Recursividade

Uma produção (directamente) recursiva tem a forma

$$A \rightarrow uAv$$

O símbolo não-terminal A é recursivo se

$$A \Rightarrow^{+} uAv$$

Uma derivação com a forma

$$A \Rightarrow w \Rightarrow^{+} uAv$$

em que A não ocorre em w, diz-se indirectamente recursiva

$(u, v, w \in (V \cup \Sigma)^{*})$

Independência das sub-derivações

Lema

Sejam $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma GIC e $v \Rightarrow^n w$ uma derivação em G em que v tem a forma

$$v = w_1 \, A_1 \, w_2 \, A_2 \ldots w_k \, A_k \, w_{k+1}$$

com $w_i \in \Sigma^*$. Então existem palavras $p_i \in (V \cup \Sigma)^*$ que satisfazem

1. $A_i \Rightarrow^{t_i} p_i$
2. $w = w_1 \, p_1 \, w_2 \, p_2 \ldots w_k \, p_k \, w_{k+1}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} t_i = n$

Derivação esquerda e direita

Existência

Numa derivação esquerda ($\Rightarrow_\mathsf{L}$), em todos os passos é reescrito o símbolo não terminal mais à esquerda

Numa derivação direita ($\Rightarrow_\mathsf{R}$), em todos os passos é reescrito o símbolo não terminal mais à direita

Teorema (existência de derivação esquerda)

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma GIC. Uma palavra $w \in \Sigma^*$ pertence a $L(G)$ sse

$$S \Rightarrow_\mathsf{L}^* w$$

É, igualmente, garantida a existência de derivação direita

Árvore de derivação

Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma GIC

A árvore de derivação correspondente à derivação $S \Rightarrow^* w$ é formada de acordo com as seguintes regras:

1. A raiz da árvore é o símbolo inicial S
2. Se $A \rightarrow x_1 x_2 \ldots x_n$, com $x_i \in V \cup \Sigma$, foi a produção usada para reescrever o símbolo A, então o nó A correspondente tem filhos x_1, x_2, ..., x_n, por esta ordem
3. Se $A \rightarrow \lambda$ foi a produção usada para reescrever o símbolo A, então o nó A correspondente tem λ como único filho

Uma palavra w tem árvore de derivação T (e T é uma árvore de derivação de w) se w for a concatenação das folhas de T

Ambiguidade

Uma gramática G diz-se ambígua se alguma palavra de $L(G)$ tem pelo menos:

- duas árvores de derivação distintas ou
- duas derivações esquerdas distintas ou
- duas derivações direitas distintas

Uma linguagem é inerentemente ambígua se não existir uma gramática não ambígua que a gere

$$\{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ ou } j = k\}$$

Expressões aritméticas e ambiguidade

$$G_{\mathsf{EA}} = (\{E\}, \{n, +, -, \times, \div\}, P_{\mathsf{EA}}, E) \quad \text{com produções } P_{\mathsf{EA}}:$$

1ª versão (ambígua)

$$E \to E + E \mid E - E \mid E \times E \mid E \div E \mid n$$

2ª versão — Prioridades (ambígua)

$$E \to E + E \mid E - E \mid T$$

$$T \to T \times T \mid T \div T \mid F$$

$$F \to n$$

3ª versão — Associatividade (à esquerda)

$$E \to E + T \mid E - T \mid T$$

$$T \to T \times F \mid T \div F \mid F$$

$$F \to n$$