GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Fundamentos de Matemática

Lista de Exercícios
Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

04

Argumentos e Exercícios de Revisão

[01] **(Exercício proposto pela professora Anne Michelle Dysman Gomes)** Em cada item abaixo são dadas premissas sobre um conjunto A. Forme um argumento válido acrescentando como conclusão tudo o que você puder concluir sobre o conjunto A a partir das premissas dadas. Justifique sua conclusão.

(a) **Premissas:**

1) $A \subset \mathbb{N}$;
2) se 5 é elemento de A, então todos os naturais múltiplos de 5 também são;
3) se 10 é elemento de A, então 20 não é elemento de A;
4) se $3 \in A$, então $5 \in A$;
5) se $20 \notin A$, então $3 \in A$.

(b) **Premissas:**

1) $A \subset \mathbb{Z}$;
2) se existe $x \in A$ tal que $x > 4$, então $13 \in A$;
3) para todo x inteiro, se x é ímpar, então $x \notin A$;
4) $-5 \in A$ se, e somente se, existe $x \in A$ tal que $x < -4$.

(c) **Premissas:**

1) $A \subset \mathbb{N}$;
2) para todo $x \in A, x > 10$;
3) se existe $x \in A$ tal que $x > 20$, então $5 \in A$;
4) para todo $x \in A$ temos que (x é ímpar $\Leftrightarrow x > 25$).

(d) **Premissas:**

1) $A \subset \mathbb{N}$;
2) $1/2 \in A \Leftrightarrow 10 \in A$;
3) para todo $x \in \mathbb{N}$, se x é ímpar, então $x \notin A$;
4) $12 \notin A \Rightarrow 8 \in A$;
5) para todo $n \in \mathbb{N}$, se $2n \in A$ então $2n + 2 \in A$.

(e) **Premissas:**

1) $A \subset \mathbb{Z}$;
2) $A \neq \emptyset$;
3) para todo $x \in \mathbb{Z}$, temos que $x \in A \Leftrightarrow x + 3 \in A$;
4) se $5 \in A$, então, para todo $x \in \mathbb{Z}$, temos que: $x > 20 \Rightarrow x \notin A$;
5) $0 \in A \Leftrightarrow 1 \in A$.

[02] Considere a seguinte proposição (n representa um número inteiro):

> Se n pode ser escrito como a soma de dois números inteiros ímpares, então n é par.

(a) A proposição é verdadeira ou falsa? Apresente uma demonstração caso a proposição seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

(b) Escreva a recíproca da sentença. A recíproca é verdadeira ou falsa? Apresente uma demonstração caso a proposição seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

(c) Escreva a contrapositiva da sentença. A contrapositiva é verdadeira ou falsa? Apresente uma demonstração caso a contrapositiva seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[03] Diz-se que uma função $f\colon D \to C$ é *limitada* se ela satisfaz a seguinte condição: existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in D$, tem-se $|f(x)| \leq M$.

(a) Dê um exemplo de uma função $f\colon D \to C$ limitada. Justifique o porquê de sua função ser limitada.

(b) Quando uma função $f\colon D \to C$ *não é* limitada?

(c) Dê um exemplo de uma função $f\colon D \to C$ não limitada. Justifique o porquê de sua função não ser limitada.

(d) Seja $f\colon D \to C$ uma função que satisfaz a seguinte condição: existem $A, B \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in D$, tem-se $A \leq f(x) \leq B$. Podemos concluir que f é uma função limitada? Justifique sua resposta!

[04] Diz-se que um subconjunto X de $\mathbb{R}$ é *aberto* se ele satisfaz a seguinte condição: para todo ponto $p \in X$, existe $\epsilon > 0$ tal que $]p - \epsilon, p + \epsilon[\subseteq X$.

(a) Dê um exemplo de um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. Justifique o porquê de seu subconjunto ser aberto.

(b) Quando um subconjunto X de $\mathbb{R}$ *não é* aberto?

(c) Dê um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que não é aberto. Justifique o porquê de seu subconjunto não ser aberto.

(d) O subconjunto vazio $\varnothing$ de $\mathbb{R}$ é um subconjunto aberto? Justifique sua resposta!

[05] Diz que uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *par* se ela satisfaz a seguinte condição: para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. Diz que uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *ímpar* se ela satisfaz a seguinte condição: para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

(a) Dê um exemplo de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par. Justifique o porquê de sua função ser par.

(b) Dê um exemplo de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ímpar. Justifique o porquê de sua função ser ímpar.

(c) Quando uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *não é* par?

(d) Quando uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *não é* ímpar?

(e) Dê um exemplo de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não é par. Justifique o porquê de sua função não ser par.

(f) Dê um exemplo de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não é ímpar. Justifique o porquê de sua função não ser ímpar.

(g) Mostre que a função $g(x) = (f(x) + f(-x))/2$ é par. Mostre que a função $h(x) = (f(x) - f(-x))/2$ é ímpar. Conclua que toda função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar.

(h) Existe uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja par e ímpar ao mesmo tempo? Justifique sua resposta.

[06] Diz-se que um subconjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ é *linearmente independente* (LI) se ele satisfaz a seguinte condição: se $\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Um subconjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ que não é linearmente independente é denominado *linearmente dependente* (LD).

(a) Dê um exemplo de um subconjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ que é LI. Justifique o porquê de seu subconjunto de vetores ser LI.

(b) Quando um subconjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ *não é* LI?

(c) Dê um exemplo de um subconjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ que não é LI. Justifique o porquê de seu subconjunto de vetores não ser LI.

(d) Verdadeira ou falsa? Quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, o subconjunto de vetores $\{\mathbf{0}, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ não é LI. Apresente uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[07] A *média aritmética* dos números $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ é definida por

$$m_A = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Verdadeira ou falsa? Existe um índice i tal que $x_i \geq m_A$. Apresente uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[08] Escreva a negação de cada uma das sentenças abaixo.

(a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$, se $x < y$ e $z < 0$, então $zx > zy$.

(b) Para todo inteiro n, existe $x > n$ tal que $x^2 > n^2$

(c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $x < x + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$.

(d) Para todo $\epsilon > 0$, existe um inteiro N tal que $1/n < \epsilon$ para todo $n \geq N$.

[09] Considere as duas sentenças (note que a ordem dos quantificadores de uma sentença está trocada com relação à outra):

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \mid x = y^3} \quad \text{e} \quad \boxed{\exists y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ x = y^3}$$

Essas sentenças são verdadeiras ou falsas? Apresente uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[10] Considere a sentença abaixo (x, y e z representam números reais):

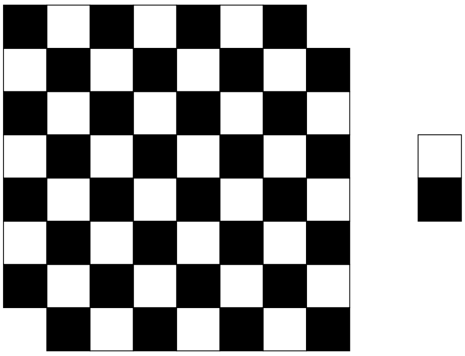
$$\forall x,\ ((\exists y \mid (x^3 = y^2)) \lor (\forall z,\ (z^2 < 0 \Rightarrow x^3 \neq z^2)).$$

(a) Escreva a negação da sentença.

(b) A sentença é verdadeira ou falsa? Apresente uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[11] Verdadeira ou falsa? Não existem números naturais a e b tais que $a^2 - b^2 = 10$. Apresente uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[12] Dois quadrados brancos foram excluídos dos cantos opostos de um tabuleiro de xadrez um oito por oito. Prove que o tabuleiro que sobrou não pode ser coberto por dominós (retângulos que consistem em dois quadrados adjacentes de cores opostas).



[13] Mostre que se há n ($n \geq 2$) pessoas em uma festa, então há pelo menos duas pessoas que têm o mesmo número de amigos na festa.

[14] Verdadeira ou falsa? Se $n \in \mathbb{N}$, então $n^2 - 79\,n + 1601$ é um número primo. Apresente uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

Respostas dos Exercícios

Atenção: as respostas apresentadas aqui não possuem justificativas. Você deve escrevê-las!

[08] (a) Existem $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$, tais que $x < y$, $z < 0$ e $zx \leq zy$.

(b) Existe inteiro n tal que, para todo $x > n$, tem-se $x^2 \leq n^2$.

(c) Note que a sentença "para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $x < x + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$" pode ser escrita da seguinte maneira: "para todo $x \in \mathbb{R}$ e para todo $\epsilon > 0$, tem-se $x < x + \epsilon$". Assim, sua negação é "existe $x \in \mathbb{R}$ tal que existe $\epsilon > 0$ tal que $x \geq x + \epsilon$" ou, mais simplesmente, "existem $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ tais que $x \geq x + \epsilon$". Outra maneira de se escrever a negação: "existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq x + \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$".

(d) Existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo inteiro N, tem-se $1/n \geq \epsilon$ para algum $n \geq N$.

[10] (a) $\exists x, ((\forall y \mid (x^3 \neq y^2)) \wedge (\exists z, (z^2 < 0 \vee x^3 = z^2))$.

(b) A sentença é verdadeira. De fato, todo $x \in \mathbb{R}$ satisfaz o predicado $(\forall z, (z^2 < 0 \Rightarrow x^3 \neq z^2))$, uma vez que, para todo $x \in \mathbb{R}$, a sentença $(\forall z, (z^2 < 0 \Rightarrow x^3 \neq z^2)$ é verdadeira por vacuidade (não existe número real z que satisfaça a hipótese $z^2 < 0$ da sentença $z^2 < 0 \Rightarrow x^3 \neq z^2$). Portanto, todo $x \in \mathbb{R}$ satisfaz o predicado $((\exists y \mid (x^3 = y^2)) \vee (\forall z, (z^2 < 0 \Rightarrow x^3 \neq z^2))$ e, sendo assim, a sentença é verdadeira.

[11] Dica: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ e os divisores de 10 são -10, -5, -2, -1, $+1$, $+2$, $+5$ e $+10$.

[12] Faça a demonstração por absurdo contando o número de quadrados brancos e pretos.

[13] As possibilidades para o número de amigos são $0, 1, 2, \ldots, n-1$ (isto é, n possibilidades distintas). Suponha, por absurdo, que existam n ($n \geq 2$) pessoas em uma mesma festa onde nenhum par de pessoas possui o mesmo número de amigos, isto é, todas as pessoas têm um número diferente de amigos na festa. Como há n pessoas e n possibilidades distintas para o número de amigos, segue que uma pessoa P_1 deve ter 0 amigo, uma pessoa P_2 deve ter 1 amigo, uma pessoa P_3 deve ter amigos, etc. A pessoal P_n tem então $n - 1$ amigos, isto é, ela é amigo de todos na festa. Mas isto contradiz o fato da pessoa P_1 ter 0 amigo.

[14] A sentença é falsa. $n = 80$ é um contraexemplo, pois $n = 80 \in \mathbb{N}$ e $n^2 - 79\,n + 1601 = (80)^2 - 79\,(80) + 1601 = 1681 = (41)\,(41)$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 11/01/2014.