

No estudo de Matrizes Aleatórias e Simulação de Gases de Coulomb

PIMENTA, J. V. A.

9 de junho de 2023

Resumo

Resumo dos estudos de Iniciação Científica em Matrizes Aleatórias e Simulação de Gases de Coulomb.

Conteúdo

1	Introdução	2
1.1	Física e Mecânica Estatística	2
1.1.1	Entropia de Shannon	2
1.1.2	O ensemble Micro-Canônico	4
1.1.3	O ensemble Canônico	5
1.1.4	O ensemble Grão Canônico	7
2	Procura-se autovalores	10
2.1	Porquê exponencial?	11
2.1.1	Shannon-Quem?	11
2.2	Independência ou Morte	12
2.3	Uma medida à Hermitiana	13
3	Movimento Browniano	15
3.1	Processo Pontual	15
3.1.1	Poisson & fries	15
3.1.2	Função Correlação	16
3.1.3	Pontual Determinantal	16
3.2	Emsemble Biortogonal	17
3.3	Karlin-McGregor	17
3.3.1	O teorema	17
3.3.2	Consequências	19
4	Coulombolas! Gases Aleatórios	27
4.1	Hamiltonianozinho	28
4.2	Esquentem as Máquinas	29
A	Transformação Legendre	31
A.1	Tangentes	31
A.2	Otimização	31
B	Soma Assintóticas	33
C	Det Vandermonde	34

Capítulo 1

Introdução

1.1 Física e Mecânica Estatística

Estaremos lidando o tempo todo no nosso estudo com funções partições, de alguma forma, compartilhada com a física. Entenderemos um pouco mais sobre os desenvolvimentos dos ensembles na termodinâmica.

Em termos gerais os ensembles são sistemas aos quais se impõe vínculos arbitrários. Tanto matematicamente, quanto fisicamente. Da entropia de Shannon podemos deduzir as funções partições apenas adicionando relações de vínculo com multiplicadores de Lagrange. Dos sistemas físicos, usaremos um banho que possa atuar como vínculo.

1.1.1 Entropia de Shannon

Podemos fazer algo um pouco mais matemático. Definiremos a entropia de Shannon, que dá origem às expressões entrópicas gerais para qualquer ensemble.

$$\mathcal{S} = -k_b \sum_i p_i \log p_i$$

Um vínculo

Se impormos um vínculo do tipo

$$\sum_i p_i = 1$$

Podemos usar os multiplicadores de Lagrange para realizar a maximização da nossa função. Pela definição, escrevemos:

$$S(p_i, \lambda) \equiv k_b \sum_{i=1}^N p_i \log(p_i) - \lambda \left(\sum_{i=1}^N p_i - 1 \right)$$

Com diferencial

$$\delta S = -k_b \sum_{i=1}^N \left(p_i \log p_i + \frac{p_i}{p_i} \delta p_i \right) - \lambda \sum_{i=1}^N \delta p_i$$

Resolveremos agora o sistema

$$\begin{cases} \delta S = 0 \\ \sum_i p_i = 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} -k_b(\log p_i + 1) - \lambda \\ \sum_i p_i = 1 \end{cases}$$

Note que $p_i = \text{cte } \forall i$. Teremos então $p_i = \frac{1}{N}$. A entropia neste caso será

$$S(p_i^*) = -k_b \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \log \frac{1}{N} \right) = k_b \log N$$

Dois vínculos

Faremos agora a implicação de um novo vínculo

$$\sum_{\sigma} p_{\sigma} E_{\sigma} = U$$

Desenvolvendo a equação

$$S(p_i, \lambda_1, \lambda_2) \equiv k_b \sum_{i=1}^N p_i \log(p_i) - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^N p_i - 1 \right) - \lambda_2 \left(\sum_{\sigma} p_{\sigma} E_{\sigma} - U \right)$$

Chegaremos no sistema

$$\begin{cases} -k_b(\log p_i + 1) - \lambda_1 - \lambda_2 E_{\sigma} = 0 \\ \sum_{\sigma} p_i = 1 \\ \sum_{\sigma} p_{\sigma} E_{\sigma} = U \end{cases}$$

E finalmente, da primeira equação tiramos

$$p_{\sigma} = e^{A E_{\sigma} + B} = M e^{-\beta E_{\sigma}}$$

De forma que podemos reescrever

$$1 = \sum_{\sigma} M e^{-\beta E_{\sigma}} = M \sum_{\sigma} e^{-\beta E_{\sigma}}$$

Onde nomearemos $M = \frac{1}{\sum_{\sigma} e^{-\beta E_{\sigma}}} = \frac{1}{Z}$ **função partição**. Faltava apenas definir β em

$$p_{\sigma} = \frac{e^{-\beta E_{\sigma}}}{Z}$$

Para β podemos aplicar o último vínculo (da temperatura térmica)

$$\begin{aligned} U &= \sum_{\sigma} p_{\sigma} E_{\sigma} = \sum_{\sigma} \left(\frac{1}{Z} e^{-\beta E_{\sigma}} \right) E_{\sigma} = \frac{1}{Z} \sum_{\sigma} E_{\sigma} e^{-\beta E_{\sigma}} \\ &= -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum_{\sigma} e^{-\beta E_{\sigma}} \right) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial(\log Z)}{\partial \beta} \end{aligned}$$

De alguma forma esta equação transcendental nos define β .

Três vínculos

Introduziremos um terceiro novo vínculo

$$\sum_{\sigma} p_{\sigma} N_{\sigma} = N$$

Da mesma forma, teremos que desenvolver a equação

$$S(p_i, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \equiv k_b \sum_{i=1}^N p_i \log(p_i) - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^N p_i - 1 \right) - \lambda_2 \left(\sum_{\sigma} p_{\sigma} E_{\sigma} - U \right) - \lambda_3 \left(\sum_{\sigma} p_{\sigma} N_{\sigma} - N \right)$$

Do sistema associado aos vínculos de Lagrange

$$\begin{cases} -k_b(\log p_i + 1) - \lambda_1 - \lambda_2 E_{\sigma} - \lambda_3 N_{\sigma} = 0 \\ \sum_{\sigma} p_i = 1 \\ \sum_{\sigma} p_{\sigma} E_{\sigma} = U \\ \sum_{\sigma} p_{\sigma} N_{\sigma} = N \end{cases}$$

Da primeira equação tiramos

$$p_{\sigma} = e^{AE_{\sigma} + BN_{\sigma} + C} = M e^{-\beta E_{\sigma} + \beta \mu N_{\sigma}}$$

De forma que podemos reescrever

$$1 = \sum_{\sigma} M e^{-\beta E_{\sigma} + \beta \mu N_{\sigma}} = M \sum_{\sigma} e^{-\beta E_{\sigma} + \beta \mu N_{\sigma}}$$

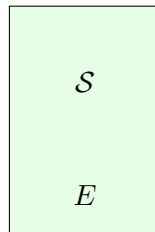
Novamente nomearemos Z em

$$M = \frac{1}{\sum_{\sigma} e^{-\beta E_{\sigma} + \beta \mu N_{\sigma}}} = \frac{1}{Z}$$

a função partição. As outras duas equações nos definem β e μ .

1.1.2 O ensemble Micro-Canônico

O ensemble Micro-Canônico devera ser o mais simples que desenvolveremos. Para este caso a energia é constante e todo microestados devem ser igualmente prováveis pela hipótese ergótica.



Sabemos então que vamos querer minimizar a entropia usual com

$$U(S, V, N) \tag{1.1}$$

Com

$$dU = TdS - PdV + \mu N$$

e, especialmente

$$\rho_E = \sum_{\sigma} \rho_{\sigma} = \Omega(E) \rho_{\sigma}$$

Ou ainda, se $\Omega(E)$ é a quantidade de microestados,

$$\rho_{\sigma} = \frac{1}{\Omega(E)}$$

De forma que nossa função partição será

$$Z = \sum_{\sigma} \frac{1}{\Omega(E)} = 1$$

E em relação a energia

$$Z = \sum_E \frac{1}{\Omega(E)} \Omega(E) = \exp \left\{ \beta T k_b \log \frac{1}{\Omega(E)} \right\} \Omega(E)$$

Finalmente

$$\log(Z) = 0 = -\frac{S}{k_b} + \log(\Omega(E))$$

Ou melhor

$$S = k_b \log(\Omega(E)) \quad (1.2)$$

1.1.3 O ensemble Canônico

Quando tratamos destes sistemas no ensemble canônico a energia interna não mais será minimizada no nosso sistema termalizado. Introduzimos uma nova grandeza chamada Energia Livre de Helmholtz (F), definida como a transformada de Legendre (discutida no Apêndice A) da energia interna em relação à entropia, ou seja

$$U(S, V, N) \mapsto F(T, V, N) \quad (1.3)$$

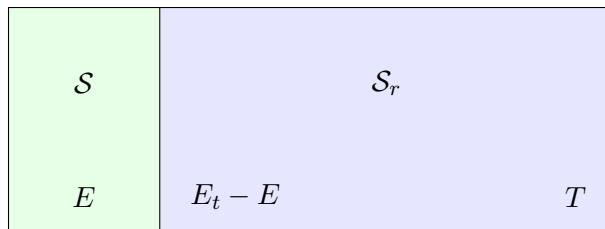
ou ainda mais especificamente

$$F(T, V, N) = U(S(T, V, N), V, N) - TS(T, V, N)$$

Note ainda as diferenciais

$$\begin{aligned} dU &= TdS - PdV + \mu dN \\ dF &= -SdT - PdV + \mu dN \end{aligned}$$

Para o desenvolvimento da função partição estamos atentos aos requisitos do ensemble canônico. Um sistema termalizado por um banho térmico. Nosso sistema completo pode ser representado



Considere que os sistemas estão em contato térmico e o sistema completo, junto com o banho é um sistema isolado de energia E_t . Sabemos que a probabilidade de uma energia no nosso sistema termalizado (ρ_E) é expressa:

$$\rho_E = \sum_{\sigma} \rho_{\sigma} = \Omega(E) \rho_{\sigma}$$

Onde note, ρ_{σ} é a probabilidade de, dada uma temperatura, um microestado possível. Note por outro lado que podemos expressar:

$$\rho_E = \frac{\Omega(E) \Omega_r(E_t - E)}{\sum_i \Omega(E_i) \Omega_r(E_t - E)}$$

Note que isso é nada mais do que dizer que os microestados são equiprováveis e basta uma contagem (normalizada) para definir a probabilidade. Neste sentido podemos também escrever:

$$\rho_{\sigma} \propto \Omega_r(E_t - E)$$

Isso é, quanto mais formas o reservatório possa se organizar para determinada energia, mais provável é o microestado associado à energia de \mathcal{S} .

$$\begin{aligned} \rho_{\sigma} &\propto e^{\beta T K_b \log(\Omega_r(E_t - E))} \\ &\propto e^{\beta T (\mathcal{S}_r(E_t) - \frac{E}{T})} \\ &\propto e^{-\beta E} e^{\beta T \mathcal{S}_r(E_t)} \\ &\propto e^{-\beta E} \end{aligned}$$

Onde fizemos a expansão de $k_b \log(\Omega_r(E_t - E))$ (entropia) em Taylor (apesar de que, em realidade, apenas $\frac{E}{E_t}$ é pequeno, não necessariamente E) e obtivemos

$$\mathcal{S}_r(E_t - E) \approx \mathcal{S}_r(E_t) + \left(\frac{\partial \mathcal{S}_r}{\partial E} \right)_{E=E_t} (-E)$$

Onde

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}_r}{\partial E} \right)_{E=E_t} = \frac{1}{T}$$

Um sistema termalizado vai querer minimizar essa nova grandeza da energia livre de Helmholtz. Em todo caso iniciaremos com a expressão já deduzida da equação de partição

$$\mathcal{Z} = \sum_{\sigma} e^{-\beta E_{\sigma}}$$

Que pode ser reescrito em termos de uma soma na energia

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_E e^{-\beta E} \Omega(E) \\ \mathcal{Z} &= \sum_E e^{-\beta T K_b \log(\Omega(E))} \Omega(E) \end{aligned}$$

Podemos argumentar que $K_b \log(\Omega(E)) = S(E)$ e usaremos o logaritmo de somas assintóticas (discutido no Apêndice B) para terminar o desenvolvimento. Note

$$\log(\mathcal{Z}) \approx \log\left(\max_x [e^{-\beta(E-TS(E))}]\right)$$

$$\log(\mathcal{Z}) \approx \log\left(e^{-\beta \min_E ((E-TS(E)))}\right)$$

Onde podemos reconhecer pela transformada de Legendre o termo referente à Energia livre de Helmholtz. Tendo assim

$$\log(\mathcal{Z}) \approx -\beta F$$

$$F = -K_b T \log(\mathcal{Z}) \quad (1.4)$$

1.1.4 O ensemble Grão Canônico

Supomos agora nosso sistema novamente controlado por um banho térmico. Desta vez permitiremos a troca de temperatura e partículas. Definiremos uma energia livre tal que $U(S, V, N) \mapsto \Phi(T, V, \mu)$. Chamaremos esta energia livre de Grão Potencial ou Potencial de Landau. Como sempre, definiremos o potencial como uma transformada de Legendre sob a Energia

$$\Phi = U - TS - \mu N \quad (1.5)$$

$$\Phi(T, V, \mu) = U(S(T, V, \mu), V, N(T, V, \mu)) - TS(T, V, \mu) - \mu N(T, V, \mu)$$

e é claro, na diferencial

$$d\Phi = dU - Tds - SdT - \mu dN - Nd\mu$$

Onde lembramos que $d\Phi = TdS - PdV + \mu dN$ de forma que

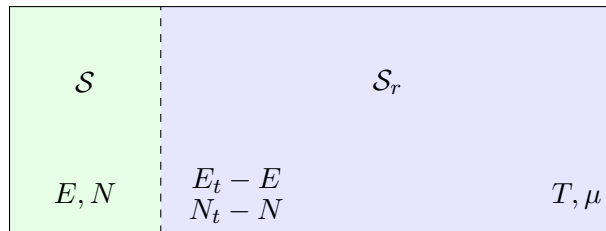
$$d\Phi = -SdT - PdV - Nd\mu$$

Ou seja,

$$S = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right|_{V, N}$$

$$N = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right|_{T, V}$$

Tratamos do seguinte sistema,



Sabemos afirmar que $p_\sigma \propto \Omega_R(E_t - E, N_t - N)$, ou seja, cada microestado do nosso sistema é proporcional às formas que o banho pode se arranjar dado (E, N) . Ou seja

$$\begin{aligned}
p_\sigma &= \exp \{ \log [\Omega_R(E_t - E, N_t - N)] \} \\
&\propto \exp \left\{ \frac{1}{k_b} \left[k_b \log (\Omega_R(E_T, N_T)) - E \frac{\partial}{\partial E'} (k_b \log \Omega_R(E', N')) \right]_{N'=N_T}^{E'=E_T} - N \frac{\partial}{\partial N'} (k_b \log \Omega_R(E', N')) \right]_{N'=N_T}^{E'=E_T} \right\} \\
&\propto \exp \left\{ \frac{1}{k_b} \left[-E \frac{\partial}{\partial E'} (k_b \log \Omega_R(E', N')) \right]_{N'=N_T}^{E'=E_T} - N \frac{\partial}{\partial N'} (k_b \log \Omega_R(E', N')) \right]_{N'=N_T}^{E'=E_T} \right\}
\end{aligned}$$

Onde retiramos o termo que não depende do nosso sistema de interesse e será constante, agregando ele na proporcionalidade. Agora faremos uso da ideia da entropia como $S = k_b \log (\Omega_R(E', N'))$ para escrever a relação acima em termos da temperatura e potencial químico. Usando das derivadas parciais da entropia em $dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$,

$$\begin{aligned}
p_\sigma &\propto \exp \left\{ \frac{1}{k_b} \left[-E \frac{1}{T} - N \frac{\mu}{T} \right] \right\} \\
&\propto e^{-\beta E + \beta \mu N}
\end{aligned}$$

e

$$p_\sigma = \frac{1}{\Xi} e^{-\beta E + \beta \mu N} \quad (1.6)$$

Onde

$$\Xi = \sum_{\sigma} e^{-\beta E + \beta \mu N} \quad (1.7)$$

O log da nossa função partição deve resultar em uma expressão de energia livre.

$$\begin{aligned}
\log \Xi &= \log \left(\sum_{\sigma} e^{-\beta E_{\sigma} + \beta \mu N_{\sigma}} \right) \\
&= \log \left(\sum_{E, N} \Omega(E, N) e^{-\beta E + \beta \mu N} \right) \\
&= \log \left(\sum_{E, N} \exp \left\{ \frac{k_b}{k_b} \log \Omega(E, N) \right\} \exp \{ (-\beta E + \beta \mu N) \} \right) \\
&= \log \left(\sum_{E, N} \exp \left\{ \frac{T}{k_b T} S - \beta E + \beta \mu N \right\} \right) \\
&= \log \left(\sum_{E, N} e^{\beta(E - TS - N\mu)} \right)
\end{aligned}$$

Para a aproximação desta expressão vamos considerar que o logaritmo de uma somatória pode ser aproximada por seu termo máximo,

$$\approx \log e^{\beta(E^* - TS(E^*, N^*) - N^* \mu)} = \beta(E^* - TS(E^*, N^*) - N^* \mu)$$

Ou seja,

$$\log \Xi = \beta(E^* - TS(E^*, N^*) - N^*\mu) = -\beta\Phi$$

e finalmente,

$$\Phi = -k_b T \log \Xi \tag{1.8}$$

Capítulo 2

Procura-se autovalores

A distribuição dos autovalores de uma matriz aleatória Gaussianiana $N \times N$ é dada por:

$$\rho(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{\mathcal{Z}_{N,\beta}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} \prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \quad (2.1)$$

onde a constante de normalização \mathcal{Z} é dada por

$$\mathcal{Z}_{N,\beta} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(1 + j\frac{\beta}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\beta}{2})} \quad (2.2)$$

β é o index de Dyson e indica o ensemble que utilizamos. Mais importante é notar que existe na nossa distribuição um fator de repulsão e um fator de campo de mínimo de energia em $x = 0$. De forma que mesmo centradas em 0 as partículas mantêm uma distância entre si pela repulsão 'Coulombiana'.

Se quisermos computar o histograma dos autovalores podemos tomar a marginal

$$\rho(x) = \int \cdots \int dx_1 \cdot dx_2 \cdots dx_N \rho(x, x_2, \dots, x_N) \quad (2.3)$$

Ou seja, o perfil da função partição de uma nova partícula dada o posicionamento das outras. Para a Equação 2.1, a densidade espectral $\mathbb{E}[n(x)] = \rho(x)$ é dada pelo limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\beta N} \rho(\sqrt{\beta N} x) = \rho_{sc}(x) \quad (2.4)$$

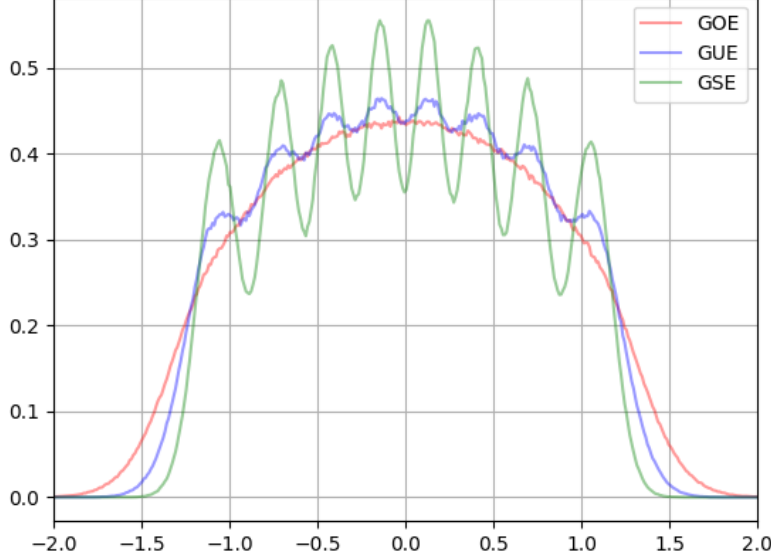
Onde $\rho_{sc}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2 - x^2}$ compõe a famosa lei do semi-círculo de Wigner representada na Figura 2. Os pontos $\pm \sqrt{2\beta N}$ são as bordas espectrais. Um esquema útil para organização dos multiplos ensembles é a classificação de Layman. Denomina-se

1. **Entradas Independentes:** Adicionada a necessidade de simetria, matrizes deste tipo são chamadas matrizes de Wigner.
2. **Invariantes por rotação:** Quaisquer duas matrizes que são relacionadas por uma transformação $\hat{H}' = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^{-1}$ ocorrerão com a mesma probabilidade.

Só existe um tipo especial de matriz que se encontra na intersecção e são as classes Gaussianas.

Em geral no mundo das matrizes aleatórias três classes são muito importantes e serão atores centrais no nosso estudo. São as três classes associadas às matrizes que tem entradas gaussianas. Estas são: O Ensemble Gaussiano Ortogonal (GOE), O Ensemble Gaussiano Unitário (GUE) e o Ensemble Gaussiano Simplético (GSE). Em suma, eles tratam, em ordem, de matrizes com entradas gaussianas reais, complexas e quaterniônicas. Seus

nomes estão relacionados com a matriz necessária para a transformação de diagonalização das matrizes. Unitária para o caso complexo, por exemplo. Seus autovalores possuem distribuições distintas (ao menos para a escala usada) e é ilustrada abaixo na Figura (2).



Mais desenvolvimento sobre a forma desta distribuição e as diferenças será feito posteriormente. Usaremos a referência [3] para a maior parte dos desenvolvimentos. Algum material interessante pode ser consultado em um livro de física em [4].

2.1 Porquê exponencial?

2.1.1 Shannon-Quem?

O uso da p.d.f gaussiana pode ser justificado de algumas formas. Uma primeira abordagem a ser explorada é a de maximização entrópica ou minimização de informação similar aos trabalhos de Shannon-Kinchin. Definiremos uma grandeza $\mathcal{I}[\mathcal{P}(\hat{H})]$ associada à uma p.d.f tal que:

$$\mathcal{I}[\mathcal{P}(\hat{H})] = - \int d\mu(\hat{H}) \mathcal{P}(\hat{H}) \ln \mathcal{P}(\hat{H})$$

Que é uma extensão natural da definição discreta de informação $-\sum_{l=1}^m p_m \ln p_m$. Agora argumentaremos algo parecido com os argumentos usados em termodinâmica de maximização de entropia. Diremos que a incerteza sobre as matrizes será máxima, ou seja, teremos a maior aleatoriedade das matrizes quando a entropia for maximizada e a informação, minimizada. Assim como na entropia física impomos um vínculo de energia constante, aqui faremos algo do tipo $E(\text{Tr } \hat{H}) = b$ e $E((\text{Tr } \hat{H})^2) = a > 0$. Vamos introduzir esses vínculos como multiplicadores de lagrange com multiplicadores v_1 e v_2 .

$$\mathcal{I}[\mathcal{P}(\hat{H})] = - \int d\mu(\hat{H}) \mathcal{P}(\hat{H}) \left(\ln \mathcal{P}(\hat{H}) - v_1 \text{Tr } \hat{H} - v_2 \text{Tr } \hat{H}^2 \right)$$

que tem diferencial

$$\delta \mathcal{I}[\mathcal{P}(\hat{H})] = - \int d\mu(\hat{H}) \delta \mathcal{P}(\hat{H}) \left(1 + \ln \mathcal{P}(\hat{H}) - v_1 \text{Tr } \hat{H} - v_2 \text{Tr } \hat{H}^2 \right) = 0$$

Que só vai ser mínimo se

$$\mathcal{P}(\hat{H}) \propto e^{-v_1 \text{Tr } \hat{H} - v_2 \text{Tr } \hat{H}^2}$$

Onde os multiplicadores são unicamente definidos pelas constantes do vínculo. Esse fato motiva de alguma forma o estudo da p.d.f gaussiana para as matrizes.

2.2 Independência ou Morte

Consideremos matrizes com entradas independentes. Qual a função densidade de probabilidade (F.P.D.) da matriz simétrica \hat{H}_s ? Devemos fazer separadamente a diagonal da seção triangular que formos usar e teremos

$$\rho((\hat{H}_s)_{11}, \dots, (\hat{H}_s)_{NN}) = \prod_{i=1}^N \left[\frac{e^{-\frac{(H_s)_{ii}^2}{2}}}{2\pi} \right] \prod_{i < j} \left[\frac{e^{-(H_s)_{ij}^2}}{\sqrt{\pi}} \right]$$

Que é a função distribuição da matriz. A desimetria da diagonal e da não diagonal nos permite escrever a distribuição como

$$\mathcal{P}(\mathcal{H}) = C_2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \text{Tr } \mathcal{H}^2} \quad (2.5)$$

Mais geralmente

$$\mathcal{P}(\mathcal{H}) = C_\beta e^{-\frac{\beta}{4\sigma^2} \text{Tr } \mathcal{H}^2} \quad (2.6)$$

Suponha que queremos derivar a equação da distribuição dos autovalores para tais matrizes. Começamos com $\mathcal{H}_{N \times N}$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_{n+1} & \cdots & x_{2n} \\ x_{n+1} & x_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_{2n} & \cdots & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

Notemos que teremos $x_1, x_2, \dots, x_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $x_{n+1}, \dots, x_{n^2} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. Qual a distribuição $p(s)$ de $s = \lambda_2 - \lambda_1$? Sabemos os autovalores soluções do polinômio característico

$$\lambda^2 - \text{Tr } \mathcal{H}_s \lambda + \det \mathcal{H}_s$$

O resultado será uma função $s(x_1, x_2, \dots, x_{n^2})$. Para a qual escrevemos

$$p(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_{n^2} \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{x_i^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \prod_{i=n+1}^{n^2} \frac{e^{-x_i^2}}{\sqrt{\pi}} \delta(s - s(x_1, x_2, \dots, x_{n^2}))$$

Que, desenvolvido, chega à

$$p(s) = -\frac{s}{2} e^{-f(s^2)}$$

Ou seja, teremos um resultado em que as partículas parecem se repelir!

2.3 Uma medida à Hermitiana

Consideraremos no nosso estudo para referencia matrizes quadradas de entradas complexas com dimensão N . Nosso objetivo é afinal ter uma forma de mensurar a distribuição de autovalores e para isso, faremos os seguintes desenvolvimentos.

Consideremos inicialmente um espaço de matrizes com entradas complexas $2N^2$ dimensional. Contido neste espaço temos um espaço de maior interesse correspondente ao espaço das matrizes *hermitianas* de dimensão N^2 . A escolha do subespaço está relacionada com o fato que matrizes hermitianas são diagonalizáveis e a distribuição de seus autovalores estará diretamente relacionada (com uma mudança de base) à distribuição do traço da matriz diagonalizada. Note que para a matriz diagonal ter a mesma medida que nossa matriz inicial, nossa medida deve ser invariável por rotação.

Mais detalhadamente podemos escrever nossa matriz hermitiana \hat{H} como

$$\hat{H} = \hat{U} \hat{\Lambda} \hat{U}^{-1}, \quad \hat{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad \hat{U} \cdot \hat{U}^* = I$$

onde, claro, $\hat{\Lambda}$ é diagonal de autovalores e \hat{U} é unitária e com colunas equivalentes aos autovetores de \hat{H} . Em geral, o conjunto de matrizes degeneradas tem medida nula e não é uma preocupação. Um cuidado deve ser tomado. A correspondência $\hat{H} \implies (\hat{U}, \hat{\Lambda})$ não é injetora, podemos tomar $\hat{U}_1 \hat{\Lambda} \hat{U}_1^{-1} = \hat{U}_2 \hat{\Lambda} \hat{U}_2^{-1}$ se $\hat{U}_1^{-1} \hat{U}_2 = \text{diag}(e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_N})$ para qualquer escolha de fases (ϕ_1, \dots, ϕ_N) . Para restringir nosso problema e tornar a função injetiva será necessário considerar as matrizes unitárias ao espaço de coset $U(N)/U(1) \times \dots \times U(1)$ ¹. Uma outra restrição necessária é ordenar os autovalores, ou seja, $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$. Temos que reescrever agora a medida $d\mu(\hat{H})$ em função de autovalores e da \hat{U} de autovetores.

Para resumir o desenvolvimento, alguns resultados serão diretamente enunciados. Essa seção pode ser encontrada no relatório [1]. Em especial recuperaremos o elemento de distância e volume no subespaço que vamos tratar

$$(ds)^2 = \text{Tr } d\hat{H} d\hat{H}^* = \sum_i (dx_{ii})^2 + 2 \sum_{i < j} [(dx_{ij})^2 + (dy_{ij})^2] \quad (2.7)$$

$$d\mu(\hat{H}) = 2^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_i dx_{ii} \prod_{i < j} dx_{ij} dy_{ij} \quad (2.8)$$

Ambos vem de um desenvolvimento da métrica do espaço discutido. Note que nossa medida de comprimento é invariante em respeito à automorfismos (Calcule $\text{Tr } H^2$). Especificamente, se tomarmos os elementos (2.7) e (2.8) na decomposição espectral, obteremos

$$(ds)^2 = \sum_i (d\lambda)^2 + \sum_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \overline{\delta U_{ij}} \delta U_{ij} \quad (2.9)$$

e

$$d\mu(\hat{H}) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_i d\lambda_i \times d\mu(\hat{U}) \quad (2.10)$$

Tendo a medida de integração pronta, podemos definir uma F.D.P $\mathcal{P}(\hat{H})$ neste espaço de matrizes hermitianas tal que $\mathcal{P}(\hat{H}) d\mu(\hat{H})$ é a probabilidade da matriz \hat{H} estar no volume $d\mu(\hat{H})$. Queremos que nossa função seja invariante à rotação, ou seja, $\mathcal{P}(\hat{H}) = \mathcal{P}(\hat{U}^* \hat{H} \hat{U})$.

Conhecer os N primeiros traços ($\text{Tr } \hat{H}^n$) de \hat{H} define unicamente o polinômio característico e junto com ele, os autovalores. Especificamente tomaremos

¹Não tenho muita ideia de espaços de Coset. Pelo que entendo, existe um espaço onde toda \hat{U} pode ser representada por $\hat{U}_c \hat{U}_d$, onde \hat{U}_c compõe o espaço de coset e \hat{U}_d é uma matriz diagonal unitária. Dessa forma matrizes equivalentes são aquelas que multiplicadas por \hat{U}_d tem um mesmo resultado.

$$\mathcal{P}(\hat{H}) = C e^{-\text{Tr } Q(\hat{H})} \quad (2.11)$$

Onde Q deve ser um polinômio de até ordem $2j \leq N$ suficiente para garantir a convergência de

$$\mathcal{Z}_n = \int_{\mathcal{H}_n} e^{-\text{Tr } Q(\hat{M})} d\hat{M}$$

Comumente uma condição suficiente é

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{Q(x)}{\ln(1+x^2)} = \infty$$

Mas em especial, se tomarmos

$$Q(x) = ax^2 + bx + c$$

Nossa medida tomará a forma

$$\mathcal{P}(\hat{H}) = e^{-a[\sum_i x_{ii}^2 + 2\sum_{i<j} [x_{ij}^2 + y_{ij}^2]]} e^{-b\sum_i x_{ii}} e^{-cN} \quad (2.12)$$

$$= e^{-cN} \prod_{i=1}^N \left(e^{-ax_{ii}^2 - bx_{ii}} \right) \prod_{i<j} e^{-2ax_{ij}^2} \prod_{i<j} e^{-2ay_{ij}^2} \quad (2.13)$$

Onde podemos notar que a distribuição de probabilidade da matriz \hat{H} pode ser representados por fatores independentes, cada um de forma gaussiana. Para este potencial, temos uma conexão entre as matrizes de entrada independentes e as matrizes invariáveis por rotação. Lembre-se que para as variáveis serem independentes \mathcal{P} deve ter a forma $\mathcal{P} = C e^{-(a \text{Tr } \hat{H}^2 + b \text{Tr } \hat{H} + cN)}$ para constantes $a > 0, b, c$. Em nota, sabemos então

$$e^{\text{Tr } V(\hat{H})} d\mu(\hat{H}) = e^{-\sum_j V(\lambda_j)} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\mu(\lambda) d\mu(\hat{U})$$

ou mais geralmente para o ensemble com

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}_n} e^{\text{Tr } (V(\hat{M}))} d\hat{M}$$

Dado λ_j os autovalores

$$\text{Tr } (V(\hat{M})) = -\sum_{j=1}^n V(\lambda_j)$$

e finalmente podemos escrever

$$E[f] = \int_{\mathcal{H}_n} f(\hat{M}) e^{-\text{Tr } (Q(\hat{M}))} d\hat{M} \quad (2.14)$$

$$= \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}} \int \cdots \int f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{j=1}^n e^{-Q(\lambda_j)} d\lambda_1 \dots d\lambda_n \quad (2.15)$$

Assim, a probabilidade conjunta nas matrizes induz uma densidade de probabilidade de autovalores

$$\frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}_n} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{j=1}^n e^{Q(\lambda_j)} \quad (2.16)$$

Alguns resultados foram resgatadas da nota do autor em [2].

Capítulo 3

Movimento Browniano

3.1 Processo Pontual

Um processo pontual pode ser interpretado como um conjunto aleatório de pontos ou como a medida de probabilidade associada a esse conjunto. Um processo pontual possui n pontos se

$$\mathcal{P}(\#X = n) = 1$$

Onde X é um conjunto enumerável de \mathcal{X} (\mathbb{R} , \mathbb{Z} ou um subconjunto destes). O conjunto de todas configurações possíveis é denominado $Conf(\mathcal{X})$. Se $P(x_1, \dots, x_n)$ é uma função de densidade de probabilidade em \mathbb{R}^n invariante por permutações

$$\mathbb{R}^n \rightarrow Conf(\mathbb{R})$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto X = x_1, \dots, x_n$$

define naturalmente um processo pontual com n pontos.

3.1.1 Poisson & fries

Tome $\{N(t)\}$ o número de eventos no intervalo de tempo $]0, t]$. $\{N(t)\}$ é um processo estocástico (de contagem). Se o processo de Poisson possui $\lambda > 0$, para um elemento fixo do espaço amostral a variável aleatória N assume valor k no tempo t com probabilidade

$$\mathcal{P}[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad (3.1)$$

Onde λ é o número esperado de chegadas por unidade de tempo. Agora, como um processo pontual, a probabilidade de n eventos no intervalo $]a, b]$ é

$$\mathcal{P}(N]a, b] = n) = \frac{(\lambda(b-a))^n e^{-\lambda(b-a)}}{n!}$$

Podemos usar a independência de cada evento de Poisson em intervalos disjuntos para escrever

$$\mathcal{P}(N]a_1, b_1] = n_1, \dots, N]a_k, b_k] = n_k) = \prod_{i=1}^k \frac{(\lambda(b_i - a_i))^{n_i} e^{-\lambda(b_i - a_i)}}{n_i!}$$

Podemos escrever para uma função f mensurável em \mathbb{R}

$$\sum_{x_i \in \mathcal{X}} f(x_i) = \int f(x) dN(x)$$

Onde a medida dN é

$$dN(x) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} \delta_{x_i}(x)$$

Onde notamos que podemos interpretar tanto quanto uma soma de um processo pontual quanto uma medida de probabilidade.

3.1.2 Função Correlação

Definimos uma variável aleatória N anteriormente. Naturalmente, poderíamos estar interessados em sua esperança. Mais especificamente, podemos procurar a esperança do número de pontos de uma configuração dentro de um intervalo $A \subset \mathbb{R}$.

$$A \mapsto \mathbb{E}[N(A)] = \mathbb{E}[\#(A \cap X)]$$

Que pode ser interpretada como uma medida com densidade p_1

$$\mathbb{E}[\#(A \cap X)] = \int_A p_1(x) dx \quad (3.2)$$

A equação 3.2 é conhecida como *função de correlação de 1 ponto*. Em grosso modo, $p_1(x)$ é a probabilidade de haver um ponto da configuração entre x e $x + dx$. Seja um configuração simples $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e intervalos disjuntos na reta A_1, A_2, \dots, A_n ,

$$\int_A \dots \int_A \rho_n(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n = \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^k \#(X \cap A_j) \right)$$

é o número esperado de n -uplas $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$ tais que $x_i \in A_i, i = 1, \dots, n$. Seja $\mathbb{P}(x_1, \dots, x_n)$ uma densidade de probabilidade em \mathbb{R}^n , então o processo pontual de n pontos gerado possui funções de correlação dadas por

$$p_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{n!}{(n-k)!} \int \dots \int \mathbb{P}(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n$$

3.1.3 Pontual Determinantal

Um processo pontual vai ser chamado determinantal se dada uma função de correlação ρ_n , existe um núcleo $K(x, y)$ conhecido como núcleo de correlação tal que

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n \quad (3.3)$$

onde

$$[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) & \dots & K(x_1, x_n) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) & \dots & K(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, x_1) & K(x_n, x_2) & \dots & K(x_n, x_n) \end{bmatrix}$$

Nos casos de baixa dimensão

$$p_1(x_1) = K(x_1, x_1), \quad p_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) \end{vmatrix}$$

Para que o núcleo satisfaça a equação 3.3 enunciaremos um resultado de interesse.

Teorema 1 *Seja K um núcleo tal que*

- (a) $\int K(x, x) = n \in \mathbb{N}$,
 (b) Para todo $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, o determinante é não negativo
 (c) K possui a propriedade de **núcleo reprodutor**, isto é;

$$K(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, s)K(s, y)ds$$

Então

$$P(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$$

será uma densidade de probabilidade em \mathbb{R} cujo processo de n pontos associado é determinantal.

3.2 Emsemble Biortogonal

Um n -ponto processo é um ensemble biortogonal se existem duas sequências f_1, \dots, f_n e g_1, \dots, g_n em $L^2(R)$ e uma constante $Z_n \neq 0$ tais que:

$$\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \det[f_i(x_j)]_{i,j=1}^n \cdot \det[g_i(x_j)]_{i,j=1}^n$$

Onde todo f_i e g_i é independente nos i 's. Pode-se mostrar que se

$$\phi_j \in \text{span}(f_1, \dots, f_n) \quad \psi_j \in \text{span}(g_1, \dots, g_n)$$

tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(c) \psi_j(x) dx = \delta_{jk}$$

então

$$K_n(x, y) = \sum_{j=1}^n \phi_j(c) \psi_j(x)$$

onde $K_n(x, y)$ é um *Kernel* tal que

$$\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \det[K_n(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$$

O processo é determinado e K_n é o kernel de correlação.

3.3 Karlin-McGregor

3.3.1 O teorema

Exploraremos os caminhos não cruzantes providos por processos de Markov. Considere uma partícula de movendo com uma regra qualquer, vamos descrever esse movimento de forma que denotaremos $p_t(a; x)$ a densidade de probabilidade de transição; isto é, a chance uma partícula em a ir para x em um próximo momento. Um teorema clássico enuncia a probabilidade de um certo número de caminhos não se intersectarem passado um tempo t .

O teorema diz: Considere $X_1(t), \dots, X_n(t)$ cópias independentes de um processo forte de Markov com caminhos condicionados tais que

$$X_j(0) = a_j$$

onde $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ são valores dados. Notamos novamente $p_t(x, y)$ ser a densidade do processo de transição. Vamos definir regiões E_1, E_2, \dots, E_n onde E 's vizinhos não se intersectam. Temos

$$\int_{E_1} \dots \int_{E_n} \det [p_t(a_i, x_j)]_{i,j=1}^n dx_1 \dots dx_n$$

vai ser a probabilidade de que os caminhos não tenham se intersectados no intervalo de tempo $[0, t]$ e $X_j(t)$ nos intervalos correspondentes. A demonstração está em [2]. Note que temos

$$\int_{E_1} \dots \int_{E_n} \det [p_t(a_i, x_j)]_{i,j=1}^n dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int_{E_1} \dots \int_{E_n} \begin{vmatrix} p_t(a_1, x_1) & p_t(a_2, x_1) & \dots & p_t(a_{n-1}, x_1) & p_t(a_n, x_1) \\ p_t(a_1, x_2) & p_t(a_2, x_2) & \dots & p_t(a_{n-1}, x_2) & p_t(a_n, x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_t(a_1, x_{n-1}) & p_t(a_2, x_{n-1}) & \dots & p_t(a_{n-1}, x_{n-1}) & p_t(a_n, x_{n-1}) \\ p_t(a_1, x_n) & p_t(a_2, x_n) & \dots & p_t(a_{n-1}, x_n) & p_t(a_n, x_n) \end{vmatrix} dx_1 \dots dx_n \quad (3.4)$$

$$= \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n p_t(a_j, E_{\sigma(j)}) \quad (3.5)$$

$$= \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \mathcal{P}(A_{\sigma}) \quad (3.6)$$

Onde denotamos

$$p_t(a_j, E_{\sigma(j)}) = \int_{E_j} p_t(a_i, x_j) dx_j$$

σ é uma permutação de $1, \dots, n$ e A_{σ} é o evento que $X_j(t) \in E_{\sigma(j)}$ para todo j . Os caminhos devem ser independentes para (3.6).

De alguma forma o determinada permuta os caminhos em todas ordens possíveis e calcula a probabilidade de todos se manterem nos intervalos adequados. Um exemplo de baixas dimensões pode mostrar que

$$\begin{vmatrix} p_t(a_1, x_1) & p_t(a_2, x_1) & p_t(a_3, x_1) \\ p_t(a_1, x_2) & p_t(a_2, x_2) & p_t(a_3, x_2) \\ p_t(a_1, x_3) & p_t(a_2, x_3) & p_t(a_3, x_3) \end{vmatrix} = \quad (3.7)$$

$$+ p_t(a_1, x_1) p_t(a_2, x_2) p_t(a_3, x_3) \quad (3.8)$$

$$+ p_t(a_2, x_1) p_t(a_3, x_2) p_t(a_1, x_3) \quad (3.9)$$

$$+ p_t(a_3, x_1) p_t(a_1, x_2) p_t(a_2, x_3) \quad (3.10)$$

$$- p_t(a_3, x_1) p_t(a_2, x_2) p_t(a_1, x_3) \quad (3.11)$$

$$- p_t(a_2, x_1) p_t(a_1, x_2) p_t(a_3, x_3) \quad (3.12)$$

$$- p_t(a_1, x_1) p_t(a_3, x_2) p_t(a_2, x_3) \quad (3.13)$$

Logo

$$\int_{E_1} \cdots \int_{E_n} \det [p_t(a_i, x_j)]_{i,j=1}^n dx_1 \dots dx_n = + p_t(a_1, E_1) p_t(a_2, E_2) p_t(a_3, E_3) \quad (3.14)$$

$$+ p_t(a_2, E_1) p_t(a_3, E_2) p_t(a_1, E_3) \quad (3.15)$$

$$+ p_t(a_3, E_1) p_t(a_1, E_2) p_t(a_2, E_3) \quad (3.16)$$

$$- p_t(a_3, E_1) p_t(a_2, E_2) p_t(a_1, E_3) \quad (3.17)$$

$$- p_t(a_2, E_1) p_t(a_1, E_2) p_t(a_3, E_3) \quad (3.18)$$

$$- p_t(a_1, E_1) p_t(a_3, E_2) p_t(a_2, E_3) \quad (3.19)$$

Onde somamos os casos onde as partículas se matém ordenadas e subtraímos os casos onde elas se cruzam.

3.3.2 Consequências

Considere n cópias do processo de Markov condicionado para começar em $t = 0$ nas determinadas posições $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Se condicionarmos estes processos para não intersectar no intervalo $[0, t]$, o teorema vai nos dizer que os caminhos em um tempo t vão ter uma densidade de probabilidade conjunta

$$\frac{1}{\mathcal{Z}'_n} \det [p_t(a_i, x_j)]_{i,j=1}^n$$

Mas este não pode ser considerado um processo pontual determinado. Não é expreso por um produto de determinantes. Isso pode ser ajeitado se considerarmos um tempo $T > t$ no nosso processo. Tomaremos b_1, b_2, \dots, b_n posições finais e condicionaremos os caminhos a não intersectar no intervalo $[0, T]$ com $X_j(0) = a_j$ e $X_j(T) = b_j$ para todos. É possível mostrar que a distribuição conjunta deles será

$$\frac{1}{\mathcal{Z}'_n} \det [p_t(a_i, x_j)]_{i,j=1}^n \det [p_{T-t}(x_i, b_j)]_{i,j=1}^n$$

Que será biortogonal com as funções

$$f_j = p_t(a_j, x) ; g_j = p_{T-t}(x, b_j)$$

E nosso caso de interesse é quando $a_j \rightarrow a$ e $b_j \rightarrow b$. Note que usando as duas funções podemos forçar que o movimento browniano se inicie em um ponto e encerre em outro determinado. Em uma, reverteremos o tempo e, nos limites 0 e T , forçaremos que apenas uma das funções seja predominante de forma que a posição inicial de cada uma prevaleça. Podemos impor a posição inicial e final do movimento. No caso browniano teremos

$$p_t(a, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}}$$

No caso dos limites de $a_i \rightarrow a$ e $b_j \rightarrow b$ ficamos, por consequência que quando mais de um a_i ou b_j convergem ao mesmo ponto teremos $\mathcal{Z} \rightarrow 0$ pela sua dependência destes termos (eles não serão mais 'ortogonais', pontos distintos). Por exemplo, para o limite

$$\lim_{a_n \rightarrow a_{n-1}} \frac{\det [p_t(a_i, x_j)]_{i,j=1}^n \det [p_{T-t}(x_i, b_j)]_{i,j=1}^n}{\mathcal{Z}'_n}$$

Queremos aplicar L'Hôpital para resolver a indeterminação. Para o determinante podemos notar que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_n} \begin{vmatrix} p_t(a_1, x_1) & \dots & p_t(a_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_t(a_n, x_1) & \dots & p_t(a_n, x_n) \end{vmatrix} &= \frac{\partial}{\partial a_n} [p_t(a_n, x_1) |\dots| + \dots + p_t(a_n, x_n) |\dots|] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial a_n} p_t(a_n, x_1) |\dots| + \dots + \frac{\partial}{\partial a_n} p_t(a_n, x_n) |\dots| \right] \\
&= \begin{vmatrix} p_t(a_1, x_1) & \dots & p_t(a_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_n} p_t(a_n, x_1) & \dots & \frac{\partial}{\partial a_n} p_t(a_n, x_n) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

No limite que estamos tratando:

$$\begin{vmatrix} p_t(a_1, x_1) & \dots & p_t(a_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_{n-1}} p_t(a_{n-1}, x_1) & \dots & \frac{\partial}{\partial a_{n-1}} p_t(a_{n-1}, x_n) \end{vmatrix}$$

Para que todos $a_i \rightarrow a$ precisamos ainda fazer $a_{n-1} \rightarrow a_{n-2}$, $a_{n-2} \rightarrow a_{n-3}$ e assim por diante. Se fizermos assim, terminaremos com

$$\det \left[\frac{\partial^{i-1}}{\partial a^{i-1}} p_t(a_i, x_j) \right]_{i,j=1}^n$$

Onde

$$\frac{\partial^{i-1}}{\partial a^{i-1}} p_t(a_i, x_j) = \left[\left(\frac{x_j - a_i}{t} \right)^{i-1} + O \left(\frac{x_j - a_i}{t} \right)^{i-2} \right] p_t(a_i, x_j)$$

Que nos permite afirmar que o determinante é proporcional à

$$\det [x_j^{i-1}]_{i,j=1}^n \prod_{j=1}^n e^{-\frac{x_j^2 - 2ax_j}{2t}}$$

quando $a_i \rightarrow 0$. Analogamente para o outro determinante

$$\det [x_j^{i-1}]_{i,j=1}^n \prod_{j=1}^n e^{-\frac{x_j^2 - 2bx_j}{2(T-t)}}$$

Ou seja;

$$f_j = F_{j-1}(x) e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}} ; g_j = G_{j-1}(x) e^{-\frac{(x-b)^2}{2(T-t)}}$$

onde F e G são polinômios em x de grau $j-1$. Tomaremos agora o limite em que $a, b \rightarrow 0$. Reescrevemos a distribuição conjunta destes pontos

$$P(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \det [p_t(a_i, x_j)]_{i,j=1}^n \det [p_{T-t}(x_i, b_j)]_{i,j=1}^n \quad (3.20)$$

$$= \frac{1}{Z_n} \det [x_j^{i-1}]_{i,j=1}^n \prod_{j=1}^n e^{-\frac{x_j^2}{2t}} \det [x_j^{i-1}]_{i,j=1}^n \prod_{j=1}^n e^{-\frac{x_j^2}{2(T-t)}} \quad (3.21)$$

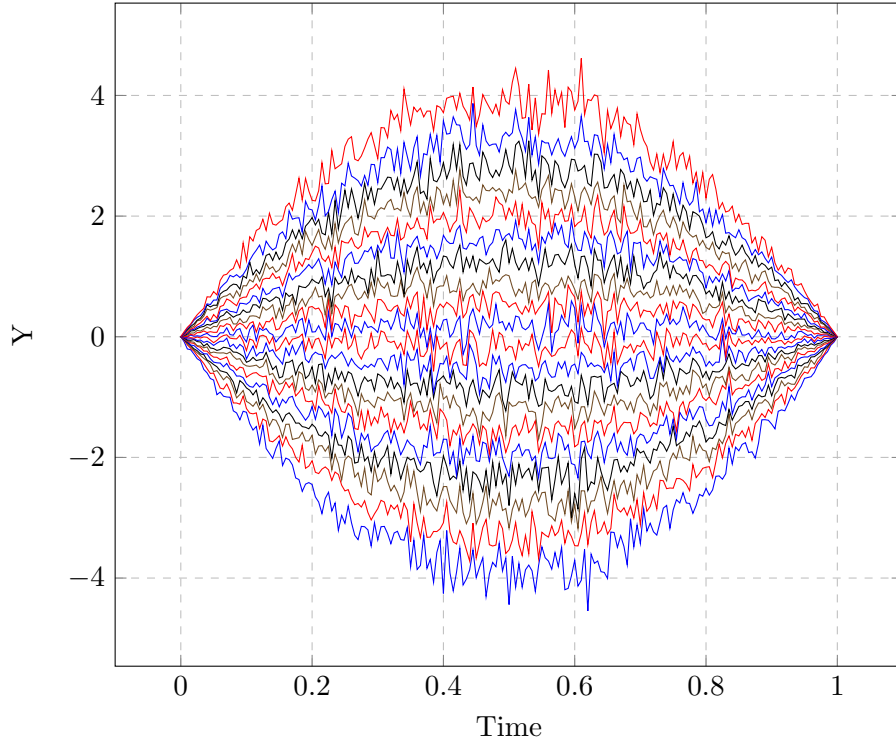
$$= \frac{1}{Z_n} \det [x_j^{i-1}]_{i,j=1}^n \det [x_j^{i-1}]_{i,j=1}^n \prod_{j=1}^n e^{-\frac{Tx_j^2}{2t(T-t)}} \quad (3.22)$$

Onde o último passo é dado pelo valor do determinante de Vandermonde discutido no apêndice C tal que

$$P(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\mathcal{Z}_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2 \prod_{j=1}^n e^{-\frac{Tx_j^2}{2t(T-t)}}$$

Relembrando a equação (2.16), podemos interpretar esta distribuição como uma distribuição de autovalores em um espaço de matrizes hermitianas do GUE com entradas de variância $\sigma^2 = \frac{2t(T-t)}{T}$ e média $\mu = 0$. De forma que poderemos simular a evolução destes movimentos brownianos com o sistema de matrizes descrito.

Dyson Bridge



```

1  import numpy as np
2
3  n_particles = 20
4  steps = 1000
5
6  def GUE(N, sigma = 1, mu = 0, escale = False):
7      beta = 2
8      A = np.random.randn(N,N) * sigma + 1j*np.random.randn(N,N)*sigma
9      A = (A + A.T.conj())/2
10     eig = np.linalg.eigvalsh(A)
11     if escale:
12         return (eig + mu)/(np.sqrt(N*beta))
13     return eig + mu
14
15 eig_GUE = np.zeros(n_particles)
16
17 final_time = 1

```

```

18 dt = final_time/steps
19 Memory = np.zeros((steps+1,n_particles))
20
21 for step in range(steps+1):
22     partial_time = step * dt
23     sigma = 2*partial_time*(final_time-partial_time)/final_time
24     mu = 0
25     eig_GUE = GUE(n_particles, sigma = sigma, mu = mu, escale = False)
26     eig_order = np.argsort(eig_GUE)
27     Memory[step,:] = eig_GUE[eig_order]
28
29 np.savetxt('Memory.txt', Memory)

```

Uma outra pergunta sem resposta para mim é: Como simular sistemas com dois pontos finais? Nesse caso pudemos retirar matrizes com entradas independentes porque a distribuição era relacionada à $e^{\alpha H^2}$, mas agora teremos algo do tipo $e^{\alpha H^2 + H_0}$. Como fazer isso? Podemos tomar duas abordagens temporárias.

1. Múltiplos movimentos independentes com finais distintos ordenando os autovalores para participar de cada um dos grupos.

```

1  import numpy as np
2
3  # -----input-----
4
5  n_particles = 50
6  nGroups = 2
7  steps = 1000
8
9  # -----functions-----
10
11 def ParticlesPerGroup(n_particles, nGroups):
12     if n_particles < nGroups:
13         raise ValueError('n_particles must be greater than nGroups')
14     particlesPerGroup = np.zeros(nGroups)
15     for i in range(n_particles):
16         particlesPerGroup[i%nGroups] += 1
17     return [int(i) for i in particlesPerGroup]
18
19 def GUE(N, sigma = 1, mu = 0, escale = False):
20     beta = 2
21     A = np.random.randn(N,N) * sigma + 1j*np.random.randn(N,N)*sigma
22     A = (A + A.T.conj())/2
23     eig = np.linalg.eigvalsh(A)
24     if escale:
25         return (eig + mu)/(np.sqrt(N*beta))
26     return eig + mu
27
28 # -----parameters-----
29
30 particlesPerGroup = ParticlesPerGroup(n_particles, nGroups)
31 med = np.median(range(nGroups))

```

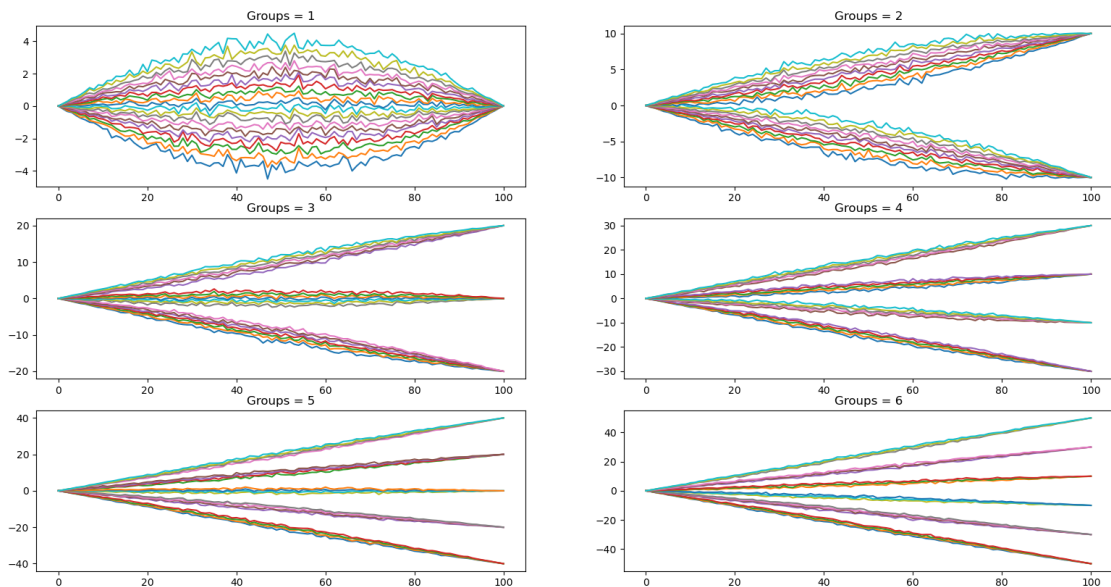


```

32 final_group_positions = [(i-med)*10 for i in range(nGroups)]
33
34 # -----main-----
35
36 eig_GUE = np.zeros(n_particles)
37
38 final_time = 1
39 dt = final_time/steps
40
41 Memory = np.zeros((steps+1,n_particles))
42 for step in range(steps+1):
43
44     partial_time = step * dt
45     eig_GUE = []
46
47     sigma = 2*partial_time*(final_time-partial_time)/final_time
48     for group in range(nGroups):
49         mu = final_group_positions[group]*partial_time/final_time
50         aux_eig_GUE = GUE(particlesPerGroup[group], sigma = sigma, mu = mu, escale = False)
51         eig_GUE = np.concatenate((eig_GUE, aux_eig_GUE))
52
53     eig_order = np.argsort(eig_GUE)
54     Memory[step,:] = eig_GUE[eig_order]
55
56 # -----write Memory in file-----
57
58 np.savetxt('Memory.txt', Memory)
59

```

Non intersecting brownian particles - method 1



2. Múltiplos movimentos selecionando simulações onde os autovalores não se intersectam.

```

1  import numpy as np
2
3  # -----input-----
4
5  n_particles = 20
6  nGroups = 5
7  steps = 100
8
9  # -----functions-----
10
11 def ParticlesPerGroup(n_particles, nGroups):
12     if n_particles < nGroups:
13         raise ValueError('n_particles must be greater than nGroups')
14     particlesPerGroup = np.zeros(nGroups)
15     for i in range(n_particles):
16         particlesPerGroup[i%nGroups] += 1
17     return [int(i) for i in particlesPerGroup]
18
19 def GUE(N, sigma = 1, mu = 0, escale = False):
20     beta = 2
21     A = np.random.randn(N,N) * sigma + 1j*np.random.randn(N,N)*sigma
22     A = (A + A.T.conj())/2
23     eig = np.linalg.eigvalsh(A)
24     if escale:
25         return (eig + mu)/(np.sqrt(N*beta))
26     return eig + mu
27
28 # -----parameters-----
29
30 particlesPerGroup = ParticlesPerGroup(n_particles, nGroups)
31 med = np.median(range(nGroups))
32 final_group_positions = [(i-med)*20 for i in range(nGroups)]
33
34 # -----main-----
35
36 eig_GUE = np.zeros(n_particles)
37
38 final_time = 1
39 dt = final_time/steps
40
41 Memory = np.zeros((steps+1,n_particles))
42 for step in range(steps+1):
43
44     partial_time = step * dt
45     eig_GUE = []
46
47     sigma = 2*partial_time*(final_time-partial_time)/final_time
48     for group in range(nGroups):
49         mu = final_group_positions[group]*partial_time/final_time
50         aux_eig_GUE = GUE(particlesPerGroup[group], sigma = sigma, mu = mu, escale = False)
51         aux_ordered_eig_GUE = np.sort(aux_eig_GUE)
52

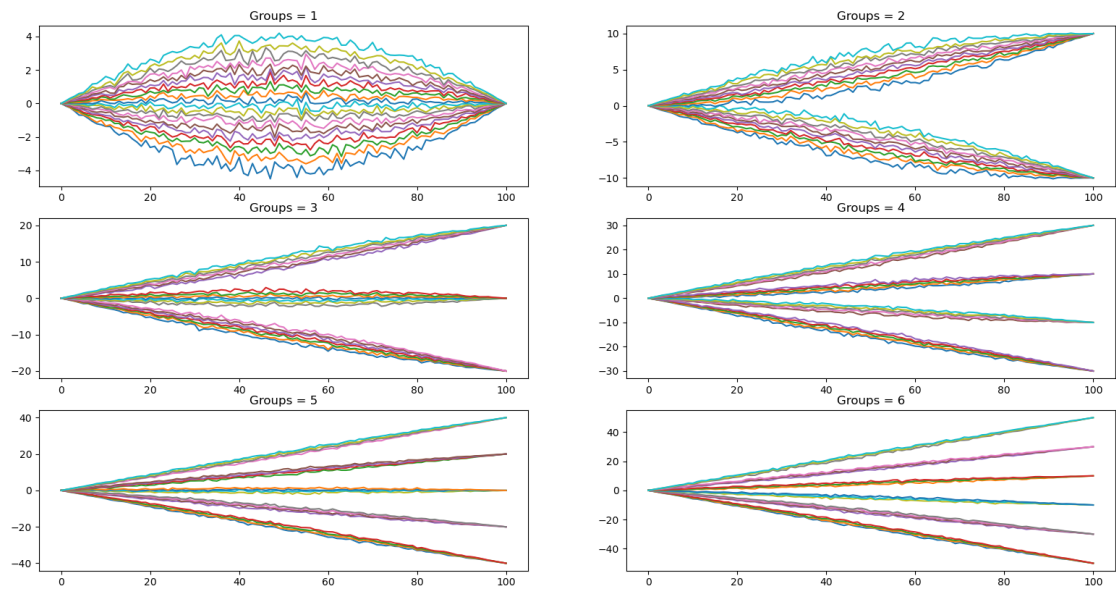
```

```

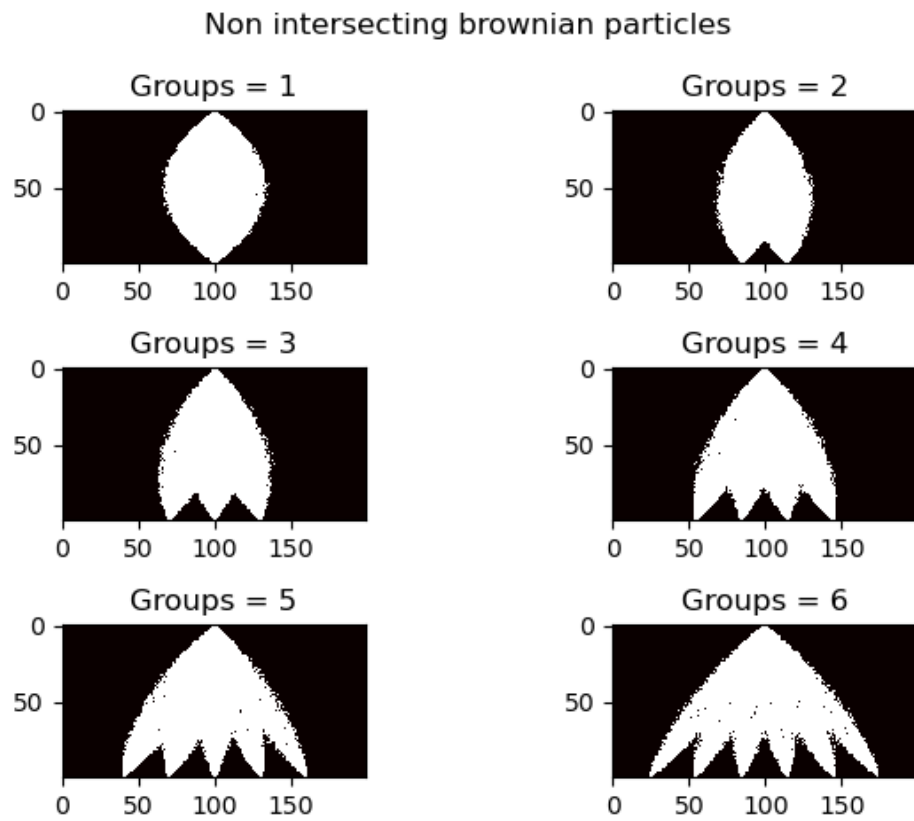
53     if group == 0:
54         eig_GUE = aux_ordered_eig_GUE
55     else:
56         while aux_ordered_eig_GUE[0] < eig_GUE[-1]:
57             aux_eig_GUE = GUE(particlesPerGroup[group], sigma = sigma, mu = mu, escale = False)
58             aux_ordered_eig_GUE = np.sort(aux_eig_GUE)
59
60         eig_GUE = np.concatenate((eig_GUE, aux_ordered_eig_GUE))
61
62
63     print(step)
64
65     Memory[step,:] = eig_GUE
66
67     # -----write Memory in file-----
68
69     np.savetxt('Memory.txt', Memory)
70

```

Non intersecting brownian particles - method 2



Por fim, podemos mostrar o formato geral destes modelos que tratamos acima.



Capítulo 4

Coulombolas! Gases Aleatórios

Retomamos agora os resultados sobre a distribuição dos autovalores para matrizes hermitianas para introduzir o tópico principal deste resumo: Os Gases de Coulomb.

Um dos primeiros resultados foi que para o ensemble do GUE, teríamos que

$$p(M) = \frac{1}{\tilde{Z}_N} e^{-\text{Tr } \tilde{V}(M)} dM$$

Mas estamos mais interessados na distribuição relativa aos autovalores, que podemos expressar escrevendo o jacobiano da transformação,

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{\tilde{Z}_N} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^\beta \prod_{i=1}^N e^{-V(\lambda_i)} d\lambda$$

Onde

$$\tilde{Z}_N = \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^\beta \prod_{i=1}^N e^{-V(\lambda_i)} d\lambda$$

Lembrando que devemos ter medida uniforme nos autovetores. Por isso podemos expressar apenas nos autovalores. Assim como na física, para resolver nosso Gás de Coulomb, vamos precisar minimizar a energia livre do nosso ensemble. Lembre-se que se trata do ensemble canônico e que devemos ter a energia livre de Helmholtz

$$F = -\frac{1}{k_b} \ln(\tilde{Z}_N)$$

Teremos que os estados mais prováveis serão aqueles em que for maximizada a expressão

$$\begin{aligned} & \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{i=1}^N e^{V(\lambda_i)} \\ &= \exp \left[-N^2 \left(\frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \log \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|} + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N V(\lambda_i) \right) \right] \\ &= \exp(-N^2 \tilde{\mathcal{H}}_N(\lambda)) \end{aligned}$$

Que, como soma assintótica, importaremos apenas com o maior termo da soma de logs. E novamente como na física, vamos então precisar minimizar o Hamiltoniano do sistema $\tilde{\mathcal{H}}_N(\lambda)$!

4.1 Hamiltonianozinho

Vamos introduzir uma função contagem para facilitar o tratamento do conjunto de pontos em \mathbb{R} . Definiremos

$$v_\lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i} \quad (4.1)$$

Notamos a propriedade de nossa função

$$\int f(x) dv_\lambda(x) = \frac{1}{N} \sum f(x) \quad (4.2)$$

Com isso, se quisermos escrever $\mathcal{H}_N(v_\lambda)$, precisamos notar que

$$\int V(x) dv_\lambda(x) = \frac{1}{N} \sum V(x)$$

e

$$\int \int_{x \neq y} \log \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|} dv_\lambda(x) dv_\lambda(y) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \log \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|}$$

Unindo esses resultados,

$$\mathcal{H}_N(v_\lambda) = \int \int_{x \neq y} \log \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|} dv_\lambda(x) dv_\lambda(y) + \frac{1}{N} \int \tilde{V}(x) dv_\lambda(x) \quad (4.3)$$

O que acontece quando tratamos do limite termodinâmico? Ou seja, quando $N \rightarrow \infty$. Estaremos transicionando da nossa função v_λ para uma densidade $\phi(x)dx$, ou seja,

$$\int f(x) dv_\lambda(x) = \int f(x) \phi(x) dx$$

Note que, para justificar isso, escrevemos

$$\int f(x) dv_\lambda(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i)$$

Mas é claro, nossos lambdas são desigualmente espaçados, definimos uma função (ϕ) que mapeie pontos igualmente distribuídos nos nossos autovalores de forma que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\lambda_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\Phi(x_i))$$

Assim podemos retomar e escrever

$$\int f(\Phi(s)) ds = \int f(x) \frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}(x))} = \int f(x) (\Phi^{-1})'(x) dx = \int f(x) \phi(x) dx = \int f(x) d\psi(x)$$

Onde $\Phi(s) = x$, $ds = \frac{dx}{\Phi'(s)}$ e $\psi = \Phi^{-1}$. Em suma, podemos afirmar que nossa função converge para a densidade de forma

$$\int f(x) dv_\lambda(x) = \int f(x) \phi(x) dx$$

Finalmente podemos pensar em minimizar nossa energia livre, ou equivalentemente minimizar o hamiltoniano. Note que pela equação 4.3, nosso potencial externo é limitado

e deve ir à zero com o limite aplicado. Teremos uma situação sem equilíbrio!! Precisamos garantir um potencial $V(x) = N\tilde{V}(x)$. Nossa nova distribuição será

$$\frac{1}{\tilde{Z}_N} e^{-N \text{Tr}(V(M))} dM$$

e equivalentemente,

$$\frac{1}{Z_N} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{i=1}^N e^{-NV(\lambda_i)} d\lambda = \frac{1}{Z_N} e^{-N^2 \mathcal{H}_N(\lambda)}$$

E finalmente poderemos expressar de forma correta

$$\mathcal{H}_N(v_\lambda) \rightarrow \int \int_{x \neq y} \log \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|} d\phi(x) d\phi(y) dx dy + \int V(x) d\phi(x) dx \equiv E^V(\phi) \quad (4.4)$$

E $\phi(x)$ será aquela que minimize $E^V(\phi)$ que limita a energia livre discutida.

4.2 Esquentem as Máquinas

Bibliografia

- [1] Yan V. Fyodorov. Introduction to the random matrix theory: Gaussian unitary ensemble and beyond, 2010.
- [2] Arno Kuijlaars. Lecture notes on riemann-hilbert problems and multiple orthogonal polynomials.
- [3] Giacomo Livan, Marcel Novaes, and Pierpaolo Vivo. *Introduction to Random Matrices*. Springer International Publishing, 2018.
- [4] M.L. MEHTA. Preface. In M.L. MEHTA, editor, *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*. Academic Press, 1967.

Apêndice A

Transformação Legendre

Transformações de Legendre tem ampla aplicação e interpretação. Faremos uma breve dissertação de duas possíveis visualizações do processo.

A.1 Tangentes

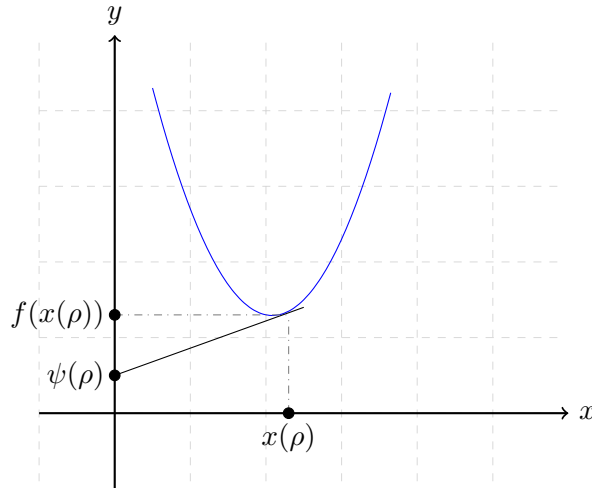
Uma primeira interpretação do processo representa uma mudança clara de variável a partir de tangentes de uma função de concavidade bem definida. Faremos

$$y = f(x) \mapsto \psi(\rho) = f(x(\rho)) - \rho x(\rho)$$

onde

$$\rho \equiv \frac{y - f(x(\rho))}{x - x(\rho)} = \frac{\psi(\rho) - f(x(\rho))}{0 - x(\rho)}$$

Que podemos visualizar



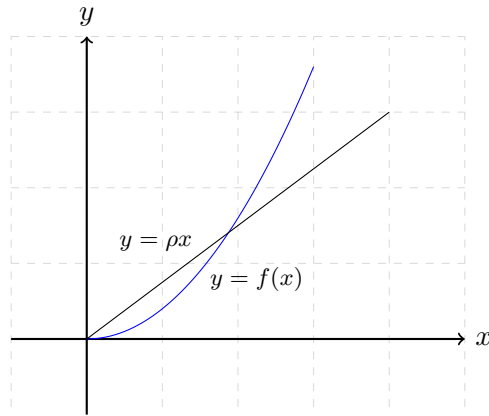
De forma que a transformada é criada pela projeção desta tangente no eixo $x=0$.

A.2 Otimização

Outra forma de visualizar a transformada é por um problema mais conveniente de otimização. Definiremos

$$\psi(\rho) = \max_x [\rho x - f(x)]$$

Onde teremos



Se definirmos

$$g(x) = \rho x - f(x)$$

Minimizaremos $g(x)$ e teremos a condição $f'(x^*) = \rho$. Ou seja

$$f'(x(\rho)) = \rho \implies \max_x [\rho x - f(x)] = \rho x(\rho) - f(x(\rho))$$

Que é equivalente à dizer

$$\psi(\rho) = \min_x [f(x) - \rho x] = f(x(\rho)) - \rho x(\rho)$$

Apêndice B

Soma Assintóticas

Existe uma aproximação a se fazer no logaritmo de somas assintóticas que pode ser de interesse. Assuma

$$S = \sum_{i=1}^M a_i$$

Se $a_i(N) \sim e^{\phi_i N}$ ou $\log(a_i) \approx \phi_i N$, podemos afirmar

$$\log(S) \sim \log(a_{max})$$

Para demonstrar isso, notamos

$$\begin{aligned} a_{max} < S < M a_{max} \\ \frac{\log(a_{max})}{N} < \frac{\log S}{N} < \frac{\log(a_{max})}{N} + \frac{\log M}{N} \end{aligned}$$

Ou seja, desde que $\frac{\log M}{N} \rightarrow 0$. Isto ocorrerá desde que M seja sub-exponencial. Contudo **NOTE** que dizer

$$\log(n!) \sim n \log n - n$$

Não implica que

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Em algumas situações é possível afirmar contudo

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Apêndice C

Det Vandermonde

A formulação nos diz

$$|V| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i) \quad (C.1)$$

Note que podemos iniciar com uma matriz $n \cdot n$. Seja c_i a coluna i , multiplicamos a coluna c_i por $-\alpha_1$ e somamos com a coluna c_{i+1}

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ 1 & \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_1) & \dots & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n - \alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{bmatrix}$$

Utilizando do Teorema de Laplace, o determinante vai ser definido simplesmente por

$$|V| = \begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_1) & \dots & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n - \alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

De onde é claro, podemos fatorar os coeficientes e ter

$$|V| = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \dots (\alpha_n - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-2} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-2} \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \dots & \alpha_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

E assim por diante.