Dados Intransitivos

Joao V. A. Pimenta & Joao P. C. de Paula & Lael V. Lima & Luis G. C. Bueno
Guilherme L. F. Silva & Daniel Ungaretti & Tertuliano Franco
Universidade De Sao Paulo
joaovictorpimenta@usp.br

impa
Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

Resumo

Intransitividade em um jogo de dados é um conceito muitas vezes pouco intuitivo. Afinal, se existem dados A, B, C tais que $A \triangleright B$ e $B \triangleright C$, é pouco natural imaginar que seja possível $C \triangleright A$. Fato é, escolhendo devidamente seus dados, esse fenômeno é possível e alguns resultados seguem desde que um bom modelo seja definido. No primeiro momento, exploraremos uma representação dos dados como *palavras* que nos possibilita definir a existência de conjuntos intransitivos para todas configurações de número de dados (m) e faces (n). Em um segundo modelo, no qual as faces dos dados são dadas por uma distribuição uniforme $[0, 1]$, note, sem repetição e por isso, ligado as palavras. Por fim, exploramos um pouco a razão de conjuntos de dados ordenados intransitivos $(\mathcal{I})$ sobre o conjunto total de dados possível $(\mathcal{D})$. Analisando a assintótica em relação a n simulamos o modelo e conjecturamos, levados por resultados computacionais e uma análise algébrica que $L = 3\log 3$ em $|\mathcal{I}_n| = e^{nL(1+o(1))}$.

Palavras

Construiremos um modelo sem repetição baseado em palavras onde cada letra é associada à um dado. Na tabela representamos $abccabbcaabc$.

A	12				8				4	3		
B		11				7	6				2	
C			10	9				5				1

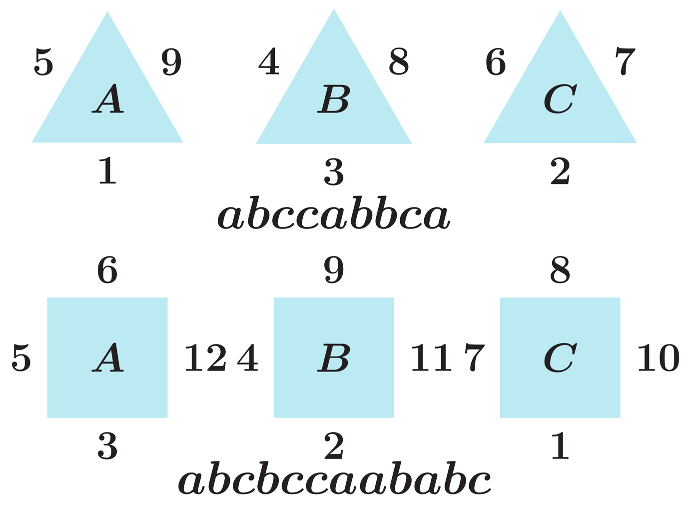
$A \triangleright B$ se, na *palavra*, a contagem dos b's na direita de todos a's for menor que a recíproca. Seja S_m^n uma palavra de m tipos de letras com n repetições, notamos:

Lema 1. *Se existe uma palavra $S_{m,n}$ intransitiva, então existe uma palavra $S_{m+1,n}$ que também é intransitiva.*

Lema 2. *Se existe $S_{m,n}$ intransitiva, então existe uma palavra $S_{m,n+2}$ que também é intransitiva.*

Lema 3. *Uma palavra $S_{3,2}$ não pode ser intransitiva.*

Teorema 4. *Para todo $n \geq 3$ e $m \geq 3$ existem palavras intransitivas de característica m e ordem n.*



$m \backslash n$	2	3	4	5	6	7	...
3	×	✓	✓	✓	✓	✓	...
4	×	✓	✓	✓	✓	✓	...
5	×	✓	✓	✓	✓	✓	...
6	×	✓	✓	✓	✓	✓	...
7	×	✓	✓	✓	✓	✓	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

É possível mostrar para um modelo enviesado de dados que para todo $m \geq 3$ e $n \geq 4$, existem m dados enviesados de n faces que são intransitivos.

Dados Aleatórios

A e B possuem n faces $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, variáveis aleatórias i.i.d assumindo valores em $[0, 1]$ com distribuição uniforme. O número de vitórias de A sobre B é dado por

$$N_{A>B} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_i > B_j}$$

e podemos explorar a probabilidade como a razão relacionado com as triplas de dados com n faces (A_n, B_n, C_n)

$$\mathbb{P}((A_n, B_n, C_n) \in \mathcal{I}_n) = \frac{|\mathcal{I}_n|}{|\mathcal{D}_n|},$$

$\mathcal{I}_n$ é o conjunto de trios ordenados de dados intransitivos e $\mathcal{D}_n$ todos trios ordenados possíveis. Pela expansão de Stirling

$$|\mathcal{D}_n| = \frac{(3n)!}{(n!)^3} \sim \frac{\sqrt{3}}{2\pi n} 3^{3n}.$$

Proposição 5. *Se $r \in \mathcal{I}_n$ e $s \in \mathcal{I}_m$, então a concatenação $rs \in \mathcal{I}_{n+m}$*

Corolário 6. *Sejam m e n inteiros positivos, então $|\mathcal{I}_{(m+n)}| \geq |\mathcal{I}_m||\mathcal{I}_n|$*

Teorema 7. $|\mathcal{I}_n| = e^{nL(1+o(1))}$*. para alguma constante $L \in (2.5, 3\log 3]$*

Prova. Por ser subaditivo, pelo lema de Fekete, existe L tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|\mathcal{I}_n|}{n} = \sup_n \frac{\log|\mathcal{I}_n|}{n} = L.$$

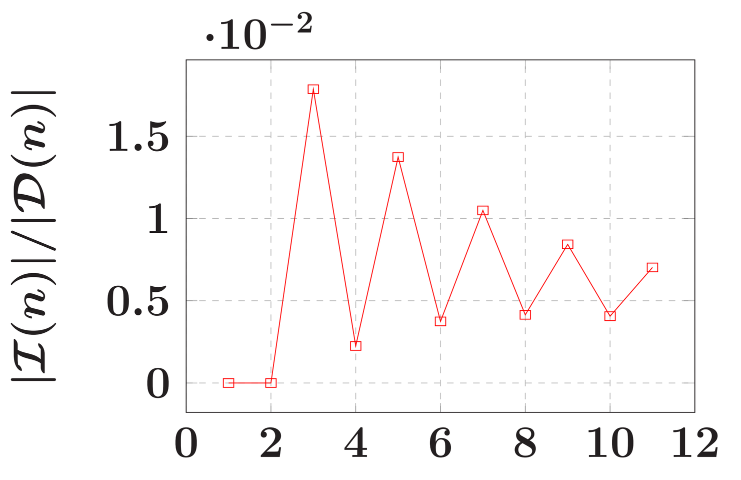
$$\implies |\mathcal{I}_n| = e^{nL(1+o(1))}$$

Podemos afirmar pelos resultados computacionais

$$L \geq \frac{\log|\mathcal{I}_{11}|}{11} \approx 2.5.$$

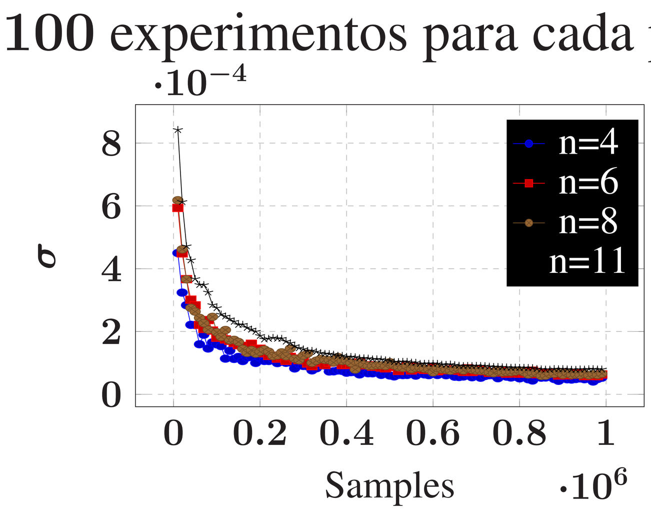
E, como $|\mathcal{I}_n| \leq |\mathcal{D}_n|$,

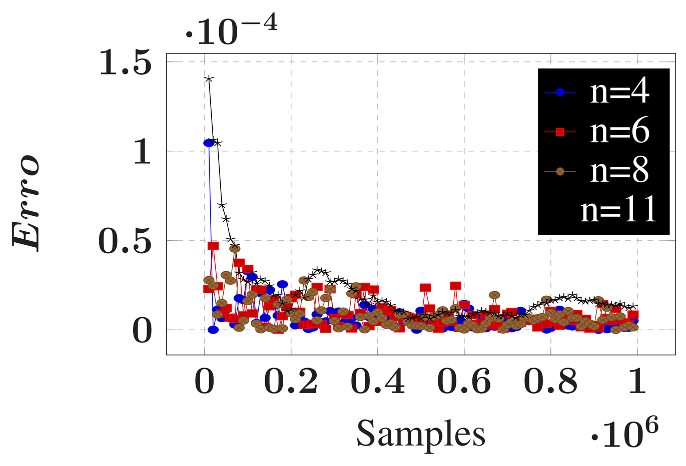
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|\mathcal{I}_n|}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\log|\mathcal{D}_n|}{n} = 3\log 3.$$



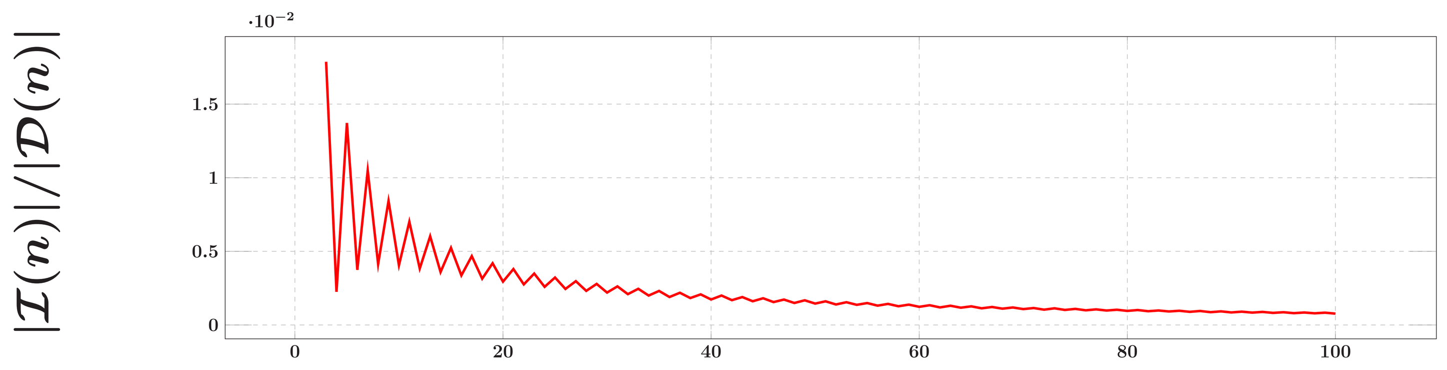
n	$\lvert\mathcal{I}_n\rvert$	$\lvert\mathcal{D}_n\rvert$	$\lvert\mathcal{I}(n)\rvert/\lvert\mathcal{D}(n)\rvert$
1	0	6	0
2	0	90	0
3	30	1680	0.017857
4	78	34650	0.002251
5	10392	756756	0.013732
6	64230	17153136	0.003744
7	4186398	399072960	0.010490
8	39236706	9465511770	0.004145
9	1920331578	227873431500	0.008427
10	22545898302	5550996791340	0.004061
11	959077780542	136526995463040	0.007024

Validando para o espaço já conhecido de palavras podemos escolher os parâmetros de uma busca aleatória. Tomamos a média de 100 experimentos para cada ponto.

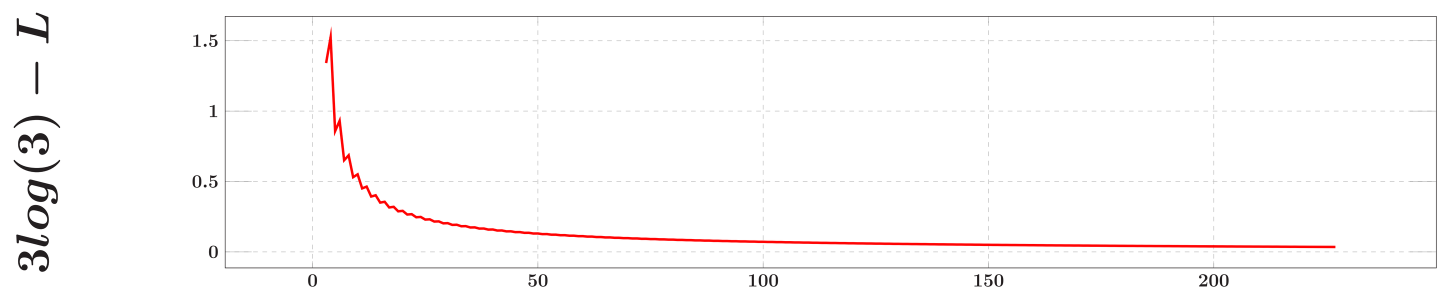




Estenderemos nossa busca realizando 10^2 experimentos para $5 \cdot 10^5$ amostras. Sabemos que nosso erro é da ordem de $\pm 5 \cdot 10^{-5}$.



Para L,



Até o momento, com $n = 1000$, $3\log 3 - 0.01 \leq L \leq 3\log 3$.

Conjectura 8. $L = 3\log 3$.

Conclusão

Dados Intransitivos instigam a intuição e fornecem uma plataforma interessante de desenvolvimento matemático. Neste trabalho, demonstrou-se para os modelos considerados a existência de conjuntos de dados intransitivos para todas configurações para os modelos. A discussão da razão para o limite de número de faces culminou em uma exploração numérica e algébrica que culmina na Conjectura 8. Também mostramos posteriormente que $|\mathcal{I}_n|/|\mathcal{D}_n| \to 0$, e provamos Teorema do Limite Central para $N_{a>b}$

Referências

[1] D. H. J. Polymath. The probability that a random triple of dice is transitive, 2022. arXiv:2211.16156.

[2] Calyampudi Radhakrishna Rao. *Linear Statistical Inference and its Applications*. John Wiley & Sons, Inc, 2 edition, 1973.

Agradecimentos

Pesquisa desenvolvida com utilização dos recursos computacionais do Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI) financiados pela FAPESP.