Linguagens Formais Autómatos
Resolução de Alguns Exercícios

Vasco Pedro
Departamento de Informática
Universidade de Évora

2012/2013

Aqui apresentam-se resoluções possíveis para alguns dos exercícios propostos em LFA.

Exercício B.1.

(d) Definição recursiva de $C_4 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$:

- $ab \in C_4$;
- se $w \in C_4$, então $awb \in C_4$;
- $w \in C_4$ somente se pode ser gerada através de um número finito de aplicações do passo recursivo a partir do elemento da base.

(f) Definição recursiva de $C_6 = \{w \mid w \in \{a, b\}^*$ e o número de a's em w é igual ao de b's$\}$:

- $\lambda \in C_6$;
- se $v, w \in C_6$, então awb, bwa e $vw \in C_6$;
- $w \in C_6$ somente se pode ser gerada através de um número finito de aplicações do passo recursivo a partir do elemento da base.

Exercício D.2.

(a) $a^*b^*c^*$

(b) $aa^*b^*c^* \cup a^*bb^*c^* \cup a^*b^*cc^*$

(g) $(\lambda \cup a \cup aa)(\lambda \cup b(a \cup b)^*)$

(h) $((\lambda \cup a \cup aa)b)^*(\lambda \cup a \cup aa)$

Exercício D.4.

(a) $\emptyset^* \cup a^* \cup b^*(a \cup b)^*$

$$\begin{aligned}
\emptyset^* \cup a^* \cup b^*(a \cup b)^* &= \lambda \cup a^* \cup b^*(a \cup b)^* && (\emptyset^* = \lambda)\\
&= a^* \cup b^*(a \cup b)^* && (\lambda \in L(a^*))\\
&= a^* \cup b^*(b \cup a)^* && (u \cup v = v \cup u)\\
&= a^* \cup (b \cup a)^* && (u^*(u \cup v) = (u \cup v)^*)\\
&= (b \cup a)^* && (L(a^*) \subseteq L((b \cup a)^*))
\end{aligned}$$

(c) $b^*(a \cup (b^*a^*)^*)ab^*(ab^*)^*b$

$$\begin{aligned}
b^*(a \cup (b^*a^*)^*)ab^*(ab^*)^*b &= b^*(a \cup (b \cup a)^*)ab^*(ab^*)^*b && ((u^*v^*)^* = (u \cup v)^*)\\
&= b^*(b \cup a)^*ab^*(ab^*)^*b && (L(a) \subseteq L((b \cup a)^*))\\
&= (b \cup a)^*ab^*(ab^*)^*b && (u^*(u \cup v)^* = (u \cup v)^*)\\
&= (b \cup a)^*a(b \cup a)^*b && (u^*(vu^*)^* = (u \cup v)^*)
\end{aligned}$$

Poder-se-ia parar aqui ou continuar com:

$$\begin{aligned}
&= b^*(ab^*)^*a(b \cup a)^*b && ((u \cup v)^* = u^*(vu^*)^*)\\
&= b^*a(b^*a)^*(b \cup a)^*b && ((uv)^*u = u(vu)^*)\\
&= b^*a(b^*a)^*b^*(b \cup a)^*b && ((u \cup v)^* = u^*(u \cup v)^*)\\
&= b^*a(b \cup a)^*(b \cup a)^*b && ((u^*v)^*u^* = (u \cup v)^*)\\
&= b^*a(b \cup a)^*b && (\textit{mostrar que } u^*u^* = u^*)
\end{aligned}$$

Exercício E.2.

(b) $(y \cup x(x \cup yx)^*yy)^*$ ou $(y^*x(x^*(yx)^*)^*yy)^*y^*$

(c) $(y \cup x(x \cup yx)^*yy)^*(\lambda \cup x(x \cup yx)^*)$

Exercício F.3.

	λ-fecho
0	$\{0,1\}$
1	$\{1\}$
2	$\{2,3\}$
3	$\{3\}$

t	m	n
0	$\{1\}$	$\{1,2,3\}$
1	$\emptyset$	$\{1,3\}$
2	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$
3	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$

	δ_D	m	n
λ-fecho$(0) =$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{1,2,3\}$
	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1,3\}$
	$\{1,2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,3\}$
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\{1,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,3\}$

O autómato finito determinista obtido é

$$N_D = (\{\{1\},\{1,2,3\},\emptyset,\{1,3\}\},\{m,n\},\delta_D,\{0,1\},\{\{1\},\{1,2,3\},\{1,3\}\})$$

Uma expressão regular que representa $L(N)$ é $(\lambda \cup m)(\lambda \cup n(m \cup n)^*)$.

Exercício F.4.

(a) Um autómato finito não determinista que reconhece $(a \cup b)^* b(a \cup b)(a \cup b)$ é $M = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, \delta, A, \{D\})$ com a função de transição

δ	a	b
A	$\{A\}$	$\{A, B\}$
B	$\{C\}$	$\{C\}$
C	$\{D\}$	$\{D\}$
D		

(b)

	λ-fecho
A	$\{A\}$
B	$\{B\}$
C	$\{C\}$
D	$\{D\}$

t	a	b
A	$\{A\}$	$\{A, B\}$
B	$\{C\}$	$\{C\}$
C	$\{D\}$	$\{D\}$
D		

Porque é que $t(q, a) = \delta(q, a)$, quaisquer que sejam o estado q e o símbolo a?

	δ_D	a	b
λ-fecho$(A) =$	$\{A\}$	$\{A\}$	$\{A, B\}$
	$\{A, B\}$	$\{A, C\}$	$\{A, B, C\}$
	$\{A, C\}$	$\{A, D\}$	$\{A, B, D\}$
	$\{A, B, C\}$	$\{A, C, D\}$	$\{A, B, C, D\}$
	$\{A, D\}$	$\{A\}$	$\{A, B\}$
	$\{A, B, D\}$	$\{A, C\}$	$\{A, B, C\}$
	$\{A, C, D\}$	$\{A, D\}$	$\{A, B, D\}$
	$\{A, B, C, D\}$	$\{A, C, D\}$	$\{A, B, C, D\}$

O autómato finito determinista obtido é

$$M_D = (\{\{A\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{A, B, C\}, \{A, D\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{A, B, C, D\}\},$$
$$\{a, b\}, \delta_D, \{A\}, \{\{A, D\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{A, B, C, D\}\})$$

Exercício G.1.

		a	b
I	B	II	II
	D	II	II
II	A	I	II
	C	I	II
	E	II	II
	F	II	II

		a	b
I	B	III	II
	D	III	II
II	A	I	III
	C	I	III
III	E	III	III
	F	III	III

δ_M	a	b
I	III	II
II	I	III
III	III	III

O autómato finito determinista mínimo equivalente a M é

$$M_M = (\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\}, \{a, b\}, \delta_M, \mathrm{II}, \{\mathrm{I}\})$$

A expressão regular $a(ba)^*$ representa a linguagem reconhecida por M.

Exercício G.3.

(a) Um autómato finito não determinista que reconhece $(aa)^* \cup (aaa)^*$ é

$$M = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{a\}, \delta, 1, \{2, 4\})$$

com a função de transição

δ	a	λ
1		$\{2, 4\}$
2	$\{3\}$	
3	$\{2\}$	
4	$\{5\}$	
5	$\{6\}$	
6	$\{4\}$	

(b)

	λ-fecho
1	$\{1, 2, 4\}$
2	$\{2\}$
3	$\{3\}$
4	$\{4\}$
5	$\{5\}$
6	$\{6\}$

t	a
1	$\{3, 5\}$
2	$\{3\}$
3	$\{2\}$
4	$\{5\}$
5	$\{6\}$
6	$\{4\}$

	δ_D	a
λ-fecho(1) =	$\{1, 2, 4\}$	$\{3, 5\}$
	$\{3, 5\}$	$\{2, 6\}$
	$\{2, 6\}$	$\{3, 4\}$
	$\{3, 4\}$	$\{2, 5\}$
	$\{2, 5\}$	$\{3, 6\}$
	$\{3, 6\}$	$\{2, 4\}$
	$\{2, 4\}$	$\{3, 5\}$

Renomeando os estados de acordo com as equivalências seguintes

$$\begin{array}{cccc} 124 \equiv \{1, 2, 4\} & 26 \equiv \{2, 6\} & 25 \equiv \{2, 5\} & 24 \equiv \{2, 4\} \\ 35 \equiv \{3, 5\} & 34 \equiv \{3, 4\} & 36 \equiv \{3, 6\} & \end{array}$$

obtemos o autómato finito determinista

$$M_D = (\{124, 35, 26, 34, 25, 36, 24\}, \{a\}, \delta'_D, 124, \{124, 26, 34, 25, 24\})$$

com a função de transição

δ'_D	a
124	35
35	26
26	34
34	25
25	36
36	24
24	35

(c)

		a
I	124	II
	26	I
	34	I
	25	II
	24	II
II	35	I
	36	I

		a
I	124	III
	25	III
	24	III
II	26	II
	34	I
III	35	II
	36	I

		a
I	124	IV
	25	V
	24	IV
II	26	III
III	34	I
IV	35	II
V	36	I

		a
I	124	V
	24	V
II	25	VI
III	26	IV
IV	34	II
V	35	III
VI	36	I

O autómato finito determinista mínimo equivalente a M é

$$M_M = (\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}\}, \{a\}, \delta_M, \mathrm{I}, \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}\})$$

com a função de transição δ_M abaixo

δ_M	a
I	V
II	VI
III	IV
IV	II
V	III
VI	I

Exercício I.4.

Uma gramática que gera a linguagem pretendida é $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, com P o conjunto com as produções:

$$\begin{array}{l} S \to aSb \mid A \mid B \\ A \to aA \mid a \\ B \to bB \mid b \end{array}$$

Exercício I.8.

A gramática $G_{PL} = (\{T, A\}, \{v, f, (,), ,\}, P_{PL}, T)$, com P_{PL} o conjunto com as produções

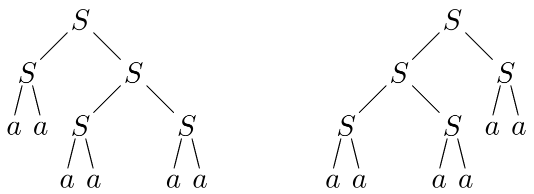
$$\begin{aligned} T &\to v \mid f \mid f(A) \\ A &\to T\mathbf{,}A \mid T \end{aligned}$$

gera a linguagem dos termos Prolog na forma pedida.

Exercício I.10.

(a) Consideremos a palavra $aaaaaa \in L(G)$.

Esta palavra tem as seguintes árvores de derivação:



Como existe uma palavra da linguagem gerada por G com duas árvores de derivação distintas, G é ambígua.

(b) A gramática $G' = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aa \mid aaS\}, S)$ é uma gramática independente do contexto não ambígua equivalente a G.

(c) A gramática $G'' = (\{S, X\}, \{a\}, \{S \to aX, X \to a \mid aS\}, S)$ é uma gramática regular equivalente a G.

(d) A expressão regular $aa(aa)^*$ representa $L(G)$.