Autómatos finitos não deterministas com transições λ

Um autómato finito não determinista com transições λ (AFND) é um tuplo $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ onde

Q é um conjunto finito de **estados**

Σ é um conjunto finito de símbolos (**alfabeto**)

δ é a **função de transição**, uma função de $Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\})$ em $\mathcal{P}(Q)$

$q_0 \in Q$ é o **estado inicial** do autómato

$F \subseteq Q$ é o conjunto dos **estados de aceitação**

Eliminação do não determinismo

O λ-fecho de um estado q_i é o conjunto de todos os estados alcançáveis através de zero ou mais transições λ a partir de q_i

- $q_i \in \lambda\text{-fecho}(q_i)$
- se $q_j \in \lambda\text{-fecho}(q_i)$ e $q_k \in \delta(q_j, \lambda)$, então $q_k \in \lambda\text{-fecho}(q_i)$
- mais nenhum estado está em $\lambda\text{-fecho}(q_i)$

A função de transição de entrada t de um AFND M é uma função de $Q \times \Sigma$ em $\mathcal{P}(Q)$ definida por

$$t(q_i, a) = \bigcup_{q_j \in \lambda\text{-fecho}(q_i)} \lambda\text{-fecho}(\delta(q_j, a))$$

Autómato finito determinista equivalente

O AFD equivalente ao AFND $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ é o autómato

$$M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$$

tal que

$$q_0' = \lambda\text{-fecho}(q_0)$$

$$\delta'(q, a) = \bigcup_{s \in q} t(s, a)$$

- $q_0' \in Q'$
- se $q \in Q'$ então $\delta'(q, a) \in Q'$, para todo o $a \in \Sigma$
- mais nenhum estado está em Q'

$$F' = \{q \in Q' \mid q \cap F \neq \emptyset\}$$

Minimização de autómatos finitos deterministas

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um autómato finito determinista

Dois estados q_i e q_j de M são equivalentes sse

$$\hat{\delta}(q_i, u) \in F \;\equiv\; \hat{\delta}(q_j, u) \in F$$

para qualquer $u \in \Sigma^*$

Dois estados equivalentes dizem-se indistinguíveis

Observação

Se $q_i \in F$ e $q_j \in Q \setminus F$ então q_i e q_j não são equivalentes (porquê?)

Cálculo dos estados equivalentes

1. Seja $P = \{Q \setminus F, F\}$ uma partição de Q
2. Enquanto existirem

$$p, p' \in P \qquad a \in \Sigma \qquad q_i, q_j \in p$$

   tais que $\delta(q_i, a) \in p'$ e $\delta(q_j, a) \notin p'$, fazer

$$\begin{aligned} P \leftarrow P \setminus \{p\} & \cup \{q \in p \mid \delta(q, a) \in p'\} \\ & \cup \{q \in p \mid \delta(q, a) \notin p'\} \end{aligned}$$

Este algoritmo calcula a partição P de Q tal que, para quaisquer estados q_i e q_j

- se q_i e q_j pertencem ao mesmo subconjunto, q_i e q_j são equivalentes
- se q_i e q_j pertencem a subconjuntos distintos, q_i e q_j não são equivalentes

Construção do AFD mínimo

1. Calcular os estados equivalentes; seja P a partição determinada
2. Para todos os $p \in P$ e todos os $a \in \Sigma$, seja q um estado em p e seja p' o elemento de P a que $\delta(q, a)$ pertence; então

$$\delta'(p, a) = p'$$

3. O AFD mínimo (ou reduzido) equivalente a M é

$$M' = (P, \Sigma, \delta', q_0', F')$$

onde

- q_0' é o elemento de P que contém q_0
- $F' = \{p \in P \mid p \subseteq F\}$