

**Modelação e Simulação**  
**2019/20**  
**Trabalho de Laboratório nº 2**  
**Optimização do servomecanismo de um disco rígido**



**Objectivo**

Após realizar este trabalho, o aluno deverá ser capaz de utilizar o SIMULINK para otimizar um funcional de custo que envolve a resolução duma equação diferencial e avaliar o desempenho de soluções sub-óptimas.

**Bibliografia**

- Manuais do MATLAB e SIMULINK (disponíveis em *pdf* na secção “Laboratórios” da página da disciplina).

**Elementos a entregar**

Cada grupo deverá entregar por email um relatório sucinto respondendo às questões do enunciado. As respostas às questões de preparação prévia, identificadas nos enunciados como “Em casa”, deverão ser manuscritas, em papel ou em formato digital, assinadas por ambos os elementos do grupo. A parte correspondente às questões de simulação deverá ser gerada automaticamente através da função “Publish” do MATLAB. O script de MATLAB utilizado para gerar o relatório deve ser único e garantir que todo o código e elementos gráficos associados (p.ex. funções criadas, diagramas simulink) são incluídos no relatório final. Ambas as partes deverão conter um cabeçalho com a identificação do trabalho, a identificação dos alunos (número e nome) e ser entregues por via electrónica num único ficheiro comprimido. As respostas a cada questão deverão ser identificadas pelo seu número. As respostas devem ser concisas.

## Nota importante:

*Quer neste trabalho, quer nos subsequentes, os relatórios devem ser **originais** e corresponder ao **trabalho efetivamente realizado** pelo grupo que o subscreve.*

***Relatórios não originais** ou correspondentes a software ou outros elementos copiados terão **nota zero**, sem prejuízo de **procedimentos disciplinares** previstos pela Lei Portuguesa e de regulamentos do Instituto Superior Técnico e da Universidade de Lisboa.*

*Será utilizado o software de **deteção automática de plágio** MOSS, disponível em <http://moss.stanford.edu>.*

## Descrição do problema

Neste trabalho estuda-se o posicionamento das cabeças de leitura/escrita de um disco rígido, avaliando-se estratégias de actuação do braço que as suporta para conseguir um reposicionamento rápido.

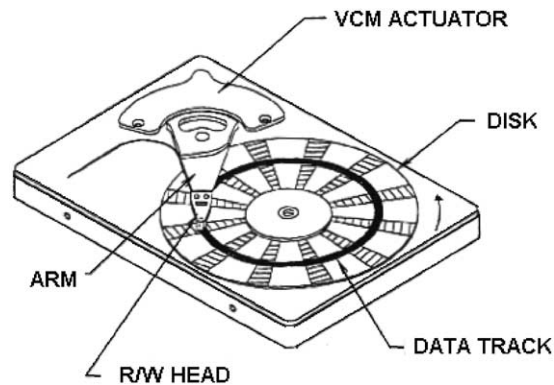


Fig. 1 – Estrutura mecânica dum disco rígido.

A figura 1 mostra a estrutura mecânica dum disco rígido. A superfície do disco contém milhares de pistas de gravação (*tracks*) concêntricas, que são lidas ou escritas por uma cabeça magnética. A cabeça é suportada por um sistema de suspensão e transporte, pairando a muito curtas distâncias (da ordem de  $\mu\text{m}$ ) da superfície do disco em rotação. Um servomotor movimenta o braço, posicionando a cabeça sobre a pista pretendida, sendo desejável que esta operação seja precisa e rápida. O sistema mecânico em estudo consiste no servomotor, braço, e cabeça magnética. A entrada do sistema é uma tensão,  $u$ , aplicada ao servomotor, sendo a saída,  $y$ , a posição radial da cabeça sobre o disco. Aproxima-se a dinâmica deste sistema por

$$\ddot{y} = u - b\dot{y}$$

onde  $b$  é uma constante associada a um termo que modela o efeito do atrito. Em unidades apropriadas o módulo da entrada de controlo não pode exceder o valor máximo 1 e toma-se como valor numérico nominal  $b = 0$ .

O posicionamento da cabeça pode ser formulado, de forma canónica, como um problema de actuação que leva o estado do sistema duma configuração

inicial (em unidades apropriadas)  $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$  para  $y(T) = 0, \dot{y}(T) = 0$ , sendo desejável que o intervalo  $T$  seja o menor possível. O **objectivo deste trabalho** é comparar diferentes estratégias para controlo do braço da unidade de disco.

O trabalho proposto enfatiza os aspectos relacionados com a optimalidade do sinal de comando do braço, e com a forma de lidar com os erros de posicionamento. A obtenção duma solução analítica para um problema formal de controlo óptimo não se enquadra nos objectivos da disciplina de Modelação e Simulação<sup>1</sup>, adoptando-se aqui uma abordagem baseada em simulação.

## Trabalho a realizar

Considere sinais de controlo  $u(t)$  obtidos por concatenação de pares de

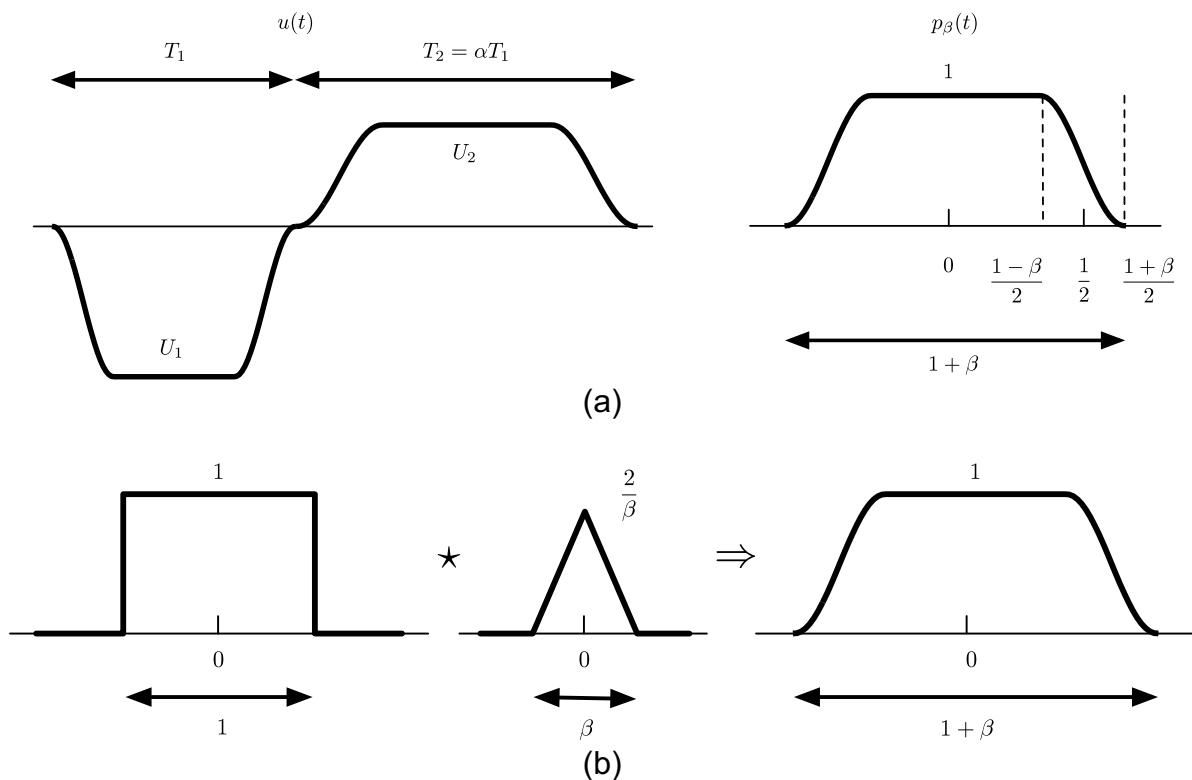


Fig. 2 – (a) Estrutura dos sinais a aplicar ao sistema (b) Modelo para o impulso protótipo

<sup>1</sup> A solução analítica é dada pelas técnicas de Controlo Óptimo e estuda-se no 2º ciclo, na disciplina de Controlo em Espaço de Estados.

impulsos semelhantes (figura 2a). Um sinal  $u(t)$  pode ser expresso como uma sobreposição de duas réplicas deslocadas e escaladas (no tempo e em amplitude) de impulsos protótipo  $p_\beta(t)$  cujo modelo de geração (conceptual) está representado na figura 2b. O parâmetro  $0 \leq \beta \leq 1$  controla a suavidade dos flancos dos impulsos.

1. **(Em casa)** Obtenha uma expressão analítica para  $p_\beta(t)$
2. Desenvolva uma função para geração do impulso protótipo. Esta recebe como entrada um vector de instantes temporais,  $t$ , e o parâmetro  $\beta$ , e devolve os valores de  $p_\beta(t)$  calculados nesses instantes.
3. Desenvolva uma função para gerar  $u(t)$  a partir do protótipo. Esta recebe como entrada a duração total da forma de onda,  $T$ , o parâmetro  $\alpha$ , o parâmetro  $\beta$ , as amplitudes  $U_1$  e  $U_2$  e o número de pontos de cada um dos impulsos,  $n_1$  e  $n_2$ , e devolve o vector com os instantes de tempo (com  $n_1+n_2-1$  elementos) e  $u(t)$ . Note que na figura 2a) se tem para o primeiro impulso (por exemplo)

$$u_1(t) = -U_1 p_\beta\left(\frac{t-T_1}{\mu_1}\right), \text{ com } \mu_1 = \frac{T_1}{1+\beta}.$$

4. **(Em casa)** Verifique que o protótipo tem área unitária, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\beta(t) dt = 1.$$

Com base neste resultado calcule a área de uma versão escalada em amplitude e no tempo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} U p_\beta\left(\frac{t}{\mu}\right) dt = U\mu.$$

5. **(Em casa)** Quando a entrada  $u(t)$  é constante **mostre que no plano de fase  $(y, \dot{y})$  o estado do sistema percorre uma trajectória parabólica**. A figura 3 ilustra uma estratégia baseada neste resultado que conduz o estado do sistema do ponto inicial para a origem em dois passos, por aplicação sucessiva de um par de impulsos rectangulares com igual duração e amplitudes simétricas  $\pm 1$  (o que corresponde ao caso  $\alpha = 1, \beta = 0$ ).

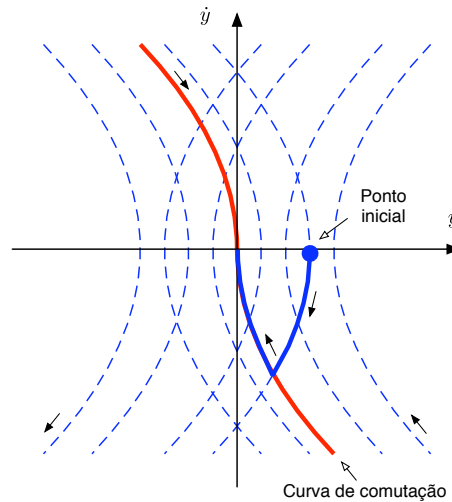


Fig. 3 – Diagrama de comutação com entrada bi-nível simétrica.

**6. (Em casa) Dados  $\alpha$  e  $\beta$**  pretende-se agora determinar os parâmetros  $U_1$ ,  $U_2$ , e  $T$  (ou  $T_1$ ,  $T_2$ ) para que  $u(t)$  conduza o sistema da configuração inicial dada  $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$  para a configuração final desejada  $y(T) = 0, \dot{y}(T) = 0$  em tempo mínimo.

**Sem recorrer à expressão analítica** de  $p_\beta(t)$  comece por relacionar as amplitudes das duas réplicas,  $U_1$  e  $U_2$ , para que  $\dot{y}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt = 0$ .

De seguida calcule<sup>2</sup>  $y(T) = y(0) + \int_0^T \dot{y}(t)dt$  em função de  $U_1$ ,  $T_1$ ,  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ .

Atendendo a que  $y(T) - y(0) = -1$ , expresse  $U_1$  em função de  $T_1$ .

Finalmente, imponha a restrição  $|U_1|, |U_2| \leq 1$ , para obter o valor mínimo admissível para  $T$  em função de  $\alpha$  e  $\beta$ .

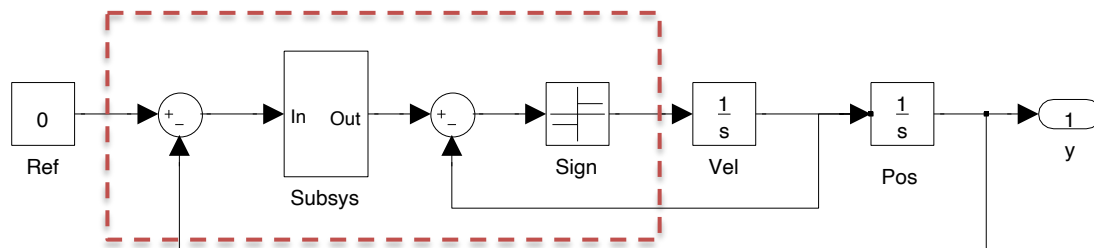
Qual o valor de  $\alpha$  que minimiza esse tempo?

**7.** Simule o sistema com entradas compostas de acordo com a alínea anterior para 3 pares diferentes de  $\alpha$ ,  $\beta$ , confirmando os resultados analíticos. Analise também o comportamento de uma versão perturbada do sistema nominal com  $b = 0.025$ .

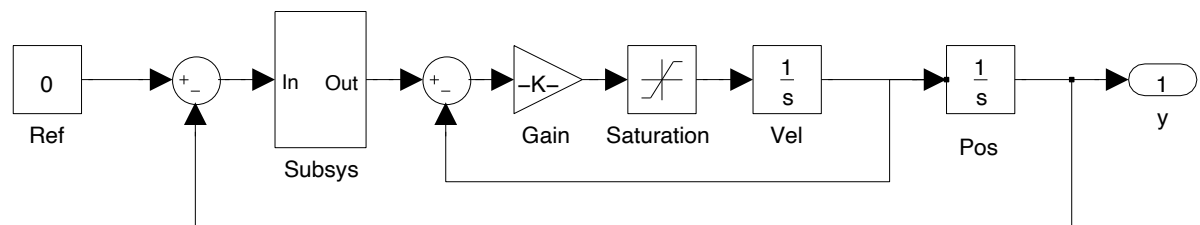
<sup>2</sup> Para este cálculo é suficiente conhecer a área total do protótipo escalado (já calculada) atendendo às simetrias dos flancos de  $\dot{y}(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$ .

8. Retomando a estratégia de actuação com impulsos rectangulares simétricos  $\pm 1$  da figura 3, pretende-se realizá-la usando uma arquitectura de controlo em malha fechada representada na figura 4a. Agora, os impulsos rectangulares que compõem  $u(t)$  não são gerados *a priori*, mas sim dinamicamente em função da evolução do próprio sistema. Neste contexto, ao conjunto dos dois ramos de parábola da figura 3 que convergem na origem chama-se *curva de comutação*.

Realizando o subsistema “Subsys” da figura 4a) um mapeamento descrito por  $f(x) = \text{sgn}(x)\sqrt{2|x|}$ , **represente** a função de geração da entrada  $u(y, \dot{y})$  (região tracejada no diagrama de blocos) e **explique** o princípio de funcionamento global da estrutura de controlo.



(a)



(b)

Fig. 4 – Controlo do sistema em cadeia fechada  
(a) Estrutura ideal (b) Estrutura para simulação

9. Realize simulações que ilustrem o funcionamento do sistema em malha fechada da figura 4b, verificando a sua equivalência com a estratégia de malha aberta usada anteriormente<sup>3</sup> para impulsos rectangulares.

<sup>3</sup> Para evitar problemas numéricos no cálculo da evolução do modelo é aconselhável substituir o bloco “Sign” por uma saturação em  $\pm 1$  com uma estreita zona linear. Isto consegue-se ligando um bloco de ganho elevado em cascata com um bloco de saturação em  $\pm 1$ . **Atenção aos parâmetros deste bloco, que não correspondem aos valores por omissão da biblioteca do SIMULINK.**

**Justifique** as características oscilatórias do sinal de controlo que obteve em malha fechada após convergência do estado do sistema para a vizinhança da origem. Este comportamento, conhecido por *chattering*, é problemático?

**10.** A figura 5 apresenta uma arquitectura de controlo modificada que evita o *chattering* na entrada. Em traços gerais este método altera a curva de comutação, especificando um intervalo  $\pm y_l$  em torno da origem onde o seu andamento passa a ser linear, e atribuindo à curva uma espessura não nula no plano de fase. O mapeamento do subsistema “Subsys” é dado pela expressão

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k_1}{k_2} x, & \text{se } |x| \leq y_l \\ \text{sgn}(x) \left[ \sqrt{2|x|} - \frac{1}{k_2} \right], & \text{se } |x| > y_l \end{cases}$$

onde as constantes  $k_1 = 1/y_l$ ,  $k_2 = \sqrt{2k_1}$  asseguram que a curva de comutação e a sua derivada são contínuas.

Dê um significado mais preciso a esta descrição sumária, **representando** a função de geração da entrada  $u(y, \dot{y})$  (região tracejada no diagrama de blocos) para um valor adequado de  $y_l$  e **explicando** o princípio de funcionamento.

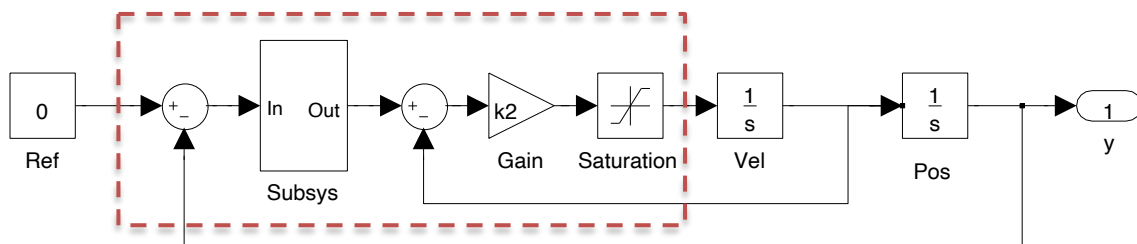


Fig. 5 – Arquitectura modificada que evita oscilações no sinal de controlo.

**11.** Implemente este sistema em SIMULINK e compare a evolução do estado e do sinal de controlo com o caso do sistema básico em cadeia fechada.

Quantifique a degradação no tempo de resposta e discuta o seu impacto.



Compare também com a resposta do sistema linear que se obtém retendo apenas o ramo superior da função  $f(x)$  definida acima, estendido para todo o  $x$ .

**12.** À semelhança da configuração em cadeia aberta, analise o comportamento do sistema perturbado com  $b = 0.025$ .

Compare com os resultados em cadeia aberta e discuta a robustez dos dois tipos de estrutura.

**13.** Simule o sistema da figura 5 com referências não nulas, aplicando na entrada “Ref” sinais constantes por troços e sequências de rampas.

Comente a fidelidade de seguimento que obteve nos dois casos.