Propriedades das operações sobre palavras

Concatenação

elemento neutro	$\lambda.w = w.\lambda = w$
associatividade	$(uv)w = u(vw)$
não comutatividade	e.g., $aa.bb \neq bb.aa$
comprimento	$\|uv\| = \|u\| + \|v\|$

Inversão

da concatenação	$(uv)^R = v^R u^R$

Ordens

Sejam $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um alfabeto com $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ e $u, v, x, y \in \Sigma^*$

Ordem lexicográfica ou do dicionário ($<$)

$u < v$ se
- u é um prefixo próprio de v

  ou
- $u = xa_iy, v = xa_jz$ e $a_i < a_j$

Ordem mista ($<_M$)

$u <_M v$ se
- $|u| < |v|$

  ou
- $|u| = |v|$ e $u < v$

Com igualdade: $u \leq v$ se $u < v$ ou $u = v$, e o mesmo para $\leq_M$

Caracterização finita de linguagens

- Através de uma definição recursiva
- Recorrendo a operações sobre conjuntos
  - união, intersecção, complemento, ...
  - concatenação de conjuntos:

    se X e Y forem conjuntos de palavras (i.e., linguagens)

$$XY = X \cdot Y = \{xy \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

Exemplo

$$\{1,\ 2,\ 3\} \cdot \{1,\ 00,\ \lambda\} \quad = \quad \{\ 11,\ 21,\ 31,\ 100,\ 200,\ 300,\ 1,\ 2,\ 3\ \}$$

Estrela de Kleene

- Seja X um conjunto

$$X^* = \bigcup_{n \geq 0} X^n \qquad X^+ = \bigcup_{n > 0} X^n$$

em alternativa, $X^+ = XX^*$

- Também conhecida como operador de fecho ou de iteração

Exemplo

Linguagem dos números naturais sem zeros à esquerda

$$\{0\} \cup \{1, 2, \ldots, 9\}\{0, 1, \ldots, 9\}^*$$

Propriedades do fecho

Sejam X e Y conjuntos

- $X \subseteq X^*$
- $\emptyset^* = \{\lambda\}$
- se $X \subseteq Y$, então $X^* \subseteq Y^*$
- se $X \neq \emptyset$, então X^* é infinito

Conjuntos regulares

Os conjuntos regulares sobre o alfabeto Σ são definidos como

(base) $\emptyset, \{\lambda\}$ e $\{a\}$, para todo $a \in \Sigma$, são conjuntos regulares sobre Σ

(passo recursivo) sejam X e Y conjuntos regulares sobre Σ; os conjuntos

$$X \cup Y$$
$$XY$$
$$X^*$$

são conjuntos regulares sobre Σ

(fecho) X é um conjunto regular sobre Σ somente se puder ser construído através de um número finito de aplicações do passo recursivo a partir dos elementos da base

Expressões regulares

As expressões regulares sobre o alfabeto Σ são definidas como

(base) $\emptyset, \lambda$ e a, para todo $a \in \Sigma$, são expressões regulares sobre Σ

(passo recursivo) sejam u e v expressões regulares sobre Σ; as expressões

$$(u \cup v)$$
$$(uv)$$
$$(u^*)$$

são expressões regulares sobre Σ

(fecho) u é uma expressão regular sobre Σ somente se puder ser construída através de um número finito de aplicações do passo recursivo a partir dos elementos base

Linguagem regular

A linguagem representada por uma expressão regular é:

$$
\begin{array}{lcll}
L(\emptyset) & = & \emptyset & \\
L(\lambda) & = & \{\lambda\} & \\
L(a) & = & \{a\} & (a \in \Sigma) \\
L(u \cup v) & = & L(u) \cup L(v) & \\
L(uv) & = & L(u)L(v) & \\
L(u^*) & = & L(u)^* &
\end{array}
$$

Duas expressões regulares são equivalentes se representam a mesma linguagem

Uma linguagem representada por uma expressão regular é uma linguagem regular

Propriedades das expressões regulares (1)

$$\emptyset u = u\emptyset = \emptyset \qquad \lambda u = u\lambda = u$$

$$(uv)w = u(vw)$$

$$u \cup v = v \cup u \qquad u \cup \emptyset = u$$

$$(u \cup v) \cup w = u \cup (v \cup w) \qquad u \cup u = u$$

$$u(v \cup w) = uv \cup uw$$

$$(u \cup v)w = uw \cup vw$$

$$\emptyset^* = \lambda \qquad \lambda^* = \lambda$$

$$u^* = (u^*)^* \qquad u^* = \lambda \cup uu^*$$

$$(uv)^*u = u(vu)^*$$

Propriedades das expressões regulares (2)

$$\begin{aligned}
(u \cup v)^* &= (u^* \cup v)^* \\
&= u^*(u \cup v)^* \\
&= (u \cup vu^*)^* \\
&= (u^* v^*)^* \\
&= (u^* v)^* u^* \\
&= u^*(vu^*)^*
\end{aligned}$$