UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Palavras, Linguagens e Expressões regulares

Linguagens Formais e Autómatos

1 Alfabetos, Palavras e Linguagens

Exercício 1

1. *Defina alfabetos para*
   (a) *Escrever números naturais em notação hexadecimal.*
   (b) *Representar a configuração de um semáforo (no que diz respeito aos automóveis).*
   (c) *Escrever as palavras da língua portuguesa.*
   (d) *Escrever frases em português.*

2. *Sejam* $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ *um alfabeto e* $u = 012$ *e* $v = 22021$ *palavras sobre* Σ. *Escreva as palavras seguintes por extenso:*

$(a)\ uv$	$(b)\ vu$	$(c)\ v^R$
$(d)\ u^3$	$(e)\ 012^3$	$(f)\ (012)^3$
$(g)\ v^0u$	$(h)\ (v^2)^{-1}$	

Exercício 2 *Liste todas as subpalavras, todos os prefixos e todos os sufixos das seguintes palavras sobre o alfabeto* $\{0, 1, 2, 3\}$*:*

$(a)\ 01023$	$(b)\ 11111$	$(c)\ \lambda$

Exercício 3 *Construa definições recursivas dos seguintes conjuntos, onde* $\Sigma = \{a, b\}$ *é um alfabeto.*

1. $C_1 = \{$palavras sobre Σ em que o símbolo a ocorre aos pares$\}$ (C_1 inclui, por exemplo, $bbaab$ e $aaaa$, mas não inclui aaa ou $aabaaaba$.)

2. $C_2 = \{w\ :\ w \in \Sigma^*, |w|$ é par$, w$ começa por a e, em w, os a's e os b's ocorrem alternados$\}$.

3. $C_3 = \{w\ :\ w \in \Sigma^*$ e w é capicua$\}$.

4. ✓ $C_4 = \{a^n b^n\ :\ n > 0\}$. (Nota: a^k representa k ocorrências consecutivas do símbolo a).

5. $C_5 = \{a^i b^j\ :\ 0 \leq i < j\}$.

6. ✓ $C_6 = \{w\ :\ w \in \Sigma^*$ e o número de a's em w é igual ao de $b's\}$. (Sugestão: use a concatenação de palavras no passo recursivo.)

Exercício 4 *Encontre a menor palavra sobre o alfabeto* $\{0\}$ *que não está em* $\{\lambda, 0, 0^2, 0^5\}^3$.

Exercício 5 *Demonstre as Propriedades do fecho: Se* Σ *e* Γ *forem alfabetos:*

- $\Sigma \subseteq \Sigma^*$;
- $\emptyset^* = \{\lambda\}$;

- *se* $\Sigma \subset \Gamma$ *então* $\Sigma^* \subset \Gamma^*$*;*
- *se* $\Sigma \neq \emptyset$ *então* Σ^* *é infinito;*

Exercício 6 *Demonstre as propriedades da concatenação.*
Sejam $x, y, z \in \Sigma^*$*.*

- *(associativa)* $x\,(yz) = (xy)\,z$*;*
- *(elemento neutro)* $\lambda x = x\lambda = x$*;*
- *(*não *comutativa)* $xy \neq yx$, *em geral;*
- *(aditiva)* $|xy| = |x| + |y|$*;*
- *(unicidade) cada palavra só pode ser escrita de uma* única *forma como concatenação de símbolos de* Σ*;*

Exercício 7 *Na ordem lexicográfica, quantos elementos existem entre* 0 e 1*? E na ordem mista?*

Exercício 8 *Faça o diagrama das seguintes linguagens:*

1. $\{0^n \ : \ n \text{ é } par.\}$*;*
2. $\{x \in \{0,1\} \ : \ |x| \leq 4\}$*;*
3. $\{0^n 1^n \ : \ n \geq 0\}$*;*
4. $\{0^n 1^m \ : \ n \geq 0, m \geq 0\}$*;*

Exercício 9

1. *Calcule* $\{0,1\}\,\{1,2\}$*;*
2. *É verdade que* $|AB| = |A|\,|B|$*?*
3. $A = \{(01)^n \ : \ n \geq 0\}$, $B = \{01, 010\}$*. Calcule* AB e ABA*;*
4. *Verifique que* $\{0, 10\}^*$ *é a linguagem das palavras binárias que não têm* 11 *como subpalavra e terminam em* 0*;*
5. *Verifique que* $A^+ = A^*$ *se, e só se,* $\lambda \in A$*;*
6. *Verifique que* $(AB)^R = B^R A^R$ *e que* $(A \cup B)^R = A^R \cup B^R$*;*

Exercício 10 *Mostre que, se* A e B *forem linguagens,*

$$(A \cup B)^* = A^*\,(BA^*)^*$$

Tem de provar que

1. $(A \cup B)^* \subseteq A^*\,(BA^*)^*$*;*
2. $A^*\,(BA^*)^* \subseteq (A \cup B)^*$*;*

Exercício 11 *Sejam* $A = \{\mathtt{anti}, \mathtt{pro}, \lambda\}$, $B = \{\mathtt{pesso}, \mathtt{soci}\}$, $C = \{\mathtt{al}\}$*. O que são* ABC e A^*BC*?*

Exercício 12 *Seja A uma linguagem sobre $\{0,1\}$ e $x \in \{0,1\}^*$. Encontre condições necessárias e suficientes para que se verifique*

$$A^* \setminus \{x\} = A^+.$$

Exercício 13 *Verifique (com uma demonstração ou contra-exemplo) se as seguintes equações são válidas para todas as linguagens.*

1. $\left(A^R\right)^* = (A^*)^R$;
2. $(A^+)^* = A^*$;
3. $\left(A \cup A^R\right)^* = A^* \cup (A^*)^R$;
4. $A^2 \cup B^2 = (A \cup B)^2$;
5. $A^* \cap B^* = (A \cap B)^*$

Exercício 14 *Mostre que, para $n \geq 1$,*

- $\bigcup_{i=0}^{n} A^i = (\{\lambda\} \cup A)^n$;
- $(A^*)^n = A^*$;
- *se* $\lambda \notin A$ *então* $(A^+)^n = A^n A^*$

Exercício 15 *Demonstre:*

- $A\,(BA)^* = (AB)^*\,A$;
- $(A \cup B)^* = (A^*B^*)^*$;
- $A\,(B \cup C) = AB \cup AC$;
- $(A \cup B)\,C = AC \cup BC$;
- $A^*B\,(DA^*B \cup C)^* = (A \cup BC^*D)^*\,BC^*$;

2 Expressões regulares

Exercício 16 ✓ *Considere a expressão regular $(11 \cup 0)^*\,(00 \cup 1)^*$ e o respetivo diagrama (exemplo nas folhas teóricas). Encontre uma palavra que não case com esta expressão regular. O que acontece se eliminar o arco-λ central no diagrama simplificado?*

Exercício 17

1. *Construa e simplifique* $\mathcal{G}\left(a^*b\,(c \cup da^*b)^*\right)$;
2. *Qual é a mais curta palavra (não vazia) das linguagens das expressões:*
   (a) $10 \cup (0 \cup 11)\,0^*1$;
   (b) $(00 \cup 11 \cup (01 \cup 10)\,(00 \cup 11)^*\,(01 \cup 10))^*$
   (c) $((00 \cup 11)^* \cup (001 \cup 110)^*)^*$
3. *Construa um algoritmo para encontrar a menor palavra numa linguagem regular:*

(a) dada uma expressão regular;

(b) dada o diagrama duma expressão regular.

Exercício 18

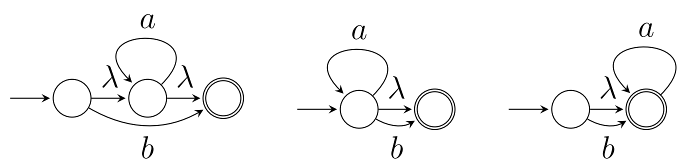
1. Encontre diagramas para as seguintes expressões regulares:

   (a) $(00 \cup 10)\,(101)^* \cup 01$;

   (b) $((00 \cup 11)^* \cup (001 \cup 110)^*)^*$;

   (c) $(a \cup bc^*d)^*\, bc^*$

2. Determine as expressões regulares definidas por:



3. Determine o menor grafo que representa λ;

4. Encontre exemplos que mostrem a necessidade das condições de remoção de arcos-λ;

Exercício 19 *Construa* uma única *expressão regular que represente os números reais sem sinal escritos de acordo com as seguintes regras:*

- *um número real tem sempre uma vírgula;*
- *um número real começa por 0 se e só se a sua parte inteira é 0;*
- *um número real acaba em 0 se e só se a sua parte decimal é 0.*

Exercício 20 *Construa expressões regulares que representem as linguagens indicadas.*

1. ✓ A linguagem das palavras sobre $\{a, b, c\}$ em que todos os a's precedem todos os b's que, por sua vez, precedem todos os c's (donde que todos os a's precedem todos os c's), podendo não haver nem a's, nem b's, nem c's.

2. ✓ A linguagem da alínea anterior sem a palavra vazia.

3. As palavras sobre $\{a, b, c\}$ de comprimento inferior a 3.

4. As palavras sobre $\{a, b, c\}$ que começam por a, acabam em cc e têm exactamente dois b's.

5. A linguagem das palavras sobre $\{a, b\}$ que têm aa e bb como subpalavras.

6. As palavras sobre $\{a, b\}$ de que bba não é subpalavra.

7. ✓ A linguagem das palavras sobre $\{a, b\}$ que não têm prefixo aaa.

8. ✓ A linguagem das palavras sobre $\{a, b\}$ que não têm aaa como subpalavra.

9. As palavras sobre $\{a, b\}$ em que ab não ocorre.

10. As palavras sobre $\{a, b\}$ em que ab ocorre.

11. *As palavras sobre $\{a, b\}$ em que ab ocorre só uma vez.*

Exercício 21 *Descreva, informalmente, as linguagens representadas pelas expressões regulares seguintes:*

1. $(a \cup b \cup c)(a \cup b \cup c)^*$
2. $(a \cup b)((a \cup b)(b \cup a))^*$
3. $5 \cup (1 \cup 2 \cup \cdots \cup 9)(0 \cup 1 \cup \cdots \cup 9)^*(0 \cup 5)$
4. $c^*(a \cup b)(a \cup b \cup c)^*$
5. $(a(b \cup c)^*a \cup b \cup c)^*$

Exercício 22 *Simplifique as expressões regulares seguintes:*

1. ✓ $\emptyset^* \cup a^* \cup b^*(a \cup b)^*$
2. $aa^*b \cup b$
3. ✓ $b^*(a \cup (b^*a^*)^*)ab^*(ab^*)^*b$
4. † $(a^*b)^* \cup (b^*a)^*$

Exercício 23 *Encontre uma expressão regular para as palavras binárias*

1. *que representam as potências de 4;*
2. *com, pelo menos, uma ocorrência de 001;*
3. † *que não têm 001 como subpalavra;*
4. *com, quanto muito, uma ocorrência de 00 e, quanto muito, uma ocorrência de 11;*
5. *em que nenhum prefixo tem mais dois 0s que 1s nem mais dois 1s que 0s;*

Exercício 24 *Verifique as igualdades*

$$\begin{aligned} 0^* (0 \cup 1)^* &= (0 \cup 10^*)^* \\ (10)^+ (0^*1^* \cup 0^*) &= (10)^* \, 10^+1^* \end{aligned}$$

Exercício 25

1. *Descreva em linguagem natural as linguagens representadas:*
   (a) $(0^*1^*)^* \, 0$;
   (b) $(01^*)^* \, 0$;
   (c) $(00 \cup 11 \cup (01 \cup 10) (00 \cup 11)^* (01 \cup 10))^*$;
   (d) $0^* \cup (0^*1 \cup 0^*11) (0^+1 \cup 0^+11)^* \, 0^*$;
2. *Simplifique*
   (a) $(00)^* \, 0 \cup (00^*)$;
   (b) $(0 \cup 1) (\lambda \cup 00)^+ \cup (0 \cup 1)$;

(c) $(0 \cup \lambda)\, 0^* 1$;

3. *Mostre que* $(0^2 \cup 0^3)^* = (0^2 0^*)^*$;

Exercício 26 *Defina expressões regulares para as linguagens binárias das palavras que:*

1. *o quinto símbolo a contar da direita é* 0;
2. *têm* 000 *ou* 111 *como subpalavra;*
3. *não têm* 000 *nem* 111 *como subpalavra;*
4. *não têm* 010 *como subpalavra;*
5. *têm um número ímpar de* 0*s;*
6. *têm um número par de ocorrências de* 011;