

1. Um laboratório faz testes de gravidez que dão um resultado positivo ou negativo (a mulher está ou não está grávida). O teste que usam é muito preciso: só 1 resultado positivo em cada 100 está incorrecto e só um resultado negativo em cada 1000 está incorrecto. Dado que 70% das mulheres que fizeram o teste no laboratório estavam realmente grávidas, utilize a regra de Bayes para calcular a probabilidade de um mulher (que tenha feito o teste) esteja realmente grávida se o resultado do teste for positivo.

A lab makes pregnancy tests that may give a positive or negative result (the woman is or is not pregnant). The test they use is very accurate: only one positive result in 100 is incorrect and only a negative result in 1000 is incorrect. Given that 70 % of the women who took the test in the laboratory were actually pregnant, use Bayes' rule to calculate the probability of a woman (who has taken the test) is really pregnant if the test result is positive.

2. Um forno eléctrico tem um mecanismo que permite marcar o tempo e a temperatura desejadas procurando garantir um bom assado mesmo que o tempo marcado seja excessivo ou insuficiente. Para isso o forno tem dois sensores um de humidade e um de temperatura, o aquecimento mantém-se ligado enquanto a temperatura no interior do forno for a programada e o temporizador não disparar ou o sensor de humidade não indicar que a humidade é muito baixa.

Considere as seguintes variáveis aquecimento ligado (A), temperatura forno (Tf), termómetro (Tm), termómetro defeituoso (TmD), temperatura desejada (Td), humidade no forno (H), sensor de humidade (Hm), sensor de humidade defeituoso (HmD) e temporizador (T).

An oven has a mechanism that allows us to set the time and the desired temperature while ensuring a good roast even when the marked time is either excessive or insufficient. These ovens have two sensors, one for the temperature and another one for the humidity, the heating remains on while the temperature inside the oven is the programmed and the timer does not trigger or humidity sensor does not indicate that the humidity is very low.

Consider the following variables heating on (A), oven temperature (Tf), thermometer (Tm), defective thermometer (TMD), desired temperature (Td), oven humidity (H), humidity sensor (Hm), humidity sensor defective (HMD) and timer (T).

- (a) Desenhe uma rede bayes para este domínio sabendo que o aquecimento é desligado quando: a temperatura excede a desejada; o temporizador dispara e a humidade não é muito baixa; a humidade é muito baixa.

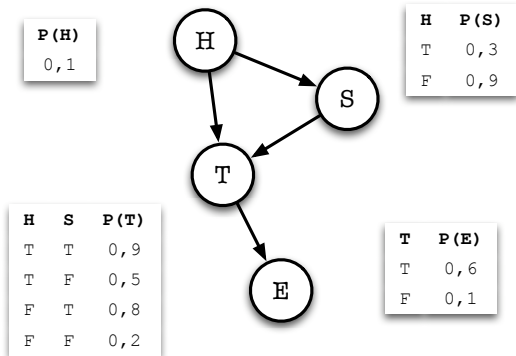
Draw a Bayes net for this domain knowing that the heating is switched off when: the temperature exceeds the desired one; the timer fires and the humidity is not too low; the humidity is very low.

- (b) Suponha que só há dois valores para a humidade (baixa, alta) e que o medidor de humidade indica humidade correcta 80% do tempo que funciona bem mas só 15% quando está defeituoso. Indique a tabela de probabilidades condicionais para o medidor de humidade (Hm).

Suppose there are only two values for the humidity (low, high) and the humidity monitor indicates the proper humidity 80% of the time when it works well but only on 15 % when it is defective. What is conditional probabilities table for the humidity monitor (Hm).

3. Considere a rede de Bayes acima:

Consider de above Bayes net;



- (a) Calculate (Calculate) $P(e)$.

$$\begin{aligned}
 P(e) &= \sum_{H,S,T} P(e, H, S, T) = \\
 &P(e, h, s, t) + \\
 &P(e, h, s, \neg t) + \\
 &P(e, h, \neg s, t) + \\
 &P(e, h, \neg s, \neg t) + \\
 &P(e, \neg h, s, t) + \\
 &P(e, \neg h, s, \neg t) + \\
 &P(e, \neg h, \neg s, t) + \\
 &P(e, \neg h, \neg s, \neg t) = \\
 &P(e|t) * P(h) * P(s|h) * P(t|h, s) + \\
 &P(e|\neg t) * P(h) * P(s|h) * P(\neg t|h, s) + \\
 &P(e|t) * P(h) * P(\neg s|h) * P(t|h, \neg s) + \\
 &P(e|\neg t) * P(h) * P(\neg s|h) * P(\neg t|h, \neg s) + \\
 &P(e|t) * P(\neg h) * P(s|\neg h) * P(t|\neg h, s) + \\
 &P(e|\neg t) * P(\neg h) * P(s|\neg h) * P(\neg t|\neg h, s) + \\
 &P(e|t) * P(\neg h) * P(\neg s|\neg h) * P(t|\neg h, \neg s) + \\
 &P(e|\neg t) * P(\neg h) * P(\neg s|\neg h) * P(\neg t|\neg h, \neg s) = \\
 &0,6 * 0,1 * 0,3 * 0,9 + \\
 &0,1 * 0,1 * 0,3 * 0,0,1 + \\
 &0,6 * 0,1 * 0,7 * 0,5 + \\
 &0,1 * 0,1 * 0,7 * 0,5 + \\
 &0,6 * 0,9 * 0,9 * 0,8 + \\
 &0,1 * 0,9 * 0,9 * 0,2 + \\
 &0,6 * 0,9 * 0,1 * 0,2 + \\
 &0,1 * 0,9 * 0,1 * 0,8 = \\
 &0,464
 \end{aligned}$$

- (b) $P(H|S) = P(H)P(S)$ é verdadeiro ou falso? Justifique. (is true or false? justify)

Provar que

$$P(h|s) \neq P(h)P(s)$$

$$P(S) = \text{sum}_{H,T,E} P(S, H, T, E) =$$

$$\begin{aligned}
& P(S, h, t, e) + P(S, h, t, \neg e) + \\
& P(S, h, \neg t, e) + P(S, h, \neg t, \neg e) + \\
& P(S, \neg h, t, e) + P(S, \neg h, t, \neg e) + \\
& P(S, \neg h, \neg t, e) + P(S, \neg h, \neg t, \neg e) = \\
& P(S|h) * P(h) * P(t|h, S) * p(e|t) + P(S|h) * P(h) * P(t|h, S) * p(\neg e|t) + \\
& P(S|h) * P(h) * P(\neg t|h, S) * p(e|\neg t) + P(S|h) * P(h) * P(\neg t|h, S) * p(\neg e|\neg t) + \\
& P(S|\neg h) * P(\neg h) * P(t|\neg h, S) * p(e|t) + P(S|\neg h) * P(\neg h) * P(t|\neg h, S) * p(\neg e|t) + \\
& P(S|\neg h) * P(\neg h) * P(\neg t|\neg h, S) * p(e|\neg t) + P(S|\neg h) * P(\neg h) * P(\neg t|\neg h, S) * p(\neg e|\neg t) = \\
& P(S|h) * P(h) * P(t|h, S) * (p(e|t) + p(\neg e|t)) + \\
& P(S|h) * P(h) * P(\neg t|h, S) * (p(e|\neg t) + p(\neg e|\neg t)) + \\
& P(S|\neg h) * P(\neg h) * P(t|\neg h, S) * (p(e|t) + p(\neg e|t)) + \\
& P(S|\neg h) * P(\neg h) * P(\neg t|\neg h, S) * (p(e|\neg t) + p(\neg e|\neg t)) = \\
& P(S|h) * P(h) * P(t|h, S) + \\
& P(S|h) * P(h) * P(\neg t|h, S) + \\
& P(S|\neg h) * P(\neg h) * P(t|\neg h, S) + \\
& P(S|\neg h) * P(\neg h) * P(\neg t|\neg h, S) = \\
& P(S|h) * P(h) * (P(t|h, S) + P(\neg t|h, S)) + \\
& P(S|\neg h) * P(\neg h) * (P(t|\neg h, S) + P(\neg t|\neg h, S)) = \\
& P(S|h) * P(h) + P(S|\neg h) * P(\neg h) = \\
& < P(s|h) * P(h) + p(s|\neg h) * P(\neg h), P(\neg s|h) * P(h) + p(\neg s|\neg h) * P(\neg h) > \\
& < 0,3 * 0,1 + 0,9 * 0,9, 0,7 * 0,1 + 0,1 * 0,9 > = < 0,84, 0,16 > \\
& P(H|S) = P(H, S)/P(S) = 1/P(S) * \text{sum}_{T,E} P(H, S, T, E) = \\
& 1/P(S) * (p(H, S, t, e) + p(H, S, t, \neg e) + p(H, S, \neg t, e) + p(H, S, \neg t, \neg e)) = \\
& 1/P(S) * (P(H) * P(S|H) * p(t|S, H) * p(e|t) + \\
& P(H) * P(S|H) * p(t|S, H) * p(\neg e|t) + \\
& P(H) * P(S|H) * p(\neg t|S, H) * p(e|\neg t) + \\
& P(H) * P(S|H) * p(\neg t|S, H) * p(\neg e|\neg t)) = \\
& 1/P(S) * (P(H) * P(S|H) * p(t|S, H) * 0,6 + \\
& P(H) * P(S|H) * p(t|S, H) * 0,4 + \\
& P(H) * P(S|H) * p(\neg t|S, H) * 0,1 + \\
& P(H) * P(S|H) * p(\neg t|S, H) * 0,9) = \\
& 1/P(S) * (P(H) * P(S|H) * p(t|S, H) + P(H) * P(S|H) * p(\neg t|S, H)) \\
& 1/P(S) * (P(H) * P(S|H)) = \\
& P(H|S) = P(H)P(S) \\
& \text{para } h, s \quad P(h|s) = 1/P(s) * (P(h) * P(s|h)) = 1/0,84 * 0,1 * 0,3 = 0,035714286 \text{ e} \\
& P(h) * P(s) = 0,1 * 0,84 = 0,084 \\
& \text{É Falso}
\end{aligned}$$

(c) $P(E|T, H) = P(E|T)$ é verdadeiro ou falso? Justifique. (is true or false? justify)

$$\begin{aligned}
P(E|T, H) &= \frac{\sum_S P(E, T, H, S)}{\sum_{S, E} P(E, T, H, S)} = \\
&= \frac{\sum_S P(E|T) * P(T|H, S) * P(H) * P(S|H)}{\sum_{S, E} P(E|T) * P(T|H, S) * P(H) * P(S|H)} = \\
&= \frac{P(H) * P(E|T) * \sum_S P(T|H, S) * P(S|H)}{P(H) * \sum_S P(T|H, S) * P(S|H) * \sum_E p(E|T)} = \\
&= \frac{P(E|T) * \sum_S P(T|H, S) * P(S|H)}{\sum_S P(T|H, S) * P(S|H)} = \\
&= P(E|T)
\end{aligned}$$

$E|T$ é condicionalmente independente de H .

- (d) Calcule (Calculate) $p(\neg e, h, s, t)$ indicando os cálculos (show your calculcs):
 $p(\neg e|t) * p(h) * p(s|h) * p(t|h, s) = 0,4 * 0,1 * 0,3 * 0,9 = 0,0108$
- (e) Calcule $p(e, h, s, \neg t)$, indicando os cálculos.
 $p(e|\neg t) * p(h) * p(s|h) * p(\neg t|h, s) = 0,1 * 0,1 * 0,3 * 0,1 = 0,0003$
- (f) Calcule $p(e, h, s, t)$, indique os cálculos.
 $p(e|t) * p(h) * p(s|h) * p(t|h, s) = 0,6 * 0,1 * 0,3 * 0,9 = 0,0162$
- (g) Calcule $p(\neg e, s, \neg t)$, indique os cálculos.
 $p(\neg e|\neg t) * p(h) * p(s|h) * p(\neg t|h, s) + p(\neg e|\neg t) * p(\neg h) * p(s|\neg h) * p(\neg t|\neg h, s) =$
 $0,9 * 0,1 * 0,3 * 0,1 + 0,9 * 0,9 * 0,9 * 0,2 = 0,1485$
- (h) Calcule $p(E|h, s)$, indicando os cálculos.
 $p(E|h, s) = \alpha \text{sum}_T p(E, h, s, T) =$
 $\alpha(p(E, h, s, t) + p(E, h, s, \neg t))$
 $\alpha < p(e, h, s, t) + p(e, h, s, \neg t), p(\neg e, h, s, t) + p(\neg e, h, s, \neg t) =$
 $\alpha < 0,0162 + \dots >$