Fundamentos de Matemática

Lista de Exercícios
Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

02

Demonstração direta, demonstração por absurdo e conectivos lógicos

Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Apresente uma demonstração caso ela seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[01] Se m e n são inteiros ímpares, então $m \cdot n$ é um inteiro ímpar.

[02] Se o produto de dois inteiros m e n é ímpar, então m e n são inteiros ímpares.

[03] Se m é um múltiplo inteiro de 25, então m é um múltiplo inteiro de 5.

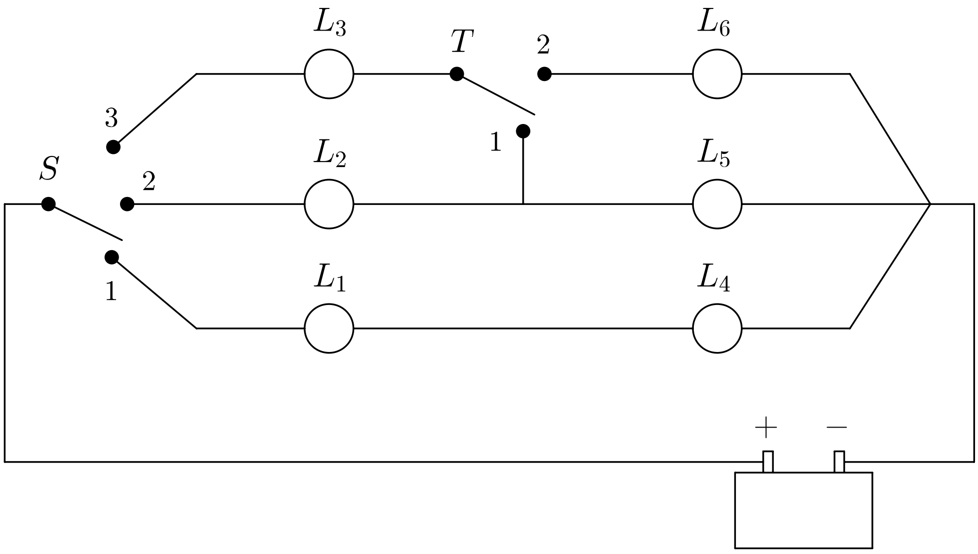
[04] Se x é um número real tal que $x = \sqrt{4}$, então $x = 2$.

[05] Se x é um número real e $(x-1) \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 4) = 0$, então $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 0$.

[06] Se n é um inteiro positivo, então $n^3 - n + 2$ é um número par.

[07] Se p é um número primo, então $\sqrt{p}$ não é um número racional. Justifique sua resposta!

Considere a seguinte rede elétrica constituída de uma bateria, seis lâmpadas L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6 e dois comutadores S e T. O comutador S pode assumir três posições 1, 2 e 3. O comutador T pode assumir duas posições 1 e 2.



Supondo que o circuito está funcionando corretamente (isto é, que a bateria tem carga para ascender as lâmpadas e que estas não estão queimadas), diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Apresente uma demonstração caso ela seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[08] Se a lâmpada 4 está acesa então a lâmpada 1 também estará acesa.

[09] Se a lâmpada 2 está apagada então a lâmpada 5 também estará apagada.

[10] Se a lâmpada 5 está apagada, então a lâmpada 2 também estará apagada.

[11] Se a lâmpada 3 está acesa, então a lâmpada 2 também estará acesa.

[12] Se a lâmpada 1 está acesa ou a lâmpada 6 está acesa, então a lâmpada 3 estará acesa ou a lâmpada 4 estará acesa.

[13] Se a lâmpada 1 está acesa e a lâmpada 3 está acesa, então a lâmpada 2 estará acesa e a lâmpada 5 estará apagada.

[14] Se a lâmpada 6 está apagada, então a lâmpada 3 também estará apagada.

[15] Se a lâmpada 5 está acesa, então a lâmpada 2 estará acesa ou a lâmpada 3 estará acesa.

Resolva os exercícios a seguir.

[16] Quais das implicações abaixo são falsas? Ou elas são todas verdadeiras e temos uma prova de que $0 = 1$? Para as implicações verdadeiras, indique o axioma ou a propriedade de número real que estão sendo usados.

$$x = 0 \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad x \cdot (x - 1) = 0 \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad x - 1 = 0 \quad \overset{(3)}{\Longrightarrow} \quad x = 1.$$

[17] Quais das implicações abaixo são falsas? Ou elas são todas verdadeiras e temos uma prova de que $2 = 1$? Para as implicações verdadeiras, indique o axioma ou a propriedade de número real que estão sendo usados.

$$\begin{aligned} x = 2 \quad &\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad x \cdot (x - 1) = 2 \cdot (x - 1) \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad x^2 - x = 2 \cdot x - 2 \quad \overset{(3)}{\Longrightarrow} \quad x^2 - 2 \cdot x = x - 2 \\ &\overset{(4)}{\Longrightarrow} \quad x \cdot (x - 2) = x - 2 \qquad \overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad x = 1. \end{aligned}$$

[18] Verdadeira ou falsa? Se $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 - 3\,x + 2 < 0$, então $x > 0$. Justifique sua resposta!

[19] Verdadeira ou falsa? Se p é um número primo e $p > 2$, então $p + 1$ *não é* um número primo. Justifique sua resposta!

[20] Dê exemplos de predicados p, q e r tais que $(p \wedge q) \vee r \neq p \wedge (q \vee r)$, isto é, dê exemplos de predicados p, q e r tais que

$$\{x \mid x \text{ satisfaz } (p \wedge q) \vee r\} \neq \{x \mid x \text{ satisfaz } p \wedge (q \vee r)\}.$$

[21] Verdadeira ou falsa? $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$. Justifique sua resposta, apresentando uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[22] Verdadeira ou falsa? $p \wedge q \Rightarrow \quad p$. Justifique sua resposta, apresentando uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[23] Verdadeira ou falsa? $p \wedge q \Rightarrow \quad q$. Justifique sua resposta, apresentando uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[24] Verdadeira ou falsa? $\quad p \quad \Rightarrow p \wedge q$. Justifique sua resposta, apresentando uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[25] Verdadeira ou falsa? $p \vee q \Rightarrow q \vee p$. Justifique sua resposta, apresentando uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[26] Verdadeira ou falsa? $p \Rightarrow p \vee q$. Justifique sua resposta, apresentando uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[27] Verdadeira ou falsa? $q \Rightarrow p \vee q$. Justifique sua resposta, apresentando uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[28] Verdadeira ou falsa? $p \vee q \Rightarrow p$. Justifique sua resposta, apresentando uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

Respostas dos Exercícios

Atenção: as respostas apresentadas aqui não possuem justificativas. Você deve escrevê-las!

[01] Verdadeira.

[02] Verdadeira.

[03] Verdadeira.

[04] Verdadeira.

[05] Verdadeira.

[06] Verdadeira.

[07] A sentença é verdadeira. De fato: suponha, por absurdo, que ela seja falsa. Então existe um número primo p tal que $a = \sqrt{p}$ é um número racional. Então, podemos escrever

$$a = \sqrt{p} = \frac{m}{n},$$

onde m e n são inteiros positivos. Sem perda de generalidade, podemos supor que m e n não possuem fatores em comum. Como, $a^2 = p$ e $a^2 = m^2/n^2$, segue-se que

$$m^2 = p \cdot n^2.$$

Logo, p divide m^2 e, portanto, p divide m (veja a demonstração desse fato mais adiante). Então, $m = p \cdot k$ para algum inteiro positivo k. Assim

$$m^2 = p \cdot n^2 \quad \Rightarrow \quad (p \cdot k)^2 = p \cdot n^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = p \cdot k^2.$$

Isto mostra que p divide n^2 e, portanto, p divide n. Como p divide m e p divide n, segue-se que m e n possuem um fator comum, uma contradição.

Na demonstração acima usamos o fato de que se p divide m^2, então p divide m. Este resultado é um caso particular da seguinte proposição: se p é um número primo que divide o produto $r \cdot s$ de dois números inteiros positivos, então p divide r ou p divide s. Vamos demonstrar esta proposição. Sabemos pelo Teorema Fundamental da Aritmética que todo inteiro positivo se escreve de maneira única como produto de potências de números primos. Suponha, por absurdo, que exista um primo p que divide o produto $r \cdot s$ de dois números inteiros positivos, mas p não divide r e p não divide s. Se p não divide r, então o primo p não aparece na decomposição em produto de potências de números primos do número r. Analogamente, se p não divide s, então o primo p não aparece na decomposição em produto de potências de números primos do número s. Portanto, o primo p não aparece na decomposição em produto de potências de números primos do número $r \cdot s$. Sendo assim, p não divide $r \cdot s$, uma contradição.

[08] Verdadeira.

[09] Falsa.

[10] Verdadeira.

[11] Falsa.

[12] Verdadeira.

[13] Verdadeira.

[14] Falsa.

[15] Verdadeira.

[16] Apenas a implicação (2) é falsa!

[17] Apenas a implicação (5) é falsa!

[18] Verdadeira.

[19] Verdadeira.

[21] Verdadeira.

[22] Verdadeira.

[23] Verdadeira.

[24] Falsa. Se p é o predicado "$x = 1$" e q é o predicado "$x = 2$", então "$x = 1 \Rightarrow x = 1 \land x = 2$" é uma sentença falsa ($x = 1$ é um contraexemplo).

[25] Verdadeira.

[26] Verdadeira.

[27] Verdadeira.

[28] Falsa. Se p é o predicado "$x = 1$" e q é o predicado "$x = 2$", então "$x = 1 \lor x = 2 \Rightarrow x = 2$" é uma sentença falsa ($x = 1$ é um contraexemplo).

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 07/01/2014.