Lista de Exercícios
Unidade 2

1. Prove, por indução, que se X é um conjunto finito com n elementos, esses elementos podem ser ordenados de $n!$ modos.

2. Prove, por indução, que um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos.

3. Dados 3^n objetos de pesos iguais, exceto um, mais pesado que os demais, mostre que é possível determinar este objeto com n pesagens em uma balança de pratos. Mostre também que este é o número mínimo de pesagens que permitem, com certeza, determinar o objeto mais pesado.

4. Prove que, dado um conjunto com n elementos, é possível fazer uma fila com seus subconjuntos de tal modo que cada subconjunto da fila pode ser obtido a partir do anterior pelo acréscimo ou pela supressão de um único elemento. [Sugestão: para passar de n para $n+1$, liste primeiro os subconjuntos que não têm um dado elemento.]

5. Diga onde está o erro na seguinte demonstração da afirmativa "Todas as bolas de bilhar têm a mesma cor".

   Seja $P(n)$ a propriedade "todas as bolas em um conjunto com n bolas têm a mesma cor". A propriedade é trivialmente verdadeira para $n = 1$. Suponhamos agora que ela seja verdadeira para n e consideremos um conjunto com $n+1$ bolas $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$. Os subconjuntos $\{b_1, b_2, \ldots, b_n,\}$ e $\{b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$ de B têm n elementos cada; logo, pela hipótese de indução, todas as bolas em cada um deles têm a mesma cor. Mas os elementos $b_2, \ldots, b_k$ são comuns a esses dois subconjuntos. Daí, concluímos que todos os $n+1$ elementos de B têm a mesma cor, o que mostra que a propriedade vale para $n+1$. Logo, pelo Princípio da Indução, em uma coleção com n bolas todas têm a mesma cor, para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Diga se cada conjunto abaixo é finito ou infinito, justificando:

   - o conjunto de todas as pessoas que já viveram na Terra.

- o conjunto de todos os múltiplos de 7 cuja representação decimal termina com 3578.
- o conjunto de todos os números naturais cuja representação decimal tenha apenas algarismos diferentes de zero, cuja soma seja menor que 1000.
- o conjunto de todos os números racionais que podem ser escritos como fração com denominador menor que 1000.
- o conjunto de todos os números primos.

7. Sejam X e Y dois conjuntos infinitos enumeráveis. Isto significa que existem sequências $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ e $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ incluindo todos os elementos de X e Y, respectivamente. Explique como construir uma sequência incluindo todos os elementos de $X \cup Y$, mostrando assim que $X \cup Y$ também é enumerável.

8. Considere o conjunto $\mathbb{N}^2$ de todos os pares ordenados de números naturais. Encontre uma sequência que inclua todos os elementos de $\mathbb{N}^2$, mostrando assim que $\mathbb{N}^2$ é enumerável. Isto mostra que o conjunto dos números racionais também é enumerável. Por quê?

9. Mostre que o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ é não enumerável. [Sugestão: associe cada subconjunto de N a uma sequência em que os termos são iguais a 0 ou 1.]