

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

João Victor Alcantara Pimenta

Matrizes Aleatórias e Simulação de Gases de Coulomb

São Carlos

2024

João Victor Alcantara Pimenta

Matrizes Aleatórias e Simulação de Gases de Coulomb

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Bacharel em Física Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Silva

Versão original

São Carlos

2024

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica revisada pelo Serviço de Biblioteca e Informação Prof. Bernhard Gross, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

João Victor Alcantara Pimenta
Matrizes Aleatórias e Simulação de Gases de Coulomb /
João Victor Alcantara Pimenta ; orientador Guilherme Silva.
– São Carlos, 2024.
20 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física Computacional) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2024.

1. Introdução. 2. Matrizes Aleatórias. 3. Simulações e Algoritmos. 4. Implementação e Resultados 5. Conclusão. I. SILVA, GUILHERME L. F., orientador. II. Matrizes Aleatórias e Simulação de Gases de Coulomb.

RESUMO

PIMENTA, J. V. A. **Matrizes Aleatórias e Simulação de Gases de Coulomb**. 2024. 20p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

O estudo do espectro de matrizes aleatórias demonstra aplicabilidade em uma gama diversa de áreas da física, matemática, computação e engenharia. Estamos interessados em estudar os principais ensembles da Teoria de Matrizes Aleatórias, entender a analogia com Gases de Coulomb e suas medidas de equilíbrio no limite termodinâmico. Com essa ferramenta, realiza-se simulações que nos permitem calcular médias de funções de interesse. Discutimos ainda quais métodos são importantes para a simulação do problema de Gases de Coulomb considerado e quais suas limitações além das naturalmente impostas pela escalabilidade e singularidade do problema. Mostramos que o método de *Langevin Monte Carlo* tem boa performance, possibilitando a réplica de medidas para modelos em uma dimensão bem descritos e, ainda, em extensões de potencial e dimensão recentemente exploradas na literatura.

Palavras-chave: Gases de Coulomb. Matrizes Aleatórias.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	5
2	MATRIZES ALEATÓRIAS	6
2.1	Distribuição de autovalores	6
2.2	Ensembles Gaussianos	7
2.3	Gases de Coulomb	8
2.4	Medidas de Equilíbrio	9
2.5	Potenciais notáveis	10
3	SIMULAÇÕES E ALGORITMOS	11
3.1	Dinâmica de Langevin Monte Carlo	11
3.2	Integração Numérica	12
3.3	Passo de Metropolis	13
4	IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS	14
4.1	A implementação	14
4.2	Resultados e Discussão	16
5	CONCLUSÃO	19
	REFERÊNCIAS	20

1 INTRODUÇÃO

De acordo com a mecânica quântica, níveis de energia de uma sistema são descritos pelos autovalores de seu operador hermitiano associado, o hamiltoniano \mathcal{H} . Por simplicidade, usualmente toma-se truncamentos do espaço de Hilbert no qual opera \mathcal{H} , o tornando finito e, em geral, a influência das outras dimensões são desconsideradas ou aproximadas sobre o espaço restante. Com o Hamiltoniano finito, caracterizar o sistema físico é o equivalente à resolver o problema de autoenergias $\mathcal{H} \Psi_i = E_i \Psi_i$. Esta abordagem obteve muito sucesso na descrição de estados excitados de baixa energia para núcleos atômicos pesados, por exemplo. Contudo, é irrazoável descrever, ou ainda resolver, Hamiltonianos para a descrição de níveis de excitações mais altos.

Pela dificuldade apresentada, Wigner, em seu estudo de núcleos atômicos, sugere uma abordagem alternativa, uma mecânica estatística para o problema de autovalores. Tal teoria descreveria, estocasticamente, o perfil da estrutura energética nucleica ao invés de detalhar seus níveis. Buscava-se, em algum sentido, uma universalidade, uma descrição que fosse, dada complexidade o suficiente, independente dos detalhes em \mathcal{H} . A teoria foi prontamente seguida por, dentre outros, Gaudin, Mehta (1), e Dyson (2), que avançaram em sua descrição. Esse desenvolvimento é o início da chamada Teoria de Matrizes Aleatórias (RMT, *Random Matrix Theory*) e hoje desempenha importante papel na descrição estatística de sistemas com alta complexidade representados por matrizes com simetrias induzidas pelo sistema.

Para ensembles invariantes (de matrizes equivalentes por rotação), uma importante analogia se apresenta, a de Gases de Coulomb. Pensando os N autovalores como partículas de um gás com interagente sob potencial externo, podemos usar de noções físicas para derivar, por exemplo, as densidades de autovalores no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$). A analogia permite, por variação do potencial externo, dimensões do sistema e núcleo de interação, explorar ensembles com entradas correlacionadas, de difícil construção direta. Contudo, nem sempre soluções analíticas são possível para as equações diferenciais estocásticas que descrevem a dinâmica destes gases. Por isso, recorre-se à simulações numéricas que, ainda assim, são delicadas de tratar. A dinâmica tem alta complexidade temporal e as singularidades dificultam a invariância do hamiltoniano. Ainda assim, existem abordagens que permitem tornar a simulação da dinâmica suficientemente acurada. Simulações como esta permitem, de forma direta, uma exploração numérica holística de casos analiticamente complicados e visualização de fenômenos, medidas e funções outrossim inacessíveis.

2 MATRIZES ALEATÓRIAS

2.1 Distribuição de autovalores

Seja \mathbb{S} um conjunto tal como $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (Reais, Complexos e Quaterniônicos). Consideremos inicialmente uma matriz $\hat{M} \in \mathcal{M}_{\mathbb{S}}(N)$ espaço de matrizes $N \times N$, de entradas reais, complexas ou quaterniônicas. Se tomamos o elemento de matriz $M_{i,j} \forall i, j \in \mathbb{Z}$, com $1 \leq i, j \leq N$, como variável aleatória de distribuição arbitrária, podemos expressar a densidade de probabilidade conjunta de \hat{M} (jpdf, *joint probability density function*) como

$$p(\hat{M})dM = p(M_{1,1}, \dots, M_{N,N}) \prod_{i,j=1}^N dM_{i,j}.$$

Considere a decomposição $\hat{M} = \hat{O}\hat{D}\hat{O}^{-1}$, com $\hat{O} \in V_N(\mathbb{S}^N)$ variedade de Stiefel e $\hat{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$. Esta decomposição vale quase certamente mas, especialmente, vale quando tomado \hat{M} matriz simétrica, hermitiana ou autodual, que implica autovalores $\lambda \in \mathbb{R}$ sem degeneração. Isto pode ser motivado fisicamente sabendo que, para sistemas quânticos invariantes reversíveis, o Hamiltoniano é matriz real simétrica; na presença de campo magnético, o Hamiltoniano é matriz complexa hermitiana; na presença de acoplamento spin-órbita, o Hamiltoniano é simplético (3, Capítulo 2). Consideremos os ensembles com esta simetria. Se a transformação tem Jacobiano $J(\hat{M} \rightarrow \{\vec{\lambda}, \hat{O}\})$, reescreve-se a jpdf em função dos autovalores e \hat{O} tal que:

$$p(\hat{M})dM = p(M_{1,1}(\vec{\lambda}, \hat{O}), \dots, M_{N,N}(\vec{\lambda}, \hat{O}) | J(\hat{M} \rightarrow \{\vec{\lambda}, \hat{O}\})) dO \prod_{i=1}^N \lambda_i. \quad (2.1.1)$$

Aqui, ressalta-se que estamos interessados em distribuições de autovalores. Para calcular $p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ devemos integrar os termos à direita da equação 2.1.1 sobre o subespaço $V_N(\mathbb{S}^N)$, o que nem sempre é fácil ou possível. Para garantir integrabilidade, tomaremos *ensembles* de matrizes aleatórias onde o jpdf de suas entradas pode ser escrito exclusivamente como função dos autovalores, ou seja

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \hat{O}) \equiv p(M_{1,1}(\vec{\lambda}), \dots, M_{N,N}(\vec{\lambda}) | J(\hat{M} \rightarrow \{\vec{\lambda}\})).$$

Ensembles com esta propriedade são denominados invariantes (por rotação). Considere que \hat{U} é ortogonal, unitária ou simplética respectivamente quando $\mathbb{S} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. A escolha de ensemble implica que quaisquer duas matrizes \hat{M}, \hat{M}' que satisfaçam a relação de equivalência $\hat{M} = \hat{U}\hat{M}'\hat{U}^{-1}$ - de mesmos autovalores - tem mesma probabilidade. Considere o teorema (4, Capítulo 3).

Teorema 2.1.1 Tome $\hat{M} \in M_{\mathbb{R}}(N), M_{\mathbb{C}}(N), M_{\mathbb{H}}(N)$ simétrica, hermitiana ou autodual, respectivamente. Se \hat{M} tem jpdf da forma $\phi(\hat{M})$, invariante sobre transformações de

similaridade ortogonal, a jpdf dos N autovalores ordenados de \hat{M} , $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$, é

$$C_{N,\beta}^{(ord)} \phi(\hat{D}) \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^\beta$$

com $C_{N,\beta}^{(ord)}$ constante e $\beta = 1, 2, 4$ correspondente à $\hat{M} \in M_{\mathbb{R}}(N), M_{\mathbb{C}}(N), M_{\mathbb{H}}(N)$, respectivamente.

Logo, desde que tomemos um ensemble invariante, podemos reescrever a distribuição em função dos autovalores pelo Teorema 2.1.1. Vale ainda observar que, pelo Lema de Weyl, uma jpdf invariante pode ser expressa totalmente por $p(\hat{M}) = \phi(\text{Tr}(F(M)))$ com F função polinomial. Ou seja, se unirmos os resultados anteriores, podemos escrever, para ensembles que satisfaçam as condições que

$$p_{ord}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = C_{N,\beta}^{(ord)} \phi\left(\sum_i^N F(\lambda_i)\right) \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^\beta. \quad (2.1.2)$$

2.2 Ensembles Gaussianos

Dentre os muitos ensembles em RMT, os Gaussianos são notórios. São eles o *Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE)* ($\beta = 1$), *Gaussian Unitary Ensemble (GUE)* ($\beta = 2$) e *Gaussian Symplectic Ensemble (GSE)* ($\beta = 4$). Notemos primeiramente que o nome é relacionado à escolha de \mathbb{S} . Mais explicitamente, o nome é dado em relação à se \hat{O} , tal que $\hat{M} = \hat{O}\hat{D}\hat{O}^*$, é ortogonal, unitário ou simplético. É natural então pensar nos ensembles *GOE*, *GUE* e *GSE* como matrizes $\hat{M} \in \mathcal{M}_{\mathbb{S}}(N)$ onde

$$\mathcal{M}_{\mathbb{S}}(N) \ni M_{i,j} \sim \begin{cases} \mathcal{N}_{\mathbb{S}}(0, 1/2) & \text{para } i \neq j, \\ \mathcal{N}_{\mathbb{S}}(0, 1) & \text{para } i = j. \end{cases}$$

Os três ensembles gaussianos compartilham de uma propriedade exclusiva - são os únicos ensembles com entradas independentes e, simultaneamente, jpdf rotacionalmente invariante. Tomemos, por simplicidade, $\hat{G} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(N)$, matriz real simétrica, do GOE. Para esta, sabendo as entradas independentes, podemos escrever

$$p(\hat{G}) = \prod_{i=1}^N \frac{\exp\left\{-\frac{G_{i,i}^2}{2}\right\}}{\sqrt{2\pi}} \prod_{i < j} \frac{\exp\{G_{i,i}^2\}}{\sqrt{\pi}} = 2^{-N/2} \pi^{-N(N+1)/4} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{Tr}\{G^2\}\right\}.$$

Note que essa jpdf satisfaz as condições do Teorema 2.1.1 e, especialmente, é da forma que exige o Lema de Weyl, logo, pela Equação 2.1.2,

$$p_{ord}^G(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{Z_{N,\beta=1}^{(ord)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2\right\} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j).$$

De forma análoga, podemos deduzir mais geralmente para $\beta = 1, 2, 4$ que

$$\begin{aligned} p(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) &= \frac{1}{N! Z_{N,\beta}^{(ord)}} \exp \left\{ - \left(\sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{2} - \sum_{i < j} \log |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \right) \right\}, \\ &= \frac{1}{Z_{N,\beta}} e^{-\beta_N \mathcal{H}_N(\vec{\lambda})}, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

onde $Z_{N,\beta}$ é função de partição canônica para autovalores desordenados*, normalizante da expressão 2.2.1. O fator $\beta_N = \beta N^2$ é pensado como a temperatura inversa. Definimos ainda o Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_N(\vec{\lambda}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{2} + \frac{1}{N^2} \sum_{i < j} \log \frac{1}{|\lambda_i - \lambda_j|}, \quad \lambda_i \mapsto \lambda_i \sqrt{\beta_N}.$$

Onde é aplicado a devida escala na magnitude dos autovalores.

2.3 Gases de Coulomb

Sob as devidas condições, o gás de coulomb p_N (5) é medida de probabilidade de Boltzmann-Gibbs dada em $(\mathbb{R}^d)^N$. A medida p_N modela um gás interagente de partículas indistinguíveis sob potencial externo nas posições $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{S}$ de dimensão d em \mathbb{R}^n *ambient space*. A medida é dada por

$$dp_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{e^{-\beta_N \mathcal{H}_N(x_1, x_2, \dots, x_N)}}{Z_{N,\beta}} dx_1 dx_2 \dots dx_N, \quad (2.3.1)$$

onde

$$\mathcal{H}_N(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(x_i) + \frac{1}{2N^2} \sum_{i \neq j} g(x_i - x_j)$$

é usualmente chamado hamiltoniano† ou energia do sistema. $V: \mathbb{S} \mapsto \mathbb{R}$ é potencial externo e $g: \mathbb{S} \mapsto (-\infty, \infty]$ núcleo de interação coulombiana solução da equação de Poisson dada por $-\nabla g(\vec{x}) = c_n \delta_0$. Além disso, βN^2 é chamado temperatura inversa. Assumiremos, para que valha a definição 2.3.1, que V é tal que a constante de normalização (função partição) $Z_{N,\beta} < \infty \forall N$ e o suporte da medida é compacto.

Se lembramos da expressão 2.2.1, perceberemos que, para o devido $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podemos tomar $d = 1$ e $n = 2$ para recuperar a medida dos ensembles gaussianos

$$p_N(\vec{x}) = \frac{e^{-\beta_N \mathcal{H}_N(\vec{x})}}{Z_{N,\beta}}, \quad \mathcal{H}_N(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(x_i) + \frac{1}{N^2} \sum_{i < j} \log \frac{1}{|x_i - x_j|}. \quad (2.3.2)$$

Estamos tratando de partículas no plano confinadas à uma reta neste caso. Esta medida aceita uma extensão natural para um potencial admissível arbitrário. Isso, junto à devida escolha de n e d adequados, leva à medida de outros ensembles de matrizes.

* Usa-se do fator de contagem de Boltzmann para escrever $Z_{N,\beta} = N! Z_{N,\beta}^{(ord)}$.

† Note que p_N é um modelo de interações estáticas e não há campos magnéticos considerados.

2.4 Medidas de Equilíbrio

O conjunto de pontos no espaço de fase ou ainda, os microestados, determinam um *ensemble estatístico*. De mesma forma, um conjunto de matrizes determina um ensemble em RMT. Podemos relacionar o conjunto de microestados dos autovalores $\{\vec{\lambda}\}$ com as configurações do sistema de N partículas descrito na Seção 2.3. Notando que tratamos do ensemble canônico, um argumento termodinâmico nos indica então que devemos minimizar a energia livre $E_{N,\beta}^V \propto \log Z_{N,\beta}$.

Consideraremos V sob condições tais que seja denominado um potencial admissível (5). Com isso, se $\mu_V(\vec{\lambda})$ é medida de probabilidade no espaço das possíveis configurações de autovalores, $Z_{N,\beta}$ será finita e existirá $\mu_V^* = \arg \inf \mathcal{H}_N(\vec{\lambda})$ medida de equilíbrio única no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$. Para determinar a medida de equilíbrio de 2.3.2 (3), queremos satisfazer o sistema de equações

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_i} = 0 \implies V'(\lambda_i) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \neq i}^N \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \text{ para } i = 1, \dots, N. \quad (2.4.1)$$

Usaremos o denominado *resolvent*. Considere a função complexa

$$G_N(z) = \frac{1}{N} \text{Tr} \left\{ (z\mathbb{1} - \hat{M})^{-1} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{z - \lambda_i},$$

onde \hat{M} é matriz aleatória com autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$. Note que $G_N(z)$ é uma função complexa aleatória com polos em λ_i . Não trivialmente, podemos reescrever 2.4.1 como

$$V'(z)G_N(z) - \Pi_N(z) = \frac{G_N^2(z)}{2} + \frac{G_N'(z)}{2N},$$

onde

$$\Pi_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{V'(z) - V'(\lambda_i)}{z - \lambda_i}$$

é um polinômio de grau $\deg V'(z) - 1 = k - 1$. Resolver explicitamente para N constante pode não ser simples ou mesmo possível. Em geral, tomaremos a assintótica $N \rightarrow \infty$ de $G_N(z)$, nesse limite temos a transformada de Stieltjes[‡]

$$S^{\mu_V}(z) = \int \frac{\mu_V^*(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda = V'(z) \pm \sqrt{V'(z)^2 - 2\Pi_\infty(z)}. \quad (2.4.2)$$

com

$$\Pi_\infty(z) = \int \frac{V'(z) - V'(\lambda)}{z - \lambda} \mu_V^*(\lambda) d\lambda.$$

Como consequência da fórmula de Sokhotski-Plemeji, é enunciado o resultado

$$\mu_V^*(x) = \frac{1}{2\pi i} (S_+^{\mu_V} - S_-^{\mu_V}) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Im } S_+^{\mu_V}(x + i\epsilon). \quad (2.4.3)$$

Em geral, restaria para cada potencial, balancear o sistema de $k + 2$ equações dada por

$$(S^{\mu_V} - V')^2 = (V')^2 - 2\Pi_\infty.$$

[‡] Também chamada transformada de Cauchy.

2.5 Potenciais notáveis

O desenvolvimento feito na seção 2.4 é suficiente para resolver os seguintes casos exemplificados, salvo detalhes. Retome a medida 2.3.2 e considere primeiramente o potencial

$$V(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Neste caso, teremos que

$$\text{supp } \mu_V^*(x) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad \mu_V^*(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2 - x^2}. \quad (2.5.1)$$

Esse resultado é bem conhecido e a medida encontrada é denominada Semi-Círculo de Wigner. Especialmente é medida de equilíbrio para os ensembles gaussianos e vale para qualquer β . A diferença é notada somente para N suficientemente pequeno.

Agora, considere o potencial

$$V(x) = \frac{x^4}{4} + t \frac{x^2}{2}.$$

Aqui observaremos, a depender de t , pela primeira vez, a separação do suporte de μ_V^* . Teremos um ponto crítico em $t = -2$, onde, com $t < -2$, este se separa do intervalo $[-b_t, b_t]$ para $[-b_t, -a_t] \cup [a_t, b_t]$. Considere a medida nos dois casos

- $t \geq -2$

$$\text{supp } \mu_V^*(x) = [-b_t, b_t], \quad \mu_V^*(x) = \frac{1}{2\pi} (x^2 + c_t^2) \sqrt{b_t^2 - x^2}, \quad (2.5.2)$$

$$\text{com } c_t^2 := \frac{1}{2}b_t^2 + t := \frac{1}{3}(2t + \sqrt{t^2 + 12}).$$

- $t < -2$

$$\text{supp } \mu_V^*(x) = [-b_t, -a_t] \cup [a_t, b_t], \quad \mu_V^*(x) = \frac{1}{2\pi} |x| \sqrt{(x^2 - a_t^2)(b_t^2 - x^2)}, \quad (2.5.3)$$

$$\text{com } a_t := \sqrt{-2 - t}, b_t := \sqrt{2 - t}.$$

Por último, tome

$$V(x) = tx^{2m}.$$

Com o mesmo processo, apesar de mais geral, determinamos sua medida

$$\text{supp } \mu_V^*(x) = [-a, a], \quad \mu_V^*(x) = \frac{mt}{\pi} \sqrt{a^2 - x^2} h_1(x), \quad (2.5.4)$$

com

$$a := \left(mt \prod_{l=1}^m \frac{2l-1}{2l} \right) \quad \text{e} \quad h_1(x) = x^{2m-2} + \sum_{j=1}^{m-1} x^{2m-2-2j} a^{2j} \prod_{l=1}^j \frac{2l-1}{2l}.$$

Essas medidas de equilíbrio nos servirão no Capítulo 4 quando quisermos conferir o bom comportamento das simulações implementadas.

3 SIMULAÇÕES E ALGORITMOS

A medida μ de Boltzmann-Gibbs descreve o denominado ensemble canônico. Médias sobre suas configurações, microestados, são usadas para inferir informações macroscópicas do sistema. Sistemas dinâmicos que amostram da medida μ são denominados termostatos e são notoriamente difíceis de se construir ergoticamente com processos dinâmicos determinísticos, portanto, uma teoria de equações diferenciais estocásticas foi desenvolvida. Usualmente, para o ensemble canônico, uma escolha natural de processo é a denominada *Langevin Dynamics* (6, Capítulo 6), especialmente sua versão cinética. Muitas vezes as equações usadas não são diretamente integráveis e, por isso, se recorre a métodos numéricos. O caso cinético pode ser separado em duas dinâmicas. Para a integração da primeira, chamada Hamiltoniana, utilizamos o esquema de Verlet. Para a segunda parte, denominada flutuação-dissipação, resolve-se analiticamente por se tratar de processo de Ornstein-Uhlenbeck de variância explícita. Apesar das qualidades dos métodos citados, a discretização pode introduzir instabilidade numérica e, para amenizar seus efeitos, introduz-se um passo de Metropolis (6, Apêndice C). As escolhas supracitadas são descritas em (7) e é denominada *Langevin Monte Carlo*.

3.1 Dinâmica de Langevin Monte Carlo

Nosso objetivo com a simulação é determinar a esperança de uma função de interesse $f(\vec{q})$

$$\langle f \rangle \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\vec{q}_i),$$

onde \vec{q}_i são obtidos por meio da simulação com dada distribuição de Gibbs-Boltzmann. Para fazer o modelo ergótico, ou seja, garantir que a dinâmica (e nossas amostras) não esteja restrita à um subconjunto do espaço de fase, tomaremos uma dinâmica, um termostato, estocástica. Isso usualmente garante que o sistema convirja para sua medida invariante (única). Um esquema comumente utilizado é o da dinâmica de Langevin*.

Denote q , com $q \in \mathbb{R}^d$ posição generalizada associada às N partículas. Poderíamos enunciar a seguinte equação diferencial para a dinâmica

$$dq_t = -\alpha_N \nabla H_N(q_t) dt + \sqrt{2 \frac{\gamma_N \alpha_N}{\beta_N}} dW_t \quad (3.1.1)$$

onde $(W_t)_{t>0}$ é processo de Wiener, $\gamma_N > 0$ é constante de atrito e α_N é escala temporal. Isso seria suficiente e é chamado *Overdamped Langevin*, contudo, tomaremos sua versão cinética. Usaremos q como variável de interesse e p , com $p \in \mathbb{R}^d$ variável de momento generalizado,

* Poderíamos ter explorado quaisquer outras dinâmicas similares tais como as dinâmicas de *Dissipative Particle* (8) ou *Nose-Hoover* (9).

para flexibilizar a dinâmica. Considere $U_N: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ energia cinética generalizada tal que $e^{-\beta_N U_N}$ seja lebesgue integrável. Para uma energia da forma $E(q, p) = \mathcal{H}_N(q) + U_N(p)$, escreve-se (10) a dinâmica de Langevin para o processo de difusão em $\mathbb{R}^{dN} \times \mathbb{R}^{dN}$ como a solução para a equação estocástica

$$\begin{cases} dq_t = \alpha_N \nabla U_N(p_t) dt, \\ dp_t = -\alpha_N \nabla \mathcal{H}_N(q_t) dt - \gamma_N \alpha_N \nabla U_N(p_t) dt + \sqrt{2 \frac{\gamma_N \alpha_N}{\beta_N}} dB_t. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

onde β_N , temperatura inversa e \mathcal{H} são como em 2.3.2. Essa dinâmica admite o gerador infinitesimal

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\mathcal{H} + \mathcal{L}_\mathcal{U},$$

$$\mathcal{L}_\mathcal{H} = -\alpha_N \nabla \mathcal{H}_N(q) \cdot \nabla_p + \alpha_N \nabla U_N(p) \cdot \nabla_q, \quad \mathcal{L}_\mathcal{U} = \frac{\gamma_N \alpha_N}{\beta_N} \Delta_p - \gamma_N \alpha_N \nabla U_N(p) \cdot \nabla_p.$$

Denomina-se $\mathcal{L}_\mathcal{H}$ a parte Hamiltoniana e $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ a parte de flutuação-dissipação. Tomaremos $U_N(p) = \frac{1}{2}|p|^2$ tal que $U_N(p)$ é energia cinética usual. Além disso, $(B_t)_{t>0}$ é processo browniano. Para simular o processo (p_t, q_t) integramos 3.1.2, contudo, sabemos que isso pode não ser possível analiticamente, o que nos leva a recorrer a métodos numéricos para amostragem.

3.2 Integração Numérica

Para integrar \mathcal{L} , opera-se separadamente sobre $\mathcal{L}_\mathcal{H}$ e $\mathcal{L}_\mathcal{U}$. A dinâmica hamiltoniana é reversível, o que é importante no algoritmo para garantir que mantém-se a medida invariante. Um esquema ter invariância de \mathcal{H} significa que, idealmente, a trajetória será em uma hiper-superfície de constante densidade de probabilidade. Ainda mais, a dinâmica preserva o volume do espaço de fase, de forma que não precisamos calcular o jacobiano da matriz que define a transformação da dinâmica. Essa propriedade pode ser mantida na discretização quando utilizamos do método de Verlet (7)(6, Capítulo 2). A dinâmica deveria também manter o Hamiltoniano constante, contudo, discretizada, podemos garantir somente que ele se mantenha quase constante. Para lidar com esse fato, discute-se a implementação de um passo de Metropolis na seção 3.3. Para $\Delta t > 0$, a partir do estado (q_k, p_k) , o esquema lê-se

$$\begin{cases} \tilde{p}_{k+\frac{1}{2}} = \tilde{p}_k - \nabla \mathcal{H}_N(q_k) \alpha_N \frac{\Delta t}{2}, \\ \tilde{q}_{k+1} = q_k + \tilde{p}_{k+\frac{1}{2}} \alpha_N \Delta t, \\ \tilde{p}_{k+1} = \tilde{p}_{k+\frac{1}{2}} - \nabla \mathcal{H}_N(q_{k+1}) \alpha_N \frac{\Delta t}{2}, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

onde (q_{k+1}, p_{k+1}) é estado seguinte da dinâmica. Um esquema análogo é possível para energias cinéticas generalizadas (10). Outros métodos tais quais *Euler-Maruyama* (EM) (6, Capítulo 7) poderiam ser utilizados para o mesmo fim. Nos métodos que temos interesse, o erro associado à discretização deve ir à zero quando Δt vai à zero. Para EM, o erro

por passo, local, é da ordem de $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ e o erro final, global, $\mathcal{O}(\Delta t)$, Já para o esquema escolhido, temos erro local de $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ e global de $\mathcal{O}(\Delta t^2)$. Essa diferença vem do fato da discretização usada ser reversível (11, Capítulo 5).

Nos resta integrar \mathcal{L}_U , o qual, para a energia cinética usual, consiste em um processo de Ornstein-Uhlenbeck de variância explícita, ou ainda,

$$dx_t = -\alpha_N x_t dt + \sigma dB_t,$$

onde $\alpha_N, \sigma > 0$ são parâmetros e B_t é processo browniano. Este processo também mantém a medida invariante. Note que, para $\alpha_N > 0$ somente substituiremos parcialmente o momento das variáveis e, se $\alpha_N, \gamma_N \rightarrow 0$ com $\alpha_N \gamma_N = 1$, retomariamos a dinâmica de 3.1.1. Este processo não seria muito melhor, contudo, do que um *Random Walk Metropolis* (11, Capítulo 5) já que o momento seria completamente substituído. De qualquer forma, \mathcal{L}_U pode ser integrado a partir da fórmula de Mehler para obter

$$\tilde{p}_k = \eta p_k + \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\beta_N}} G_k, \quad \eta = e^{-\gamma_N \alpha_N \Delta t}. \quad (3.2.2)$$

Onde G_k é variável aleatória Gaussiana usual.

3.3 Passo de Metropolis

Muitos algoritmos utilizam de um passo de seleção para estabilizar sua dinâmica e otimizar a convergência e a amostragem da variável de interesse. Partindo dos esquemas da Seção 3.2, consideraremos que temos uma proposta \tilde{q}_{k+1} de estado. Para o método de Metropolis, um importante aspecto é manter a razão de rejeições baixa para não atrapalhar a eficiência do programa, o que influencia no tamanho do passo temporal decidido. Pode ser mostrado que Δt é ideal quando é da ordem de $N^{-\frac{1}{4}}$ (7), tornando o esquema interessante pela escalabilidade de N .

Propõe-se então que, a partir da proposição de estado \tilde{q}_{k+1} gerada pelo esquema anterior, se calcule a probabilidade

$$P_k = 1 \wedge \frac{K(\tilde{q}_{k+1}, q_k) e^{-\beta_N \mathcal{H}_N(\tilde{q}_{k+1})}}{K(q_k, \tilde{q}_{k+1}) e^{-\beta_N \mathcal{H}_N(q_k)}}, \quad (3.3.1)$$

onde o núcleo $K(x, y)$ é simétrico (7) para o caso do algoritmo de *Langevin Monte Carlo* e, por se cancelar, não será discutido adiante. Atribua agora às novas coordenadas generalizadas (q_{k+1}, p_{k+1}) valor da seguinte forma

$$(q_{k+1}, p_{k+1}) = \begin{cases} (\tilde{q}_{k+1}, \tilde{p}_{k+1}) & \text{com probabilidade } P_k, \\ (q_k, -\tilde{p}_k) & \text{com probabilidade } 1 - P_k; \end{cases} \quad (3.3.2)$$

De forma a garantir a conservação da energia, que é uma preocupação na discretização da dinâmica, e otimizar a exploração do espaço de fase.

4 IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS

Consideraremos N partículas em um subespaço S de dimensão d em \mathbb{R}^n de forma que nosso espaço de fase Ω será de dimensão Nd . O campo externo é $V : S \mapsto \mathbb{R}$ e o núcleo de interação entre as partículas é função $W : S \mapsto (-\infty, \infty]$. Reunindo os resultados do Capítulo 3 sob essas condições, temos o algoritmo, descrito em (7), completo. Dada uma condição inicial (q_k, p_k) , vetores de posição e velocidade generalizadas, para cada $k \geq 0$, realizamos os seguintes passos

1. Baseado em 3.2.2, atualize a \tilde{p}_k com

$$\tilde{p}_k = \eta p_k + \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\beta_N}} G_k, \quad \eta = e^{-\gamma_N \alpha_N \Delta t}; \quad (4.0.1)$$

2. Utilizando do esquema de 3.2.1, calcule os termos

$$\begin{cases} \tilde{p}_{k+\frac{1}{2}} = \tilde{p}_k - \nabla \mathcal{H}_N(q_k) \alpha_N \frac{\Delta t}{2}, \\ \tilde{q}_{k+1} = q_k + \tilde{p}_{k+\frac{1}{2}} \alpha_N \Delta t, \\ \tilde{p}_{k+1} = \tilde{p}_{k+\frac{1}{2}} - \nabla \mathcal{H}_N(q_{k+1}) \alpha_N \frac{\Delta t}{2}; \end{cases} \quad (4.0.2)$$

3. Pela definição 3.3.1, tome

$$P_k = 1 \wedge \exp\{-\beta_N (\mathcal{H}_N(\tilde{q}_{k+1}) - \mathcal{H}_N(q_k) + U_N(\tilde{q}_{k+1}) - U_N(q_k))\}; \quad (4.0.3)$$

4. Defina, a partir de 3.3.2,

$$(q_{k+1}, p_{k+1}) = \begin{cases} (\tilde{q}_{k+1}, \tilde{p}_{k+1}) \text{ com probabilidade } P_k, \\ (q_k, -\tilde{p}_k) \text{ com probabilidade } 1 - P_k; \end{cases} \quad (4.0.4)$$

4.1 A implementação

Tomaremos o subespaço $\mathbb{S} = \mathbb{R}^d$ com $d = 1, 2$. Consideraremos um núcleo de interação $W = g$ coulombiano em $n = 2$. Por isso, retomamos medida da forma 2.3.1 usual de gases de coulomb. A esquemática da implementação se encontra na Figura 1. Podemos entender melhor a relação entre as sub-rotinas e funções em referência à Tabela 1.

Alguns detalhes são importantes de notar. O gerador de variáveis aleatórias gaussianas, necessário em 4.0.1 foi implementado utilizando do algoritmo de *Box-Muller*. Além disso, o ajuste de variáveis é notoriamente um dos aspectos complicados do algoritmo implementado. Precisamos de uma holística par ajustar Δt , α_N e γ_N . No escopo deste programa, Δt e α_N desempenham o mesmo papel e, por isso, toma-se $\alpha_N = 1$ e varia-se Δt .

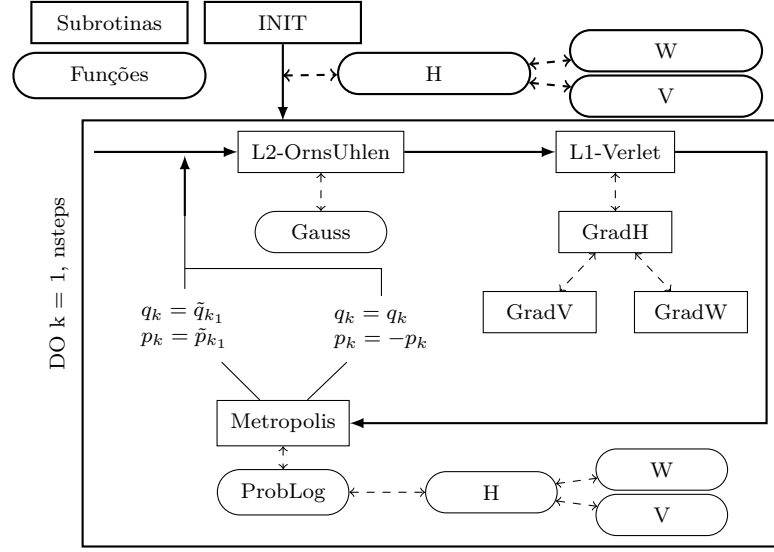


Figura 1 – Implementação do algoritmo *Langevin Monte Carlo* (LMC). Setas sólidas indicam o fluxo do programa. Setas tracejadas indicam chamadas de funções dentro do bloco. A descrição das funções se encontra na Tabela 1.

Nome	Descrição
Init	Modifica p_k vetor $[N \times m]$, global, uniforme no cubo em R^d e q_k, G_H , vetores $[N \times m]$, globais, nulos.
L2-OrnsUhlen	Modifica \tilde{p}_k , vetor $[N \times m]$, global, por \mathcal{L}_U segundo 4.0.1.
L1-Verlet	Modifica $\tilde{p}_{k_1}, \tilde{q}_{k_1}$ vetores $[N \times m]$, globais, por \mathcal{L}_H segundo 4.0.2.
GradH	Modifica G_H , vetor $[N \times m]$, global, gradiente do Hamiltoniano.
GradW	Modifica G_{W_i} , escalar, global, gradiente de W núcleo de interação.
GradV	Modifica G_{V_i} , escalar, global, gradiente de V potencial.
ProbLog	Retorna P_K , escalar, local, probabilidade de aceite de 4.0.3.
H	Retorna H , escalar, local, hamiltoniano em k .
V	Retorna V_i , escalar, local, potencial de q_i .
W	Retorna $W_{i,j}$, escalar, local, interação entre q_i, q_j
Metropolis	Modifica p_k, q_k , vetores $[N \times m]$, globais por 4.0.4.
Gauss	Retorna variáveis gaussianas, vetor $[1 \times m]$, local por Box-Muller.

Tabela 1 – Descrição das funções e subrotinas utilizadas na implementação do programa.

Seguindo a recomendação de (11, Capítulo 5), tomaremos $\Delta t = \Delta \tilde{t} + X$, onde X é variável aleatória de média 0 e variância σ^2 pequena. Essa escolha ajuda a acelerar a convergência e melhor garante ergodicidade. Lembra-se ainda que $\Delta \tilde{t}$ é ideal na ordem de $N^{-\frac{1}{4}}$, isto é, é pequeno o suficiente para manter a razão de aceite do passo de Metropolis alta e grande o suficiente para não desacelerar a convergência do algoritmo. Já γ_N definirá o quanto substituiremos o momento anterior das partículas será relevante em relação ao movimento browniano. Aqui, sabemos que tornar η próximo demais de 0, ou de 1 para todos efeitos, desacelera intensamente a convergência. Faremos, em geral, com que $\gamma_N \alpha_N \Delta t \approx 0.5$.

4.2 Resultados e Discussão

Simular gases de coulomb é especialmente interessante quando não há modelos de matrizes conhecidos, disponíveis ou simples para o \mathcal{H} definido. Podemos, com a simulação de tais gases, calcular a média da função densidade das partículas, ou autovalores. Alternativamente, quando há modelos disponíveis em matrizes aleatórias, essa medida poderia ser tirada diretamente do calculo de seus autovalores.

A família de ensembles gaussianos são modelos que mostramos ser bem representados como matrizes na Seção 2.2. Retorne os resultados da Seção 2.5. Tomar a medida dos ensembles gaussianos é o equivalente, na simulação descrita, a tomar

$$d = 1; \quad n = 2; \quad V(x) = \frac{|x|^2}{2}; \quad W(x) = g(x) = \log |x|; \quad \beta_N = \beta N^2; \quad \beta = 1, 2, 4. \quad (4.2.1)$$

O resultado da simulação para a configuração 4.2.1 é apresentado na Figura 2. Apresentamos por contraste, na coluna da esquerda, os resultados para $N = 10$, da densidade gerada pela simulação equivalente com matrizes e pelos gases para os três modelos ($\beta = 1, 2, 4$). Na coluna central, representa-se a comparação da medida da simulação com o Semi-Círculo de Wigner, configuração de equilíbrio para os três modelos quando N é grande o suficiente. Note que os valores foram escalados por $\sqrt{2\beta}$. Finalmente, na coluna da direita apresentamos a distribuição do maior autovalor λ_{max} . Um resultado importante (12) enuncia que existem $z_N^{(\beta)}$ e $s_N^{(\beta)}$ tais que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\beta, N, V} \left(\frac{\lambda_{max} - z_N^{(\beta)}}{s_N^{(\beta)}} \leq x \right) = F_\beta(x),$$

onde $F_\beta(x)$ é a densidade acumulada de Tracy-Widow. Mostraremos a concordância desse resultado com a simulação na coluna da direita. Observa-se que os dois modelos à esquerda concordam bem na estimativa da medida para o N usado. No centro, é possível notar que a medida de equilíbrio esperada, o Semi-Círculo de Wigner, é aproximada rapidamente pelo aumento de partículas no sistema. A distribuição do autovalor máximo é mais delicada, contudo, ainda apodemos ver boa correspondência com o resultado esperado pela Tracy-Widow.

Podemos retomar também as descrições dos potenciais mônico em 2.5.4 e os dois regimes do potencial quártico, 2.5.2 e 2.5.3. Respectivamente, estes modelos equivalem a tomar na simulação os parâmetros

$$d = 1; \quad n = 2; \quad V(x) = t|x|^{2m}; \quad W(x) = g(x) = \log |x|; \quad \beta_N = \beta N^2; \quad \beta = 2. \quad (4.2.2)$$

$$d = 1; \quad n = 2; \quad V(x) = \frac{|x|^4}{4} + t \frac{|x|^2}{2}; \quad W(x) = g(x) = \log |x|; \quad \beta_N = \beta N^2; \quad \beta = 2. \quad (4.2.3)$$

O caso mônico se reduz ao gaussiano se $m = 1$. Os resultados para ambos os potenciais estão explicitados na Figura 3 para alguns parâmetros interessantes de t e m .

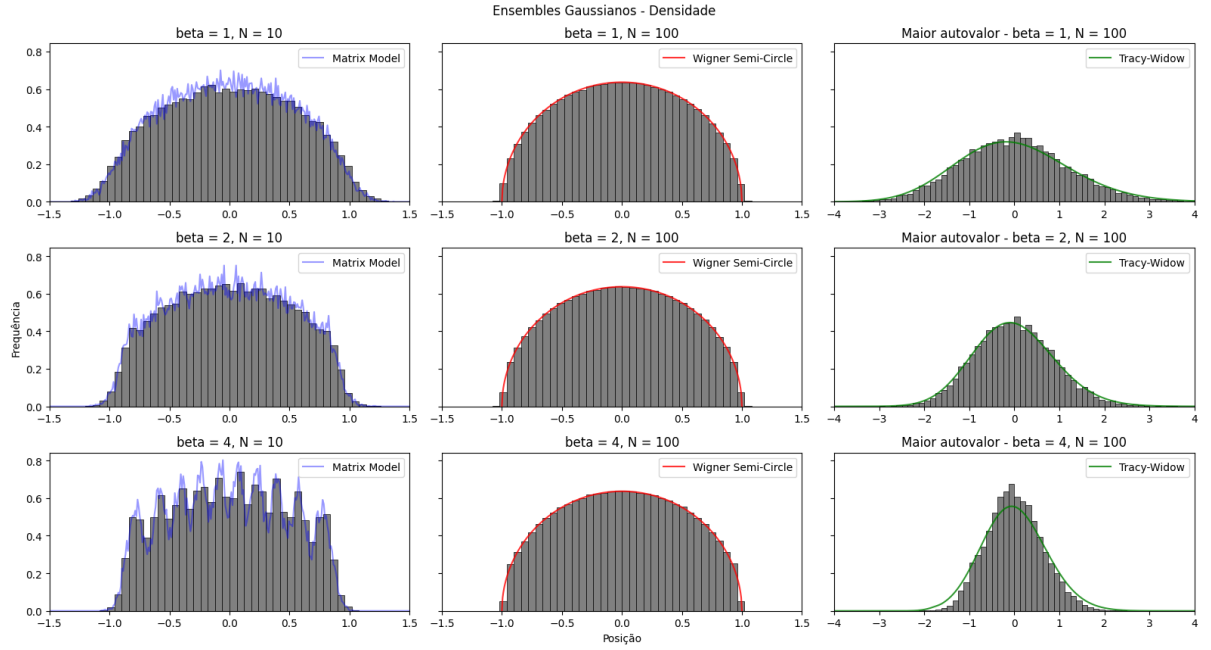


Figura 2 – Densidade para ensembles gaussianos, 4.2.1. Tomou-se $\Delta t = 0.5$ e $nsteps = 5 \cdot 10^6$ passos, registrando a cada 1000 iterações a partir de $nsteps/5$. À esquerda da figura, em azul, a densidade da amostragem de $4 \cdot 10^3$ matrizes do ensemble. No centro, o Semi-Círculo de Wigner, medida de equilíbrio. Na direita, apresenta-se a densidade de λ_{max} normalizado e sua medida esperada.

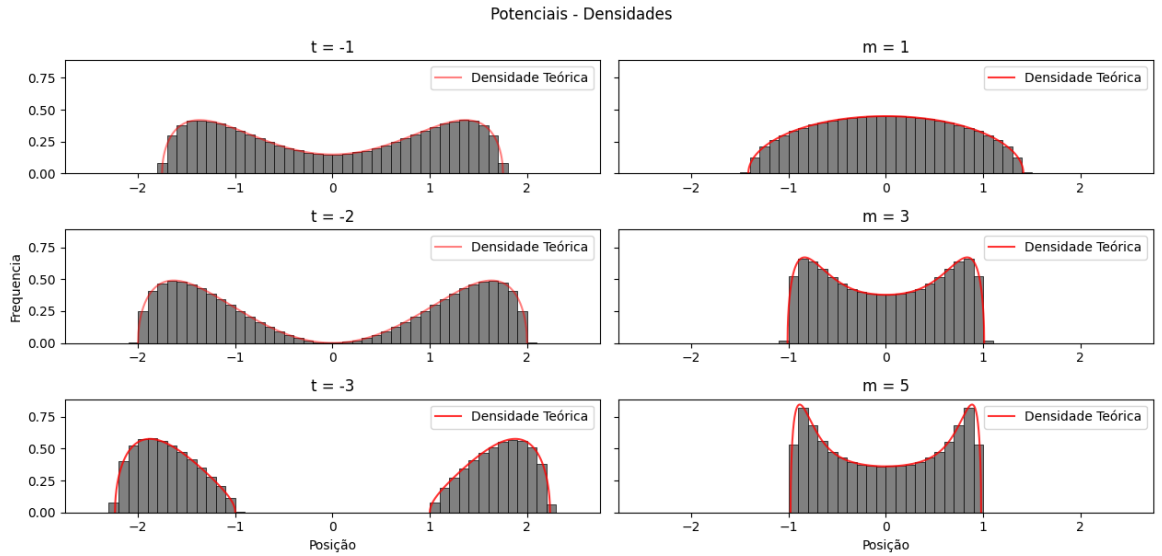


Figura 3 – Potencial Quártico 4.2.3 e Mônico 4.2.2, respectivamente à esquerda e direita. Tomou-se $\Delta t = 0.1$, $N = 100$, e $nsteps = 5 \cdot 10^6$ passos. Registra-se a cada 1000 iterações a partir de $nsteps/5$. No Quártico, simula-se $t = -1, -2, -3$. No Mônico fixa-se $t = 1$ e simula-se $m = 1, 3, 5$.

Novamente as medidas experimentais parecem convergir para a medida teórica enunciada em todas as configurações testadas. Contudo, isso é explorado e pode ser observado igualmente, com exceção do Mônico, em (7). Em uma situação menos explorada, considere a seguinte configuração de potencial e autovalores complexos ($\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^2$) e a

representação das medidas simuladas para alguns valores de interesse de t, a na Figura 4,

$$d = 2; n = 2; V(z) = |z|^{2a} - \text{Re}\{tz^a\}; W(x) = g(x) = \log|x|; \beta_N = \beta N^2; \beta = 2. \quad (4.2.4)$$

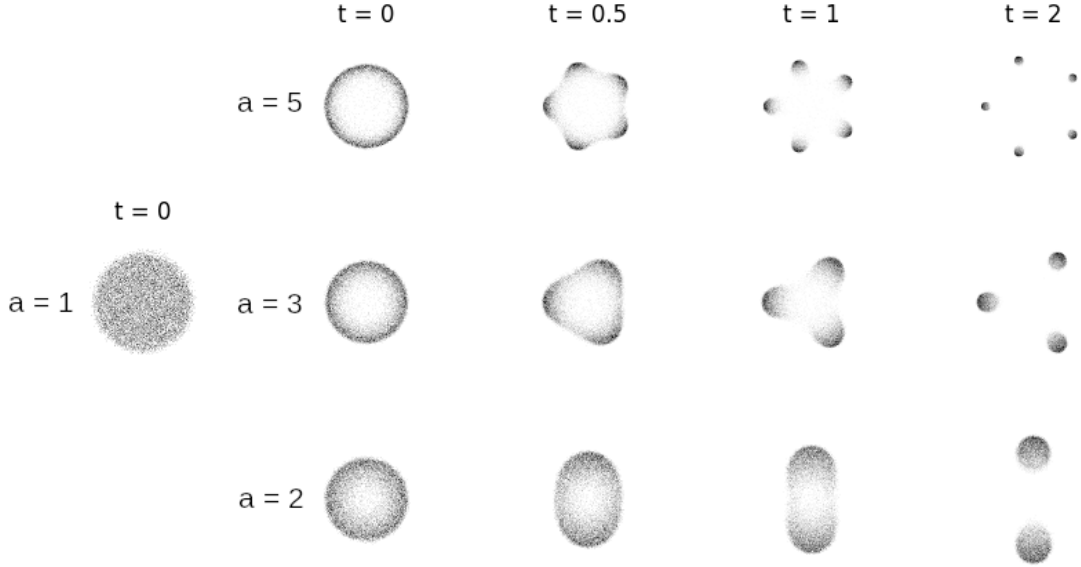


Figura 4 – Medidas referentes à configuração 4.2.4. Tomou-se $\Delta t = 0.5$ e $nsteps = 2 \cdot 10^6$ passos, registrando a cada 500 iterações a partir de $nsteps/5$.

É previsto para esse modelo uma transição de regime, uma separação da medida de equilíbrio, para $t_c \approx \sqrt{\frac{1}{a}}$ (13). A simulação replicar o comportamento esperado é um bom indicador de que é possível estudar a medida de tal ensemble numericamente, que pode ser explorado posteriormente. Outro fator que corrobora o bom comportamento do modelo é a medida uniforme quando $a = 1$, também prevista pela teoria. Esse exemplo demonstra que é possível sem muito esforço replicar a medida, e principalmente o suporte, para potenciais mais complexos estudados em publicações recentes no tema.

No Capítulo 1 é notado que os modelos gaussianos são os únicos em RMT com invariância por rotação e independência das entradas simultaneamente. Gerar matrizes de outros modelos invariantes dependeria de ser capaz de construir entradas correlacionadas devidamente já que, se tratando de ensembles invariantes, ou seja, de medida igual para quaisquer M, M' tais que $\hat{M} = \hat{U}\hat{M}'\hat{U}^{-1}$, podemos simular \hat{U} autovetores uniformemente do espaço correspondente. Isso pois sabemos do teorema espectral que, para as matrizes tomadas, vale a decomposição $\hat{M} = \hat{U}\hat{D}\hat{U}^{-1}$. Para reconstruir uma elemento do ensemble de interesse nos resta replicar a medida de autovalores, \hat{D} . Isso, de forma interessante, pode ser feito pela simulação descrita de Gases de Coulomb, que replica a medida dos autovalores dos ensemble.

5 CONCLUSÃO

Descrevemos os fundamentos da Teoria de Matrizes Aleatórias, principalmente as ideias de ensembles e medida, explicitando as suas categorizações em invariantes por rotação e de entradas independentes. Com essas ideias, explicitamos os modelos gaussiano para $\beta = 1, 2, 4$, importantes em RMT pela sua característica única de pertencer à ambas categorias, de invariância e independência. Usando desse exemplo podemos entender os principais resultados sobre medidas dos ensembles invariantes e sobre a medida de autovalores destas matrizes.

Introduzimos a ideia de um Gás de Coulomb e como esta noção pode ser relacionada com alguns ensembles de matrizes aleatórias por uma escolha adequada de potencial e núcleo de interação. Usando da ideia de partículas para pensar na dinâmica dos autovalores intuimos as ideias de minimização da energia livre para identificar o equilíbrio. Com isso, mostramos os principais resultados que possibilitam o cálculo explícito da medida de autovalores para o caso gaussiano e mais dois ensembles que usaremos como exemplo nas simulações que seguem.

Com a analogia, percebemos que muitas vezes métodos numéricos são necessários para a solução das equações de movimento que descrevem a dinâmica das partículas modeladas. Discutimos os principais métodos e principalmente as características do algoritmo implementado, justificando seu uso e propondo sua forma final apresentada também neste trabalho.

Por fim, apresentamos os resultados. Simulações de medidas para os ensembles já descritos anteriormente, todos com autovalores reais, e um último ensemble com autovalores complexos, menos descrito. Para os efeitos deste trabalho, foi encontrada boa concordância das medidas simuladas com a descrição teórica atual e com os modelos de matriz testados. Principalmente para o ensemble de autovalores complexos, este resultado é de interesse visto que apresenta uma forma alternativa de simulação e, também, de análise numérica destes modelos para diversos ensembles explorados em literatura recente.

Finalmente, entendemos os resultados deste estudo como uma descrição e validação de métodos conhecidos de simulação e estudo de matrizes aleatórias, ainda que atuais. Contudo, vê-se extensões da utilização do método para estudo numérico de importantes resultados com menos descrição teórica.

REFERÊNCIAS

- 1 MEHTA, M.; GAUDIN, M. On the density of eigenvalues of a random matrix. **Nuclear Physics**, v. 18, p. 420–427, 1960. ISSN 0029-5582.
- 2 DYSON, F. J. Statistical theory of the energy levels of complex systems. i. **Journal of Mathematical Physics**, v. 3, n. 1, p. 140–156, 01 1962. ISSN 0022-2488.
- 3 POTTERS, M.; BOUCHAUD, J. **A First Course in Random matrix Theory: for Physicists, Engineers and Data Scientists**. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press, 2020. ISBN 9781108488082.
- 4 EDELMAN, A. **Eigenvalues and Condition Numbers of Random Matrices**. 1984. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 1984.
- 5 CHAFAÏ, D.; HARDY, A.; MAÏDA, M. Concentration for coulomb gases and coulomb transport inequalities. **Journal of Functional Analysis**, Elsevier BV, v. 275, n. 6, p. 1447–1483, sep 2018. ISSN 0022-1236.
- 6 LEIMKUHLER, B.; MATTHEWS, C. **Molecular Dynamics: With Deterministic and Stochastic Numerical Methods**. Cham, Suíça: Springer International Publishing, 2015. (Interdisciplinary Applied Mathematics). ISBN 9783319163758.
- 7 CHAFAÏ, D.; FERRÉ, G. Simulating coulomb and log-gases with hybrid monte carlo algorithms. **Journal of Statistical Physics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 174, n. 3, p. 692–714, nov 2018.
- 8 ESPAÑOL, P.; WARREN, P. Statistical mechanics of dissipative particle dynamics. **Europhysics Letters**, v. 30, n. 4, p. 191, may 1995.
- 9 HOOVER, W. G. Canonical dynamics: Equilibrium phase-space distributions. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 31, p. 1695–1697, Mar 1985.
- 10 STOLTZ, G.; TRISTANOVA, Z. Langevin dynamics with general kinetic energies. **Multiscale Modeling & Simulation**, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 16, n. 2, p. 777–806, jan 2018. ISSN 1540-3467.
- 11 BROOKS, S. *et al.* **Handbook of Markov Chain Monte Carlo**. [S.l.: s.n.]: CRC Press, 2011. (ISSN). ISBN 9781420079425.
- 12 TRACY, C.; WIDOM, H. The distributions of random matrix theory and their applications. *In: New Trends in Mathematical Physics*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1970. p. 753–765. ISBN 978-90-481-2809-9.
- 13 BALOGH, F.; GRAVA, T.; MERZI, D. Orthogonal polynomials for a class of measures with discrete rotational symmetries in the complex plane. 2016.