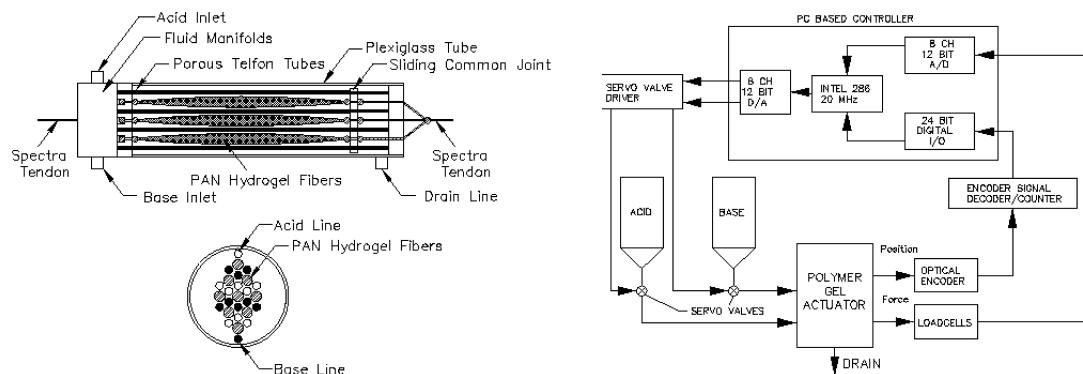


Figura 6.42. Músculo artificial realizado em polímero

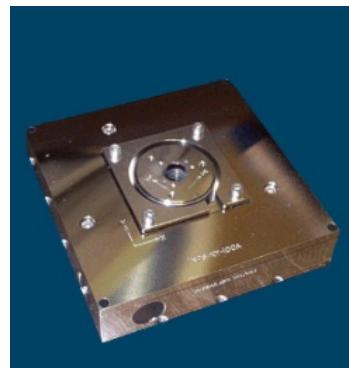
6.3.5 Actuadores para nanoposicionamiento

À semelhança dos sensores encontram-se actualmente disponíveis actuadores capazes de resoluções nanométricas. De entre os actuadores disponíveis comercialmente destacam-se os que utilizam materiais piezo-eléctricos e os baseados em materiais electro-resistivos. Os primeiros funcionam segundo o princípio da reversibilidade do efeito piezo-eléctrico, ou seja, um campo eléctrico aplicado a um material piezo-eléctrico produz uma deformação mecânica. Os materiais electroresistivos possuem uma propriedade semelhante, deformando-se quando sujeitos a um campo eléctrico. O composto PMN (Chumbo, Magnésio e Níquel) encontra-se entre os materiais mais usados no fabrico de actuadores para nanopositionamento.

Estes actuadores são geralmente fabricados em pilhas, com camadas de espessura na ordem de $100\mu\text{m}$. A expansão pode ser na ordem de $15\mu\text{m}$ sobre aplicação de uma tensão na ordem de 100 V para forças produzidas da ordem de 750 N (valores susceptíveis de posterior amplificação mecânica). A Figura 6.43 mostra dois modelos de actuadores piezo-eléctrico construídos em Super Invar e possuindo ambos resolução sub-nanométrica. O modelo da esquerda é capaz de movimento segundo 1 eixo com um deslocamento máximo de $15\mu\text{m}$ e uma largura de banda superior a 1 kHz . O modelo da direita possui movimento em 3 eixos, com deslocamentos máximos no plano horizontal de $120\mu\text{m}$ em ambos os eixos coordenados e de $16\mu\text{m}$ no eixo perpendicular.



a) Actuador com 1 eixo de movimento



b) Actuador com 3 eixos de movimento

Figura 6.43. Actuadores para nano-posicionamento

6.3.6 Sistemas integrados de actuadores

Actualmente encontram-se disponíveis comercialmente dispositivos constituídos por actuadores e sensores integrados em conjuntos compactos. A Figura 6.44 mostra diversos tipos de garras disponíveis comercialmente.

Por exemplo, unidades com 2 eixos de rotação perpendiculares são usadas em várias aplicações para orientação de dispositivos. A Figura 6.45 mostra dois exemplos destas unidades, vulgarmente denominadas “pan-tilt”. Em regra este tipo de unidades possui uma linha de comunicações que permite a sua ligação a um computador de onde podem ser enviados os comandos de movimentação.



Figura 6.44. Efectores terminais para manipulação

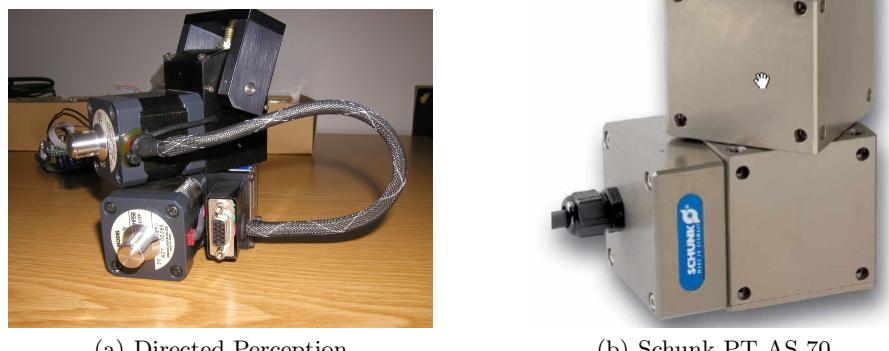


Figura 6.45. Unidades pan-tilt

Referências

1. 2006. <http://www.sick.com>.
2. Simon Cooper and Hugh Durrant-White. A Kalman Filter Model for GPS Navigation of Land Vehicles. 000.
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_sound, 2006.
4. SDI Inc., 2006. <http://www.silicondesigns.com>.
5. Tekscan Inc., 2006. <http://www.tekscan.com>.
6. Y. Liu and M. Liu. Automatic Recognition Algorithm of Quick Response Code Based on Embedded System. In *Procs. of the Sixth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications (ISDA '06)*, 2006.
7. Inaba Rubber Co Ltd, 2006. <http://www.cui.com>.
8. H.P. Moravec and A. Elfes. High Resolution Maps from Wide Angle Sonar. In *Procs. 1985 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, 1985.
9. ZXing project. QR code decoder/generator software. url<https://github.com/zxing/zxing>, 2013. [Online; last accessed 25-02-1016].
10. Seiji Yamaguchi and Toshiyuki Tanaka. GPS Standard Positioning using Kalman Filter. In *Procs. SICE-ICASE Int. Joint Conf.*, October 2006. Bexco, Busan, Korea.

A

Igualdades trigonométricas básicas

Para um ângulo arbitrário, θ , verificam-se as seguintes igualdades,

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$1 + \tan(\theta)^2 = \frac{1}{\cos(\theta)^2} = \frac{1}{1 - \sin(\theta)^2}$$

B

A função tangente inversa de 4 quadrantes

Considere-se a função tangente inversa, definida no intervalo $[\pi/2, \pi/2]$, ou seja, nos quadrantes 1 e 4. A extensão para os 4 quadrantes é dada por,

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \text{atan}(y/x) & \text{se } x \geq 0 \\ \pi - \text{atan}(y/|x|) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ou

$$\text{atan2}((y, x), x) = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & \text{if } y \geq 0 \text{ and } x \geq 0 \\ \pi - \tan^{-1}(|y/x|) & \text{if } y \geq 0 \text{ and } x < 0 \\ \tan^{-1}(|y/x|) & \text{if } y < 0 \text{ and } x \geq 0 \\ \tan^{-1}(|y/x|) - \pi & \text{if } y < 0 \text{ and } x < 0 \end{cases}$$

C

Derivada de uma função composta

Considere-se um sistema da forma

$$\dot{x} = J\dot{\theta}$$

Se o Jacobiano $J(\dot{\theta})$ for invertível

$$\dot{\theta} = J^{-1}\dot{x}$$

A segunda derivada da expressão (C.1) obtém-se através de,

$$\ddot{x} = \dot{J}\dot{\theta} + J\ddot{\theta}$$

e portanto

$$\ddot{\theta} = J^{-1}\ddot{x} - J^{-1}\dot{J}\dot{\theta} = J^{-1}\ddot{x} - J^{-1}\dot{J}J^{-1}\dot{x}$$

ou seja

$$\ddot{\theta} = (\dot{J}^{-1})\dot{x} + J^{-1}\ddot{x}$$

e portanto

$$(\dot{J}^{-1}) = -J^{-1}\dot{J}J^{-1}$$

generaliza a regra da derivação $\frac{d}{dx}(1/x^1) = -1/x^2$.

D

Função de Dirac

A função impulso de Dirac é definida como,

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

e $x \in \mathbb{R}^n$.

E

Apêndice: Tensores de inércia

O tensor, ou matriz, de inércia descreve as propriedades mássicas de um corpo, i.e., de que forma a distribuição de massa pelo corpo pode influenciar a sua movimentação.

O tensor de inércia escrito no referencial \mathcal{F}_A é a matriz

$${}^A I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

onde ρ é a densidade do material constituinte do troço.

Os elementos da diagonal principal designam-se por momentos de inércia e são definidos por

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int \int \int_V (y^2 + z^2) \rho dV \\ I_{yy} &= \int \int \int_V (x^2 + z^2) \rho dV \\ I_{zz} &= \int \int \int_V (x^2 + y^2) \rho dV \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

enquanto que os restantes elementos, designados por produtos de inércia, são definidos por

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int \int \int_V xy \rho dV \\ I_{xz} &= \int \int \int_V xz \rho dV \\ I_{yz} &= \int \int \int_V yz \rho dV \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Das expressões (E.2) e (E.3) facilmente se constata a sua dependência do referencial utilizado.

Para o bloco da Figura E.1 o tensor de inércia calculado no referencial do centro de massa do corpo é dado por

$$\begin{aligned}
 {}^A I_{zz} &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-w/2}^{w/2} \rho(x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \frac{wlh}{12} (w^2 + l^2) \\
 {}^A I_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-w/2}^{w/2} \rho(x^2 + z^2) dx dy dz = \rho \frac{wlh}{12} (w^2 + h^2) \\
 {}^A I_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-w/2}^{w/2} \rho(y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \frac{wlh}{12} (h^2 + l^2) \\
 {}^A I_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-w/2}^{w/2} \rho x y dx dy dz = 0 \\
 {}^A I_{xz} &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-w/2}^{w/2} \rho x z dx dy dz = 0 \\
 {}^A I_{yz} &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-w/2}^{w/2} \rho y z dx dy dz = 0
 \end{aligned} \tag{E.4}$$

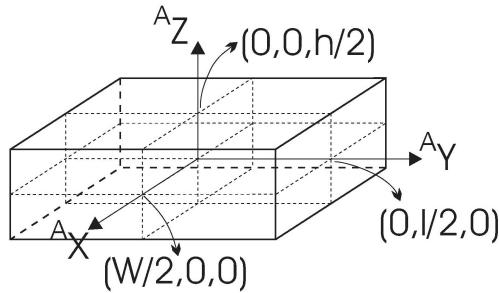


Figura E.1. Bloco rígido com distribuição de massa uniforme

Note-se que o facto da origem do referencial usado para o cálculo estar colocada no centro de massa torna os produtos de inércia nulos.

O teorema do eixo paralelo permite obter o tensor de inércia, ${}^{CM} I$, descrito num referencial com origem no centro de massa a partir do tensor descrito num referencial arbitrário \mathcal{F}_A diferindo de \mathcal{F}_{CM} apenas de uma translação,

$${}^A I = {}^{CM} I + m [{}^A P_{CM}^T \cdot {}^A P_{CM} - {}^A P_{CM} \cdot {}^A P_{CM}^T]. \tag{E.5}$$

F

Apêndice: Produtos de Lie

Uma álgebra de Lie verifica as propriedades características de uma álgebra (vide [28]) e ainda

$$\begin{aligned} \text{Elemento nulo} \quad [f_i, f_i] &= 0 \\ \text{Anti-comutatividade} \quad [f_i, f_j] &= -[f_j, f_i] \\ \text{Identidade de Jacobi} \quad [f_i, [f_j, f_k]] + [f_j, [f_k, f_i]] + [f_k, [f_i, f_j]] &= 0 \end{aligned} \tag{F.1}$$

A álgebra dos campos vectoriais em \mathbb{R}^n definida com a operação de adição habitual em \mathbb{R}^n e com multiplicação

$$[f_i, f_j] = Df_j \cdot f_i - Df_i \cdot f_j,$$

em que Df representa a matriz formada derivando cada uma das linhas do vector f em ordem às variáveis presentes, e verifica as propriedades (F.1).

O espaço tangente ao C -espaço de um robot, com todas as direcções de movimento factíveis, pode ser gerado a partir da álgebra de Lie dos campos vectoriais que compõem o sistema.

Para um sistema $\dot{q} = Aq + Bu$, com A, B constants, verifica-se facilmente que a álgebra de Lie obtida a partir dos campos Aq, B contém apenas elementos da forma

$$[Aq, B] = -AB, [Aq, -AB] = A^2B, \dots [Aq, A^2B] = -A^3B$$

Aplicando o Teorema da Controlabilidade obtém-se facilmente o conhecido teste de controlabilidade de sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo.

