Lista de Exercícios
Unidade 4

1. Demonstre, por indução, as seguintes desigualdades:

   a) $n! > 2^n$, para $n \geq 4$;

   b) $n! > 3^n$, para $n \geq 7$;

   c) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$, para $n \geq 2$;

   d) $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$, para $n \geq 2$.

2. Dados n ($n \geqslant 2$) objetos de pesos distintos, prove que é possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado fazendo $2n-3$ pesagens em uma balança de pratos. Mostre, também, que este é o número mínimo de pesagens que permitem, com certeza, determinar o mais leve e o mais pesado.

3. Mostre que existem inteiros não negativos x e y tais que $7x + 8y = n$ para todo $n \geq 42$. Seria possível tomar um número menor que 42 na afirmativa acima?

4. Prove que, qualquer que seja o número natural n maior do que ou igual a 3, existe um polígono convexo com n lados e exatamente 3 ângulos agudos. [Sugestão: Modifique um dos ângulos agudos de um polígono com n lados para produzir um ângulo agudo e um obtuso.]

5. A sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de números é tal que $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ e $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ para $n > 2$. Prove que $a_n = 2^n + 1$ para todos os números naturais n.

6. Mostre que o termo geral da sequência de Fibonacci é

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

7. Mostre que a sequência de Fibonacci satisfaz às seguintes identidades:

   a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

   b) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

   c) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

   d) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

8. Seja (F_n) a sequência de Fibonacci. Mostre que $F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

9. Use indução completa para demonstrar o Teorema Fundamental da Aritmética: todo número natural $n \geq 2$ é primo ou é um produto de números primos.

10. Em uma das versões do jogo de Nim, dois jogadores se alternam, retirando 1, 2 ou 3 palitos de um monte de n palitos. O jogador que remove o último palito perde. Mostre que o primeiro a jogar tem uma estratégia vencedora se, e somente se, o resto da divisão de n por 4 é diferente de 1.

11. Considere um conjunto de n pontos. Conecta-se pares desses pontos por segmentos de reta, até que não seja possível acrescentar um novo segmento sem formar um ciclo, isto é, um caminho fechado percorrendo os segmentos de reta traçados. A figura mostra duas possíveis situações ao final do processo, para $n = 6$.

   a) Mostre que, ao terminar o processo, cada par de pontos está ligado por um único caminho formado por segmentos.

   b) Mostre, por indução, que, ao terminar o processo, terão sempre sido traçados $n - 1$ segmentos.

12. Ache o erro na “prova” do seguinte “teorema”: **Todos os números naturais são iguais.**

Vamos provar o resultado usando indução completa.

(i) $P(1)$ *é claramente verdadeira.*

(ii) Suponha que $P(k)$ *seja verdadeira, para todo* k *tal que* $1 \leq n$. *Então* $n = n - 1$. *Somando 1 a ambos os lados dessa igualdade, obtemos* $n = n + 1$. *Como* n *era igual a todos os naturais anteriores, segue que* $P(n + 1)$ *é verdadeira.*

Portanto, $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in N$.