DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Fundamentos de Matemática

Lista de Exercícios

Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

06

Números Naturais e O Princípio da Indução

[01] Em uma escrita fictícia, os símbolos abaixo indicam alguns números naturais: ᚹᚢᛊᛟᛗᚲᛁᚷᛖᚨᛒᛞ ᚠᚺᛃᛚᚾᛈᚱᛏᛡ. Vale que:

ᛡ é o sucessor de ᚹ,
ᚹ é o sucessor de ᚢ,
ᚢ é o sucessor de ᛏ,
ᛏ é o sucessor de ᛊ,
ᛊ é o sucessor de ᚱ,
ᚱ é o sucessor de ᛈ,
ᛈ é o sucessor de ᛟ,
ᛟ é o sucessor de ᚾ,
ᚾ é o sucessor de ᛗ,
ᛗ é o sucessor de ᛚ,
ᛚ é o sucessor de ᚲ,
ᚲ é o sucessor de ᛃ,
ᛃ é o sucessor de ᛁ,
ᛁ é o sucessor de ᚺ,
ᚺ é o sucessor de ᚷ,
ᚷ é o sucessor de ᚠ,
ᚠ é o sucessor de ᛖ,
ᛖ é o sucessor de ᛞ,
ᛞ é o sucessor de ᛒ,
ᛒ é o sucessor de ᚨ.

O número ᚨ não é sucessor de nenhum outro número natural. Calcule ᚨ + ᚨ e ᛞ + ᛖ. Qual número é maior? ᛚ ou ᛈ?

[02] Mostre que se $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 1$, então $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

[03] **(Desigualdade de Bernoulli)** Mostre que se $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ e x é um número real ≥ 0, então $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$.

[04] Mostre que se $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 1$, então $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

[05] Mostre que se $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$, então $2^{n+2} + 3^{2\,n+1}$ é divisível por 7.

[06] Mostre que se $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 1$, então $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

[07] Mostre que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 9.

[08] Mostre que se $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ são matrizes reais $m \times m$ inversíveis, então

$$(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \cdots \cdot \mathbf{A}_n)^{-1} = (\mathbf{A}_n)^{-1} \cdot \cdots \cdot (\mathbf{A}_2)^{-1} \cdot (\mathbf{A}_1)^{-1}.$$

[09] Considere o seguinte predicado:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 1.$$

(a) Mostre que se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

(b) A sentença $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira ou falsa? Apresente uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

(c) A sentença para todo $n \in \mathbb{N}$, $1+2+\cdots+n = n \cdot (n+1)/2+1$ é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta!

[10] **(Teorema de Leibnitz)** Sejam f e g funções reais de classe C^∞, isto é, funções que possuem derivadas de todas as ordens contínuas. Mostre que

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} \cdot g^{(n-i)},$$

onde $f^{(i)}$ denota a i-ésima derivada da função f e

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

[11] **(Fórmula de de Moivre)** Se $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, então $(\cos(x) + i\ \mathrm{sen}(x))^n = \cos(n\,x) + i\,\mathrm{sen}(n\,x)$, onde $i^2 = -1$.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 21/01/2014.