

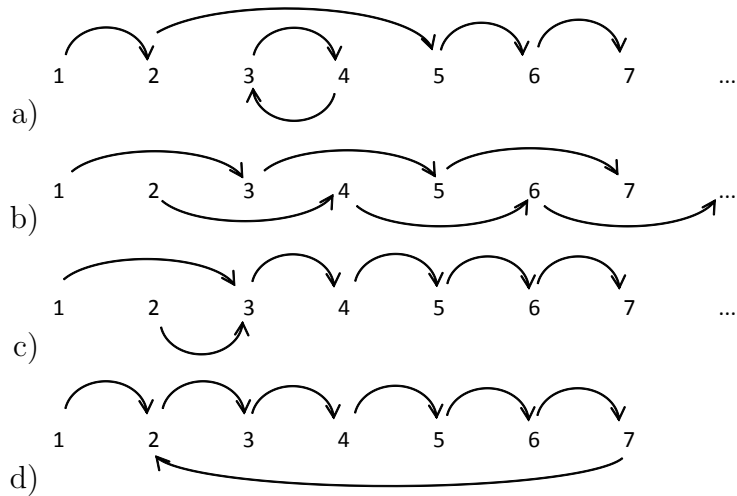
Lista de Exercícios

Unidade 1

1. O diagrama abaixo, em que a seta indica o sucessor de cada elemento, representa a estrutura dos números naturais imposta pelos axiomas de Peano.



Em cada um dos diagramas a seguir, exatamente um dos axiomas de Peano é violado. Diga qual é ele.



2. Prove, por indução, que

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Diga onde está o erro da seguinte demonstração da afirmativa

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1}.$$

A propriedade é trivialmente válida para $n = 1$. Suponhamos que seja válida para n , ou seja $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1}$. Então $1 + 2 + 4 + 8 +$

$\dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$. Portanto, a propriedade também é válida para $n + 1$. Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Usando indução e a propriedade associativa da adição, demonstre a *lei do corte*: "Se m, n e p são números naturais tais que $m + p = n + p$, então $m = n$. [Sugestão: use indução em p , notando que o caso base da indução é o segundo axioma de Peano.]
5. Demonstre a propriedade transitiva da ordem: Se m, n e p são números naturais tais que $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.