



**RELATÓRIO FINAL JORNADAS DE PESQUISA EM
MATEMÁTICA 2024**

Baralhos e passeios aleatórios

João V. A. Pimenta, Luiz F. S. Marques, Raphael Alves, Sabrina
Estácio

Supervisores: Milton Jara, Rodrigo Marinho, Susana Frómeta

São Carlos, SP
Fevereiro de 2024

Sumário

1	Introdução	3
2	Definições, nomenclaturas e o teorema principal	4
2.1	O passeio aleatório simples simétrico em \mathbb{Z}	4
2.2	Baralhos e simulações	5
2.3	As distribuições binomial e hipergeométrica	6
2.4	Distância de variação total	7
3	O teorema principal	8
3.1	Consequências do Teorema	8
4	Demonstração do teorema principal	10
4.1	Localizando os pontos nos quais $f(\cdot, N, T) - 1$ muda de sinal	12
4.2	Uma extensão contínua de $f(\lambda, N, T)$	14
4.3	Estimativas para $\binom{T}{\lambda}$ e $f(\lambda, cT, T)$	15
4.4	A sequência $(\gamma_T)_{T \in \mathbb{N}}$	17
4.5	Concluindo a demonstração	20
5	Outras simulações	22
5.1	Uma extensão dos grupos	22
5.2	Uma simulação - quase - perfeita	24
6	Conclusão	26

1 Introdução

Neste trabalho estudaremos passeios aleatórios *simples simétricos em \mathbb{Z}* . Tais passeios descrevem um movimento aleatório de uma partícula em \mathbb{Z} . Isto é, em momentos discretos, a partícula pode se mover para o inteiro à sua direita ou para o inteiro à sua esquerda com igual probabilidade.

Um passeio aleatório simples simétrico pode ser simulado usando uma moeda honesta com o seguinte procedimento: lança-se a moeda e, se o resultado for cara, dá-se um passo à direita. Se for coroa, dá-se um passo à esquerda. Queremos estudar como simular passeios aleatórios simples simétricos em \mathbb{Z} utilizando um baralho de cartas. Atribuindo ações às cartas, podemos fazer simulações apenas virando-as uma-a-uma, sem reposição, o que é bem mais prático do que lançar a moeda repetidas vezes.

Diversas são as maneiras de se atribuir ações a cada uma das cartas. Uma possível maneira é — considerando que o baralho está dividido em cartas vermelhas e pretas — atribuir às cartas vermelhas a ação de dar um passo à esquerda, e às cartas pretas a ação de dar um passo à direita. Este procedimento será denominado no decorrer deste texto de *simulação tradicional*.

Tipo (cor)	Movimento atribuído
 	→
 	←

Tabela 1: Uma simulação que dá 1 passo por carta - *simulação tradicional*.

Numa tentativa de elaborar outra simulação, pode-se questionar o porquê de não utilizar os naipes. Enquanto as cores dividem o baralho em dois grupos distintos, os naipes o dividem em quatro, permitindo atribuir dois passos a cada carta retirada, como ilustra a Tabela 2.

Naipe	Movimento atribuído
	→→
	→←
	←→
	←←

Tabela 2: Uma simulação que dá 2 passos por carta.

Estas simulações admitem uma generalização. Se o baralho estiver dividido em 2^k grupos¹, então podemos atribuir a cada carta um movimento composto por k passos.

Há, porém, um detalhe a ser observado ao utilizar as simulações descritas acima. Vamos utilizar a *simulação tradicional* como exemplo. Suponha que iniciemos o procedimento retirando uma carta preta e, portanto, dando um passo à direita. No momento que precede a retirada da segunda carta, o baralho tem uma carta vermelha a mais do que pretas, fazendo com que a probabilidade de ser retirada uma carta vermelha seja ligeiramente maior que a probabilidade de ser retirada uma carta preta, o que não deveria ocorrer em um passeio aleatório simétrico. Esta situação pode se agravar se mais

¹Aqui, o leitor deve se desprender da ideia de baralho com 52 cartas em 4 naipes que conhecemos e imaginar um conjunto genérico de cartas que, de alguma maneira, se divide em 2^k agrupamentos.

cartas pretas forem retiradas seguidamente. Um problema semelhante ocorre com a generalização com 2^k grupos considerada acima. Os passos, nessa simulação, apresentam dependência com os passos anteriores, fato que não ocorre com a moeda.

Nosso interesse principal neste trabalho é entender qual é a lei induzida pela *simulação tradicional* sobre as trajetórias possíveis, e o quanto distante essa lei é (usando um parâmetro que será enunciado posteriormente — a distância de variação total) da lei representada pela simulação com uma moeda (com variáveis independentes). Nesse sentido, o nosso principal resultado representa uma resposta direta à questão e descreve qual a quantidade de passos que podemos simular de um passeio aleatório para um baralho de N cartas tal que se mantenha um controle arbitrário sobre a distância entre as distribuições.

Na Seção 2, forneceremos definições precisas para o baralho e a *simulação tradicional* e introduziremos a distância de variação total entre duas medidas de probabilidade definidas em um mesmo espaço. Esta última será o objeto utilizado para avaliar quanto bem um baralho com N cartas simula trajetórias de tamanho T de um passeio aleatório simples simétrico utilizando uma dada simulação². Em seguida, na Seção 3, enunciaremos o Teorema 3.1, que exibe o perfil assintótico da distância de variação total entre a lei das possíveis trajetórias do passeio aleatório simulado com a *simulação tradicional* e o passeio aleatório de tamanho finito fixado. Discutiremos também algumas consequências numéricas. Após isso, na Seção 4, apresentaremos a demonstração do Teorema 3.1. Na Seção 5, discutiremos outras direções para as quais este trabalho ainda pode avançar. Comentaremos ainda alguns resultados acerca de uma simulação que lida de maneira diferente com a dependência dos passos anteriores que se observou acima. Por fim, na Seção 6, sintetizaremos o que foi desenvolvido e recapitularemos sucintamente os resultados apresentados ao longo relatório.

2 Definições, nomenclaturas e o teorema principal

2.1 O passeio aleatório simples simétrico em \mathbb{Z}

Sejam $p \in (0, 1)$ e $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com

$$\mathbb{P}(\xi_j = 1) = 1 - \mathbb{P}(\xi_j = -1) = p. \quad (2.1)$$

Considere $X_0 := 0$ e, para cada $n \geq 1$,

$$X_n := \sum_{j=1}^n \xi_j.$$

A sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é dita o *passeio aleatório simples simétrico* em \mathbb{Z} . As variáveis aleatórias ξ_j , $j \in \mathbb{N}$, determinam a direção do j -ésimo passo, sendo esse para a esquerda se $\xi_j = -1$ e para a direita se $\xi_j = 1$. As variáveis X_n , $n \in \mathbb{N}_0$, por sua vez, determinam a posição da partícula após o n -ésimo passo dado. Quando $p = 1/2$, dizemos que a sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é o *passeio aleatório simples simétrico em \mathbb{Z}* . Este é o caso que pretendemos simular, e o denominaremos daqui em diante de *passeio aleatório*.

²Que, no nosso escopo, será a tradicional.

Na prática, estamos interessados em simular a trajetória de um passeio aleatório até determinado instante t , portanto, convém observar o truncamento da sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ em um certo $T \in \mathbb{N}$ fixado. Assim, diremos que o passeio aleatório de tamanho T é o vetor aleatório $(X_n)_{0 \leq n \leq T}$, em que X_n , $0 \leq n \leq T$, são as variáveis aleatórias definidas acima.

Observe que $(X_n)_{0 \leq n \leq T}$ assume valores em

$$\Gamma_T := \left\{ x = (x_0, \dots, x_T) \in \mathbb{Z}^T : x_0 = 0 \text{ e } |x_j - x_{j-1}| = 1 \text{ para todo } j = 1, \dots, T \right\}.$$

De (2.1) com $p = 1/2$ e da independência das variáveis $(\xi_j)_{1 \leq j \leq T}$, temos

$$\mathbb{P}((X_n)_{0 \leq n \leq T} = x) = \frac{1}{|\Gamma_T|} = \frac{1}{2^T}$$

para qualquer que seja $x \in \Gamma_T$. Ou seja, a lei de $(X_n)_{0 \leq n \leq T}$ é a uniforme em Γ_T . Será conveniente notar que existe uma bijeção entre Γ_T e

$$\Omega_T := \{-1, 1\}^T = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_T) : \sigma_j \in \{-1, 1\} \text{ para todo } j = 1, \dots, T\},$$

o conjunto em que o vetor aleatório $(\xi_j)_{1 \leq j \leq T}$ assume valores também com lei uniforme. Em palavras, existe uma correspondência biunívoca entre as possíveis trajetórias do passeio e as possíveis sequências de T passos à direita ou à esquerda.

2.2 Baralhos e simulações

Sejam $N, K, T \in \mathbb{N}$ tais que $T < 2K = N$. Um *baralho* com N cartas é o conjunto $\Lambda_N := \{1, \dots, N\}$, em que cada $j \in \Lambda_N$ representa uma carta. Denotaremos por S_N o conjunto das permutações de Λ_N . Isto é,

$$S_N := \{(\sigma(1), \dots, \sigma(N)) : \sigma \text{ é uma bijeção de } \Lambda_N \text{ em } \Lambda_N\}.$$

Uma função $X : S_N \longrightarrow \Omega_T$ é dita uma *simulação* do passeio aleatório de tamanho T utilizando um baralho com N cartas. Observe que toda função $\varphi : \Lambda_N \longrightarrow \{-1, 1\}$ determina uma simulação. De fato, fixada φ , definimos X por

$$X(\sigma) = (\varphi(\sigma_1), \dots, \varphi(\sigma_T)), \quad (2.2)$$

em que $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in S_N$. Assim, a simulação tradicional descrita na Seção 1 fica formalmente definida por este método utilizando a função $\varphi : \Lambda_N \longrightarrow \{-1, 1\}$ dada por

$$\varphi(j) = \begin{cases} -1, & \text{se } j \text{ é par;} \\ 1, & \text{se } j \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (2.3)$$

A função φ identifica cada elemento par de Λ_N com uma carta vermelha e associa a esta um passo à esquerda, e cada elemento ímpar de Λ_N com uma carta preta, associando a esta um passo à direita. Perceba também que, como $T < N$, a simulação X é certamente não injetora. Com efeito, trocar de lugar os últimos elementos de uma certa permutação $\sigma \in S_N$ não altera a sua imagem pela função X .

2.3 As distribuições binomial e hipergeométrica

Introduziremos a seguir duas distribuições de probabilidade que surgirão nos cálculos da Seção 4. Evitamos ir a fundo nos detalhes que envolvem tais distribuições, uma vez que o que precisaremos é apenas identificá-las quando surgirem.

Seja $p \in (0, 1)$. Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição de *Bernoulli* com parâmetro p se assume valores em $\{0, 1\}$ com

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = p.$$

Intuitivamente, X representa o sucesso ou fracasso de um dado experimento que será realizado uma única vez e possui probabilidade p de ser bem sucedido. O sucesso do experimento ocorre quando X assume 1 e, consequentemente, o fracasso ocorre quando X assume 0.

Agora, dado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que X tem distribuição *binomial* com parâmetros n e p , e escrevemos $X \sim B(n, p)$, se X assume valores em $\{0, 1, \dots, n\}$ com

$$\mathbb{P}(X = \lambda) = \binom{n}{\lambda} p^\lambda (1-p)^{n-\lambda}, \quad \lambda = 0, 1, \dots, n.$$

Como uma generalização da distribuição de Bernoulli, X representa a quantidade de sucessos em uma sequência de n realizações independentes de um mesmo experimento com probabilidade p de ser bem sucedido. Uma outra maneira de pensar X é como uma soma de n variáveis aleatórias independentes com distribuição de Bernoulli de parâmetro p .

Sejam N , T e K inteiros positivos com $T < K < N$. Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição *hipergeométrica* com parâmetros N , T e K e escrevemos $X \sim H(N, T, K)$ se X assume valores em $\{0, 1, \dots, T\}$ com

$$\mathbb{P}(X = \lambda) = \frac{\binom{K}{\lambda} \binom{N-K}{T-\lambda}}{\binom{N}{T}}, \quad \lambda = 0, 1, \dots, T.$$

A expressão acima fornece a probabilidade de obtermos λ sucessos ao fazermos T retiradas, sem reposição, de um recipiente com N objetos, em que, do total de N , K objetos representam um sucesso e $N - K$ representam um fracasso.

A seguinte proposição fornece uma outra expressão para a distribuição hipergeométrica que nos será útil mais adiante.

Proposição 2.1. *Se $X \sim H(N, T, K)$, então*

$$\mathbb{P}(X = \lambda) = \frac{\binom{T}{\lambda} \binom{N-T}{K-\lambda}}{\binom{N}{K}} \text{ para todo } \lambda = 0, 1, \dots, T.$$

Demonstração. A igualdade segue de uma manipulação dos fatoriais:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{K}{\lambda} \binom{N-K}{T-\lambda}}{\binom{N}{T}} &= \frac{K!}{\lambda!(K-\lambda)!} \cdot \frac{(N-K)!}{(T-\lambda)!(N-K-T+\lambda)!} \cdot \frac{T!(N-T)!}{N!} \\ &= \frac{T!}{\lambda!(T-\lambda)!} \cdot \frac{(N-T)!}{(K-\lambda)!(N-T-K+\lambda)!} \cdot \frac{K!(N-K)!}{N!} \\ &= \frac{\binom{T}{\lambda} \binom{N-T}{K-\lambda}}{\binom{N}{K}} \end{aligned}$$

□

2.4 Distância de variação total

Sejam Ω um conjunto enumerável. Denotarmos por $\mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto das partes de Ω . Considere $\mu, \nu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ medidas de probabilidade. A *distância de variação total* $d_{\text{VT}}(\mu, \nu)$ entre μ e ν é dada por

$$d_{\text{VT}}(\mu, \nu) := \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |\mu(\omega) - \nu(\omega)|. \quad (2.4)$$

A seguinte proposição estabelece uma caracterização da distância de variação total que utilizaremos crucialmente no que segue.

Proposição 2.2. *Se μ e ν são medidas de probabilidade em Ω , então*

$$d_{\text{VT}}(\mu, \nu) = \sum_{\omega : \nu(\omega) \leq \mu(\omega)} \mu(\omega) - \nu(\omega). \quad (2.5)$$

Demonstração. Seja $E = \{\omega \in \Omega : \nu(\omega) \leq \mu(\omega)\}$. Como

$$0 = \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) - \nu(\omega) = \sum_{\omega \in E} \mu(\omega) - \nu(\omega) + \sum_{\omega \in E^c} \mu(\omega) - \nu(\omega),$$

temos

$$\sum_{\omega \in E} \mu(\omega) - \nu(\omega) = \sum_{\omega \in E^c} \nu(\omega) - \mu(\omega)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} d_{\text{VT}}(\mu, \nu) &= \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) - \nu(\omega) = \frac{1}{2} \left[\sum_{\omega \in E} \mu(\omega) - \nu(\omega) + \sum_{\omega \in E^c} \nu(\omega) - \mu(\omega) \right] \\ &= \sum_{\omega \in E} \mu(\omega) - \nu(\omega) \end{aligned}$$

como gostaríamos. \square

A vantagem da expressão fornecida pela Proposição 2.2 é a ausência do valor absoluto nos termos que estão sendo somados.

No contexto da Subseção 2.2, sejam \mathbb{Q}_N e \mathbb{P}_T as distribuições uniformes em $(S_N, \mathcal{P}(S_N))$ e $(\Omega_T, \mathcal{P}(\Omega_T))$ respectivamente. Cada simulação $X : S_N \rightarrow \Omega_T$ determina uma medida de probabilidade μ_X em $(\Omega_T, \mathcal{P}(\Omega_T))$ dada por

$$\mu_X(\omega) := \mathbb{Q}_N(X = \omega), \quad \omega \in \Omega_T. \quad (2.6)$$

Como observamos na Subseção 2.1, $(X_n)_{0 \leq n \leq T}$ assume cada vetor $\omega \in \Omega_T$ com distribuição uniforme em Ω_T , de maneira que, para avaliar quão bem a simulação tradicional simula o passeio, nos dedicaremos a estimar a distância de variação total entre μ_X e \mathbb{P}_T , que é dada por

$$d_T(N) := d_{\text{VT}}(\mu_X, \mathbb{P}_T) = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega_T} |\mu_X(\omega) - 2^{-T}|, \quad (2.7)$$

em que X é a simulação tradicional definida em (2.2) com (2.3). Daqui em diante, a menos que haja menção explicitamente contrária, X denotará a *simulação tradicional*.

Cabe lembrar que, neste contexto, como o baralho está dividido em cartas pretas e vermelhas, temos $N = 2K$, um número par. Estaremos interessados no caso em que todas as trajetórias $\omega \in \Omega_T$ são obtidas com probabilidade positiva por meio de X . Para isso, devemos assumir que

$$T \leq K = N/2, \quad (2.8)$$

uma vez que, caso contrário, a trajetória de tamanho T que só dá passos à direita, por exemplo, teria probabilidade nula de ser alcançada utilizando X . Assim, de agora em diante, T , K e N sempre satisfazem (2.8).

3 O teorema principal

Usando a notação introduzida em (2.7), podemos enunciar o resultado principal deste trabalho. A sua demonstração segue de uma série de manipulações e estimativas da expressão obtida para $d_T(cT)$ que serão realizadas na Seção 4.

Teorema 3.1. *Para todo $c \geq 2$,*

$$d_T(cT) = \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma_c}{\sqrt{2(c-1)/c}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma_c}{\sqrt{2}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right), \quad (3.1)$$

em que erf acima é a função erro de Gauss definida por

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt$$

e

$$\gamma_c = \sqrt{(c-1) \log\left(\frac{c}{c-1}\right)}. \quad (3.2)$$

O Teorema 3.1 exibe o perfil da função $d_T(N)$ quando tomamos o tamanho N do baralho como um múltiplo fixado de T , o tamanho do passeio a ser simulado. A diferença dos dois valores da função erro de Gauss em (3.1) vem, naturalmente, da integração da diferença das densidades de duas distribuições normais, que estão relacionadas com a convergência de cada uma das distribuições em (4.5). Isto ficará claro na Seção 4, na qual demonstramos o Teorema 3.1. A seguir, discutimos algumas consequências deste resultado.

3.1 Consequências do Teorema

O resultado acima nos permite calcular a proporção de cartas que o baralho deve ter em relação à quantidade de cartas retiradas para que a distância de variação total seja menor ou igual à algum valor desejado.

Perceba que o Teorema (3.1) possui entrada $N = cT$. Mas não é garantido que c vai ser uma constante inteira, e, na verdade, isso não ocorre com grande frequência. Como a quantidade de cartas do baralho deve ser um número inteiro, tomamos $N = \lceil cT \rceil$.

Podemos então calcular o tamanho do baralho e a quantidade de cartas que devemos retirar, para algum certo valor de distância de variação total, por exemplo. Mas também

podemos fazer o processo contrário: calcular a distância de variação total para um baralho com determinada quantidade de cartas.

Alguns valores notáveis para $d_T(cT)$ em função de c podem ser observados na Tabela 3 a seguir. Cabe ressaltar que há aqui um abuso de notação: a coluna da esquerda exibe o valor de $d_T(cT)$ a menos do termo de ordem $1/\sqrt{T}$ que surge em (3.1). A tabela exibe então uma interpretação mais fidedigna se considerarmos valores grandes de T .

$d_T(cT)$	c
0.160	2.00
0.100	2.94
0.050	5.35
0.010	24.70
0.005	48.89
0.001	242.47

Tabela 3: Relação de valores notáveis derivados a partir do Teorema 3.1.

A informação que essa tabela carrega é que, se impusermos que a distribuição tenha $d_{VT}(\mu_X, \mathbb{P}_T) \leq 0.05$, devemos tomar um baralho no qual $N = \lceil 5,35 \cdot T \rceil$, com T suficientemente grande. Os outros valores têm interpretação análoga e o comportamento completo da função pode ser melhor observado na Figura 2.

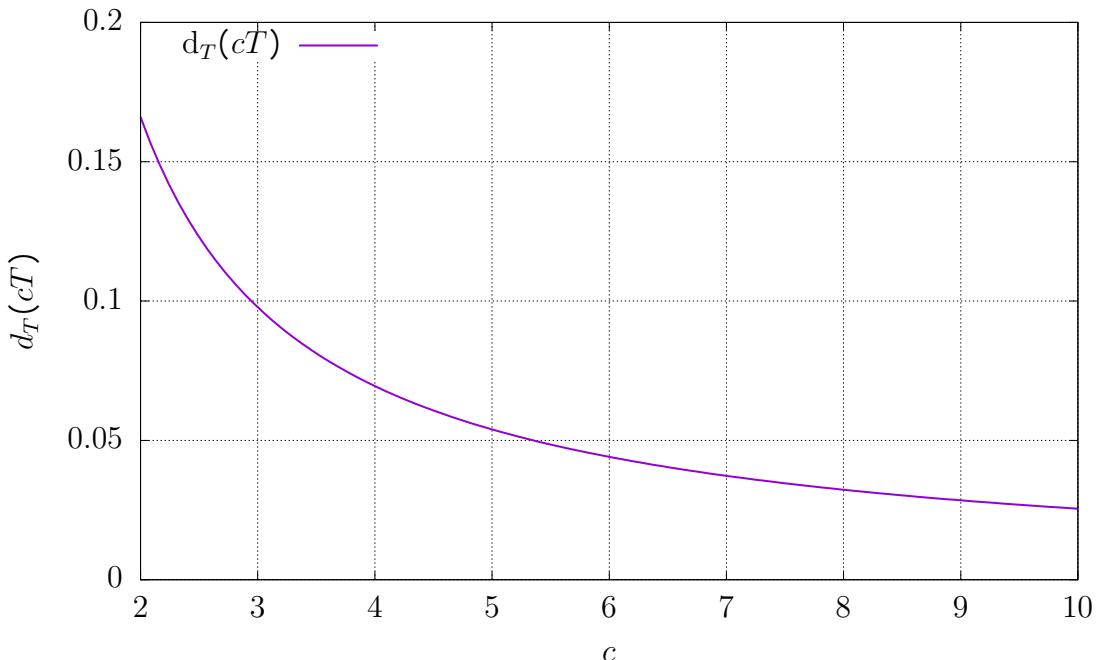


Figura 1: Plot da função $d_T(cT)$ definida pela Teorema 3.1.

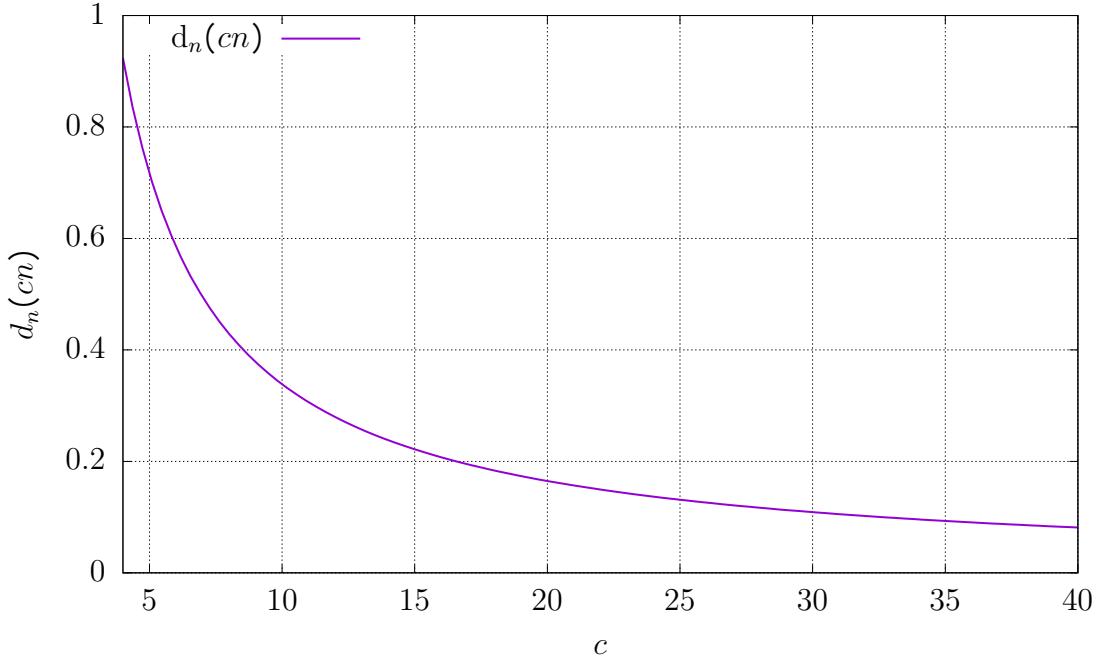


Figura 2: Plot da função $d_n(cn)$ definida pela Teorema 3.1.

4 Demonstração do teorema principal

Queremos desenvolver a expressão encontrada em (2.7). Para isso, convém primeiramente obter uma expressão explícita para $\mu_X(\omega)$. Este é o papel da seguinte proposição.

Proposição 4.1. *Para todo $\omega \in \Omega_T$,*

$$\mu_X(\omega) = \frac{\binom{N-T}{K-\lambda_\omega}}{\binom{N}{K}}, \quad (4.1)$$

em que λ_ω é a cardinalidade do conjunto $\{j \in \{1, \dots, T\} : \omega_j = 1\}$.

Observação 4.2. Em palavras, o valor λ_ω considerado acima é a quantidade de passos dados à direita na trajetória ω .

Demonstração. Temos por (2.6) que, dado $\omega \in \Omega_T$,

$$\mu_X(\omega) = \mathbb{Q}(X = \omega) = \frac{|\{X = \omega\}|}{N!}.$$

Então, para calcular $\mu_X(\omega)$, é suficiente determinar $|\{X = \omega\}|$. Como ω está fixo, a ordenação de passos para a direita e para a esquerda está fixa. Assim, $|\{X = \omega\}|$ é o produto entre o arranjo simples de λ_ω cartas ímpares (ou passos dados à direita) em um total de K passos, com o arranjo simples de $T - \lambda_\omega$ cartas pares (ou passos dados à esquerda) em um total de K passos, e com as permutações das $N - T$ cartas não usadas. Ou seja,

$$|\{X = \omega\}| = \frac{K!}{(K - \lambda_\omega)!} \frac{K!}{(K - T + \lambda_\omega)!} (N - T)!. \quad (4.2)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mu_X(\omega) &= \frac{\frac{K!}{(K-\lambda_\omega)!} \frac{K!}{(K-T+\lambda_\omega)!} (N-T)!}{N!} = \frac{K!K!}{N!} \frac{(N-T)!}{(K-\lambda_\omega)!(K-T+\lambda_\omega)!} \\ &= \frac{\binom{N-T}{K-\lambda_\omega}}{\binom{N}{K}},\end{aligned}\tag{4.3}$$

como queríamos. \square

Note que, se $\omega, \omega' \in \Omega_T$ satisfazem $\lambda_\omega = \lambda_{\omega'}$, então, pela proposição 4.1, $\mu_X(\omega) = \mu_X(\omega')$. Assim, definindo

$$L_\lambda := \{\omega \in \Omega_T : \lambda_\omega = \lambda\},$$

a equação (2.7) se reescreve como

$$\begin{aligned}d_T(N) &= \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega_T} \left| \frac{\binom{N-T}{K-\lambda_\omega}}{\binom{N}{K}} - 2^{-T} \right| = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^T \left| \frac{\binom{N-T}{K-\lambda}}{\binom{N}{K}} - 2^{-T} \right| |L_\lambda| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^T \left| \frac{\binom{N-T}{K-\lambda}}{\binom{N}{K}} - 2^{-T} \right| \binom{T}{\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^T \left| \frac{\binom{T}{\lambda} \binom{N-T}{K-\lambda}}{\binom{N}{K}} - 2^{-T} \binom{T}{\lambda} \right|.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Mostramos, então, que podemos reescrever $d_T(N)$ como a distância de variação total entre uma variável aleatória hipergeométrica $H(N, T, K)$ e uma variável aleatória binomial $B(T, 1/2)$. Ou seja, $d_T(N) = d_{\text{VT}}(\mu_H, \mu_B)$, em que

$$H \sim H(N, T, K) \quad \text{e} \quad B \sim B(T, 1/2).\tag{4.5}$$

Escreveremos a equação (4.4) de forma mais sucinta como

$$d_T(N) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^T 2^{-T} \binom{T}{\lambda} |f(\lambda, N, T) - 1|,\tag{4.6}$$

em que

$$f(\lambda, N, T) := 2^T \frac{\binom{N-T}{K-\lambda}}{\binom{N}{K}}.\tag{4.7}$$

Essa expressão exibe um passo importante. A princípio, gostaríamos de estimar a soma (2.7), que percorre todos os elementos de Ω_T , um conjunto de cardinalidade 2^T cujos elementos são vetores. Com (4.4), reduzimos esta tarefa ao problema de estimar uma soma que percorre o conjunto $\{0, 1, \dots, T\}$.

A prova do Teorema 3.1 seguirá os seguintes passos. Na Subseção 4.1, estudaremos a mudança de sinal da função $f(\cdot, N, T) - 1$. A localização dos pontos nos quais esta função muda de sinal nos permitirá aplicar a Proposição 2.2 e reescrever a expressão (4.6) de $d_T(N)$ removendo o valor absoluto. Isto facilitará as estimativas que faremos em seguida.

Na Subseção 4.2, introduziremos uma extensão contínua de f a triplas de números reais. Esta técnica é útil pois, em alguns argumentos, utilizaremos a extensão contínua para obter informações sobre a versão discreta de f . Em seguida, na Subseção 4.3, encontraremos os resultados que nos permitem estimar $f(\lambda, N, T)$ e $\binom{T}{\lambda}$. As estimativas obtidas na Subseção 4.3 dependem implicitamente da distância entre λ e $T/2$, o centro do intervalo $[0, T]$. Por esse motivo, é razoável tentar estimar esta distância quando λ varia os valores de interesse. Isto será feito na Subseção 4.4. A Subseção 4.5, por fim, reúne os resultados obtidos nas subseções anteriores para concluir a demonstração do Teorema 3.1.

4.1 Localizando os pontos nos quais $f(\cdot, N, T) - 1$ muda de sinal

Nesta subseção, localizaremos os pontos nos quais a função $f(\cdot, N, T) - 1$ muda de sinal. Nossa objetivo é aplicar a Proposição 2.2 e obter uma nova expressão para $d_T(N)$ na qual a diferença $f(\lambda, N, T) - 1$ ocorre, sem valor absoluto. Este é o papel dos seguintes lema e corolário.

Lema 4.3. *Seja $\lambda \in \{0, 1, \dots, T\}$.*

- (a) $f(\lambda, N, T) = f(T - \lambda, N, T)$
- (b) Se $0 \leq \lambda < T/2$, $f(\lambda, N, T) \leq f(\lambda + 1, N, T)$.
- (c) Se $T/2 \leq \lambda < T$, então $f(\lambda, N, T) \geq f(\lambda + 1, N, T)$.

Demonstração. Para verificar (a), basta substituir λ por $T - \lambda$ em (4.7) e utilizar que

$$\binom{N-T}{K-T+\lambda} = \binom{N-T}{N-T-(K-\lambda)} = \binom{N-T}{K-\lambda}.$$

Agora, notemos que

$$f(\lambda, N, T) = 2^T \cdot \frac{(N-T)!K!K!}{N!} \cdot \left\{ \frac{1}{(K-T+\lambda)!(K-\lambda)!} \right\}. \quad (4.8)$$

Para

$$g(\lambda) := \frac{1}{(K-T+\lambda)!(K-\lambda)!},$$

temos

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \frac{K-T+\lambda+1}{K-\lambda} \cdot \frac{1}{(K-T+\lambda+1)!(K-\lambda-1)!} \\ &= \left(1 + \frac{2\lambda-T+1}{K-\lambda}\right) \frac{1}{(K-T+\lambda+1)!(K-\lambda-1)!} \\ &= \left(1 + \frac{2\lambda-T+1}{K-\lambda}\right) g(\lambda+1). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Suponha que $0 \leq \lambda < T/2$. Nesse caso, temos $2\lambda - T + 1 \leq 0$ e, como $K - \lambda > 0$, a equação (4.9) nos diz que $g(\lambda) \leq g(\lambda + 1)$. Como (4.8) expressa $f(\lambda, N, T)$ como o produto de $g(\lambda)$ com um termo positivo que não depende de λ , isso mostra (b). A afirmação em (c) segue de (a) e de (b) observando que se $T/2 \leq \lambda < T$, então $0 < T - \lambda \leq T/2$ e, com isso,

$$f(\lambda, N, T) = f(T - \lambda, N, T) \geq f(T - \lambda - 1, N, T) = f(\lambda + 1, N, T).$$

Dessa forma, o resultado está demonstrado. \square

Como gostaríamos, o Lema 4.3 nos permite localizar os pontos nos quais $f(\cdot, N, T) - 1$ muda de sinal, conforme estabelece o seguinte corolário.

Corolário 4.4. *Existe $\gamma_{N,T} > 0$ tal que*

(a) $f(\lambda, N, T) \geq 1$ se

$$\frac{T}{2} - \frac{\gamma_{N,T}\sqrt{T}}{2} \leq \lambda \leq \frac{T}{2} + \frac{\gamma_{N,T}\sqrt{T}}{2}. \quad (4.10)$$

(b) $f(\lambda, N, T) \leq 1$ se

$$0 \leq \lambda \leq \frac{T}{2} - \frac{\gamma_{N,T}\sqrt{T}}{2} \quad e \quad \frac{T}{2} + \frac{\gamma_{N,T}\sqrt{T}}{2} \leq \lambda \leq T. \quad (4.11)$$

Demonstração. Pelo Lema 4.3, existe $\alpha_{N,T} \in (0, T/2)$ tal que

$$f(\lambda, N, T) \leq 1 \quad \text{se } 0 \leq \lambda \leq \alpha_{N,T}$$

e

$$f(\lambda, N, T) \geq 1 \quad \text{se } \alpha_{N,T} \leq \lambda \leq T/2.$$

De fato, se não existisse tal $\alpha_{N,T}$, pela parte (b) do Lema 4.3, $f(\cdot, N, T) - 1$ não trocaria de sinal em $\{0, 1, \dots, \lfloor T/2 \rfloor\}$. Mas neste caso, pela parte (a) deste mesmo lema, $f(\cdot, N, T) - 1$ também não trocaria de sinal em $\{\lfloor T/2 \rfloor + 1, \dots, T - 1, T\}$ e, portanto, teríamos

$$d_T(N) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^T 2^{-T} \binom{T}{\lambda} |f(\lambda, N, T) - 1| = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^T 2^{-T} \binom{T}{\lambda} (f(\lambda, N, T) - 1) = 0,$$

o que não ocorre como observamos no fim da Subseção 2.4. Com isso, para concluir (a) e (b), basta tomarmos

$$\gamma_{N,T} := \frac{T - 2\alpha_{N,T}}{\sqrt{T}} \quad (4.12)$$

e utilizarmos novamente a simetria fornecida pela parte (a) do Lema 4.3. \square

Observação 4.5. No caso em que $N = cT$, $c \geq 2$, denotaremos

$$\gamma_T := \gamma_{cT,T}. \quad (4.13)$$

No que segue, utilizaremos as notações

$$\lambda_T^- := \frac{T}{2} - \frac{\gamma_T \sqrt{T}}{2} \quad e \quad \lambda_T^+ := \frac{T}{2} + \frac{\gamma_T \sqrt{T}}{2}. \quad (4.14)$$

Além disso, para $x \in \mathbb{R}$, denotaremos por $\lfloor x \rfloor$ o maior número inteiro menor que x . Ou seja,

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Observação 4.6. Convém notar que $\lfloor x \rfloor = x - c_x$ para algum $c_x \in [0, 1)$.

Apesar de não fornecer uma expressão explícita para γ_T , o Corolário 4.4, quando combinado com a Proposição 2.2, nos permite escrever

$$d_T(cT) = \sum_{\lambda \in \Delta_T} 2^{-T} \binom{T}{\lambda} [f(\lambda, cT, T) - 1], \quad (4.15)$$

em que

$$\Delta_T := \{\lfloor \lambda_T^- \rfloor + 1, \lfloor \lambda_T^+ \rfloor + 2, \dots, \lfloor \lambda_T^+ \rfloor\}. \quad (4.16)$$

Esta nova expressão, por não exibir mais o valor absoluto que ocorria em (4.6), facilitará a tarefa de estimar $d_T(cT)$.

4.2 Uma extensão contínua de $f(\lambda, N, T)$

Com a equação (4.15) em mãos, caminharemos na direção de obter estimativas para $f(\lambda, cT, T)$. Para isso, será extremamente útil dar um sentido à expressão $f(\lambda, N, T)$ no caso em que λ, N, T são números reais não negativos satisfazendo, como antes, $N = 2K$, $T \leq K$ e $\lambda \in [0, T]$. Em outras palavras, queremos obter uma extensão de f a triplas de números reais. Isto é feito utilizando a conhecida função gama. Esta extensão será também denotada por f .

Seja $x \in \mathbb{R}_+ := \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$. A função gama é definida por

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

É um fato conhecido que esta função interpola os pontos $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ tais que $m = (n-1)!$. Ou seja, se $x \in \mathbb{R}_+$ é um número natural, então

$$\Gamma(x) = (x-1)!.$$

Assim, reescrevemos $f(\lambda, N, T)$ como

$$f(\lambda, N, T) = 2^T \frac{\binom{N-T}{K-\lambda}}{\binom{N}{K}} = \frac{2^T \Gamma(N-T)\Gamma(k)\Gamma(k)}{\Gamma(K-\lambda)\Gamma(k-T+\lambda)\Gamma(N)}. \quad (4.17)$$

Proposição 4.7. *A função $\Gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}_+$. Vejamos que Γ é contínua em x . Existem $a, b \in \mathbb{R}_+$ tais que $x \in (a, b)$. Considere $h \in \mathbb{R}$ tal que $x+h \in (a, b)$. Temos

$$|\Gamma(x+h) - \Gamma(x)| = \left| \int_0^\infty t^{x+h-1} e^{-t} - t^{x-1} e^{-t} dt \right| \leq \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} |t^h - 1| dt \quad (4.18)$$

Vamos mostrar que o termo à direita em (4.18) vai a 0 quando h vai a 0. Pelo Teorema do Valor Médio, para cada $t \geq 0$, existe ξ_t entre 0 e h tal que

$$|t^h - 1| = |h| t^{\xi_t} \log t.$$

Como $x+h \in (a, b)$, temos $\xi_t \leq |h| \leq b-a$ e, portanto, $t^{\xi_t} \leq t^{b-a}$. Dessa forma,

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} |t^h - 1| dt = |h| \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} t^{\xi_t} \log t dt \leq |h| \int_0^\infty t^{x-1+b-a} e^{-t} \log t dt. \quad (4.19)$$

Uma vez que a integral à direita em (4.19) converge, concluímos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} |t^h - 1| dt = 0$$

como queríamos. □

A Proposição 4.7, em conjunto com a equação (4.17), nos permite concluir que, fixados números reais $N = 2K$ e T com $T \leq K$, a função $f(\cdot, N, T)$ é contínua no intervalo $[0, T]$. Este fato tem a seguinte consequência.

Corolário 4.8. Seja $c \geq 2$. Com a notação introduzida em (4.13),

$$f\left(\frac{T}{2} \pm \frac{\gamma_T \sqrt{T}}{2}, cT, T\right) = 1.$$

Demonstração. Segue do Corolário 4.4 aliado à continuidade de $f(\cdot, N, T)$, que, por sua vez, segue da Proposição 4.7. \square

Daqui em diante, f aplicada a uma tripla de números reais positivos não necessariamente inteiros deve sempre ser interpretada no contexto desta seção. O que fizemos nos permite também considerar coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ com $n, k \in \mathbb{R}_+$ satisfazendo $k \leq n$. Isto será útil, uma vez que também gostaríamos de estimar o coeficiente binomial que surge em (4.15).

Na demonstração do Lema 4.12, vamos utilizar que, assim como em sua versão discreta, a função $f(\cdot, N, T)$ é crescente em $[0, T/2]$ e decrescente em $[T/2, T]$. Com o intuito de evitar um foco demasiado às tecnicidades envolvendo a função gama, omitiremos a demonstração deste fato.

4.3 Estimativas para $\binom{T}{\lambda}$ e $f(\lambda, cT, T)$

Nesta subseção, vamos obter estimativas para os termos $f(\lambda, cT, T)$ e $\binom{T}{\lambda}$ que surgem em (4.15). Essas estimativas dependerão de λ , e essa dependência se apresenta em termos da distância entre λ e o centro do intervalo $[0, T]$. Na Subseção 4.4, o que faremos é estimar esta distância quando λ percorre o conjunto Δ_T introduzido em (4.16). Esta estimativa, em conjunto com os resultados desta subseção, abrirá caminho para deduzirmos o Teorema 3.1.

Primeiramente, vamos obter uma estimativa para $\binom{n}{k}$ no caso em que k está exatamente no centro do intervalo $[0, n]$, i.e., $k = n/2$. Para isso, utilizaremos a clássica aproximação de Stirling:

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} (1 + \mathcal{O}(1/n)). \quad (4.20)$$

Lema 4.9. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{n/2} = 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}} (1 + \mathcal{O}(1/n))$$

Demonstração. Por (4.20),

$$\binom{n}{n/2} = \frac{n!}{(n/2)!(n/2)!} = \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} (1 + \mathcal{O}(1/n))}{\pi n (n/2)^n e^{-n} (1 + \mathcal{O}(1/n))} = 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}} (1 + \mathcal{O}(1/n)).$$

\square

Agora, fornecemos uma estimativa para $\binom{n}{k}$ com $k = (n + l(n))/2$. Esta estimativa será dada em termos de $\binom{n}{n/2}$ cuja estimativa foi obtida acima. Observe que $l(n)$, a menos de um fator constante de dilatação, nos dá a distância entre k e $n/2$.

Lema 4.10. Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $k = (n+l)/2$, $l = l(n)$, então

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n/2} \exp\left(-\frac{l^2}{2n} + \mathcal{O}(l^3/n^2)\right). \quad (4.21)$$

Demonastração. Primeiramente, observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{n/2}} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n/2)!(n/2)!}{n!} \\ &= \frac{(n/2)!(n/2)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n/2) \cdot (n/2-1) \cdots (n/2-l/2+1)}{(n/2+i/2) \cdot (n/2+i/2-1) \cdots (n/2+1)} = \prod_{j=1}^{l/2} \frac{n/2-j+1}{n/2+j}. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \log \left[\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{n/2}} \right] &= \sum_{j=1}^{l/2} \log \left(\frac{n/2-j+1}{n/2+j} \right) = \sum_{j=1}^{l/2} \left[\log \left(1 + \frac{2-2j}{n} \right) - \log \left(1 + \frac{2j}{n} \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{l/2} \left[\frac{2-2j}{n} - \frac{2j}{n} + \mathcal{O}\left(j^2/n^2\right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{l/2} \left[\frac{2-4j}{n} \right] + \mathcal{O}\left(l^3/n^2\right) \\ &= \frac{l}{n} - \frac{4}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + 1 \right) + \mathcal{O}\left(l^3/n^2\right) \\ &= -\frac{l^2}{2n} + \mathcal{O}\left(l^3/n^2\right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Exponenciando ambos os lados de (4.22), obtemos (4.21) como gostaríamos. \square

Combinando os Lemas 4.9 e 4.10, obtemos o resultado que nos permitirá estimar $\binom{T}{\lambda}$ e $f(\lambda, cT, T)$ com $\lambda \in \Delta_T$.

Corolário 4.11. (a) Para $n \in \mathbb{N}$ e $l = l(n)$,

$$\binom{n}{\frac{n+l}{2}} = 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \exp\left(-\frac{l^2}{2n} + \mathcal{O}(l^3/n^2)\right) (1 + \mathcal{O}(1/n))$$

(b) Para $\beta = \beta(T) > 0$,

$$f\left(\frac{T}{2} \pm \frac{\beta\sqrt{T}}{2}, cT, T\right) = \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2(c-1)} + \mathcal{O}(\beta^3/\sqrt{T})\right) (1 + \mathcal{O}(1/T)) \quad (4.23)$$

Demonstração. A afirmação em (a) segue de uma aplicação direta do Lema 4.9 em (4.21). Agora, para $\beta = \beta(T) > 0$, temos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{T}{2} \pm \frac{\beta\sqrt{T}}{2}, cT, T\right) &= 2^T \left(\frac{T(c-1)}{2} \pm \frac{\beta\sqrt{T}}{2} \right) \left(\frac{T(c-1)}{2} \right)^{-1} \left(\frac{T(c-1)}{2} \right) \left(\frac{cT}{2} \right)^{-1} \\ &= 2^T \left(\frac{T(c-1)}{2} \pm \frac{\beta\sqrt{T(c-1)}}{2\sqrt{c-1}} \right) \left(\frac{T(c-1)}{2} \right)^{-1} \left(\frac{T(c-1)}{2} \right) \left(\frac{cT}{2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Pelo Lema 4.10,

$$\left(\frac{T(c-1)}{2} \pm \frac{\beta\sqrt{T}}{2} \right) \left(\frac{T(c-1)}{2} \right)^{-1} = \exp\left(-\frac{\beta^2}{2(c-1)} + \mathcal{O}(\beta^3/\sqrt{T})\right). \quad (4.25)$$

Por outro lado, pelo Lema 4.9,

$$\begin{aligned} 2^T \left(\frac{T(c-1)}{2} \right) \left(\frac{cT}{2} \right)^{-1} &= 2^T \cdot \frac{2^{T(c-1)}}{2^{cT}} \cdot \frac{\sqrt{2/\pi T(c-1)}(1 + \mathcal{O}(1/T))}{\sqrt{2/\pi cT}(1 + \mathcal{O}(1/T))} \\ &= \sqrt{\frac{c}{c-1}}(1 + \mathcal{O}(1/T)). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Finalmente, as equações (4.24), (4.25) e (4.26) juntas fornecem (4.23). \square

4.4 A sequência $(\gamma_T)_{T \in \mathbb{N}}$

Na expressão (4.15) que obtivemos para $d_T(cT)$, o parâmetro λ percorre o conjunto

$$\Delta_T = \{\lfloor \lambda_T^- \rfloor + 1, \lfloor \lambda_T^- \rfloor + 2, \dots, \lfloor \lambda_T^+ \rfloor\}.$$

Esta subseção tem como objetivo entender quão distante λ fica de $T/2$ quando varia em Δ_T . A importância dessa investigação reside no fato de que as estimativas que obtivemos no Corolário 4.4 dependem implicitamente dessa distância. Como

$$\lambda_T^- = \frac{T}{2} - \frac{\gamma_T\sqrt{T}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_T^+ = \frac{T}{2} + \frac{\gamma_T\sqrt{T}}{2},$$

a distância $|\lambda - T/2|$ fica superiormente limitada por $\gamma_T\sqrt{T}/2$ para todo $\lambda \in \Delta_T$. Essa afirmação fica bem ilustrada pela Figura 3 uma vez que $\Delta_T \subseteq [\lambda_T^-, \lambda_T^+]$. Dessa forma, se

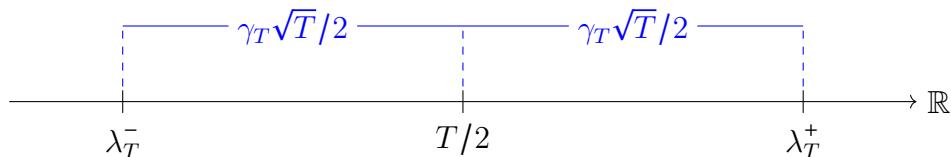


Figura 3: Posicionamento de $T/2$, λ_T^- e λ_T^+ na reta real.

torna natural buscar compreender o comportamento da sequência $(\gamma_T)_{T \in \mathbb{N}}$ com o objetivo de estimar $|\lambda - T/2|$ para $\lambda \in \Delta_T$. O seguinte lema mostra que $\gamma_T = \mathcal{O}(1)$.

Lema 4.12. A sequência $(\gamma_T)_{T \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Demonstração. Suponha que $(\gamma_T)_{T \in \mathbb{N}}$ não seja limitada. Notemos que, nesse caso, como $\gamma_T > 0$ para todo $T \in \mathbb{N}$, existe ao menos uma subsequência de $(\gamma_T)_{T \in \mathbb{N}}$ que vai a infinito.

Afirmamos então que existem uma sequência $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais positivos e uma subsequência $(\gamma_{T_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(\gamma_T)_{T \in \mathbb{N}}$ tais que

$$\beta_n = o(T_n^{1/8}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \infty$$

e $\beta_n \leq \gamma_{T_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, se $\gamma_T = o(T^{1/8})$, então tomamos $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\gamma_{T_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ambas iguais a uma subsequência de $(\gamma_T)_{T \in \mathbb{N}}$ que vai a infinito. Se não, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $T_0 \in \mathbb{N}$, existe $T \geq T_0$ satisfazendo

$$\varepsilon_0 T^{1/8} < \gamma_T,$$

o que nos permite obter as sequências $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\gamma_{T_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Como observamos no fim da Subseção 4.2, a função $f(\cdot, cT, T)$ é decrescente em $[T/2, T]$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 1 &= f\left(\frac{T_n}{2} + \frac{\gamma_{T_n}\sqrt{T_n}}{2}, cT_n, T_n\right) \\ &\leq f\left(\frac{T_n}{2} + \frac{\beta_n\sqrt{T_n}}{2}, cT_n, T_n\right) \\ &\stackrel{*}{=} \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{\beta_n^2}{2(c-1)} + \mathcal{O}(\beta_n^2/\sqrt{T_n})\right)(1 + \mathcal{O}(1/T_n)) \\ &\stackrel{**}{=} \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{\beta_n^2}{2(c-1)} + \mathcal{O}(1/T_n^{1/4})\right)(1 + \mathcal{O}(1/T_n)). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Mas isso é um absurdo, uma vez que o lado direito em (4.27) vai a 0 conforme n vai a infinito. Na primeira igualdade acima utilizamos o Corolário 4.4. Na igualdade \star acima utilizamos o Corolário 4.11. Além disso, na igualdade $\star\star$ utilizamos que, como $\beta_n = o(T_n^{1/8})$, temos $\beta_n = \mathcal{O}(T_n^{1/8})$ e, portanto, $\mathcal{O}(\beta_n^2/\sqrt{T_n}) = \mathcal{O}(1/T_n^{1/4})$. \square

Sabendo que a sequência $(\gamma_T)_{T \in \mathbb{N}}$ é limitada, conseguimos ir um pouco mais longe e obter o seu limite. Cabe aqui lembrar que, como vimos em (4.4), γ_T depende não só de T mas também de $N = cT$ e, portanto, da constante c que multiplica T .

Teorema 4.13. Seja $c \geq 2$ fixado. Temos

$$\gamma_T = \gamma_c + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}),$$

em que

$$\gamma_c := \sqrt{(c-1) \log\left(\frac{c}{c-1}\right)}.$$

Observação 4.14. Esta é a constante γ_c que surge no Teorema 3.1.

Demonstração. Pelo Lema 4.12, $\gamma_T = \mathcal{O}(1)$ e, portanto, $\mathcal{O}(\gamma_T^2/\sqrt{T}) = \mathcal{O}(1/\sqrt{T})$. Assim, utilizando o Corolário 4.11, temos

$$\begin{aligned} 1 &= f\left(\frac{T_n}{2} + \frac{\gamma_T \sqrt{T}}{2}, cT, T\right) \\ &= \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{\gamma_T^2}{2(c-1)}\right) \exp\left(\mathcal{O}\left(1/\sqrt{T}\right)\right) (1 + \mathcal{O}(1/T)) \\ &= \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{\gamma_T^2}{2(c-1)}\right) (1 + \mathcal{O}(1/\sqrt{T})) (1 + \mathcal{O}(1/T)) \\ &= \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{\gamma_T^2}{2(c-1)}\right) (1 + \mathcal{O}(1/\sqrt{T})) \end{aligned}$$

Daí,

$$\exp\left(-\frac{\gamma_T^2}{2(c-1)}\right) = \sqrt{\frac{c-1}{c}} \cdot \frac{1}{1 + \mathcal{O}(1/\sqrt{T})} = \sqrt{\frac{c-1}{c}} (1 + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}))$$

e, portanto,

$$-\frac{\gamma_T^2}{2(c-1)} = \log \sqrt{\frac{c-1}{c}} + \log(1 + \mathcal{O}(1/\sqrt{T})) = \log \sqrt{\frac{c-1}{c}} + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}).$$

Então, isolando γ_T , obtemos

$$\gamma_T = \sqrt{(c-1) \log\left(\frac{c}{c-1}\right)} + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}) = \gamma_c + \mathcal{O}(1/\sqrt{T})$$

como queríamos. □

A importância do Teorema 4.13 se apresentará diretamente na demonstração do Teorema 3.1. Já o Lema 4.12 nos fornece, finalmente, as estimativas para $\binom{T}{\lambda}$ e $f(\lambda, cT, T)$ que precisamos.

Corolário 4.15. *Dado $\lambda \in \Delta_T$, seja*

$$\theta(\lambda) := \frac{\lambda - T/2}{\sqrt{T}}. \tag{4.28}$$

Temos

(a)

$$\binom{T}{\lambda} = 2^T \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \exp\left(-2\theta(\lambda)^2\right) (1 + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}))$$

(b)

$$f(\lambda, cT, T) = \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2\theta(\lambda)^2}{c-1}\right) (1 + \mathcal{O}(1/\sqrt{T})),$$

Demonstração. Se $\lambda \in \Delta_T$, então

$$\lambda_T^- = \frac{T}{2} - \frac{\gamma_T \sqrt{T}}{2} \leq \lambda \leq \frac{T}{2} + \frac{\gamma_T \sqrt{T}}{2} = \lambda_T^+$$

e, com isso, $2|\theta(\lambda)| \leq \gamma_T$. Pelo Lema 4.12, temos $\mathcal{O}(\gamma_T) = 1$ e, portanto, $\mathcal{O}(\theta(\lambda)^3/\sqrt{T}) = \mathcal{O}(1/\sqrt{T})$. Então, pelo Corolário 4.11,

$$\begin{aligned} \binom{T}{\lambda} &= \binom{T}{\frac{T}{2} + \frac{2\theta(\lambda)\sqrt{T}}{2}} \\ &= 2^T \sqrt{\frac{1}{\pi T}} \exp\left(-\frac{4\theta(\lambda)^2 T}{2T} + \mathcal{O}\left(\frac{\theta(\lambda)^3 T^{3/2}}{T^2}\right)\right) (1 + \mathcal{O}(1/T)) \\ &= 2^T \sqrt{\frac{1}{\pi T}} \exp(-2\theta(\lambda)^2) \exp\left(\mathcal{O}\left(\frac{\theta(\lambda)^3}{\sqrt{T}}\right)\right) (1 + \mathcal{O}(1/T)) \\ &= 2^T \sqrt{\frac{1}{\pi T}} \exp(-2\theta(\lambda)^2) \exp(\mathcal{O}(1/\sqrt{T})) (1 + \mathcal{O}(1/T)) \\ &= 2^T \sqrt{\frac{1}{\pi T}} \exp(-2\theta(\lambda)^2) (1 + \mathcal{O}(1/\sqrt{T})) (1 + \mathcal{O}(1/T)) \\ &= 2^T \sqrt{\frac{1}{\pi T}} \exp(-2\theta(\lambda)^2) (1 + \mathcal{O}(1/\sqrt{T})) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(\lambda, cT, T) &= f\left(\frac{T}{2} + \frac{2\theta(\lambda)\sqrt{T}}{2}, cT, T\right) \\ &= \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{4\theta(\lambda)^2}{2(c-1)} + \mathcal{O}\left(\frac{\theta(\lambda)^3}{\sqrt{T}}\right)\right) (1 + \mathcal{O}(1/T)) \\ &= \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2\theta(\lambda)^2}{c-1}\right) \exp(\mathcal{O}(1/\sqrt{T})) (1 + \mathcal{O}(1/T)) \\ &= \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2\theta(\lambda)^2}{c-1}\right) (1 + \mathcal{O}(1/\sqrt{T})) \end{aligned}$$

como queríamos. □

4.5 Concluindo a demonstração

Já temos o suficiente para finalmente demonstrar o Teorema 3.1.

Demonstração do Teorema 3.1. No que segue, $\theta(\lambda)$ denota a função de λ introduzida em (4.28). Além disso, utilizaremos a Observação 4.6 para escrever

$$\lfloor \lambda_T^- \rfloor = \lambda_T^- - c_{1,T} \quad \text{e} \quad \lfloor \lambda_T^+ \rfloor = \lambda_T^+ - c_{2,T} \tag{4.29}$$

com $c_{1,T}, c_{2,T} \in [0, 1]$. Seja $c \geq 2$. Utilizando o Corolário 4.15, temos

$$\begin{aligned}
d_T(cT) &= \sum_{\lambda \in \Delta_T} 2^T \binom{T}{\lambda} [f(\lambda, cT, T) - 1] \\
&= \sum_{\lambda \in \Delta_T} 2^{-T} \binom{T}{\lambda} \left[\sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2\theta(\lambda)^2}{c-1}\right) (1 + \mathcal{O}(1/\sqrt{T})) - 1 \right] \\
&= \sum_{\lambda \in \Delta_T} \left\{ 2^{-T} \binom{T}{\lambda} \left[\sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2\theta(\lambda)^2}{c-1}\right) - 1 \right] \right\} + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}) \\
&= \sum_{\lambda \in \Delta_T} \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \left\{ \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2\theta(\lambda)^2}{c-1} - 2\theta(\lambda)^2\right) - \exp(-2\theta(\lambda)^2) \right\} + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}) \\
&= \sum_{\lambda \in \Delta_T} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2c\theta(\lambda)^2}{c-1}\right) - \exp(-2\theta(\lambda)^2) \right\} + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Mais precisamente, o Corolário 4.15 foi utilizado na segunda e quarta igualdade em (4.30). Na terceira igualdade, utilizamos o fato de que

$$\sum_{\lambda \in \Delta_T} 2^{-T} \binom{T}{\lambda} \leq \sum_{\lambda=0}^T 2^{-T} \binom{T}{\lambda} = 1$$

e, portanto,

$$\sum_{\lambda \in \Delta_T} 2^{-T} \binom{T}{\lambda} \mathcal{O}(1/\sqrt{T}) = \mathcal{O}(1/\sqrt{T}).$$

Agora, observamos que a expressão à direita em (4.30) é uma soma de Riemann da função

$$h(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2cx^2}{c-1}\right) - \exp(-2x^2) \right\}$$

sobre o intervalo

$$\left[\frac{\lfloor \lambda_T^- \rfloor + 1 - T/2}{\sqrt{T}}, \frac{\lfloor \lambda_T^+ \rfloor + 1 - T/2}{\sqrt{T}} \right]$$

partitionado em subintervalos de dimensão $1/\sqrt{T}$. A ordem da aproximação desta integral pela soma de Riemann em questão é da ordem da dimensão dos intervalos da partição, ou seja, $1/\sqrt{T}$. Isto nos permite então escrever

$$\begin{aligned}
d_T(cT) &= \int_{\frac{\lfloor \lambda_T^- \rfloor + 1 - T/2}{\sqrt{T}}}^{\frac{\lfloor \lambda_T^+ \rfloor + 1 - T/2}{\sqrt{T}}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2cx^2}{c-1}\right) - \exp(-2x^2) \right\} dx + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}) \\
&= \int_{-\frac{\gamma_T}{2} + \frac{1-c_{2,T}}{\sqrt{T}}}^{\frac{\gamma_T}{2} + \frac{1-c_{2,T}}{\sqrt{T}}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2cx^2}{c-1}\right) - \exp(-2x^2) \right\} dx + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Como o integrando acima é uniformemente limitado em c e x , temos

$$\int_{-\frac{\gamma_T}{2} + \frac{1-c_{1,T}}{\sqrt{T}}}^{\frac{\gamma_T}{2} + \frac{1-c_{1,T}}{\sqrt{T}}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2cx^2}{c-1}\right) - \exp(-2x^2) \right\} dx = \mathcal{O}(1/\sqrt{T})$$

e

$$\int_{\frac{\gamma_T}{2}}^{\frac{\gamma_T}{2} + \frac{1-c_1,T}{\sqrt{T}}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{\frac{c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2cx^2}{c-1}\right) - \exp(-2x^2) \right\} dx = \mathcal{O}(1/\sqrt{T}).$$

Assim, segue de (4.31) que

$$d_T(cT) = \int_{-\frac{\gamma_T}{2}}^{\frac{\gamma_T}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2cx^2}{c-1}\right) dx - \int_{-\frac{\gamma_T}{2}}^{\frac{\gamma_T}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp(-2x^2) dx + \mathcal{O}(1/\sqrt{T})$$

Mas, pelo Teorema 4.13, $\gamma_T = \gamma_c + \mathcal{O}(1/\sqrt{T})$. Então, usando novamente que o integrando é uniformemente limitado, obtemos

$$\begin{aligned} d_T(cT) &= \int_{-\frac{\gamma_c}{2}}^{\frac{\gamma_c}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2c}{c-1}} \exp\left(-\frac{2cx^2}{c-1}\right) dx - \int_{-\frac{\gamma_T}{2}}^{\frac{\gamma_T}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp(-2x^2) dx + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}) \\ &= \int_{-\frac{\gamma_c}{2}}^{\frac{\gamma_c}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2c}{c-1}} \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{2c}{c-1}}x\right)^2\right] dx \\ &\quad - \int_{-\frac{\gamma_c}{2}}^{\frac{\gamma_c}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-(\sqrt{2}x)^2\right] dx + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}) \end{aligned} \tag{4.32}$$

Fazendo, em (4.32), as mudanças de variáveis $t = \sqrt{2c/(c-1)}x$ na primeira integral e $t = \sqrt{2}x$ na segunda integral, obtemos finalmente

$$\begin{aligned} d_T(cT) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\gamma_c}{\sqrt{2(c-1)/c}}}^{\frac{\gamma_c}{\sqrt{2(c-1)/c}}} \exp(-t^2) dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\gamma_c}{\sqrt{2}}}^{\frac{\gamma_c}{\sqrt{2}}} \exp(-t^2) dt + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}) \\ &= \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma_c}{\sqrt{2(c-1)/c}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma_c}{\sqrt{2}}\right) + \mathcal{O}(1/\sqrt{T}). \end{aligned}$$

□

5 Outras simulações

Até aqui, discutimos a simulação tradicional. Mas devemos lembrar que a escolha da simulação foi arbitrária e que poderíamos tomar outra função $X : S_N \longrightarrow \Omega_T$. Exploremos um pouco essas opções para dar luz a possíveis caminhos para o trabalho e pontuar algumas perguntas que não foram respondidas.

5.1 Uma extensão dos grupos

Foi dito no início deste texto que a divisão das cartas em dois grupos foi apenas uma arbitrariedade escolhida por ser uma categorização simples de ser feita. As cartas também aceitam outras divisões, como pelos naipes, por exemplo, e explicitado na Tabela 4.

Uma observação interessante é que temos agora quatro associações distintas. Podemos, sem muita dificuldade, imaginar uma outra simulação em que estendemos o passeio aleatório para \mathbb{Z}^2 .

Naipe	Movimento atribuído
♣	→→
♥	→←
♠	←→
♦	←←

Tabela 4: Uma simulação utilizando os naipes.

Naipe	Movimento atribuído
♣	→
♥	←
♠	↑
♦	↓

Tabela 5: Uma simulação em \mathbb{Z}^2 utilizando os naipes.

Apesar dos procedimentos parecerem similares por análise holística do problema, lidaremos com normais multivariadas, o que nos trás novas dificuldades. Menos explorada ainda é a situação na qual se divide o baralho em 8 grupos, naturalmente nos levando a cogitar o passeio em \mathbb{Z}^3 .

Apesar de muito pouco se saber sobre a simulação neste cenário, algum interesse se desperta pela diferença que se obtém com passeios aleatórios em três dimensões. Sabemos, pelo Teorema de Pólya para passeios aleatórios, que em uma e duas dimensões os passeios são *recorrentes* e retornam à origem infinitas vezes com probabilidade 1. Porém, em dimensão $d \geq 3$, a probabilidade de que isso ocorra é nula. Ou seja, o passeio é *transiente*. É esperado que esse fato se reflita nos cálculos de alguma maneira.

Por outro ponto de vista, além das possíveis dimensões, podemos retornar às divisões arbitrárias do baralho e dissecá-lo ao máximo. Suponha que dividimos as N cartas na maior quantidade de grupos naturais, N . Dessa forma, à cada carta se associa uma sequência de símbolos única, de comprimento dependente da quantidade de cartas. Para $N = 2^k$ cartas, teremos k passos por cartas. Podemos pensar nas direções como representadas pelos símbolos 1 e 0 e contar em binário como indicado na Tabela 6.

Carta	Movimento atribuído
A ♠	...0000000001
A ♠	...0000000010
A ♥	...0000000011
A ♦	...0000000100
2 ♠	...0000000101
2 ♠	...0000000110
⋮	⋮

Tabela 6: Tabela da separação máxima natural de grupos para as cartas

Cada carta retirada aqui indica um conjunto de k passos dados na simulação. Contudo, se quiséssemos considerar essa simulação e calcular a distância de variação total de sua distribuição μ_X , deveríamos considerar uma expressão distinta. Como não é interessante aplicar a restrição $T < K$ neste caso (já que $K = 1$), devemos ir além. Para isso, consideraremos o espaço das sequências do passeio aleatório de T passos Ω_T e o espaço de

sequências possíveis de simular com as cartas acima, $\tilde{\Omega}_T$ (sem repetição de sequências). A distância será dada por

$$d_{\text{VT}}(\mu_X, \mathbb{P}_T) = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \tilde{\Omega}_T} |\mu_X(\omega) - 2^{-T}| + \sum_{\omega \in (\Omega_T \cap \tilde{\Omega}_T)^c} 2^{-T}. \quad (5.1)$$

A contagem a ser feita é, por vezes, não trivial. Mas caso feita, possibilitaria a extensão do resultado da distância, mesmo para o caso tradicional, com $1 < c < 2$.

5.2 Uma simulação - quase - perfeita

Podemos construir uma simulação em que, a cada momento, a probabilidade de se dar um passo para a esquerda é igual à probabilidade de se dar um passo para a direita. Para isso, antes devemos estabelecer um sequência das cartas e demarcar seu ponto médio, como exemplificada abaixo com um baralho reduzido:



Figura 4: Exemplo de ordenação para um baralho reduzido.

Para cada carta virada, verificamos sua posição na ordenação, simulamos o movimento associado a esta carta, e então removemos a carta da ordenação. Para cada virada de carta, existem 3 possibilidades:

1. A carta virada está à esquerda da seta: nesse caso, o passo simulado por esta carta será para a esquerda.
2. A carta virada está à direita da seta: nesse caso, o passo simulado por esta carta será para a direita.
3. A carta está abaixo da seta: nesse caso, a carta é descartada e não simula passo algum.

Por exemplo, suponhamos que as primeiras 4 cartas viradas foram:



Nesse caso temos que a primeira carta está à esquerda da seta, logo o primeiro passo foi para a esquerda e a ordenação agora é:



Agora, como a próxima carta virada foi o A♠, que está abaixo da seta, nenhum passo é feito na simulação. Repetindo o processo, vemos que as cartas seguintes não são descartadas, e obtemos que a configuração da ordenação após as quatro cartas serem viradas é:



Temos então que a trajetória simulada neste exemplo é, até o momento: $\omega = (-1, 1, 1)$. Ainda, note que agora uma carta que antes estava à esquerda da seta agora está à direita, assim a direção que ela indica na trajetória mudou.

Podemos observar que:

- A ordenação feita antes de virar as cartas é determinística.
- A quantidade de cartas à esquerda e à direita da seta é sempre igual. Logo, a todo momento da simulação, a probabilidade do próximo passo ser para a esquerda é igual à probabilidade deste ser para a direita.
- Sempre que o número de cartas ainda no baralho é par, é impossível a próxima carta ser descartada.
- Este procedimento é menos prático do que simulações antes apresentadas como a *simulação tradicional*. De fato, precisamos manter em mente todas as cartas que mudaram de posição em relação a seta.
- O comprimento da trajetória simulada é uma variável aleatória. De fato, nesta simulação, é possível que cartas não indiquem um passo, e tal ocorrência depende da permutação do baralho, que é aleatória. Porém, a quantidade de cartas descartadas é pequena em média e, mais ainda, a variância desta mesma quantidade é similarmente pequena.

Proposição 5.1. *A distância simulada T , por um baralho Λ_N , é dada por*

$$T = N - \mathcal{P}_B - 1,$$

em que \mathcal{P}_B é uma variável Poisson Binomial distribuída de N parâmetros

$$\left(0, \frac{1}{2K-1}, 0, \frac{1}{2K-3}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2K-(2K-2)}, 0, \frac{1}{2K-(2K-1)}\right).$$

Demonstração. Considere o baralho Λ_N . Pelas regras, existem dois estados possíveis para realizar o sorteio na simulação. Quando existem nas cartas restantes a mesma quantidade de cartas de cada grupo e quando existe uma carta em suspensão. Note que para qualquer dos casos, uma carta deve sair do baralho. No primeiro caso, não há a possibilidade de desperdício. No segundo caso, podemos calcular explicitamente qual a probabilidade da realização do sorteio ser a carta suspensa. Se considerarmos que estamos no t -ésimo passo da simulação, podemos escrever

$$p_t = \begin{cases} \frac{1}{2K-t+1}, & \text{se } t \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } t \text{ é par} \end{cases},$$

de forma que temos nossa proposição. □

É possível mostrar que a esperança de \mathcal{P}_B é pequena com relação ao parâmetro $N = 2K$ e, utilizando a desigualdade de Chebyshev, que essa variável aleatória fica distante da sua média com probabilidade pequena.

6 Conclusão

A simulação de um passeio aleatório pode ser pensada de diversas formas. Quando se fala em passeios simétricos, idealmente, quer-se simular fazendo uso de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, que é o caso de uma simulação com uma moeda honesta. Contudo, usualmente em simulações utilizando grupos finitos sem reposição, como é o caso do uso de um baralho nos moldes discutidos, as variáveis são dependentes. Tamanha é a dependência que, em regime finito do tamanho de seu grupo (neste caso o baralho), a distribuição sobre as possíveis trajetórias simuladas difere de forma perceptível. Isso é principalmente verdade quanto maior é a razão de cartas utilizadas do conjunto inicial. Essa diferença pode ser medida pela distância de variação total.

Se o interesse é maximizar a quantidade de passos dados pela simulação com as cartas minimizando a diferença das distribuições, algumas abordagens podem ser tomadas. A escolha da função que leva o espaço de embaralhamentos no espaço de trajetórias é algo que influencia grandemente na distribuição final, naturalmente. Neste espírito, exploramos diversas formas de simular com o uso do baralho. As explorações levaram a simulações que estendem o passeio a múltiplas dimensões, que dividem o baralho em uma quantidade arbitrária de grupos e em uma simulação que quebra o paradigma estático das atribuições de valor a cada carta. Algumas formulações são menos triviais e, no fim, os resultados mais relevantes foram obtidos a partir da simulação mais natural na qual o baralho se divide em dois grupos.

Quando dividimos o baralho em dois grupos conseguimos enunciar claramente a distribuição de probabilidade sobre as trajetórias definida pela função caracterizadora da simulação. Com isso, foi possível desenvolver uma expressão explícita para a distância de variação em função da relação entre o tamanho do baralho e a quantidade de cartas usadas, quando a quantidade de cartas usadas é grande o suficiente. Nesse contexto, naturalmente, identificamos o resultado como a diferença entre duas normais, limites das distribuições iniciais. O perfil da função nos permitiu, por fim, fazer uma análise numérica razoável sobre a relação da distância, do tamanho do baralho e da quantidade de cartas utilizada.

Concluímos com algumas simulações não muito exploradas por questões de tempo. É de nosso interesse entender melhor sobre o comportamento da simulação apresentada na seção 5.2. E também, expandir os cálculos sobre o passeio aleatório em mais de 2 dimensões. Estamos curiosos para entender como se comporta o passeio aleatório *transiente*. Esperamos que este trabalho possa dar luz a diversos novos caminhos e projetos que eventualmente venhamos a nos aventurar.

Referências

- [1] Dave Bayer and Persi Diaconis. Trailing the dovetail shuffle to its lair. *The Annals of Applied Probability*, 2, 05 1992.
- [2] T. Franco. *Princípios de Combinatória e Probabilidade*. Coleção Matemática Universitária. 978-65-990528-6-6, 2020.
- [3] D.A. Levin and Y. Peres. *Markov Chains and Mixing Times*. MBK. American Mathematical Society, 2017.
- [4] J. Spencer. *Asymptopia*. Student Mathematical Library. American Mathematical Society, 2014.