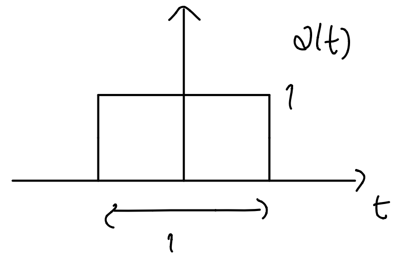
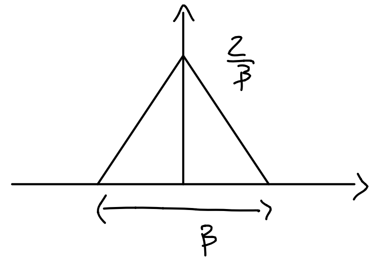
1)



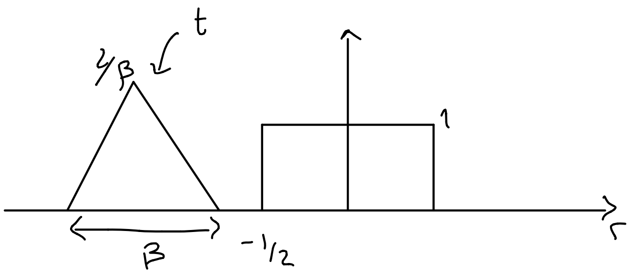
$a(t) \circledast b(t)$



$$y_\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\tau)\cdot b(t-\tau)\, d\tau$$

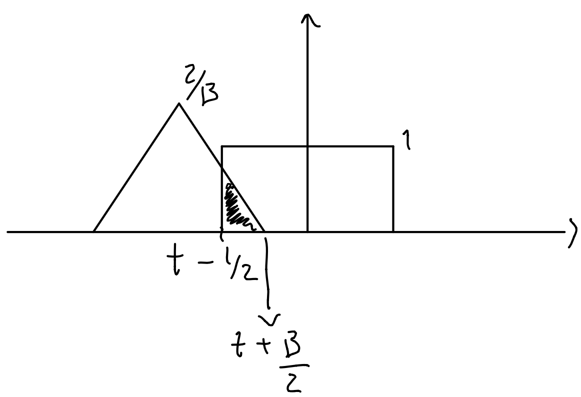
$$b(t) = \begin{cases} \frac{4}{\beta^2}\cdot t + \frac{2}{\beta} & , t < 0 \\ -\frac{4}{\beta^2} t + \frac{2}{\beta} & , t > 0 \end{cases}$$

<u>Zona 1</u>: $t < \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}\right) \iff t < -\left(\frac{\beta+1}{2}\right)$



$$a(\tau)\, b(t-\tau) = 0$$

<u>Zona 2</u>: $-\left(\frac{\beta+1}{2}\right) < t < -\frac{1}{2}$



$$y(t) = \int_{-1/2}^{t+\frac{\beta}{2}} \cancel{a(\tau)}^{1} \cdot b(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-1/2}^{t+\frac{\beta}{2}} \left(\frac{2}{\beta}\tau + \frac{4}{\beta^2}(t-\tau)\right) d\tau =$$

$$= \int_{-1/2}^{t+\beta/2} \left(\frac{2}{\beta} + \frac{4}{\beta^2} t - \frac{4}{\beta^2}\tau\right) d\tau =$$

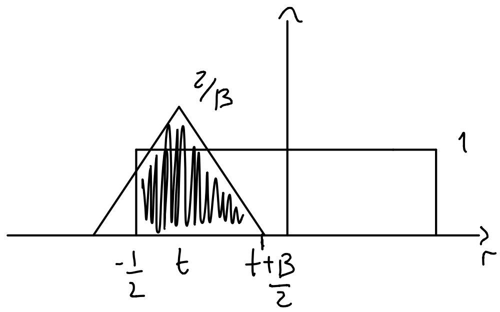
$$= \left[\frac{2}{\beta}\tau\right]_{-1/2}^{t+\beta/2} + \left[\frac{4}{\beta} t \cdot \tau\right]_{-1/2}^{t+\beta/2} - \left[\frac{2}{\beta^2}\tau^2\right]^{t+\beta/2} =$$

$$= 2\left(t + \frac{\beta}{2}\right) - \frac{2}{\beta}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{\beta^2} t \left(t + \frac{\beta}{2}\right) - \frac{4}{\beta^2} t \left(-1/2\right)$$

$$- \frac{2}{\beta^2}\left(t + \beta/2\right)^2 + \left(2/\beta^2\right)\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{\beta^2} t^2 + \left(\frac{2\beta+2}{\beta}\right) t + \left(\frac{2\beta+1}{2\beta^2}\right) + \frac{1}{2}$$

Zona 3: $-\frac{1}{2} < t < \left(\frac{\beta-1}{2}\right)$



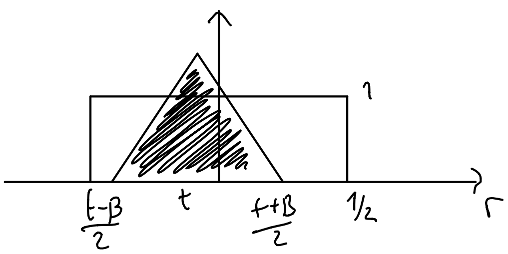
$$y(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{t+\beta}{2}} \cancel{a(r)}^{1} \cdot b(t-r)\, dr =$$

$$= \frac{1}{2} + \int_{-\frac{1}{2}}^{t} \left(\frac{2}{\beta} - \frac{4}{\beta^2}(t-r)\right) dr = (\dots)$$

$$= \frac{-2}{\beta} t^2 + \left(\frac{2\beta-2}{\beta^2}\right) \cdot t + \left(\frac{2\beta-1}{2\beta^2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$y(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{\beta}{2}} a(r)$$

Zona 4: $\left(\frac{\beta-1}{2} < t < \frac{1-\beta}{2}\right)$



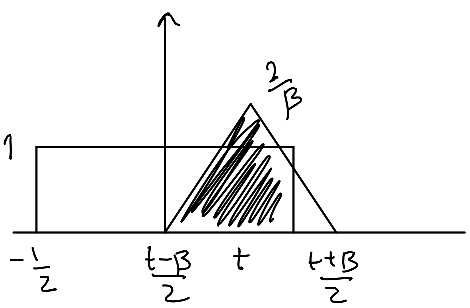
$$y(t) = 1$$

Zona 5: $\left(\frac{1-\beta}{2} < t < \frac{1}{2}\right)$

Simetria com zona 3:

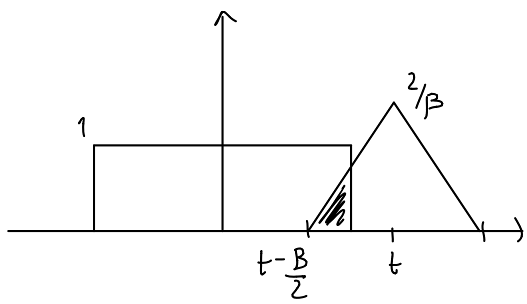
Seja z_3 a expressão para a zona 3,

tem-se $z_5(t) = y(t) = z_3(-t)$



$$y(t) = \frac{-2}{\beta} t^2 + \left(\frac{2-2\beta}{\beta^2}\right) \cdot t + \left(\frac{2\beta-1}{2\beta^2}\right) + \frac{1}{2}$$

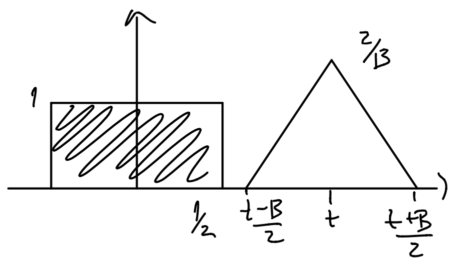
Zona 6 : $\left(\frac{1}{2} < t < \frac{\beta+1}{2}\right)$ simetria com zona 2 :



$z_6(t) = z_2(-t) = y(t)$

$$y(t) = \frac{2}{\beta^2} t^2 - \left(\frac{2\beta+2}{\beta^2}\right) \cdot t + \left(\frac{2\beta+1}{2\beta^2}\right) + \frac{1}{2}$$

Zona 7 : $t > \left(\frac{\beta+1}{2}\right)$



idêntico zona 1 :

$y(t) = 0.$

4) Propriedades Áreas

$$y(t) = a(t) * b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(r) \cdot b(t-r)\, dr$$

Área de $y(t) \longrightarrow A_y$:

$$A_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} a(r) \cdot b(t-r)\, dr\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} a(r)\, dr \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} b(t-r)\, dt = A_a \cdot A_b$$

Como $a(t)$ tem área 1 e $b(t)$ também, o impulso tem área 1.

Multiplicando $p_\beta(t)$ por U fará a área aumentar U (factor)

Esticando $p_\beta(t)$ por μ fará a área aumentar μ (fator)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U \cdot p_\beta\left(\frac{t}{\mu}\right) dt = U \cdot \mu$$

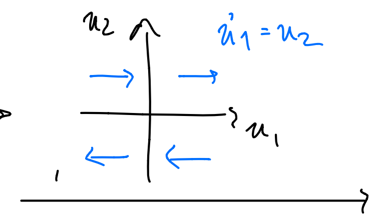
5)

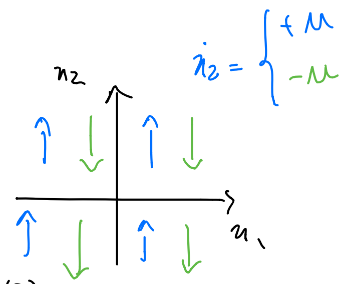
$$\frac{du}{dt} = 0 \qquad \text{enunciado: } \ddot{y} = u - b\dot{y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_2 = u - b x_2 \;, \quad \boxed{\text{considerando } b=0} \quad \dot{x}_2 = u$$

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 \end{cases} \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} , \quad u \pm 1 \quad \rightarrow$$

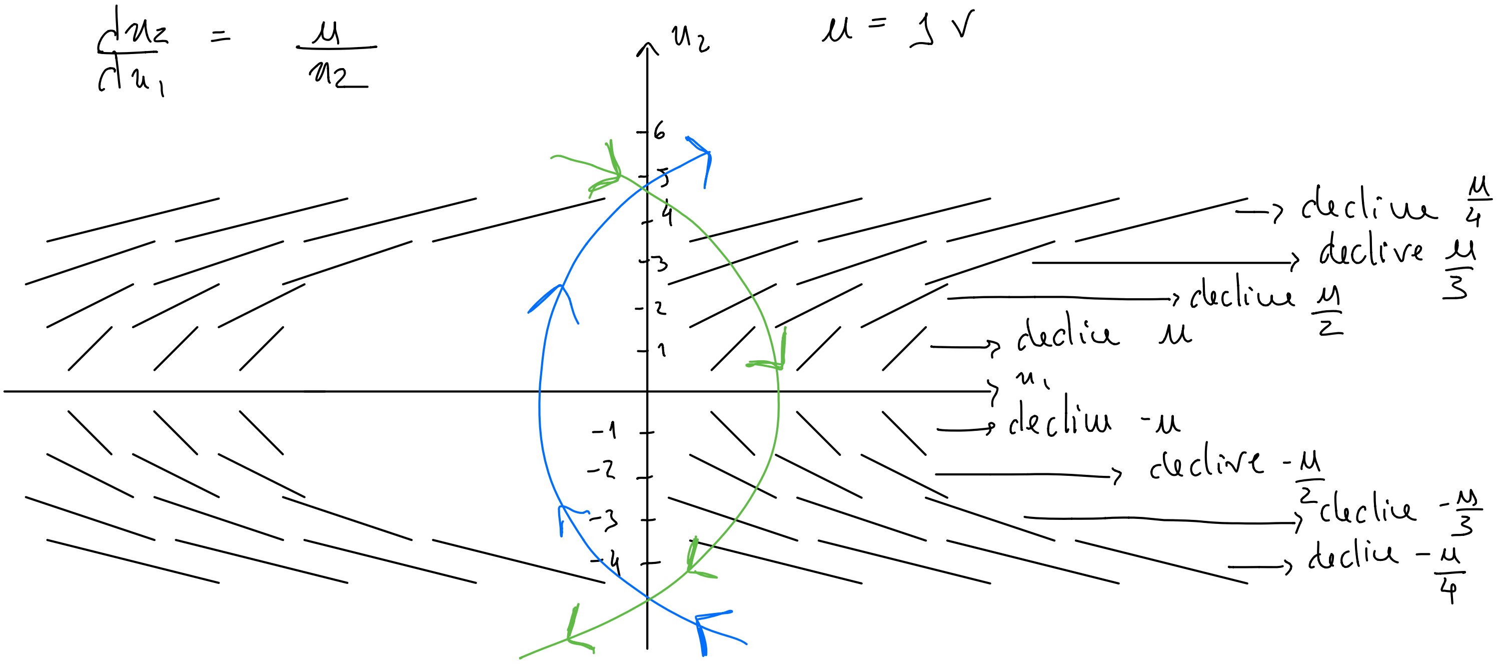




gráficos (1) e (2)

com recurso ao método das isoclinas:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u}{x_2} \qquad u = 1\,V$$



para o caso em que $u = -1\,V$, as derivadas parciais são simétricas:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{u=-1V} = -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{u=1V} \;,$$ dog a parábola tem

a concavidade virada para o sentido negativo do eixo x_1. De acordo com os gráficos (1) e (2) o sentido da parábola será, neste caso, no sentido dos ponteiros do relógio. A parábola encontra-se verde.

Caso $b \neq 0$, ou seja na presença atrito, o plano de fase $(y, \dot{y})$ tem o mesmo movimento parabólico, porém o movimento parabólico tem derivada menor em todo o espaço cuja diferença é $(-b)$.

6)

Dados α e β

Determinar $U_1 ; U_2 ; T$

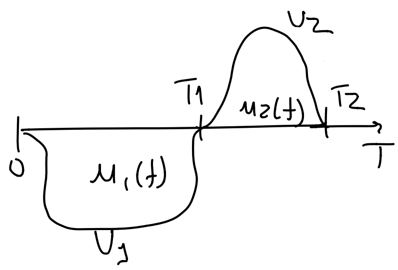
$$u(t) : \left.\begin{matrix} y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} y(T) = 0 \\ \dot{y}(T) = 0 \end{matrix}\right.$$

$$\dot{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, dt = 0 \iff$$

$$\iff \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t)\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} u_2(t)\, dt = 0$$

$$\iff \underbrace{\int_0^{T_1} u_1(t)\, dt}_{\text{Área trapézio 1}} = - \int_0^{T_2} u_2(t)\, dt$$

Área trapézio 2



A proporção de área ocupada antes e após $u(t) = U(P)$, é independente do tempo e de amplitude máxima e dependente apenas de β e α.

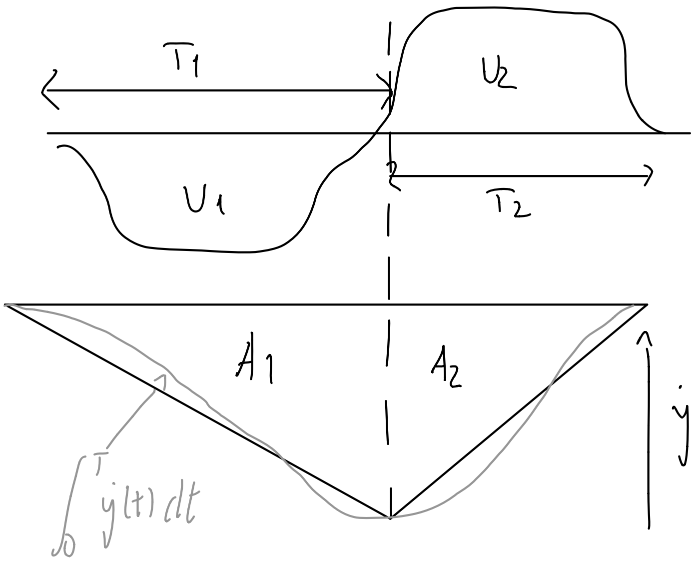
Em condições iguais de α e β, de modo a que $\dot{y}(t) = 0$ ou seja que a velocidade após um certo tempo (T) seja nula, obtemos

$$U_1 \cdot T_1 (1-P) = U_2 T_2 (1-P) \rightarrow U_1 T_1 = U_2 T_2 \iff$$, sabendo: $T_2 = \alpha T_1$

$$\iff U_1 T_1 = U_2 (\alpha T_1)$$

$$\iff U_1 = \alpha U_2 .$$

$y(T) = y(0) + \int_0^T \dot{y}(t)\,dt$, conforme a perguntas 4 e 5:



Pode-se aproximar o integral do sistema (área a cinzento) pela área do triângulo, visto que as variações iniciais sendo simétricas compensam-se.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{y}(t)\,dt = A_1 + A_2$$

$$= \frac{U_1 \cdot \cancel{\mu_1} \cdot T_1}{2} + \frac{U_2\, \cancel{\mu_2} \cdot T_2}{2} = \frac{U_1\, T_1^2}{2(1+\beta)} + \frac{U_2 \cdot T_2^2}{2(1+\beta)}$$

$$= \frac{U_1 T_1^2}{2(1+\beta)} + \frac{\frac{U_1}{\alpha}(\alpha\, T_1)^2}{2(1+\beta)} = \frac{U_1 T_1^2}{1+\beta}\,\frac{(1+\alpha)}{2}$$

$$y(T) - y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{y}(t)\,dt = -1 \rightarrow \frac{U_1 T_1^2}{1+\beta}\,\frac{(1+\alpha)}{2} = -1$$

$$U_1 = -\frac{2}{T_1^2}\cdot\frac{(1+\beta)}{(1+\alpha)}$$

$$|U_1| \leq 1 \longrightarrow \frac{2}{T_1^2}\,\frac{(1+\beta)}{(1+\alpha)} \leq 1 \iff T_1 \geq \sqrt{\frac{2(1+\beta)}{1+\alpha}}$$

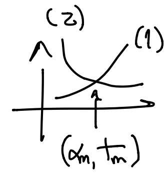
$$|U_2| \leq 1 \rightarrow \left|\frac{\alpha}{T_2^2}\cdot\frac{2(1+\beta)}{1+\alpha}\right| \leq 1 \iff T_2 \geq \sqrt{\frac{2(1+\beta)\,\alpha}{1+\alpha}}$$

$$\begin{cases} T_2 = T_1 \cdot \alpha \\ T = T_1 + T_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{—} \\ \underline{T = (1+\alpha) T_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \\ T = (1+\alpha)(T - T_2) \end{cases} \quad \begin{cases} \text{—} \\ T_2 (1+\alpha) = T \cdot \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = (1+\alpha) T_1 \\ T = \dfrac{(1+\alpha)}{\alpha} T_2 \end{cases} \quad \begin{cases} T \geq (1+\alpha) \sqrt{\dfrac{2(1+B)}{1+\alpha}} \\ T \geq \dfrac{(1+\alpha)}{\alpha} \sqrt{\dfrac{2(1+B)\alpha}{1+\alpha}} \end{cases} \quad \begin{cases} T \geq \sqrt{2(1+B)(1+\alpha)} & (1) \\ T \geq \sqrt{\dfrac{2(1+B)(1+\alpha)}{\alpha}} & (2) \end{cases}$$

{ (1) é estritamente crescente
{ (2) é estritamente decrescente.

, logo o menor valor de T ocorre quando



$$(1) = (2)$$

$$(1) = (2) \rightarrow \sqrt{2(1+B)(1+\alpha)} = \sqrt{\frac{2(1+B)(1+\alpha)}{\alpha}} \rightarrow \underline{\underline{\alpha = 1}}$$

Melhorias ao trabalho apresentado: NOTA: 17.5/20.

AM **Alexandre José Malheiro Bernardino** 12:08
To: João Tiago Almeida >

Re: Lab 2 ModSim

Caro João.

O vosso trabalho está muito bom mas houve diversos pequenos detalhes que descontaram na nota:
4(T) - Faltou-vos demonstrar analiticamente as propriedades do escalamento.
5(T) - Faltou-vos demonstrar que aquela curva é realmente parabólica (relação quadrática entre x1 e x2). Há muitas curva não parabólicas com aquela forma (hiperbolicas, polinomiais de ordem superior, exponenciais, etc. ..)
6(T) - Não percebi o que era o P na demonstração da relação U1 / U2. Faltou demonstrar analiticamente que aproximação triangular é exacta.
7(L) - Faltou-vos simular betas diferentes e analisar o efeito de beta.
11(L) - Faltou-vos quantificar o atraso das respostas e foram muito conservadores no valor de yl (basicamente não aproveitaram o ramo anterior devidamente para acelerar o tempo de estabelecimento - ficou praticamente igual ao sistema linear).

Digam-me se tiverem mais questões.

Cumprimentos

AB