1.1)

$$F_a = -\beta \frac{dy(t)}{dt} = -\beta \dot{y}(t)$$

No instante inicial, a viatura tem velocidade v_0

$$\sum F_{aplicada} = m\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} = m\ddot{y}(t)$$

$$\sum F_{total} = 0 \quad \text{(regime livre)}$$

$$-\beta \dot{y}(t) = m\ddot{y}(t) \quad , \quad v(t) = \dot{y}(t)$$

Assim: $m\frac{d}{dt}v(t) = -\beta v(t)$

1.2)

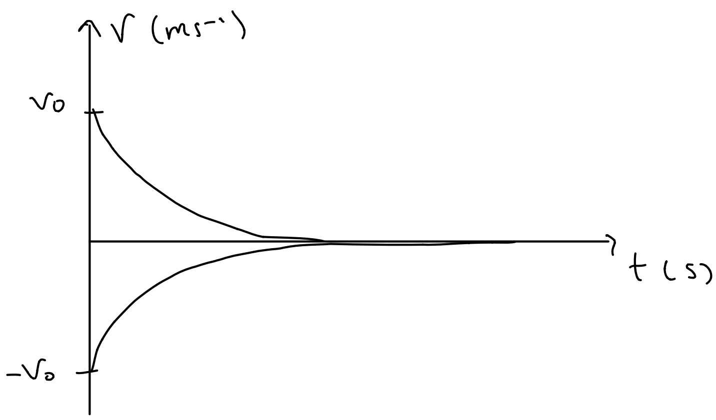
$$\frac{d}{dt}v(t) = -\frac{\beta}{m}v(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t) = -\frac{\beta}{m}\frac{d}{dt}v(t) \longrightarrow \left[\frac{\beta}{m}\right]^2 v(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$$

$v(t) > 0 \longrightarrow \dot{v}(t) < 0 \longrightarrow \ddot{v}(t) > 0 \quad , V_0 > 0$

$v(t) < 0 \longrightarrow \dot{v}(t) > 0 \longrightarrow \ddot{v}(t) < 0 \quad , V_0 < 0$



1.3) $m\dot{v}(t) = -\beta v(t) \Leftrightarrow \frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = -\frac{\beta}{m}$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\ln(v(t)) = -\frac{\beta}{m}$$

$$\Leftrightarrow \ln(v(t)) = -\int \frac{\beta}{m}\,dt \Leftrightarrow \ln(v(t)) = -\frac{\beta}{m}\cdot t + c$$

$$\Leftrightarrow v(t) = \exp\left(-\frac{\beta t}{m} + c\right) \Leftrightarrow v(t) = A\exp\left(-\frac{\beta t}{m} + c\right)$$

$v(0) = 0 \rightarrow A = v_0 \rightarrow v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\beta t}{m}\right)$

1.4) $v(t) = \frac{d}{dt}y(t) \Leftrightarrow y(t) = \int_0^\alpha v(t)\,dt$

$$\Leftrightarrow y(t) = \int_0^t v_0 \exp\left(-\frac{\beta t}{m}\right) dt$$

$$= -\frac{m}{\beta} v_0 \exp\left(-\frac{\beta t}{m}\right) + C$$

$y(0) = y_0$

$y(0) = -\frac{m}{\beta} v_0 + C \rightarrow C = y_0 + \frac{m}{\beta} v_0$

$$y(t) = -\frac{m}{\beta} v_0 \exp\left(-\frac{\beta t}{m}\right) + y_0 + \frac{m}{\beta} v_0$$

2.1) Suponho que $\alpha_{1,2} > 0$, o aumento de $N_2(t)$ na equação (1) representa uma diminuição de $N_1(t)$ $\frac{d}{dt}N_1(t)$ diminui, o que representa a diminuição das presadas com o aumento dos predadores. Simetricamente, um aumento de um número de presas ($N_1(t)$), implica um aumento do númer de predadores, o que se confirma pela equação 2, $\frac{d}{dt}N_2(t)$ aumenta.

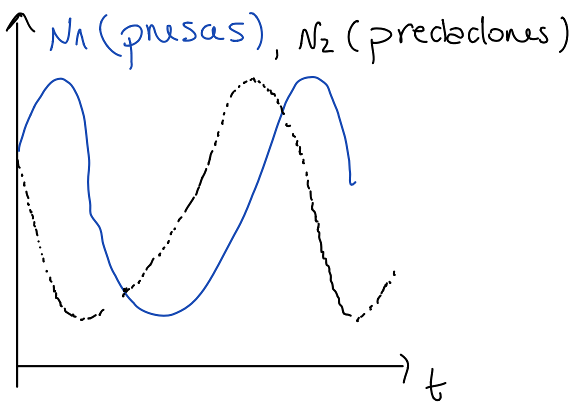
1 - presa

2 - predador

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \delta_1 N_1(t) - \alpha_1 N_1(t) N_2(t) = 0 \\ \delta_2 N_2(t) + \alpha_2 N_2(t) N_1(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_1(t)\left[\delta_1 - \alpha_1 N_2(t)\right] = 0 \\ N_2(t)\left[\delta_2 + \alpha_2 N_1(t)\right] = 0 \end{cases}, \quad \begin{matrix} N_1(t) > 0 \\ N_2(t) > 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_2(t) = \frac{\delta_1}{\alpha_1} \\ N_1(t) = -\frac{\delta_2}{\alpha_2} \end{cases}, \quad \begin{matrix} \alpha_1 > 0 \\ \alpha_2 > 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} N_2(t) \propto \delta_1 \\ N_1(t) \propto -\delta_2 \end{matrix}$$



3.3)

Da figura $\begin{cases} \sin\theta_1 + \sin\theta_2 = \frac{x}{l} & (1) \\ \cos\theta_1 + \cos\theta_2 = \frac{y}{l} & (2) \end{cases}$

dividindo (1) e (2)

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) = \frac{x}{y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta_1+\theta_2 = 2\arctan\left(\frac{x}{y}\right)} \quad (3)$$

$$(1)^2 + (2)^2 \rightarrow \cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 + 2\cos_1\cos_2 + 2\sin\theta_1\sin\theta_2 = \frac{x^2+y^2}{l^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\cdot\cos(\theta_1-\theta_2) = \frac{x^2+y^2}{l^2} \Leftrightarrow \cos(\theta_1-\theta_2) = \frac{\frac{x^2+y^2}{l^2} - 2}{2} = \frac{x^2+y^2}{2l^2} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = \arccos\left(\frac{x^2+y^2}{2l^2} - 1\right) \quad (4)$$

(3) + (4)

$$2\theta_1 = 2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arccos\left(\frac{x^2+y^2}{2l^2}-1\right) \Leftrightarrow \theta_1 = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x^2+y^2}{2l^2}-1\right)$$

(3) - (4)

$$2\theta_2 = 2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \arccos\left(\frac{x^2+y^2}{2l^2}-1\right) \Leftrightarrow \theta_2 = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x^2+y^2}{2l^2}-1\right)$$

Como se está a usar raízes quadradas, vai existir perda de soluções. Isto verifica-se para posições iniciais com valor negativo. O ajuste é compensar o ângulo θ para $\theta \in [-\pi, \pi]$.