1)

$$T(t) = J\ddot{\theta}(t)$$

, $T$ : soma dos binários aplicados ao sistima

$J$ : momento de inércia

$\ddot{\theta}$ : aceleração angular.

Atrito :

$F_a(t) = -\beta\dot{\theta}$ , força gravitica $F_g = mgl\sin(\theta)$

Momento de inércia :

- massa pontual : $I_m = m \cdot l^2$
- braço : $I_M = \frac{1}{3}ML^2$

$$J = I_m + I_M = ml^2 + \frac{1}{3}ML^2$$

$$J\ddot{\theta}(t) = -K\theta\left(1 + \frac{\theta^2}{100}\right) + F_g + F_a + \frac{1}{2}MLg\sin(\theta) + T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J\ddot{\theta}(t) = -K\theta\left(1 + \frac{\theta^2}{100}\right) + mg \cdot l \cdot \sin\theta - \beta\dot{\theta} + \frac{1}{2}gML\sin(\theta) + T$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta}(t) = \frac{-\beta\dot{\theta} - K\theta\left(1 + \frac{\theta^2}{100}\right) + \left(ml + \frac{ML}{2}\right) \cdot g \cdot \sin(\theta) + T}{J}$$

2)

Equações de estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , u = T$$

$$y = Cx + Du. \quad , y = \theta$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, T) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{-\beta x_2 - Kx_1\left(1 + \frac{x_1^2}{100}\right) + \left(ml + \frac{ML}{2}\right) \cdot g \cdot \sin(x_1) + T}{J} \end{cases}$$

Linearizando proximo do ponto de origem

$$A = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix}_{eq} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{du} \\ \frac{df_2}{du} \end{bmatrix}_{eq} \qquad eq: \ x_{1_0} = x_{2_0} = \dot{x}_{2_0} = 0$$

$$\left.\frac{df_1}{dx_1}\right|_{eq} = 0. \quad ; \quad \left.\frac{df_1}{dx_2}\right|_{eq} = 1. \quad ;$$

$$\left.\frac{df_2}{dx_1}\right|_{eq} = \frac{-K - \frac{3K}{100}\cdot x_{1_0}^2 + \left(m\cdot l + \frac{ML}{2}\right)\cdot g\cdot\cos(x_{1_0})}{J} = \frac{-K + g\left(ml + \frac{ML}{2}\right)}{J} = \alpha$$

$$\left.\frac{df_2}{dx_2}\right|_{eq} = -\frac{B}{J}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

3)

$$FT = G\cdot\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad , \quad \begin{array}{l} \xi \rightarrow \text{coeficiente de amortecimento} \\ \omega_n \rightarrow \text{freq. natural das oscilações} \\ \qquad \text{não amortecidas} \end{array}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 - \frac{B}{J}x_2 + \frac{u}{J} \\ y = x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \ddot{x}_1 = \alpha x_1 - \frac{B}{J}\dot{x}_1 + \frac{u}{J} \\ — \end{cases}$$

$$\ddot{y}(t) = \alpha y(t) - \frac{B}{J}\dot{y}(t) + \frac{u(t)}{J} \xleftrightarrow{TL} Y(s)\left[s^2 + \frac{B}{J}s - \alpha\right] = U(s)\cdot\frac{1}{J}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{J^{-1}}{s^2 + \frac{B}{J}s - \alpha} = \frac{J^{-1}}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{K}{J} - \frac{g}{J}\left(ml + M\frac{L}{2}\right)}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{J}\left(K - g\left(lm + \frac{ML}{2}\right)\right)} ,$$

$$2\xi\omega_n = \frac{B}{J} \Leftrightarrow \xi = \frac{B}{2J\omega_n} ,$$

$$G\,\omega_n^2 = \frac{1}{J} \Leftrightarrow G = \frac{1}{J\omega_n^2}$$

4 a) De maneira a que a resposta do sistema seja sempre oscilatória, $\xi = 0 \rightarrow \frac{B}{2J\omega_n} = 0 \rightarrow \underline{\underline{B = 0}}$. Por outras palavras, o coeficiente de atrito tem de ser nulo.

b) Caso o coeficiente de atrito seja nulo, as aplicações mantêm-se constantes sem aplicação de binário externo. Caso o coeficiente de atrito seja diferente de 0, a amplitude das oscilações diminui acabando por estabilizar em $\theta = 0$. Assim de modo às oscilações se manterem infinitas, na presença de atrito, tem de haver aplicação de binário externo.

c) Devido ao momento linear, quanto maior a posição na haste maior o momento linear do braço do metronomo. Assim quanto menor seja a distância do centro à massa maior será a rapidez das oscilações.

d) Na hipótese do pêndulo oscilar num plano horizontal, a componente relativa à força de atritulo é anulada por uma reação normal à força. Assim, através da relação $\omega_n = \sqrt{\frac{K - g(mL + \frac{1}{2}ML)}{J}} \longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$, ou seja, a frequência de oscilação natural aumenta.

8) A Resposta encontra-se complementada no html correspondente ao trabalho.

De modo a obter uma trajetória rectilínea, a velocidade sobre uma das condições ($x_1$ ou $x_2$) tem de ser nula (i.e. $\dot{x}_1 = 0$ ou $\dot{x}_2 = 0$). Analisando o espaços de estados com a mudança de variável $[x = Vz]$, a solução enunciada acontece sobre os eixos de $z$ ($z_1$ ou $z_2$). Visto que neste caso como o sistema é estável, qualquer solução inicial com uma componente ($x_{10}$ ou $x_{20}$) nula vai convergir sobre o eixo. Assim na relação $x = [v_1\ v_2]\,z$, é fácil perceber que os eixos do plano de estados $z$ estão sobre os vetores próprios do sistema no plano de estados $x$, assim qualquer posição inicial que seja obtida da forma $Kv_{1,2}$, $K \in \mathbb{R}$, é uma solução inicial que conduz a uma trajetória rectilínea.

9) O dimensionamento encontra-se explicado no html correspondente ao trabalho.

grupo : 02 $\rightarrow$ $x = 0$ e $y = 2$

$BPM\_min = 50 + 2(x+1) = 52$

$BPM\_MAX = 150 - 2(y+2) = 142$

Em traços gerais, a estratégia obtida consiste em testar combinações tais que $l \in [0.05$ e $2]$m, incrementado na proporção do milímetro, e a massa seja menor ou igual à massa máxima que provoque instabilidade no sistema (esta massa foi obtida no desafio Bónus), sendo incrementada na propoção da grama. Após serem testadas múltiplas condições ($m$ e $l_{1,2}$) obteve-se o valor de massa máxima que minimiza-se a diferença máxima entre a oscilação calculada e a pretendida. Posteriormente, tendo já sido fixado o valor de massa, é obtido a posição da massa na haste que melhor provoca a velocidade de oscilação pretendida.

Bónus:

tendo em conta os pólos

$$s = \frac{-B/J \pm \sqrt{(B/J)^2 - 4\alpha}}{2}, \quad \alpha = \frac{-K + g\left(ml + \frac{ML}{2}\right)}{J}$$

Na fronteira entre a região estável / instável dos polos, $s = 0$, que pode ser obtido quando $\alpha = 0$:

Logo:

$$0 = \alpha \Leftrightarrow 0 = \frac{-K + g\left(ml + \frac{ML}{2}\right)}{J} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{\frac{K}{g} - \frac{ML}{2}}{l}$$

Para qualquer comprimento: logo $\rightarrow l_{max} = L$ então $m_{max} = \frac{\frac{K}{g} - \frac{ML}{2}}{L} \simeq 0.093 \text{ Kg}$

Melhorias ao trabalho apresentado: NOTA: 18.9 /20.

Caro João,

Foram coisas pequenas, mas todas somadas deu aquilo:

2 - O ponto de equilíbrio é posição angular = 0 e velocidade angular = 0. Não precisas de fazer a aceleração angular igual a zero.

4a) - A resposta era: Não, porque para factores de amortecimentos maiores que 1 o sistema não oscila. Atenção que a definição de oscilação, consideram também as oscilações amortecidas.

6 - Dizem que o C = [1 1] mas não pode ser porque senão a saída era a soma das duas variáveis de estado. o C tinha que ser a identidade, para que a saída fosse igual ao estado.

9 - Não fizeram a envolvente (parte exponencial)

13 - Não discutem a desadequação do dispositivo da 12 para usar no metronomo.

Cumprimentos

AB