

Aluno: João Victor Alcantara Pimenta

11820812

Professor: Francisco Castilho Alcaraz

1 Prolegômenos

Sabemos novamente que estamos lidando com a equação de onda do projeto anterior. Desta forma, a solução para a discretização da onda se mantém. Faremos:

$$y(i, n+1) \approx 2(1-r^2)y(i, n) + r^2[y(i+1, n) + y(i-1, n)] - y(i, n-1) + O\left(\frac{10^{-8}}{(\Delta x)^2} + (\Delta x)^2\right)$$

Onde temos $x = i\Delta x$ e $t = n\Delta t$ e definimos $r = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ uma grandeza adimensional. Queremos determinar os modos normais deste sistema.

Imagine uma onda harmônica de frequência angular w e número de onda k propagando em uma corda de extremidade $x = 0, L$ presas. A solução é dada por:

$$y_1(x, t) = A \cos(kx + wt + \phi_0)$$

Com a reflexão, precisamos considerar uma solução mais geral com uma segunda equação:

$$y_2(x, t) = -A \cos(kx - wt - \phi_0) = A \cos(kx - wt - \phi_0 + \pi)$$

Sendo assim, a onda resultante será

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(wt + \phi'_0)$$

Onde $\phi'_0 = \phi_0 - \frac{\pi}{2}$. Como a extremidade deve ser sempre nula, temos

$$\sin(kL) = 0 \implies kn = n\pi$$

Onde n é um número inteiro. Finalmente podemos dizer que:

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

e

$$f = \frac{nc}{2L}$$

É claro, consideramos uma corda com ambas extremidades presas. E se uma destas for solta? Por métodos análogos podemos mostrar equivalentemente

$$\lambda = \frac{2L}{n - \frac{1}{2}}$$

e

$$f = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2L}$$

1.1 Analisando

Queremos medir os modos normais na nossa onda. Para isso colocaremos um 'sensor' em um dos pontos da corda para que meça a amplitude em cada momento da nossa simulação.

Com estes dados, que serão uma série temporal de valores reais, faremos uma análise de Fourier em buscas das frequências que compõem o sinal. Esperando assim, identificar as que deveriam estar presentes dos modos normais.

Alguns cuidados devem ser tomados. Três fatores principais vão influenciar nossos resultados. O primeiro já foi discutido anteriormente no projeto sobre análise espectral e diz respeito aos cuidados a serem tomados sobre frequências máximas e granularidade da análise.

O segundo cuidado é sobre as condições iniciais. Devemos notar que estas definirão quais modos normais podem existir e vão ultimamente compor nosso sinal. A paridade da condição é um destes fatores.

Por último note onde se coloca nosso sensor. Mal colocado ele pode ficar sobre um nó de modos normais e perder toda informação de oscilação destes.

Ficaremos atentos à estes fatores.

2 Preparação

Visto que já fizemos programas para ambas simular ondas e realizar a análise de frequência, tornaremos ambas rotinas em módulos para que sejam usados no nosso novo programa.

Para as ondas

```
1  module Ondas
2
3  contains
4
5      SUBROUTINE UPDATEFIXOSOLTO(grade, ix, r)
6          IMPLICIT REAL (KIND=8) (a-h,l,o-z)
7          DIMENSION grade(:, :)
8
9  c      parede fixa à esquerda
10         grade(1, 3) = grade(1, 2)
```

```

11         r2 = r*r
12
13
14 c         nova linha (parede esquerda fixa)
15         DO 10 i=2,ixs-1
16             grade(i, 3) = 2.d0*(1.d0-r2)*grade(i,2) +
17             +         r2*(grade(i+1,2)+grade(i-1,2))-grade(i,1)
18         10         END DO
19
20 c         parede solta a direita
21         grade(ixs, 3) = grade(ixs-1, 3)
22
23         grade(:,1) = grade(:,2)
24         grade(:,2) = grade(:,3)
25
26     END SUBROUTINE UPDATEFIXOSOLTO
27
28     SUBROUTINE UPDATEFIXOFIXO(grade, ixs, r)
29         IMPLICIT REAL (KIND=8) (a-h,l,o-z)
30         DIMENSION grade(:, :)
31
32 c         paredes fixas
33         grade(1, 3) = grade(1, 2)
34         grade(ixs, 3) = grade(ixs, 2)
35
36         r2 = r*r
37
38 c         nova linha (sem paredes)
39         DO 10 i=2,ixs-1
40             grade(i, 3) = 2.d0*(1.d0-r2)*grade(i,2) +
41             +         r2*(grade(i+1,2)+grade(i-1,2))-grade(i,1)
42         10         END DO
43
44         grade(:,1) = grade(:,2)
45         grade(:,2) = grade(:,3)
46
47     END SUBROUTINE UPDATEFIXOFIXO
48
49     FUNCTION GAUSSIAN(x, L)
50         IMPLICIT REAL (KIND=8) (a-h,l,o-z)
51 c         F0(x) = exp[-(x-x0)^2 / s^2]
52 c         s = L/30
53 c         x0 = L/2
54         GAUSSIAN = EXP(-(x-L/2)**2)/(L/30)**2)
55     END FUNCTION GAUSSIAN
56
57 end module Ondas

```

Note que há duas subrotinas definidas, *UPDATEFIXOSOLTO* se refere à rotina da corda com uma das bordas soltas. Em suma, bastou considerar que a posição da borda será virtualmente a mesma posição de sua vizinha ao interior para a mudança de paradigma. Ao mesmo tempo que *UPDATEFIXOFIXO* se refere à simulação de uma onda com bordas fixas.

Para o módulo de Fourier, escrevemos:

```

1     module Frequencias
2
3     contains
4
5     SUBROUTINE FOURRIER (y, N, dt)

```

```

6      IMPLICIT REAL (KIND=8) (a-h,o-z)
7      COMPLEX (KIND=16) :: Yk, y(:)
8
9      pi = acos(-1.d0)
10
11     OPEN(newunit=io, file="out/saida-1-11820812.out")
12     DO 10 k=0,N/2-1
13         Yk = Ykf(y, N, k) / (N/2)
14         freq = k / (N*dt)
15         WRITE(io, *) freq, (REAL(Yk)**2 + AIMAG(Yk)**2)
16 10    END DO
17    CLOSE(io)
18
19    END SUBROUTINE FOURRIER
20
21    COMPLEX (KIND=16) FUNCTION Ykf (y, N, k)
22        IMPLICIT REAL (KIND=8) (a-h,o-z)
23        COMPLEX (KIND=16) :: y(:), zi
24        pi = ACOS(-1.d0)
25        zi = (0.d0, 1.d0)
26
27        Ykf = 0.d0
28        DO 10 j=0,N-1
29            Ykf = Ykf + y(j+1) * EXP(2.d0*pi*zi * k * j/N)
30 10    END DO
31
32    RETURN
33    END FUNCTION Ykf
34
35    end module Frequencias

```

Que se mantém idêntica à rotina já discutida no projeto 1.

3 Simulação

Trataremos agora das simulações descritas no projeto. Para todos os casos abaixo usaremos de condição inicial uma normal de $\sigma = L/30$. Colocaremos também nosso sensor no ponto $x = L/4$. Note que a normal pode ser decomposta em senos e cossenos, que satisfazem a equação de onda e são de fato os modos que apareceram na análise.

Note que o posicionamento de x já nos indica algo sobre as frequências que devemos identificar na análise. Nenhuma frequência ter nóculo neste ponto em específico. Não veremos picos nas posições destas frequências.

Escrevemos o seguinte programa principal.

```

1      PROGRAM PROJ3
2
3      c      Este programa utiliza dois modulos
4      c      O modulo Ondas contem as rotinas para a resolucao da equacao
5      c      de onda em um meio homogeneo e isotropo
6      c      O modulo Frequencias contem a rotina para a transformada de
7      c      fourrier
8
9      c      Para compilar este programa, deve-se utilizar o comando

```

```

10 c      gfortran NomeArquivo modFourrier.f modOndas.f exec.out
11
12 use Ondas
13 use Frequencias
14
15 IMPLICIT REAL (KIND=8) (a-h,l,o-z)
16 DIMENSION grade(100, 3)
17 COMPLEX (KIND=16) y(1000)
18 PARAMETER (ixs=100, its=1000, c=300.d0, L=1.d0, r=1.d0)
19
20 dx = L / ixs
21
22 open(1, file='out/tarefa-1-aux-11820812.out')
23
24 c      condicoes iniciais
25 DO 10 n = 1,2
26     DO 20 i=1,ixs
27         grade(i,n) = GAUSSIAN(i*dx, L)
28     20 END DO
29     write(1,fmt='(100(F12.4))') (grade(i,n), i=1,ixs)
30     y(n) = grade(25,n)
31 10 END DO
32
33 c      definir a evolucao temporal (bordas fixas)
34 DO 40 n=3,its
35     CALL UPDATEFIXOSOLTO(grade, ixs, r)
36     write(1,fmt='(1000(F12.8))') (grade(i,3), i=1,ixs)
37     y(n) = grade(25,3)
38 40 END DO
39
40 close(1)
41
42 N = its
43 dt = r*dx/c
44
45 write(*,*) 'N = ', N, 'dt = ', dt
46
47 c      Chamar a rotina de fourrier que escreveu em data.out
48
49 CALL FOURRIER(y, N, dt)
50
51 END PROGRAM PROJ3

```

3.1 Bordas fixas

Posicionaremos nossa normal em diversos pontos x_0 iniciais. Se nossa hipótese estiver correta deveremos observar a ausência dos picos em frequências associadas às ondas com nós no ponto de observação ou no ponto associado às condições iniciais. Para os casos de borda fixa, teremos os picos associados à $f_0 * n$ ligados ondas de nó em L/n . Para as próximas, utilizaremos essa análise. f_0 é, neste caso, $\frac{c}{2L} = 150Hz$.

3.1.1 $x_0 = L/2$

Para o primeiro caso de bordas fixas colocaremos $x_0 = L/2$. Podemos visualizar se nossa onda tem o comportamento esperado na seguinte figura:

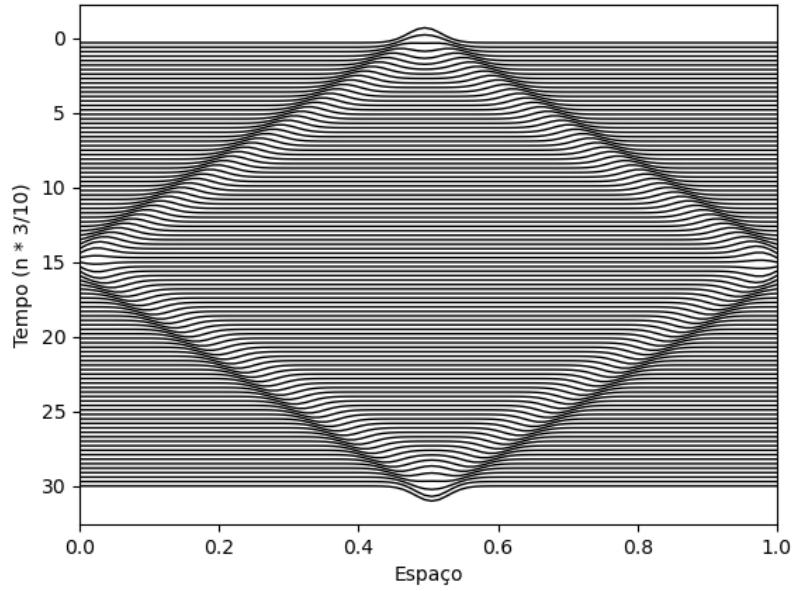
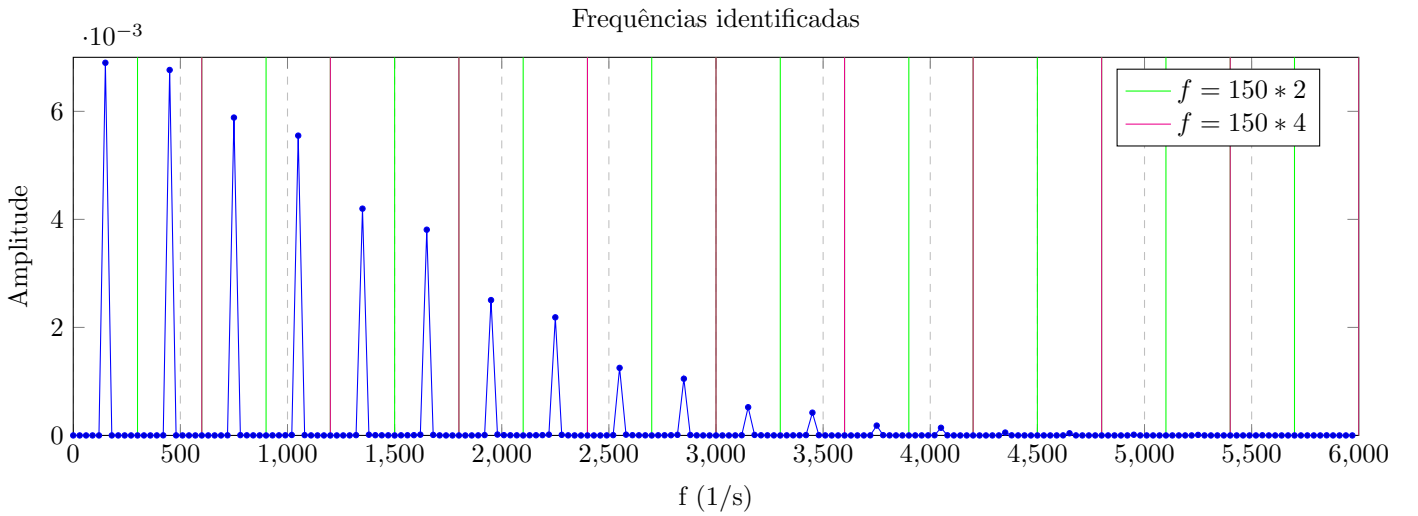


Figure 1: Bordas fixas, normal em $L/2$

Claro, as condições iniciais também impõem algo importante sobre as frequências de modos normais presentes na nossa análise. No nosso caso, uma normal centrada implica que apenas modos ímpares podem aparecer na composição final. Os outros tem nódulos na região central. A restrição do sensor acaba sendo redundante neste caso. Isso pode ser observado abaixo:



3.1.2 $x_0 = L/4$

Tomaremos agora o ponto inicial $x_0 = L/4$. Novamente vamos conferir nossa onda.

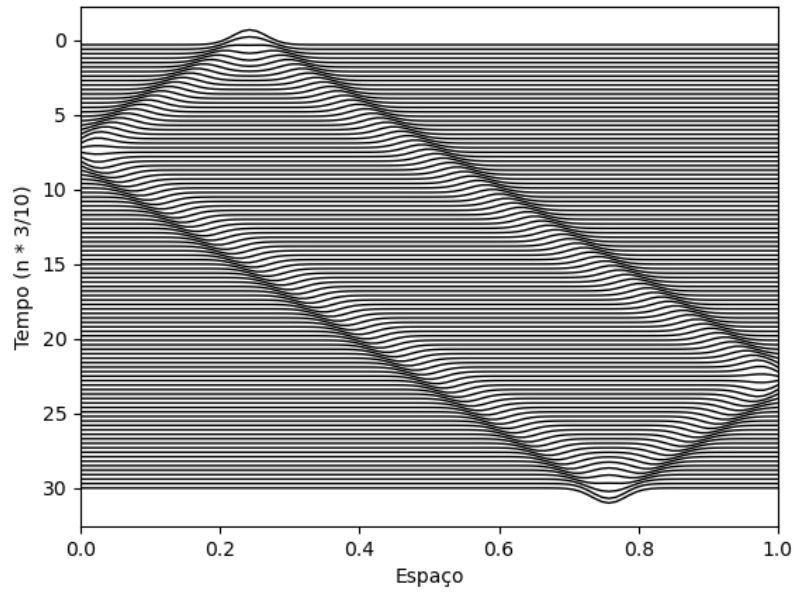
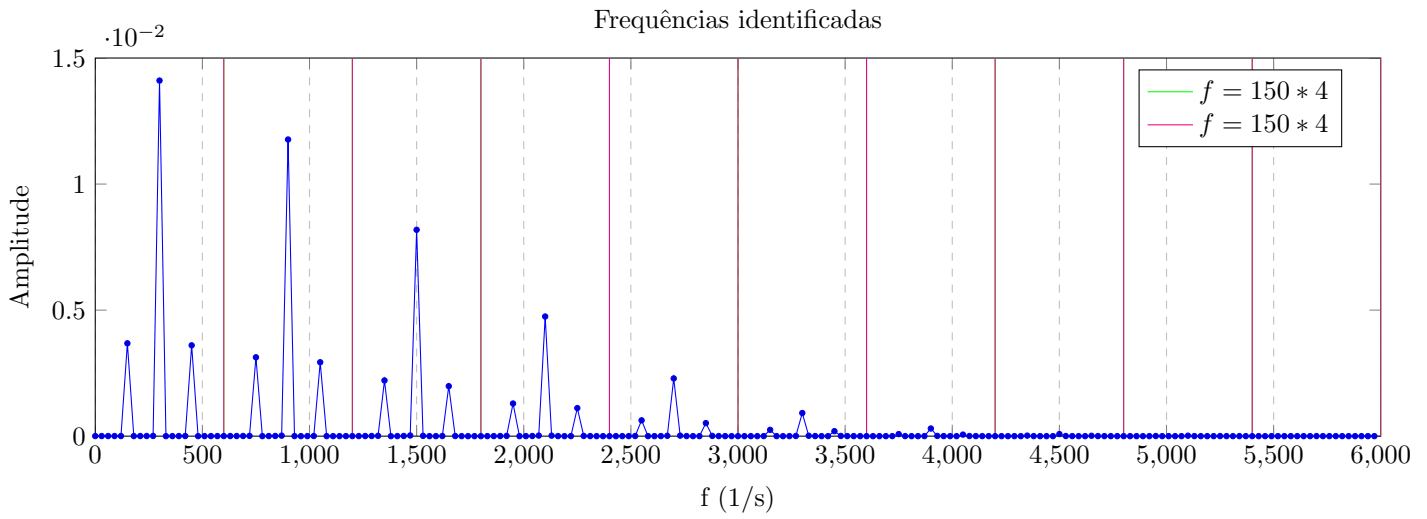


Figure 2: Onda caso 2

Da mesma forma que no caso anterior, agora para os n múltiplos de 4 não podemos ver as frequências associadas. Isso é idêntica à restrição do ponto de observação. de forma que teremos o espectro:



3.1.3 $x_0 = L/3$

Temos nossa Gaussiana começando em $x_0 = L/3$. Visualizemos.

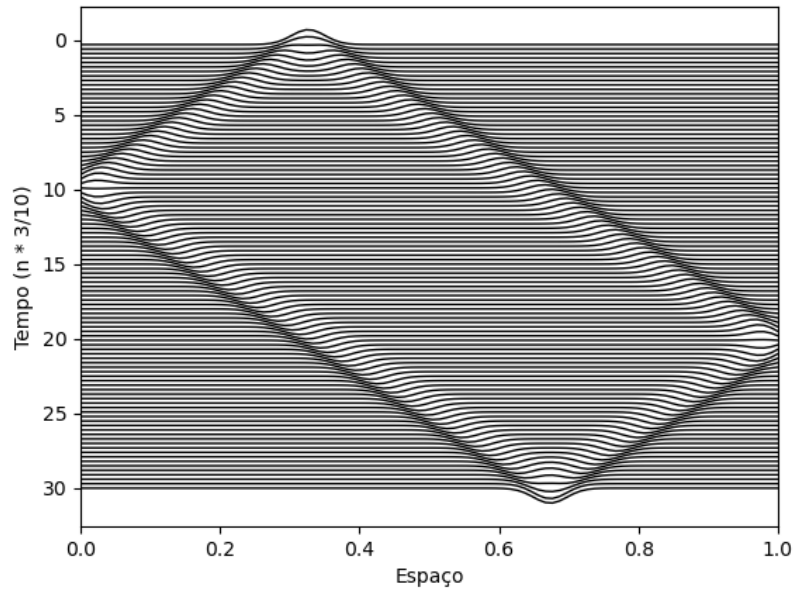
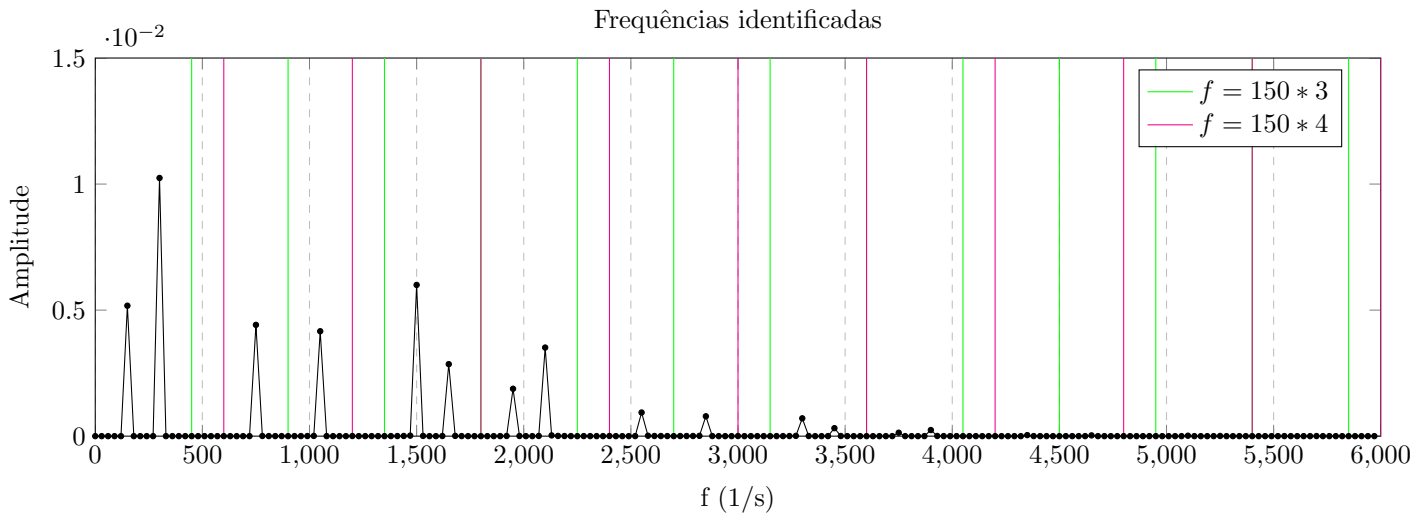


Figure 3: Onda caso 3

Para além da restrição dos múltiplos de 4, agora teremos também que os múltiplos de 3 não poderão ser observados pelas condições iniciais. Observe o espectro.



3.1.4 $x_0 = L/20$

Finalmente para o caso $x_0 = L/20$, teremos uma onda virtualmente na beira da corda, veja.

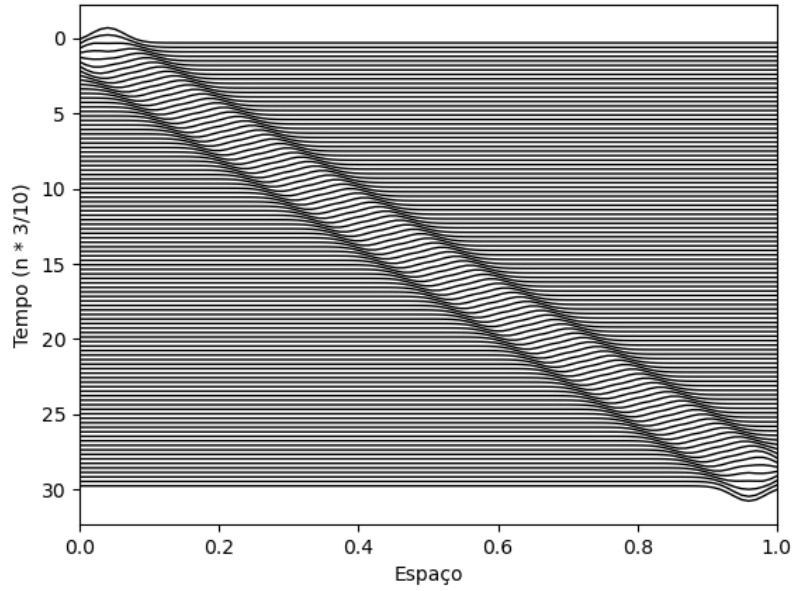
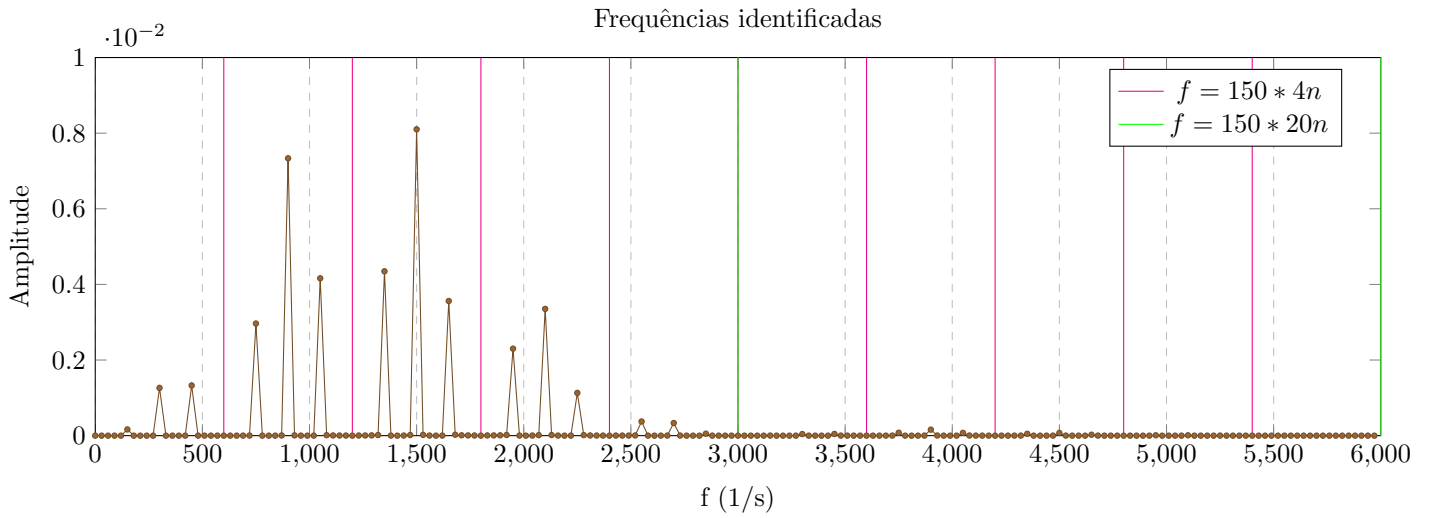


Figure 4: Onda caso 4

Aqui talvez a análise seja mais delicada. Procuramos ondas que não tenham nóculo nas extremidades, mas isso parece não incluir nenhuma onda. Na verdade frequências baixas serão pouco favorecidas. Ao mesmo tempo que altas frequências terão pouca área associada com a condição inicial. Existe um ponto ótimo entre proximidade da extremidade e área compondo a normal inicial. Por isso se vê um espécie de pico por volta de 1500Hz. A restrição para múltiplos de 4 se mantém.



3.2 Uma borda solta

Mudemos a configuração de nossa corda. Agora uma das extremidades é permitida oscilar verticalmente. O resto das configurações, como onde está nossa sonda, é mantido. Já discutimos a implementação do método associado com esta simulação.

Para as simulações que se segue, nosso f_0 será $\frac{c}{4L} = 75Hz$. E as frequências esperadas $(2n - 1) * f_0$.

3.2.1 $x_0 = L/2$

Podemos visualizar na onda se nossa reflexão se dá como o esperado e ve que de fato, acontece.

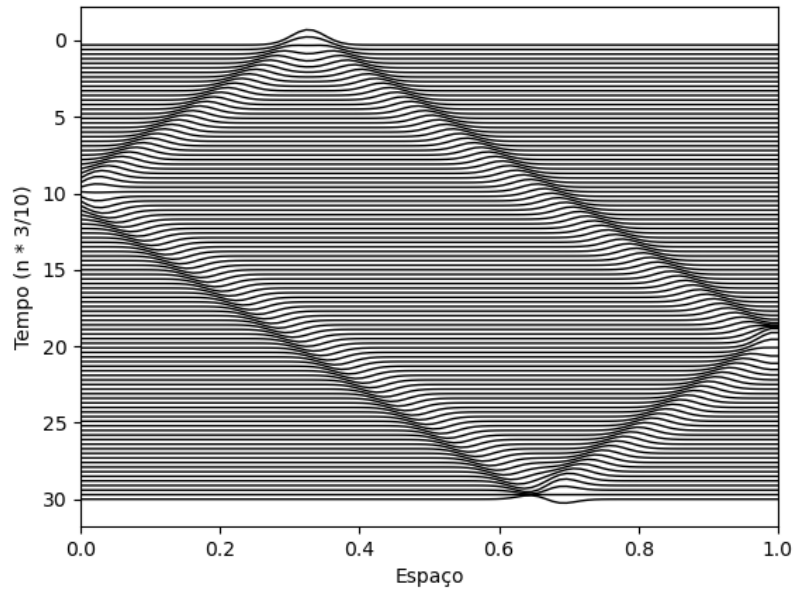
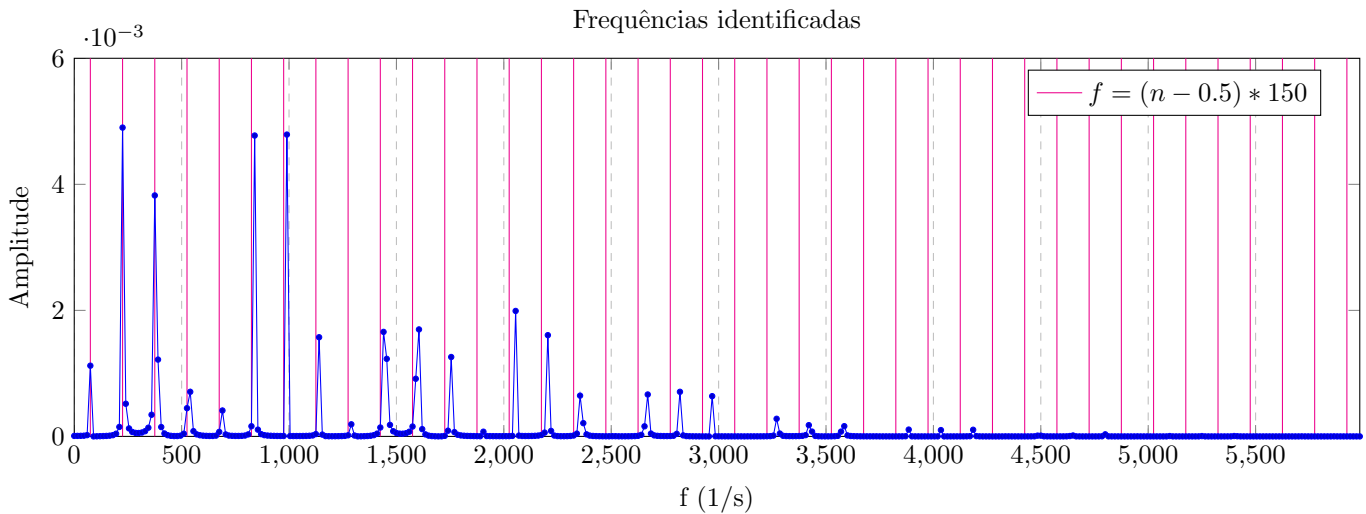


Figure 5: Onda caso borda solta

Podemos observar as frequências emergindo nos picos esperados, por volta de $(75 + 150n)Hz$. Contudo, neste caso, nenhuma das frequências deve estar associada com um nó em $\frac{L}{2}$ e isso não deve eliminar nenhum dos picos presentes no nosso espectro.



De fato todos os múltiplo ímpares de $75Hz$ estão presentes no gráfico abaixo.

3.2.2 $x_0 = 2 * L/3$

Podemos visualizar na onda se nossa reflexão se dá como o esperado e ve que de fato, acontece.

Podemos observar as frequências emergindo nos picos esperados, por volta de $(75 + 150n)Hz$. Contudo,

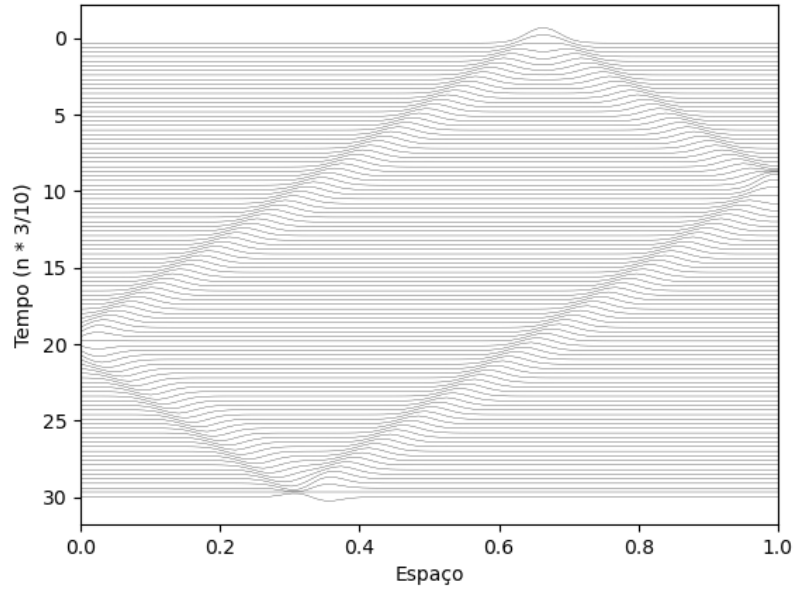
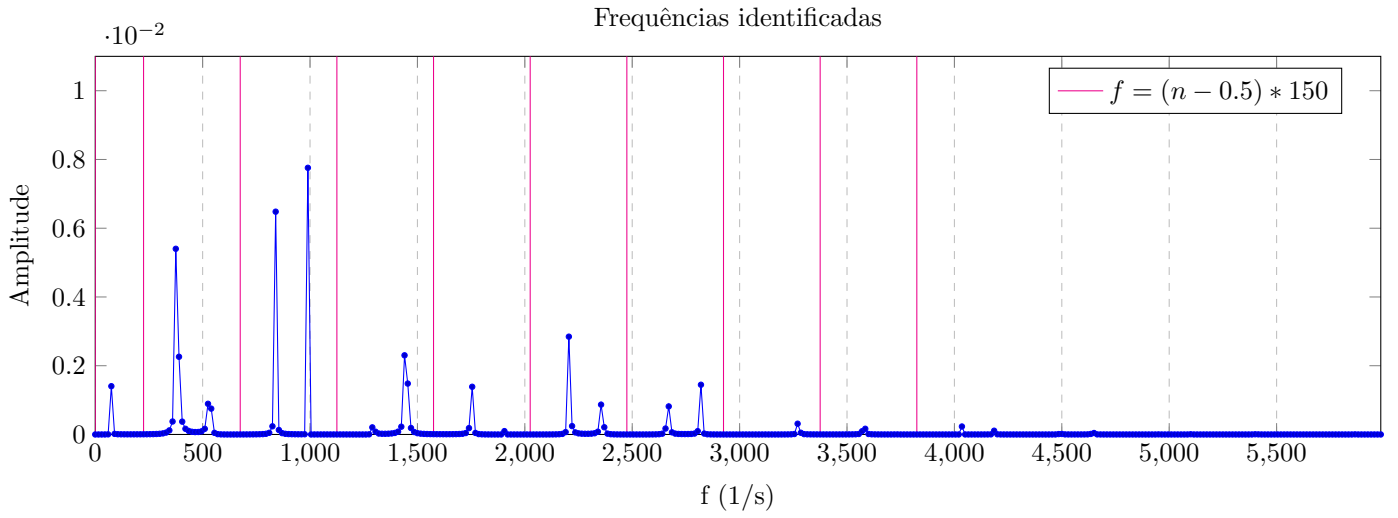


Figure 6: Onda caso borda solta

neste caso, as frequências associadas à $f = 3nf_0$, para n ímpares, tem um nó em $\frac{2L}{3}$ e não devem aparecer no gráfico.



De fato todos os múltiplo para n ímpares de $3n75Hz$ estão marcados e deixaram de estar presentes no gráfico acima. Podemos estar confiantes de nossa teoria com esses achados.