

**Modelação e Simulação**  
**2019/20**  
**Trabalho de Laboratório nº 3**  
**Dinâmica de um metrónomo básico**



**Objectivos**

Após realizar este trabalho, o aluno deverá ser capaz de:

1. Representar as equações do modelo de estado de um sistema linear no SIMULINK, quer utilizando blocos elementares (integradores, ganhos, funções estáticas, pontos de soma), quer utilizando o bloco que representa o modelo de estado linear.
2. Utilizar o modelo programado no SIMULINK para simular o sistema, obtendo representações no tempo, e no espaço de estados.
3. Verificar relações existentes entre a distribuição dos valores próprios de um sistema linear, a resposta no tempo e as trajectórias no espaço de estados.
4. Escolher condições iniciais no modelo de estado por forma a excitar apenas um modo do sistema.
5. Relacionar as características físicas de um sistema mecânico com o tipo da sua resposta dinâmica.

**Bibliografia**

- [1] Acetatos dos módulos 2 e 4 de *Modelação e Simulação*.
- [2] Franklin, Powell, Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, cap. 2 (dinâmica de um sistema de 2ª ordem).

### **Elementos a entregar**

Cada grupo deverá entregar por email um relatório sucinto respondendo às questões do enunciado. As respostas às questões de preparação prévia, identificadas no enunciado como “Em casa”, deverão ser manuscritas e entregues em papel. A parte correspondente às questões de simulação deverá ser gerada automaticamente através da função “Publish” do MATLAB, e entregue por via electrónica conjuntamente com os ficheiros MATLAB/SIMULINK utilizados. Ambas as partes deverão conter um cabeçalho com a identificação do trabalho e a identificação dos alunos (número e nome dos alunos, número do grupo e turno de laboratório). As respostas a cada questão deverão ser identificadas pelo seu número. As respostas devem ser concisas.

## Nota importante:

*Quer neste trabalho, quer nos subsequentes, os relatórios devem ser **originais** e corresponder ao **trabalho efetivamente realizado** pelo grupo que o subscreve.*

***Relatórios não originais** ou correspondentes a software ou outros elementos copiados terão **nota zero**, sem prejuízo de **procedimentos disciplinares** previstos pela Lei Portuguesa e de regulamentos do Instituto Superior Técnico e da Universidade de Lisboa.*

*Será utilizado o software de **deteção automática de plágio** MOSS, disponível em <http://moss.stanford.edu>.*

## Dinâmica de um metrónomo básico

O metrónomo é um dispositivo de relojoaria que produz um sinal audível (e visual) de cadência regular, sendo utilizado sobretudo para fins de estudo ou interpretação musical. O metrónomo mecânico consiste num pêndulo cujas oscilações, reguladas pela posição de um peso numa haste, podem ser mais lentas ou mais rápidas, correspondendo a diferentes compassos.

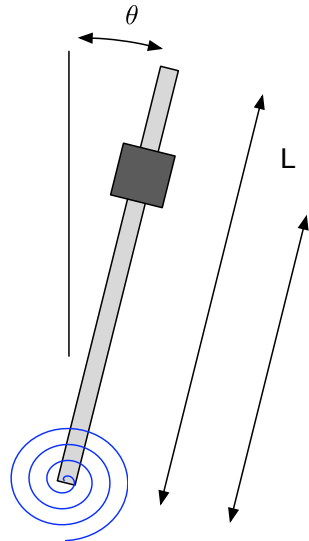


Fig. 1- Estrutura do braço do metrónomo.

A figura 1 ilustra de forma esquemática o braço de um metrónomo, constituído por uma barra metálica de comprimento  $L$  e massa  $M$ , onde se coloca uma massa  $m$  adicional à distância  $l$  (ajustável) do eixo de rotação. A barra está ligada a uma mola não linear que permite as oscilações mecânicas do sistema ao fornecer o binário  $k\theta \left(1 + \frac{\theta^2}{100}\right)$ , onde  $k$  é a constante da mola. No seu movimento a mola está sujeita a atrito  $\beta\dot{\theta}$ , onde  $\beta$  é o coeficiente de atrito, e à aceleração de gravidade  $g \approx 9.8\text{ms}^{-2}$ , que na figura actua em sentido vertical descendente. O mecanismo de relojoaria do metrónomo permite aplicar um binário externo ao sistema da figura para o manter em oscilação, actuando sobre a deflexão da mola.

## Trabalho a realizar

**1 (Em casa)** Estabeleça a equação diferencial (de 2ª ordem) que rege a evolução do ângulo  $\theta$ .

Nota: Para o cálculo do momento de inércia associado à massa  $m$ , assuma que esta é pontual. Para o cálculo do momento de inércia associado à massa  $M$  assuma que a massa está uniformemente distribuída ao longo da barra.

**2 (Em casa)** Tomando como variáveis  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$  (posição e velocidade angular do braço), e admitindo pequenos ângulos de deflexão  $\theta$ , obtenha uma descrição equivalente do sistema (linearizado) com um modelo de estado. Tome como entrada o binário externo aplicado à mola e como saída o ângulo de deflexão  $\theta$ .

**3 (Em casa)** Uma maneira padrão de escrever a função de transferência de um SLIT de 2ª ordem é

$$G \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

em que  $\zeta$  (coeficiente de amortecimento) e  $\omega_n$  (frequência natural das oscilações não amortecidas) são parâmetros cujos valores definem a resposta do sistema. Sugere-se que relembre a relação entre o valor destes parâmetros e as respostas no tempo e na frequência recorrendo à referência bibliográfica [2].

Obtenha a função de transferência correspondente ao sistema mecânico modelado na questão anterior, e comparando com a função de transferência padrão obtenha expressões para  $G$ ,  $\zeta$  e  $\omega_n$  em termos dos parâmetros físicos do sistema.

**4 (Em casa)** Com base nas expressões que obteve em 3), diga:

**a)** Se a resposta do sistema será sempre oscilatória (como pretendido);

- b) Se as oscilações se podem manter indefinidamente, sem aplicação de binário externo;
- c) Se a posição da massa  $m$  sobre a haste influencia a rapidez das oscilações;
- d) Que alterações antevê na frequência se a posição do sistema da figura 1 for alterada, passando a oscilar num plano horizontal, em vez da configuração vertical especificada?

5. Nesta alínea e nas seguintes, salvo indicação em contrário, considere que o binário aplicado é nulo. Recorrendo ao SIMULINK simule as equações de estado que obteve em 2). Nesta alínea **não** pode utilizar o bloco que permite simular directamente o modelo de estado. Deverá utilizar apenas integradores, ganhos e outros blocos elementares.

Utilize os seguintes valores numéricos para os parâmetros do modelo:

$$L = 0.5 \text{ m}, M = 0.15 \text{ Kg}, l = 0.4 \text{ m}, m = 0.2 \text{ Kg}, k = 3 \text{ Nm/rad}, \beta = 0.1 \text{ Nms/rad}$$

Represente os gráficos das variáveis de estado em função do tempo e no espaço de estados. Tome como condição inicial

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/4 \end{bmatrix}.$$

6. Modifique agora o diagrama de simulação no SIMULINK por forma a utilizar o bloco com o modelo de estado pré-definido. Repare que neste caso tem que definir as matrizes  $B$ ,  $C$  e  $D$  do modelo com dimensões adequadas. Para efeitos da simulação, como convém escolher a matriz  $C$ ? De aqui em diante deverá usar este diagrama para o sistema linearizado, a menos que especificado em contrário.

7. Considere os parâmetros e condições iniciais dados acima, e para  $\beta$  considere duas situações distintas:

$$\text{a) } \beta = 0 \quad \text{e b) } \beta = 1$$

Trace as respostas no tempo das variáveis de estado e a correspondente evolução no plano de estado.

Em gráficos à parte, trace ainda respostas sobrepostas no plano de estado para algumas condições iniciais que considere **significativas para caracterizar o retrato de fase do sistema**. Sobreponha a estes gráficos o campo de vectores que define a equação diferencial. Este campo é definido associando a cada ponto do espaço de estados  $x$  o vector  $Ax$  que indica a direcção seguida pelas trajectórias de estado nesse ponto. O campo de vectores pode ser traçado com a função *quiver*.

Calcule os valores e vectores próprios da matriz  $A$  para cada valor de  $\beta$ , bem como para o valor usado na questão 5, e **discuta a sua relação com as respostas obtidas no plano de estado**<sup>1</sup>.

**8. (Em casa – justificar a escolha, relacionando-a com os modos do sistema)** Nas condições anteriores, com  $\beta = 1 \text{ Nms/rad}$ , escolha dois conjuntos de condições iniciais que conduzam a trajectórias rectilíneas no plano de fase. Ilustre ambas as situações no plano de fase.

**9. (Em casa – descrever a estratégia de dimensionamento)** Para  $L = 0.25 \text{ m}$ ,  $M = 0.1 \text{ Kg}$ ,  $k = 0.35 \text{ Nm/rad}$  e  $\beta = 0.001 \text{ Nms/rad}$  dimensione a massa  $m$  no sistema mecânico da figura 1 e defina dois valores para o comprimento  $l \geq 0.05 \text{ m}$  que permitam obter no metrónomo as cadências de 50 BPM<sup>2</sup> (*lento*) e 150 BPM (*allegro*). O código desenvolvido deve **permitir refazer o projecto para outras frequências** (que serão oportunamente fornecidas a cada grupo) com um mínimo de **intervenção do operador**. Confirme por simulação o dimensionamento que efectuou<sup>3</sup>, tomando  $\theta_0 = 45^\circ$  e  $\dot{\theta}_0 = 0$ . Nos gráficos com as **respostas temporais** sobreponha a envolvente teórica da posição angular, **comentando a sua adequação às observações e as diferenças observadas para as duas cadências**.

<sup>1</sup> Pode usar o comando *eig* para obter os valores e vectores próprios de uma matriz.

<sup>2</sup> BPM significa *beats per minute*, ou seja, é o número de vezes por minuto que o braço oscilante do metrónomo atinge **uma das duas** posições extremas. Assim, a frequência de batimentos corresponde ao **dobro** da frequência de oscilação.

<sup>3</sup> Para estimar a frequência empírica de oscilação use o comando *findpeaks* para localizar os máximos/mínimos da posição angular ao longo do tempo.

**10.** Simule o modelo não linear do metrónomo que obteve inicialmente e caracterize os desvios de frequência observados. Proponha e teste uma forma de refinar o dimensionamento das posições da massa  $m$  para que as cadências de oscilação se aproximem mais dos valores pretendidos.

**11.** Modifique o modelo do sistema não linear para simular a existência de um mecanismo de relojoaria no metrónomo que impulsiona (aplicando binário externo) durante breves instantes o pêndulo quando este passa pela vertical, contrariando assim o natural decaimento para zero da amplitude das oscilações. A presença deste sistema afecta significativamente a frequência de oscilação pretendida?

**12.** Considerando que o binário externo é diferente de zero e que a saída é a posição angular  $\theta$ , utilize a função *bode* para traçar as curvas de resposta em frequência para as duas posições da massa determinadas na questão 9. Comente as diferenças relevantes entre as curvas. Que dispositivo poderia fornecer a este sistema mecânico o tipo de entrada subjacente ao diagrama de Bode?

**13. (Em casa – descrever a estratégia de medição da massa)** Embora o dispositivo para aplicação de binário externo referido na questão anterior não seja útil para um metrónomo (porquê?), pode ser usado em conjunto com o sistema mecânico para criar uma “balança” que permite medir a massa  $m$  sem calcular a frequência natural de oscilação do pêndulo. Suponha então que pode aplicar um binário externo sinusoidal com frequência ajustável, ou até realizar um varrimento, mas **desconhecendo a sua amplitude**. Podendo observar apenas a **amplitude de oscilação** para cada frequência, explique como poderia determinar a massa  $m$  conhecendo a sua posição  $l$  sobre a barra. Realize uma simulação (com o sistema linearizado) que ilustre o desempenho do método proposto.