

Elementos da lógica e linguagem matemáticas:
hipótese, tese, exemplo, contraexemplo, recíproca

[01] Considere a seguinte proposição (x representa um número real):

$$\text{se } \frac{2}{x+1} < 1, \text{ então } x > 1.$$

- (a) Qual é a hipótese e qual é a tese desta proposição?
- (b) $x = 0$ é um contraexemplo para a proposição? Justifique sua resposta!
- (c) $x = -2$ é um contraexemplo para a proposição? Justifique sua resposta!
- (d) A proposição é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta!
- (e) Escreva a recíproca da proposição. A recíproca é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta!

[02] Considere a seguinte proposição (x representa um número real):

$$\text{se } -2 < x \leq 3, \text{ então } -\frac{1}{2} < x < 3.$$

- (a) Qual é a hipótese e qual é a tese desta proposição?
- (b) $x = -1$ é um contraexemplo para a proposição? Justifique sua resposta!
- (c) $x = 3$ é um exemplo para a proposição? Justifique sua resposta!
- (d) $x = 0$ é um exemplo para a proposição? Justifique sua resposta!
- (e) A proposição é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta!
- (f) Escreva a recíproca da proposição. A recíproca é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta!

[03] Considere a seguinte proposição (x representa um número real):

$$\text{se } x^3 + x - 1 < 0, \text{ então } x < -1.$$

- (a) Qual é a hipótese e qual é a tese desta proposição?
- (b) $x = -1$ é um exemplo para a proposição? Justifique sua resposta!
- (c) $x = 0$ é um contraexemplo para a proposição? Justifique sua resposta!
- (d) $x = 1$ é um contraexemplo para a proposição? Justifique sua resposta!
- (e) $x = 1$ é um exemplo para a proposição? Justifique sua resposta!
- (f) A proposição é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta!
- (g) Escreva a recíproca da proposição. A recíproca é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta!

[04] Dê exemplos e contraexemplos (caso existam) para as proposições a seguir (x representa um número real).

(a) Se $x \geq 1$, então $x < 3$.

(b) Se $x < 0$, então $(3x - 4)/(x + 2) < 1$.

(c) Se $(3x - 4)/(x + 2) < 1$, então $x < 0$.

[05] (a) Escreva uma sentença que é verdadeira e cuja recíproca também é verdadeira.

(b) Escreva uma sentença que é verdadeira e cuja recíproca é falsa.

(c) Escreva uma sentença que é falsa e cuja recíproca é verdadeira.

(d) Escreva uma sentença que é falsa e cuja recíproca também é falsa.

Diga se cada uma das sentenças abaixo é verdadeira ou falsa. Apresente uma demonstração caso ela seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[06] Se m é um múltiplo inteiro de 5, então m é um múltiplo inteiro de 25.

[07] Se m é um inteiro ímpar positivo, então existe inteiro k tal que $m = 2 \cdot k^2 + 2 \cdot k + 1$.

[08] Se a e b são números reais tais que $a \cdot b = 1$, então $a = 1$ ou $b = 1$.

[09] Se x é um número real tal que $x^2 = 4$, então $x = 2$.

[10] Se x é um número real tal que $4 \leq x^2 \leq 9$, então $2 \leq x \leq 3$.

[11] Se x é um número real, então $x^2 \geq -x$.

[12] Se a e b são números reais tais que $a > 100$ e $b > 2$, então $a/b > 100/2$.

[13] Se x é um número real e $x < 1$, então $x^2 < 1$.

[14] Se x é um número real diferente de zero, então $-x$ é um número real negativo.

[15] Se a e b são números reais tais que $a < b$, então $a^2 < b^2$.

[16] Se a e b são números reais tais que $a < b$, então $a \cdot c < b \cdot c$ para todo número real c .

[17] Se a e b são números reais tais que $a > 100$ e $b > 2$, então $b - a > 2 - 100$.

[18] Se x é um número real, então $\sqrt{x^2} = x$.

[19] Se x é um número real positivo, então $\sqrt{(-x)^2} = -x$.

[20] Se n é um inteiro positivo e $x = \sqrt{n}$, então x é um número irracional.

[21] Se x é um número real positivo, então $x^6 > x^4$.

[22] Se x é um número real e $x^2 = x$, então $x = 1$.

Respostas dos Exercícios

Atenção: podem existir outras respostas para os exercícios além daquelas indicadas aqui. Muitas das respostas não possuem justificativas: você deve escrevê-las! No caso de exemplos e contraexemplos, você deve justificar porque o exemplo é um exemplo e porque o contraexemplo é um contraexemplo!

- [01] (a) Hipótese: $2/(x+1) < 1$. Tese: $x > 1$. (b) Não. (c) Sim. (d) A proposição é falsa! (e) Recíproca: se $x > 1$, então $2/(x+1) < 1$. A recíproca é verdadeira: se $x > 1$, então $x+1 > 1+1 = 2$, logo, $2/(x+1) < 1$.
- [02] (a) Hipótese: $-2 < x \leq 3$. Tese: $-1/2 < x < 3$. (b) Sim. (c) Não. (d) Sim. (e) A proposição é falsa! (f) Recíproca: se $-1/2 < x < 3$, então $-2 < x \leq 3$. A recíproca é verdadeira!
- [03] (a) Hipótese: $x^3+x-1 < 0$. Tese: $x < -1$. (b) Não. (c) Sim. (d) Não. (e) Não. (f) A proposição é falsa! (g) Recíproca: se $x < -1$, então $x^3+x-1 < 0$. A recíproca é verdadeira: se $x < -1$, então x e x^3 são números negativos, logo, $x^3+x-1 < 0$ como soma de três números negativos.
- [04] (a) $x = 1$ é um exemplo e $x = 4$ é um contraexemplo. (b) $x = -1$ é um exemplo e $x = -3$ é um contraexemplo. (c) $x = -1$ é um exemplo e $x = 2$ é um contraexemplo.
- [05] Observação: nas respostas a seguir, x representa um número real. (a) Se $x > 1$, então $2x > 2$. (b) Se $x > 1$, então $x^2 > 1$. (c) Se $x^2 > 1$, então $x > 1$. (d) Se $x = 0$, então $x^2 > 1$.
- [06] Falsa.
- [07] Falsa.
- [08] Falsa.
- [09] Falsa.
- [10] Falsa.
- [11] Falsa.
- [12] Falsa.
- [13] Falsa.
- [14] Falsa.
- [15] Falsa.
- [16] Falsa.
- [17] Falsa.
- [18] Falsa.
- [19] Falsa.
- [20] Falsa.
- [21] Falsa.
- [22] Falsa.

Texto composto em L^AT_EX2e, HJB, 05/01/2014.