DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Fundamentos de Matemática

Lista de Exercícios

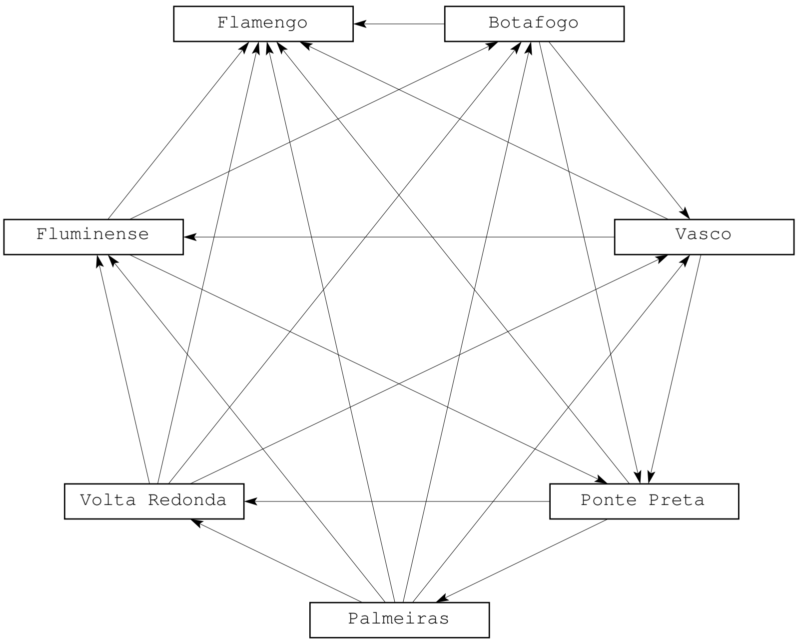
Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

09

Exercícios de Revisão

[01] Em um torneio "todos contra todos" (*round-robin*, em inglês), cada time joga com cada outro time uma única vez (estamos considerando que não existem empates). É difícil estabelecer um critério de time vencedor em tais torneios: a quantidade de vitórias pode não ser a melhor indicação. Por este motivo, muita pesquisa tem sido feita para descobrir e estudar outros tipos de classificação. Uma abordagem usada é a da "cadeia de comando": uma ordenação dos times de modo que, nesta cadeia, cada time venceu o time seguinte na cadeia.

(a) Considere um torneio todos contra todos entre os times de futebol Flamengo, Fluminense, Volta Redonda, Palmeiras, Ponte Preta, Vasco da Game e Botafogo cujos resultados estão apresentados no grafo abaixo (as setas apontam para o time ganhador da partida).



Faça uma classificação $t_1 \succ t_2 \succ t_3 \succ t_4 \succ t_5 \succ t_6 \succ t_7$, onde $t_i \succ t_{i+1}$ indica que o time t_i ganhou do time t_{i+1}.

(b) Suponha que n times ($n \geq 2$) disputaram um torneio todos contra todos sem empates. Usando indução, mostre que independentemente dos resultados das partidas, é sempre possível classificar os times seguindo uma linha de comando, isto é, mostre que sempre existe uma classificação $t_1 \succ t_2 \succ \cdots \succ t_{n-1} \succ t_n$, onde $t_i \succ t_{i+1}$ indica que o time t_i ganhou do time t_{i+1}.

[02] Para $n \geq 1$, defina $H_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i$. Mostre, usando indução, que $H_{2^n} \geq 1 + n/2$ para todo inteiro não negativo n.

[03] **(Guerra de Tortas)** Um número ímpar (≥ 3) de pessoas está em um campo com distâncias distintas entre elas. Ao mesmo tempo, cada pessoa joga uma torta em seu vizinho mais próximo.

acertando essa pessoa. Use indução para mostrar que há pelo menos um sobrevivente, ou seja, pelo menos uma pessoa que não é acertada por uma torta. Observação: o resultado é falso para um número par de pessoas.

[04] Use indução para mostrar que em um conjunto com $n+1$ inteiros positivos, não excedentes a $2\,n$, há pelo menos um número inteiro que divide outro número inteiro do conjunto.

[05] Considere um jogo em que dois jogadores alternam-se para remover qualquer número positivo de cartas que eles pegam a partir de dois montes de de cartas de baralho. O jogador que tirar a última carta, ganha o jogo. Mostre que se duas pilhas contêm o mesmo número de cartas inicialmente, o segundo jogador sempre tem uma estratégia para ganhar o jogo.

[06] O algoritmo da divisão afirma que se a é um número inteiro e d for um inteiro positivo, então existem únicos números inteiros q e r com $0 \leq r < d$ e $a = d\,q + r$. Use o Princípio da Boa Ordenação para o conjunto $X = \{a - d\,q \mid q \in \mathbb{Z} \text{ e } a - d\,q > 0\}$ para mostrar a existência dos números inteiros q e r tais que $0 \leq r < d$ e $a = d\,q + r$.

Respostas dos Exercícios

Atenção: as respostas apresentadas aqui não possuem justificativas. Você deve escrevê-las!

[01] (b) Seja $P(n)$: em um torneio todos contra todos com n times, existe uma classificação dos times eguindo uma linha de comando. $P(2)$ é verdadeira: t_1 é o time ganhador, t_2 é o time perdedor e $t_1 \succ t_2$. Para o passo indutivo, considere um torneio arbitrário com $n+1$ times. Temporariamente, ignore um time, digamos, t^*, o que nos deixa um torneio com n times. Pela hipótese de indução, existe uma cadeia de comando $t_1 \succ t_2 \succ \ldots \succ t_n$ dos times restantes. Agora, considere os jogos entre t^* e os demais times. Temos três possibilidades: (1) t^* ganhou de t_1; (2) algum $i > 1$ é o primeiro índice i para o qual t^* ganhou de t_i; (3) todo time ganhou de t^*. No primeiro caso, coloque t^* no topo da classificação ($t^* \succ t_1$). No segundo caso, coloque t^* entre t_{i-1} e t_i ($t_{i-1} \succ t^* \succ t_i$). No terceiro caso, inclua t^* no final ($t_n \succ t^*$).

[03] Considere $P(n)$, com $n \geq 1$, a proposição de que há um sobrevivente sempre que $2\,n+1$ pessoas estiverem paradas em um campo com distâncias diferentes entre elas e cada pessoa joga uma torta em seu vizinho mais próximo. Passo básico: Quando $n = 1$, há $2\,n+1 = 3$ pessoas na guerra de tortas. Dessas três pessoas, suponha que o par mais próximo seja A e B, e seja C a terceira pessoa. Como a distância entre os pares de pessoas é diferente, a distância entre A e C e a distância entre B e C são diferentes das distâncias entre A e B e maiores que ela. Temos que A joga a torta em B e B joga a torta em A, enquanto C joga a torta em A ou B, que são os mais próximos. Assim C não é atingido por nenhuma torta. Isso mostra que pelo menos uma das três pessoas não é atingida por uma torta. completando o passo base. Passo indutivo: assuma que $P(k)$ seja verdadeira, ou seja, que haja pelo menos um sobrevivente entre elas sempre que $2\,k+1$ pessoas estejam paradas em um campo com distâncias distintas entre elas e que cada uma joga uma torta em seu vizinho mais próximo. Devemos mostrar que se a hipótese indutiva $P(k)$ for verdadeira, então $P(k+1)$, a proposição que afirma que há pelo menos um sobrevivente sempre que $2\,(k+1)+1 = 2\,k+3$ pessoas estejam paradas em um campo com distâncias diferentes si e cada uma joga uma torta em seu vizinho mais próximo, é também verdadeira. Então, suponha que tenhamos $2\,(k+1)+1 = 2\,k+3$ pessoas em um campo com distâncias diferentes entre os pares de pessoas. Considere A e B como o par mais próximo de pessoas nesse grupo de $2\,k+3$ pessoas. Quando cada uma delas joga uma torta na pessoa mais próxima, A e B jogam as tortas entre si. Se alguém mais jogar uma torta em A ou B, então pelo menos três tortas serão jogadas em A e B e no máximo $(2\,k+3)-3 = 2\,k$ tortas são jogadas nas $2\,k+1$ pessoas restantes. Isso garante que pelo menos uma pessoa será sobrevivente, pois se cada uma dessas $2\,k+1$ pessoas foram atingidas por pelo menos uma torta, um total de pelo menos $2\,k+1$ tortas foram jogadas nelas. Para completar o passo indutivo, suponha que ninguém mais jogue uma torta em A ou B. Além de A e B, existem $2\,k+1$ pessoas. Como a distância entre os pares dessas pessoas são todas diferentes, podemos usar a hipótese indutiva para concluir que há pelo menos um sobrevivente S quando essas $2\,k+\ 1$ pessoas jogam as tortas em seus respectivos vizinhos mais próximos. Além disso, S também não é atingido pela torta jogada ou por A ou por B, porque A e B jogam suas tortas neles mesmos, então S é um sobrevivente, pois não é atingido por qualquer uma das tortas jogadas por essas $2\,k+3$ pessoas. Isto completa o passo de indução e a demonstração de que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n.

[04] Seja $P(n)$ o predicado: dado um conjunto com $n+1$ inteiros positivos, nenhum deles excedendo $2\,n$, existe pelo menos um inteiro neste conjunto que divide um outro neste conjunto. Passo básico: $P(1)$ é verdadeira, pois existe somente um conjunto com $1+1=2$ inteiros positivos, nenhum deles excedendo $2 \cdot 1 = 2$: o conjunto $\{1,2\}$. Note que, neste conjunto, 1 divide 2. Passo indutivo: suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Para provar que $P(k+1)$ também é verdadeira, considere um conjunto S com $(k+1)\ +\ 1 = k+\ 2$ inteiros positivos, nenhum deles excedendo

$2\,k+2$. Se $S \cap \{2\,k+1, 2\,k+2\}$ tem nenhum ou um único elemento, então podemos aplicar a hipótese de indução ao conjunto $S - \{2\,k+1, 2\,k+2\}$ para concluir que este conjunto e, portanto, o conjunto S, possui um par de inteiros onde pelo menos um deles divide o outro. Resta analisar o caso em que $2\,k+1$ e $2\,k+2$ pertencem ambos ao conjunto S. Note que, neste caso, $S - \{2\,k+1, 2\,k+2\}$ consiste de k inteiros positivos, nenhum deles maior do que $2\,k$. Se $k+1$ está em S, então terminamos, pois $k+1$ divide $2\,k+2$. Suponha então que $k+1 \notin S$. Considere o conjunto $\widetilde{S} = (S - \{2\,k+2\}) \cup \{k+1\}$. Note que $\widetilde{S} \cap \{2\,k+1, 2\,k+2\} = \{2\,k+1\}$. Logo, pelo argumento dado anteriormente, $\widetilde{S}$ tem um par de inteiros não excedendo $2\,k$ onde pelo menos um deles divide o outro. Se $k+1$ não é um destes inteiros, então estes inteiros também pertencem a S e, assim, terminamos. Se um deles é igual a $k+1$, então o outro, que chamaremos de l, pertence a $\widetilde{S} - \{k+1\}$ e l divide $k+1$ ou $k+1$ divide l. Como $l \in \widetilde{S} - \{k+1\}$, segue-se que $l \leq 2\,k$. Em particular, $k+1$ não divide l (pois $k+1$ divide $2\,k+2$, $3\,k+3, \ldots$). Portanto, l deve dividir $k+1$ e, portanto, l divide $2\,k+2$.

[05] Considere n como o número de cartas em cada pilha. Vamos usar o Segundo Princípio da Indução para demonstrar $P(n)$, a proposição que afirma que o segundo jogador pode vencer quando houver inicialmente n cartas em cada monte, é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Passo básico: quando $n = 1$, o primeiro jogador tem apenas uma escolha, remover uma carta de um monte, deixando um monte com apenas uma carta, que o segundo jogador pode retirar para vencer o jogo. Passo indutivo: suponha que $P(j)$ é verdadeira para todo $1 \leq j \leq k$, ou seja, suponha que o segundo jogador pode vencer sempre que houver j cartas em que $1 \leq j \leq k$ em cada um dos montes no início do jogo. Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que o segundo jogador pode vencer quando há inicialmente $k+1$ cartas em cada monte. Suponha então um jogo com $k+1$ cartas em cada monte no início do jogo que o primeiro jogador tirou r cartas $(1 \leq r \leq k)$ cartas em um dos montes, deixando $k+1-r$ cartas neste monte. Ao remover o mesmo número de cartas do outro monte, o segundo jogador cria a situação em que há dois montes, cada um com $k+1-r$ cartas. Como $1 \leq k+1-r \leq k$, o segundo jogador sempre vence pela hipótese indutiva. Completamos a demonstração notando que se o primeiro jogador remover todas as $k+1$ cartas de um dos montes, o segundo jogador pode vencer removendo todas as cartas restantes.

[06] O conjunto X é diferente do vazio, pois $-d\,q$ pode ser tão grande quanto queiramos (considerando, para isto, q como um número inteiro negativo com valor absoluto suficientemente grande). Pela Princípio da Boa Ordenação, X tem um menor elemento $r = a - d\,q_0$. O número inteiro r não é negativo, pois ele pertence a X. É também o caso de que $r < d$ pois, caso contrário, existirá um elemento não negativo menor em X: $a - d\,(q_0+1) = (a - d\,q_0) - d = r - d \geq 0$, uma contradição.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 26/01/2014.