Composição de autómatos (1)

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFND. Existe um AFND

$$M' = (Q \cup \{q_0', q_f\}, \Sigma, \delta', q_0', \{q_f\})$$

equivalente a M em que

- não há transições para o estado q_0'
- o único estado de aceitação é q_f
- não há transições a partir do estado q_f

A função de transição de M' é obtida acrescentando a δ

- $(q_0', \lambda, \{q_0\})$
- uma transição λ de cada $q \in F$ para q_f

NB: $\{q_0', q_f\} \cap Q = \emptyset$, $q_0' \neq q_f$

Composição de autómatos (2)

Sejam M_A e M_B dois autómatos finitos nas condições anteriores

$$M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_{0_A}, \{q_{f_A}\}) \qquad M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_{0_B}, \{q_{f_B}\})$$

Definem-se os autómatos finitos seguintes

1. $$M_. = (Q_A \cup Q_B, \Sigma, \delta_., q_{0_A}, \{q_{f_B}\})$$

   onde

   $$\delta_. = \delta_A \cup \delta_B \cup \{(q_{f_A}, \lambda, \{q_{0_B}\})\}$$

   com

   $$L(M_.) = L(M_A)L(M_B)$$

NB: $Q_A \cap Q_B = \emptyset$, $\{q_0, q_f\} \cap (Q_A \cup Q_B) = \emptyset$, $q_0 \neq q_f$

Composição de autómatos (3)

2.

$$M_\cup = (Q_A \cup Q_B \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma, \delta_\cup, q_0, \{q_f\})$$

onde

$$\begin{aligned}\delta_\cup = \delta_A \cup \delta_B \cup \{\, & (q_0, \lambda, \{q_{0_A}, q_{0_B}), \\ & (q_{f_A}, \lambda, \{q_f\}), (q_{f_B}, \lambda, \{q_f\}) \,\}\end{aligned}$$

com

$$L(M_\cup) = L(M_A) \cup L(M_B)$$

3.

$$M_* = (Q_A \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma, \delta_*, q_0, \{q_f\})$$

onde

$$\delta_* = \delta_A \cup \{\, (q_0, \lambda, \{q_{0_A}, q_f\}),\ (q_{f_A}, \lambda, \{q_{0_A}, q_f\}) \,\}$$

com

$$L(M_*) = L(M_A)^*$$

Pumping Lemma

Teorema (*Pumping Lemma* para linguagens regulares)

Seja L uma linguagem regular e seja k o número de estados de um AFD que a reconhece. Então qualquer palavra p de L, tal que $|p| \geq k$, pode ser escrita como

$$uvw, \text{ com } |uv| \leq k \text{ e } |v| > 0$$

e

$$uv^iw \in L, \text{ para todo o } i \geq 0$$

Aplicação do *Pumping Lemma* para linguagens regulares

Exemplo

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Se L for uma linguagem regular, existe um AFD que a reconhece

Sejam k o número de estados desse autómato e $p = a^k b^k$

Qualquer decomposição de p nas condições do *Pumping Lemma* será da forma

$$\begin{array}{ccc} u & v & w \\ a^j & a^m & a^{k-j-m} b^k \end{array}$$

com $j + m \leq k$ e $m > 0$

Para $i = 0$ temos

$$uv^0w = a^j(a^m)^0 a^{k-j-m} b^k = a^{k-m} b^k$$

Sendo $m > 0$, então $k - m \neq k$. Como todas as palavras de L têm igual número de as e de bs, $a^{k-m} b^k \notin L$ e L não é uma linguagem regular

Gramáticas (1)

1. $\langle$frase$\rangle \rightarrow \langle$sujeito$\rangle$ $\langle$frase-verbal$\rangle$
2. $\langle$frase$\rangle \rightarrow \langle$sujeito$\rangle$ $\langle$verbo$\rangle$ $\langle$compl-directo$\rangle$
3. $\langle$sujeito$\rangle \rightarrow \langle$subst-próprio$\rangle$
4. $\rightarrow \langle$artigo$\rangle$ $\langle$subst-comum$\rangle$
5. $\langle$subst-próprio$\rangle \rightarrow$ John
6. $\rightarrow$ Jill
7. $\langle$subst-comum$\rangle \rightarrow$ car
8. $\rightarrow$ hamburger
9. $\langle$artigo$\rangle \rightarrow$ a
10. $\rightarrow$ the
11. $\langle$frase-verbal$\rangle \rightarrow \langle$verbo$\rangle$ $\langle$advérbio$\rangle$
12. $\rightarrow \langle$verbo$\rangle$
13. $\langle$verbo$\rangle \rightarrow$ drives
14. $\rightarrow$ eats
15. $\langle$advérbio$\rangle \rightarrow$ slowly
16. $\rightarrow$ frequently

Gramáticas (2)

Geração por reescrita

$$
\begin{aligned}
&\langle \text{frase} \rangle \\
&\quad \Rightarrow \langle \text{sujeito} \rangle\ \langle \text{frase-verbal} \rangle \\
&\quad \Rightarrow \langle \text{artigo} \rangle\ \langle \text{subst-comum} \rangle\ \langle \text{frase-verbal} \rangle \\
&\quad \Rightarrow \langle \text{artigo} \rangle\ \text{hamburger}\ \langle \text{frase-verbal} \rangle \\
&\quad \Rightarrow \langle \text{artigo} \rangle\ \text{hamburger}\ \langle \text{verbo} \rangle\ \langle \text{advérbio} \rangle \\
&\quad \Rightarrow \text{the hamburger}\ \langle \text{verbo} \rangle\ \langle \text{advérbio} \rangle \\
&\quad \Rightarrow \text{the hamburger}\ \langle \text{verbo} \rangle\ \text{slowly} \\
&\quad \Rightarrow \text{the hamburger drives slowly}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \text{frase} \rangle &\rightarrow \langle \text{sujeito} \rangle\ \langle \text{frase-verbal} \rangle \\
\langle \text{sujeito} \rangle &\rightarrow \langle \text{artigo} \rangle\ \langle \text{subst-comum} \rangle \\
\langle \text{subst-comum} \rangle &\rightarrow \text{hamburger} \\
\langle \text{frase-verbal} \rangle &\rightarrow \langle \text{verbo} \rangle\ \langle \text{advérbio} \rangle \\
\langle \text{artigo} \rangle &\rightarrow \text{the} \\
\langle \text{advérbio} \rangle &\rightarrow \text{slowly} \\
\langle \text{verbo} \rangle &\rightarrow \text{drives}
\end{aligned}
$$

Símbolos terminais: John, Jill, hamburger, car, a, the, drives, eats, slowly, frequently

Símbolos não terminais: $\langle$frase$\rangle$, $\langle$frase-verbal$\rangle$, $\langle$sujeito$\rangle$, $\langle$verbo$\rangle$, ...

Gramáticas (3)

$$
\begin{array}{rlll}
1. & \langle\text{frase}\rangle & \to & \langle\text{sujeito}\rangle\ \langle\text{frase-verbal}\rangle \\
2. & & \to & \langle\text{sujeito}\rangle\ \langle\text{verbo}\rangle\ \langle\text{compl-directo}\rangle \\
\vdots & & & \\
17. & \langle\text{adjectivos}\rangle & \to & \langle\text{adjectivo}\rangle\ \langle\text{adjectivos}\rangle \\
18. & & \to & \lambda \\
19. & \langle\text{adjectivo}\rangle & \to & \text{big} \\
20. & & \to & \text{juicy} \\
21. & & \to & \text{brown} \\
22. & \langle\text{compl-directo}\rangle & \to & \langle\text{adjectivos}\rangle\ \langle\text{subst-próprio}\rangle \\
23. & & \to & \langle\text{artigo}\rangle\ \langle\text{adjectivos}\rangle \\
 & & & \langle\text{subst-comum}\rangle
\end{array}
$$

Gramáticas independentes do contexto

Definição

Uma gramática independente do contexto (GIC) é um tuplo
$G = (V, \Sigma, P, S)$ onde

V é o conjunto finito dos símbolos **não terminais** $(A, B, C, \ldots)$

Σ é o conjunto finito dos símbolos **terminais** (alfabeto)

$P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$ é um conjunto finito de **produções**

$S \in V$ é o **símbolo inicial** da gramática

NB: $V \cap \Sigma = \emptyset$

Derivação

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma gramática independente do contexto

Se $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$, $A \in V$ e existe uma produção $A \to w$ em P, então uAv deriva directamente uwv

$$uAv \Rightarrow_G uwv$$

Se existem $u_0, u_1, \ldots, u_n \in (V \cup \Sigma)^*, n \geq 0$, tais que

$$u = u_0 \Rightarrow_G u_1 \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G u_n = v$$

então u deriva v em n passos

$$u \Rightarrow_G^n v$$

Se $u \Rightarrow_G^n v$ para algum $n \geq 0$, u deriva v

$$u \Rightarrow_G^* v$$

Linguagem gerada

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma gramática independente do contexto

O conjunto das palavras deriváveis a partir de $v \in (V \cup \Sigma)^*$, $D(v)$, define-se como

$$D(v) = \{w \mid v \Rightarrow^* w\}$$

A linguagem gerada por G, $L(G)$, é o conjunto das palavras sobre Σ^* deriváveis a partir de S

$$L(G) = \{w \mid w \in \Sigma^* \text{ e } S \Rightarrow^* w\}$$

$L(G)$ é uma linguagem independente do contexto

Duas gramáticas são equivalentes se geram a mesma linguagem