Lista de Exercícios
Unidade 3

1. Demonstre, por indução, as seguintes identidades:

   a) $1.2 + 2.3 + \ldots + n.(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

   b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

   c) $1.2^0 + 2.2^1 + 3.2^2 + \cdots + n.2^{n-1} = 1 + (n-1)2^n$;

   d) $\left(1 + \dfrac{1}{1}\right)\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \dfrac{n^{n-1}}{(n-1)!}$;

   e) $1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$.

2. Demonstre, por indução, as seguintes desigualdades:

   a) $2^n > n$, onde n é um número natural arbitrário;

   b) $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

3. Considere a sequência (x_n) correspondente ao método de Newton para calcular $\sqrt{2}$, ou seja, a sequência definida por $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$.

   a) Mostre que $1 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$, para todo n.

   b) Mostre que $x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2$, para todo n.

   (Isto explica porque o erro no cálculo de $\sqrt{2}$ cai tão rapidamente no Método de Newton.)

4. Prove que, para qualquer número natural n:

   a) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é divisível por 9;

   b) $3^{2n+2} + 8n - 9$ é divisível por 16;

c) $4^n + 15n - 1$ é divisível por 9;

d) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133;

e) $2^{3^n} + 1$ é divisível por 3^{n+1}.

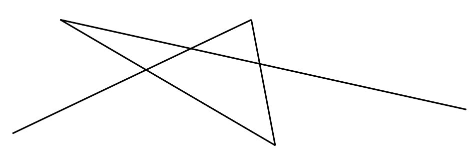
5. Um plano está dividido em regiões por várias retas. Prove que é possível colorir essas regiões com duas cores de modo que quaisquer duas regiões adjacentes tenham cores diferentes (dizemos que duas regiões são *adjacentes* se elas tiverem pelo menos um segmento de reta em comum).

6. (O queijo de Steiner) Seja q_n o número de regiões determinadas no espaço tridimensional por n planos (equivalentemente, o maior número de partes em que um queijo pode ser dividido por n cortes planos).

   a) Explique por que $q_{n+1} = q_n + p_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde p_n é o número máximo de regiões em que n retas dividem o plano.

   b) Mostre que $q_n = \dfrac{n^3 + 5n + 6}{6}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

7. Considere uma linha poligonal formada por 2 semiretas e por n segmentos de reta. A figura ilustra a situação para $n = 2$. Encontre uma fórmula para o número máximo de regiões determinadas pela linha poligonal e demonstre que sua fórmula está correta.



8. No problema da Torre de Hanoi, suponha que se deseja passar n discos de uma haste extrema para outra, mas que não seja permitido passar diretamente um disco de um extremo para o outro (isto é, todo movimento deve ter origem ou destino na haste central). Assim, por exemplo, para passar um único disco são necessários dois movimentos (o primeiro para levá-lo à haste central e o segundo para levá-lo da haste central ao outro extremo).

   a) Verifique que são necessários no mínimo 8 movimentos para transferir 2 discos.

b) Sendo h_n o número de movimentos necessários para n discos, expresse h_{n+1} em termos de h_n.

c) Moste que o número mínimo de movimentos para transferir n discos é $h_n = 3^n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.