

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**  
**LABORATÓRIO DE FÍSICA 1**

**MÓDULO DE ELASTICIDADE**

**JOÃO VICTOR ALCÂNTARA PIMENTA**

**Nº USP: xxxxxxxxx**

**NÍCOLAS C. B.**

**Nº USP: xxxxxxxxx**

**SÃO CARLOS, 2020**

## RESUMO

Ao aplicar uma força sobre um corpo, cria-se uma deformação neste. Quando não permanente, pode-se traçar uma relação entre a força aplicada e a deformação criada, proporcional ao Módulo de Young, ou Módulo de Elasticidade ( $E$ ), constante física intrínseca e específica aos materiais. Esta prática tem como objetivo definir a relação entre as constantes e as forças em um processo de deformação não permanente em uma barra de um metal desconhecido e, após calcular o Módulo de Young do experimento, traçar a equivalência deste com o Módulo de Young do Aço Inoxidável, a fim de descobrir a composição da barra estudada.

Para isso, dois métodos foram utilizados, estes que resultaram em dois valores diferentes. O primeiro consiste em alterar a carga utilizada para criar a deformação em uma barra de comprimento fixo, chegando no valor  $E_1 = (10.7 \pm 0.6) \times 10^{10}$  Pa. O segundo mantinha fixa a carga utilizada, enquanto variava-se o comprimento da barra estudada, chegando no valor  $E_2 = (18.7 \pm 0.9) 10^{10}$  Pa. Todas as medições de ambos os métodos foram compiladas em tabelas e em gráficos, produzidos pela linguagem de programação R. Quando útil, utilizou-se da logaritmização dos resultados para transformar uma relação não-linear em uma relação linear. Assim, utilizando de ferramentas do cálculo diferencial para o tratamento estatístico das incertezas das medidas, pode-se afirmar ou não a equivalência de cada um dos valores obtidos com o Módulo de Young do Aço Inoxidável, suposto material utilizado na composição da barra estudada, e, com isso, definir qual método obtém mais precisão para o objetivo aqui estipulado.

## 1. INTRODUÇÃO

A força elástica descreve o tipo de força que surge da deformação de algum material, resultando em uma aceleração com direção ao ponto de equilíbrio, em que não há nenhuma deformação. Essa deformação se dá em função de uma força e é relacionada diretamente com um coeficiente chamado Módulo de Young, específico do material em questão. Existe uma relação entre constantes e variáveis que descreve essa força e que se dá por:

$$F = \frac{E d^3 b x}{4 L^3} \quad (1)$$

em que:

$F$ .: representa a força elástica

$E$ .: módulo de Young.:

$d$ .: é a espessura do material

$b$ .: é a largura do material

$x$ .: é a deformação

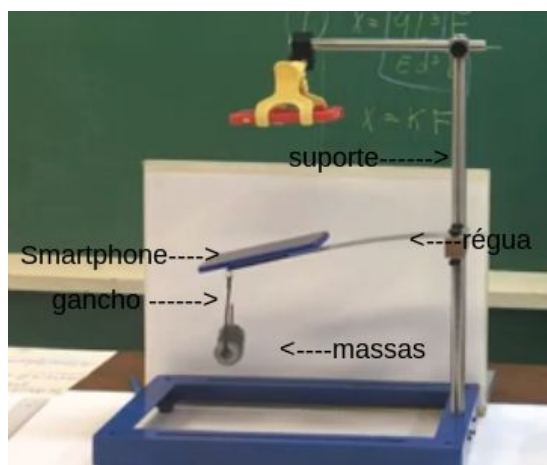
$L$ .: é o comprimento do material

É importante notar que a deformação deve ser cuidada para que não cause alterações permanentes no material; apenas nestas condições a relação se aplica. Enquanto não há deformações permanentes, o fenômeno é bem descrito pela Lei de Hooke.

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

Durante a execução das duas práticas, houve muitos equipamentos que foram necessários para a determinação dos dados necessários. No primeiro, foram utilizados uma régua como barra para deformação, um suporte para fixação da régua em posição paralela à superfície da bancada, um Smartphone equipado do aplicativo *Phyphox*, capaz de medir o ângulo de inclinação do aparelho em questão, um gancho preso à régua para o suporte das massas e as massas em formato de argola. Foi também utilizada uma balança de precisão  $\pm 0.01g$  para determinar a massa do Smartphone, gancho e argolas. Para a confecção dos gráficos necessários, foi utilizada a linguagem R.

O esquema utilizado é como se segue:



*Imagem retirada do vídeo disponibilizado no Moodle USP*

*Imagem(1): Montagem do experimento*

O primeiro processo consiste em aumentar gradativamente a massa, consequentemente a Força elástica. Com auxílio do ângulo dado pelo aplicativo no Smartphone é fácil definir a deformação, uma vez que se sabe o comprimento da barra. Definindo como  $k_1$  as constantes envolvidas, a equação de interesse é a seguinte:

$$x = k_1 \times F_e \quad (2)$$

onde  $k_1$  é dado por  $\frac{4L^3}{E d^3 b}$ .

Como os termos  $d$ ,  $b$  e  $L$  presentes em  $k_1$  são constantes da régua estudada, o único termo desconhecido é  $E$ , o Módulo de Young, podendo ser calculado através da equação (2) ao utilizar a deformação e a força obtidas experimentalmente.

A segunda parte desta prática tem-se o mesmo objetivo. O método, contudo, será diferente. A carga aplicada à barra será mantida constante enquanto serão feitas alterações no comprimento da barra, medindo o ângulo e, consequentemente, a deformação para cada comprimento estudado. A equação desta vez será, então:

$$x = k_2 \times L^3 \quad (3)$$

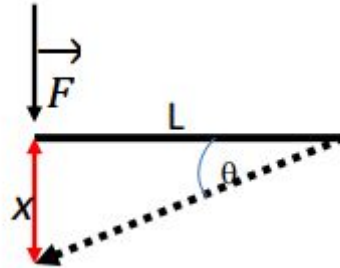
que pode ser rearranjada para uma equação linear, para que seja mais evidente a constante:

$$\log(x) = \log(k_2) + 3\log(L) \quad (4)$$

onde  $k_2$  é dado por  $\frac{4F}{E d^3 b}$ .

Assim, a partir do mesmo processo da primeira parte, o Módulo de Young (E) pode ser calculado por ser o único termo não conhecido da equação.

Ao aplicar uma força F na barra, uma deformação  $\chi$  acompanhada de um ângulo  $\theta$  é produzida, tal como representado na Figura 1. Pode-se utilizar trigonometria para o cálculo do ângulo em questão, como explicitado na equação (5).



*Figura 1: modelo da deformação na barra para uma força F  
Retirado do portal de laboratório 1 do Moodle USP.*

$$x = \tan(\theta) \times L \quad (5)$$

Dado um gráfico cujos pontos permitem desenhar uma reta, foi utilizada a equação (6) para determinar o coeficiente linear ( $\alpha$ ) desta.

$$\alpha = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \quad (6)$$

Para considerar equivalentes dois valores acompanhados de suas incertezas, é necessário que eles satisfaçam a equação (7), enquanto para afirmar a não-equivalência existe a equação (8).

$$|x_1 - x_2| < 2 (\Delta 1 + \Delta 2) \quad (7)$$

$$|x_1 - x_2| > 3 (\Delta 1 + \Delta 2) \quad (8)$$

O valor tabelado do Módulo de Young do aço foi consultado na referência 1.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

#### 3.1 PARTE 1

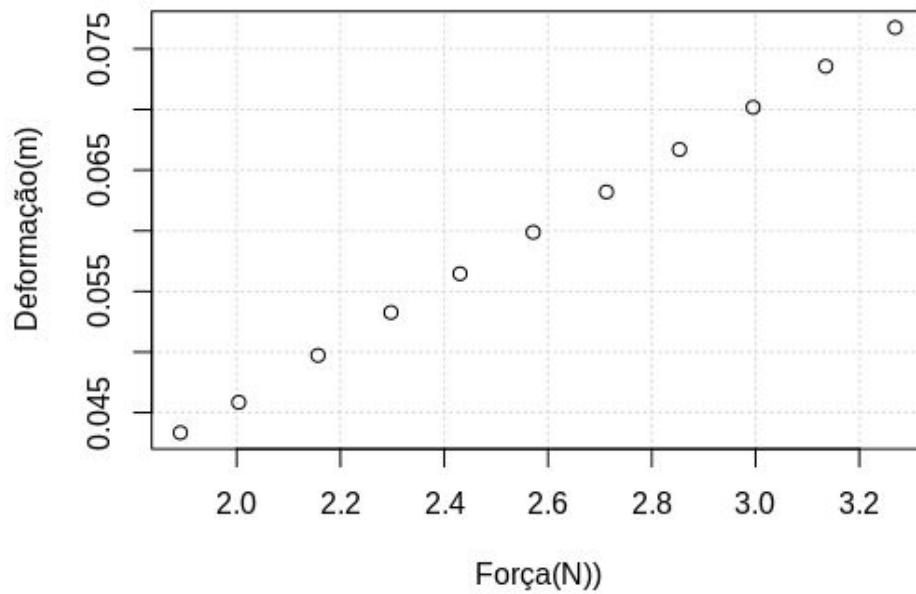
As medidas tomadas foram as seguintes:

Massa (g) $\pm 0.01g$	Ângulo (graus) $\pm 0.01^\circ$	Deformação (m)
192.82	-8.8	$(43346 \pm 2) \times 10^{-6}$
204.30	-9.3	$(45852 \pm 2) \times 10^{-6}$
219.86	-10.07	$(49724 \pm 2) \times 10^{-6}$
234.19	-10.77	$(53261 \pm 2) \times 10^{-6}$
247.75	-11.4	$(56458 \pm 2) \times 10^{-6}$
262.12	-12.07	$(59873 \pm 2) \times 10^{-6}$
276.52	-12.72	$(63203 \pm 2) \times 10^{-6}$
290.87	-13.4	$(66705 \pm 3) \times 10^{-5}$
305.33	-14.07	$(70175 \pm 3) \times 10^{-6}$
319.59	-14.72	$(73561 \pm 3) \times 10^{-6}$
333.24	-15.33	$(76757 \pm 3) \times 10^{-6}$

*Tabela 1: medidas tomadas no experimento  
Elaborado pelos compiladores*

A correlação a partir destes dados é dada pelo Gráfico 1:

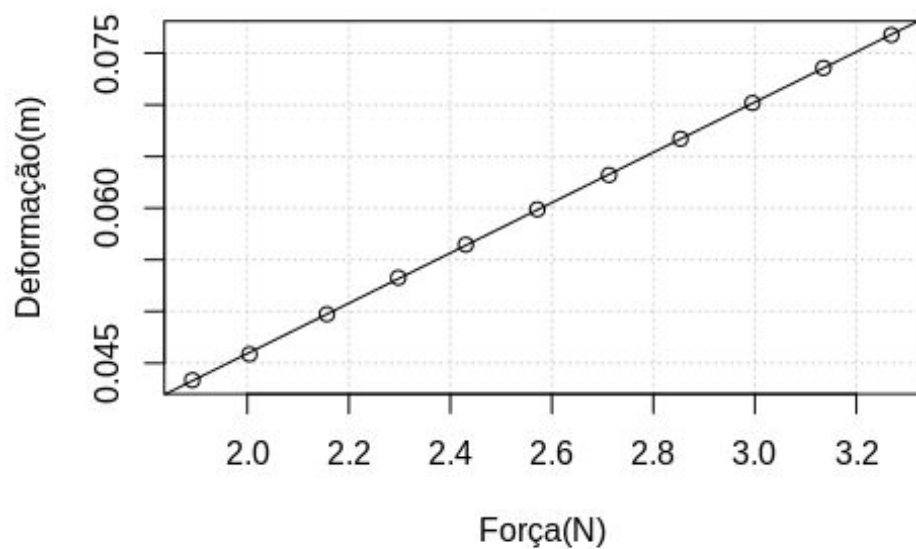
**Gráfico da Força pela Deformação**



*Gráfico 1: correlação entre deformação e força  
Elaborado pelos compiladores*

Onde fica clara a relação linear. Assim, pelo método de regressão linear pode-se traçar a seguinte reta:

**Gráfico da Deformação pela Força**



*Gráfico 2: Força pela deformação  
Elaborado pelo compiladores*

Neste caso, o coeficiente linear  $\alpha$  desta reta é equivalente à constante  $k_1$ . Assim, utilizando-se a equação (6), obtém o seguinte resultado.

$$k_1 = 0.02434 \pm 0.00003 \text{ m/N}.$$

Com auxílio da equação (1), determina-se o Módulo de Young ( $E_1$ ) como:

$$E_1 = (10.7 \pm 0.6) \times 10^{10} \text{ Pa}$$

Os gráficos acima foram escritos em R com o seguinte código:

```
listalabfisica1 <- read.csv("~/LabFisicaemR/listalabfisica1.txt", sep="")
#LabFisicaemR é o diretório. listalabfisica1.txt é o documento com os dados
da tabela

forca <- listalabfisica1$gramas/1000*9.81
deformação <- tan(listalabfisica1$graus*2*pi/360)*0.28

plot(forca, deformação, grid(), xlab="Força(N)", ylab="Deformação(m)", main
= "Gráfico da Deformação pela força")

#adicionando-se para a regressão:

modelo = lm(formula = deformação ~ forca)
abline(modelo)
```

Mantendo-se fixa a carga de 302,54g suspensa na régua, os dados obtidos foram:

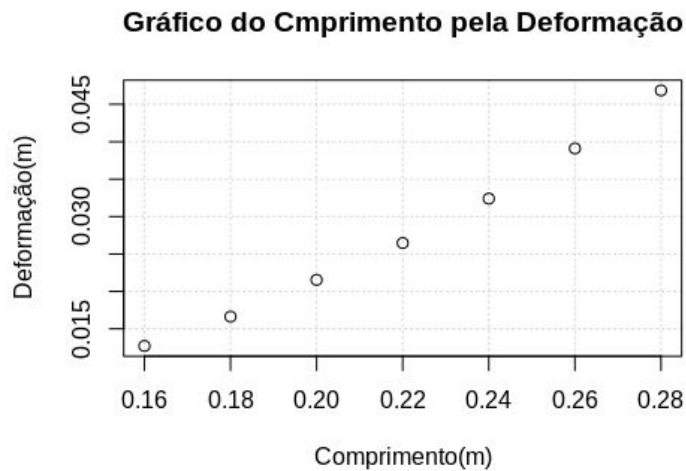
Comprimento (cm) $\pm 0.1\text{cm}$	Ângulo (graus)	Deformação (m)
28.0	-9.50	$(4686 \pm 2) \times 10^{-5}$
26.0	-7.95	$(3910 \pm 1) \times 10^{-5}$
24.0	-6.60	$(3240 \pm 1) \times 10^{-5}$
22.0	-5.40	$(26468 \pm 9) \times 10^{-6}$
20.0	-4.40	$(21545 \pm 8) \times 10^{-6}$
18.0	-3.40	$(16635 \pm 6) \times 10^{-6}$



16.0	-2.60	$(12715 \pm 5) \times 10^{-6}$
------	-------	--------------------------------

*Tabela 2: dados obtidos na parte dois da prática  
Elaborado pelo Compilador*

A correlação entre estes dados se apresenta da seguinte forma:



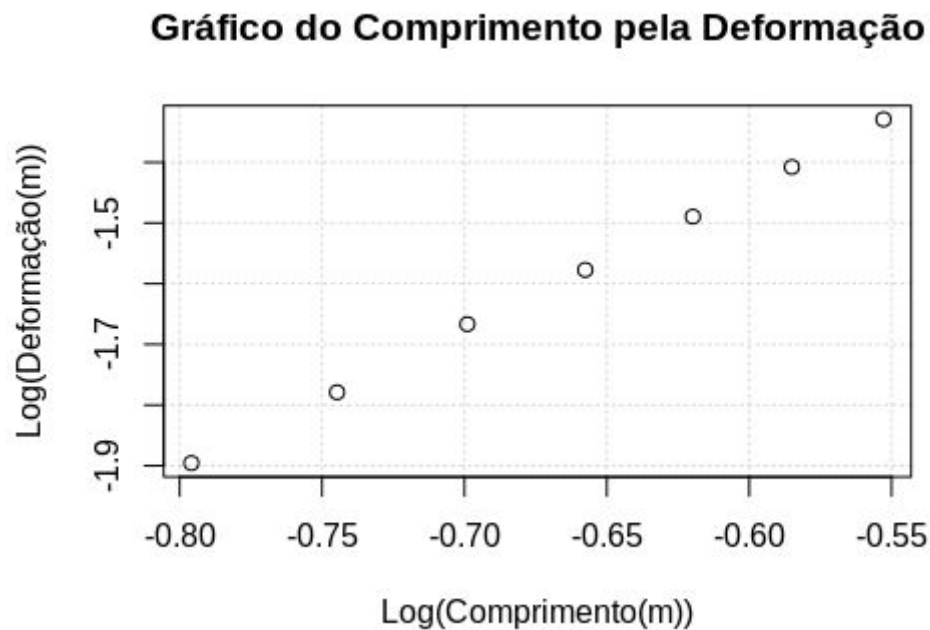
*Gráfico 3: Comprimento pela deformação  
Elaborado pelos compiladores*

Tabela relacionando Comprimento(m<sup>3</sup>), Comprimento(m) e Deformação:

Comprimento (m <sup>3</sup> )	Comprimento (m) $\pm 0.001$	Deformação(m)
$(2.1952 \pm 0.0001) \times 10^{-2}$	0.28	$(4.686 \pm 0.002) \times 10^{-2}$
$(1.7576 \pm 0.0001) \times 10^{-2}$	0.26	$(3.910 \pm 0.001) \times 10^{-2}$
$(1.38240 \pm 0.00006) \times 10^{-2}$	0.24	$(3.240 \pm 0.001) \times 10^{-2}$
$(1.06480 \pm 0.00003) \times 10^{-2}$	0.22	$(2.6468 \pm 0.0009) \times 10^{-2}$
$(0.80000 \pm 0.00002) \times 10^{-2}$	0.20	$(2.1545 \pm 0.0008) \times 10^{-2}$
$(0.58320 \pm 0.00001) \times 10^{-2}$	0.18	$(1.6635 \pm 0.0006) \times 10^{-2}$

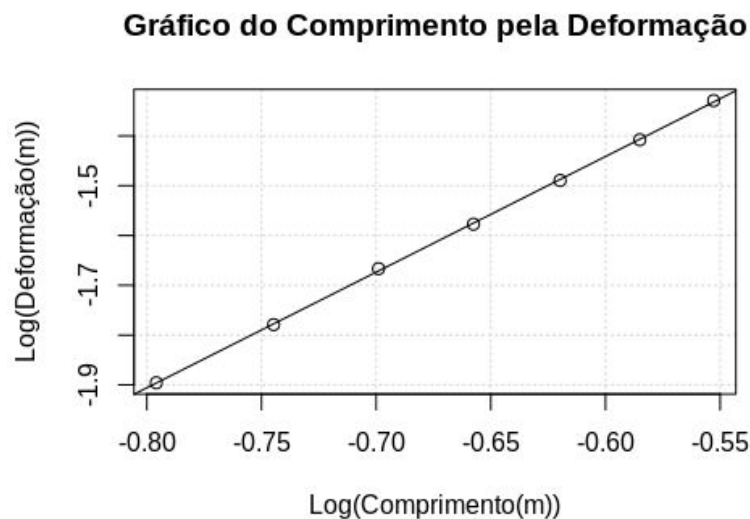
*Tabela 3: dados obtidos na parte dois da prática  
Elaborado pelos Compiladores*

Por apresentar relação não linear na relação direta entre Comprimento e Deformação, pode-se também utilizar os logaritmos de cada grandeza como mostrado na equação (4). Assim, foi obtido o Gráfico 4:



*Gráfico 4: Comprimento pela deformação com dados em log  
Elaborado pelos compiladores*

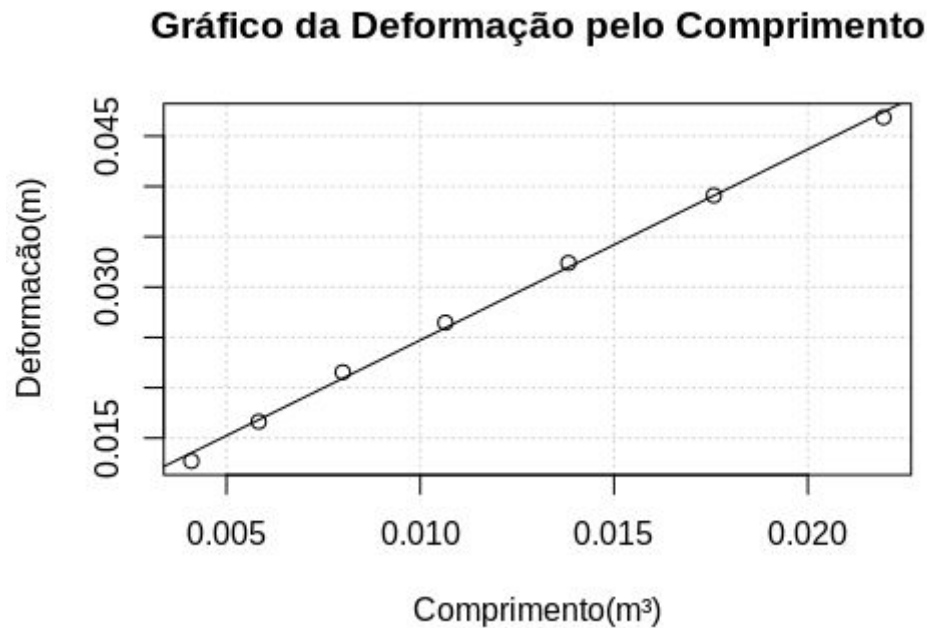
Que é coerente com a equação (4), por ser linear ao utilizar as grandezas em forma logarítmica. Utilizando do método de regressão linear no conjunto de pontos, chega-se na reta exibida no Gráfico 5:



*Gráfico 5: Comprimento pela deformação em escala log-log  
Elaborado pelos compiladores*

O coeficiente da reta gerada no gráfico 5 é 2.321738.

Os dados da tabela também podem ser organizados em um gráfico da deformação pelo cubo do comprimento, apresentando a seguinte relação linear:



*Gráfico 6: Comprimento pela deformação  
Elaborado pelos compiladores*

A partir deste gráfico é possível determinar o Módulo de Young ( $E_2$ ). Neste caso, o coeficiente linear é igual a  $k_2$ , calculado como sendo ( $1.8961642 \text{ m}^{-2}$ ), valor este utilizado para determinar:

$$E_2 = (18.7 \pm 0.9) 10^{10} \text{ Pa}$$

Consultando o Módulo de Young na referência de número 1, constatou que o Aço Inoxidável é o aço com valor mais próximo do estudado, sendo ele  $E_{ai} = 19,3 \times 10^{10} \text{ Pa}$ . Utilizando tal valor nas equações de equivalência (7) e (8) para cada um dos resultados, chegou-se em:

$$\text{Para } E_1 : |10.7 - 19,3| > 3 (0.6 + 0)$$

$$\text{e para } E_2 : |18.7 - 19,3| < 2 (0.9 + 0)$$

Assim, pode-se apenas afirmar a equivalência entre o metal da barra e o Aço Inoxidável quando utilizado o método 2 para o cálculo.

O código necessário, em R, na segunda parte foi:

```
listalabfisica2 <- read.csv("~/LabFisicaemR/listalabfisica2.txt", sep="")
#LabFisicaemR é o diretório. listalabfisica2.txt é o documento com os dados
da tabela

Comprimento <- listalabfisica2$cm/100
logComprimento <- log10(Comprimento)

Deformação <- tan(listalabfisica2$graus*2*pi/360)*0.28
logDeformação <- log10(Deformação)

plot(Comprimento, Deformação, grid(), xlab="Comprimento(m)",
ylab="Deformação(m)", main = "Gráfico do Comprimento pela Deformação")
#Para o grafico 3

plot(logComprimento, logDeformação, grid(), xlab="Log(Comprimento(m))",
ylab="Log(Deformação(m))", main = "Gráfico do Comprimento pela Deformação")
#Para o gráfico 4

Modelo2 <- lm(formula = logDeformação ~ logComprimento)
abline(Modelo2)
#Para a regressão linear no gráfico 5

plot(Comprimento3, Deformação, grid(), xlab="Comprimento(m³)",
ylab="Deformação(m)", main = "Gráfico do Comprimento pela Deformação")
Modelo1 <- lm(formula = Deformação ~ Comprimento3)
abline(Modelo1)
#Para o gráfico e regressão do gráfico 6
```

#### 4. CONCLUSÃO

Não foi possível com o primeiro método da prática determinar o Módulo de Young com precisão suficiente para determinar a equivalência do material estudado com o Aço Inoxidável. Com o segundo método, porém, a precisão foi suficiente para poder estabelecer esta relação, este se mostrando bem mais preciso na determinação do Módulo da Elasticidade do material.

Com o primeiro método, que consistia na alteração da massa com o comprimento da barra constante, o módulo calculado foi  $E_1 = (10.8 \pm 0.4) \times 10^{10} \text{ Pa}$ . A reta foi bem determinada e a regressão representava muito bem os pontos do conjunto. É possível que o erro esteja na determinação do ângulo onde se fez dependente da indicação do aplicativo, além de que o baricentro do celular não estava exatamente na extremidade da barra, o que compromete a precisão dos cálculos.

No segundo método, que consiste na alteração do comprimento da barra com uma carga fixa enquanto se determina a deformação, o valor do Módulo de Young calculado foi de  $E_2 = (18.7 \pm 0.9) \times 10^{10} \text{ Pa}$ . Assim, como esse resultado se mostrou equivalente ao do Aço Inóx, pode-se supor que há maior imprecisão na medição do ângulo criado pela deformação do que na medição do comprimento da barra, ao passo que essa foi a principal diferença entre o primeiro e o segundo método, e o último teve maior precisão. Desta forma, recomenda-se a utilização do segundo método para atingir o objetivo aqui almejado.

#### REFERENCIAS

1. Callister. W. D, JR. **Materials Science and Engineering: An Introduction**. 7<sup>a</sup> ed. Nova York: John Wiley & Sons, Inc, 2007.
2. Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.. **Fundamentos de Física**. Vol. 1. LTC.
3. Tipler, P. A., Mosca, G.. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Vol. 1. LTC.
4. Young, H. D.; Freedman, R. A.. **Sears and Zemanski Física 1**. 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008.

