Fundamentos de Matemática

Lista de Exercícios
Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

08

Somas e Exercícios de Revisão

[01] Calcule as somas abaixo.

(a) $\sum_{i=1}^{5}(i+1)$.
(b) $\sum_{j=0}^{4}(-2)^j$.
(c) $\sum_{i=1}^{3} 1$.
(d) $\sum_{j=0}^{8}(2^{j+1}-2^j)$.

[02] Calcule as somas abaixo onde $S = \{1, 3, 5, 7\}$.

(a) $\sum_{j\in S} j$.
(b) $\sum_{j\in S} j^2$.
(c) $\sum_{j\in S}(1/j)$.
(d) $\sum_{j\in S} 1$.

[03] Calcule as somas abaixo.

(a) $\sum_{j=0}^{8}(1+(-1)^j)$.
(b) $\sum_{j=0}^{8}(3^j-2^j)$.
(c) $\sum_{j=0}^{8}(2\cdot 3^j+3\cdot 2^j)$.
(d) $\sum_{j=0}^{8}(2^{j+1}-2^j)$.

[04] Calcule as somas duplas abaixo.

(a) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(i+j)$.
(b) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3}(2\cdot i+3\cdot j)$.
(c) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2} i$.
(d) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{3} i\cdot j$.

[05] Encontre e demonstre uma fórmula fechada para $\sum_{i=1}^{n} i^2$. Sugestão: use a técnica apresentada em sala de aula para deduzir a fórmula fechada para $\sum_{i=1}^{n} i$.

[06] Encontre e demonstre uma fórmula fechada para $\sum_{i=1}^{n} i^3$. Sugestão: use a técnica apresentada em sala de aula para deduzir a fórmula fechada para $\sum_{i=1}^{n} i$.

[07] Demonstre o seu entendimento da notação de somatórios escrevendo as somas

$$\sum_{0\le i\le 5} a_i \qquad \text{e} \qquad \sum_{0\le i^2\le 5} a_{i^2}$$

explicitamente (por exemplo, $\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5$).

[08] Considere o seguinte programa escrito em Python:

```
for i in range(1, 124):
     for j in range(1, 16):
         print "FGV"
```

Quantas vezes a palavra `FGV` vai aparecer na tela? Caso você não queira trabalhar com Python (ainda), responda a questão traduzindo o programa acima para a linguagem de programação de sua escolha.

[09] Considere o seguinte programa escrito em Python:

```
for i in range(1, 124):
     for j in range(1, i + 1):
         print "FGV"
```

Quantas vezes a palavra `FGV` vai aparecer na tela? Caso você não queira trabalhar com Python (ainda), responda a questão traduzindo o programa acima para a linguagem de programação de sua escolha.

[10] Mostre que se $n \in \mathbb{N}$, então $1 + 3 + 5 + \cdots + (2\,n - 1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2\,k - 1) = n^2$.

[11] Considere uma sequência de números definida recursivamente pelas seguintes condições: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e

$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2} + x_{k-3}, \qquad \text{para todo } k \geq 3.$$

Mostre que $x_n \leq 3^n$ para todo $n \geq 0$.

[12] **(Sequência de Luca)** Defina a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como se segue: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ e $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ para todo $k \geq 3$. Use o segundo princípio da indução para mostrar que $a_n \leq (7/4)^n$ para todo $n \geq 1$.

[13] Defina a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como se segue: $a_1 = 2$, $a_2 = 8$ e $a_k = 4\,(a_{k-1} - a_{k-2})$ para todo $k \geq 3$. Use o segundo princípio da indução para mostrar que $a_n = n\,2^n$ para todo $n \geq 1$.

[14] Seja a um número real diferente de zero. Encontre o erro na seguinte "demonstração" por indução para o "fato" de que $a^n = 1$ para todo $n \geq 0$:

Passo básico: $a^0 = 1$. *Passo indutivo:* $a^{n+1} = a^n \cdot a^n / a^{n-1} = 1 \cdot 1/1 = 1$.

[15] Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que $f(0) = 0$.

(b) Mostre que $f(n) = n\,f(1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

[16] **(Princípio da Boa Ordenação)** O Princípio da Boa Ordenação afirma que todo subconjunto X não-vazio do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais possui um menor elemento.

(a) Usando o segundo princípio da indução, demonstre que o Princípio da Boa Ordenação é verdadeiro. Use como predicado: $P(n)$: se $n \in X$, então X possui um menor elemento.

(b) Assumindo o Princípio da Boa Ordenação, demonstre que o Primeiro Princípio da Indução é verdadeiro.

Dos Itens (a) e (b), concluímos que o Princípio da Indução e o Princípio da Boa Ordenação são equivalentes.

[17] Desenvolva a expressão $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$ e escreva sua resposta usando somatórios.

[18] Demonstre usando o Princípio da Indução: se $n \geq 2$ pessoas estão em uma fila de modo que a primeira pessoa da fila é uma mulher e a última pessoa da fila é um homem, então em algum lugar da fila existe um homem imediatamente atrás de uma mulher.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 23/01/2014.