GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Fundamentos de Matemática

Lista de Exercícios

Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

03

Conectivos, negação, contrapositiva e quantificadores

[01] Se x é um número real, então o módulo de x, denotado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} +x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

É possível demonstrar que as seguintes quatro propriedades são verdadeiras: (1) $|p| = |a|$ se, e somente se, $p = -a$ **ou** $p = +a$; (2) $|p| = a$ se, e somente se, $a \geq 0$ **e** ($p = -a$ **ou** $p = +a$); (3) $|p| < a$ se, e somente se, $-a < p < +a$ (isto é, $-a < p$ **e** $p < +a$); (4) $|p| > a$ se, e somente se, $p < -a$ **ou** $p > +a$. Estas propriedades são úteis para se resolver equações e inequações envolvendo módulos. Por exemplo, a inequação $|x - 1| < 3$ pode ser resolvida usando-se a propriedade (3):

$$|x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 1 < +3 \Leftrightarrow -3 + 1 < x < +3 + 1 \Leftrightarrow -2 < x < +4.$$

Resolva as equações e inequações indicadas a seguir. Cuidado com o uso correto dos conectivos!

(a) $|x - 1| = 4$. (b) $|x| = 2$. (c) $|x - 1| = 3 - \pi$.

(d) $|3\,x| = 1 - |x|$. (e) $|3\,x| = |x| - 1$. (f) $|x - 1| = |x - 4|$.

(g) $|x^2| = x + 2$. (h) $|x| = x$. (i) $|x| = -x$.

(j) $|x - 1| < 4$. (k) $|x| \geq 2$. (l) $|x - 1| > 3 - \pi$.

(m) $|3\,x| \leq 1 - |x|$. (n) $|3\,x| \leq |x| - 1$. (o) $|x - 1| < |x - 4|$.

(p) $|x^2| > x + 2$. (q) $|x| < x$. (r) $|x| > -x$.

[02] (a) Um dado equilibrado é lançado. Qual é a probabilidade do número sorteado seja par **e** menor do que quatro?

(b) Um dado equilibrado é lançado. Qual é a probabilidade do número sorteado seja par **ou** menor do que quatro?

[03] As sentenças abaixo são verdadeiras. Escreva uma demonstração para cada uma delas usando a contrapositiva.

(a) Sejam m e n números inteiros positivos. Se $m + n$ é um número ímpar, então m é ímpar ou n é ímpar.

(b) Seja n um número inteiro. Se n^2 não é divisível por 7, então n não é divisível por 7.

(c) Sejam m e n números inteiros. Se mn é par, então m é par ou n é par.

(d) Sejam m e n números inteiros positivos. Se $mn = 100$, então $m \leq 10$ ou $n \leq 10$.

(e) Se a é um número inteiro ímpar, então a equação quadrática $x^2 - x - a = 0$ não possui raízes que são números inteiros.

(f) Seja x um número real. Se $0 < x < 1$, então $x > x^2$.

(g) Seja n um número inteiro positivo. Se $2^n - 1$ é primo, então n é primo.

[04] Diz-se que uma função $f\colon D \to C$ é *injetiva* se ela satisfaz a seguinte condição: para todo $x_1, x_2 \in D$, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(a) Dê um exemplo de uma função $f\colon D \to C$ injetiva. Justifique o porquê de sua função ser injetiva.

(b) Quando uma função $f\colon D \to C$ *não é* injetiva?

(c) Dê um exemplo de uma função $f\colon D \to C$ não injetiva. Justifique o porquê de sua função não ser injetiva.

(d) Considere uma função $f\colon D \to C$ que satisfaz a seguinte condição: para todo $x_1, x_2 \in D$, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. A função f é injetiva? Justifique sua resposta!

[05] Diz-se que uma função $f\colon D \to C$ é *sobrejetiva* se ela satisfaz a seguinte condição: para todo $b \in C$, existe $a \in D$ tal que $f(a) = b$.

(a) Dê um exemplo de uma função $f\colon D \to C$ sobrejetiva. Justifique o porquê de sua função ser sobrejetiva.

(b) Quando uma função $f\colon D \to C$ *não é* sobrejetiva?

(c) Dê um exemplo de uma função $f\colon D \to C$ não sobrejetiva. Justifique o porquê de sua função não ser sobrejetiva.

[06] Diz-se que uma função $f\colon D \to C$ é *crescente* se ela satisfaz a seguinte condição: para todo $x_1, x_2 \in D$, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.

(a) Dê um exemplo de uma função $f\colon D \to C$ crescente. Justifique o porquê de sua função ser crescente.

(b) Quando uma função $f\colon D \to C$ *não é* crescente?

(c) Dê um exemplo de uma função $f\colon D \to C$ não crescente. Justifique o porquê de sua função não ser crescente.

(d) A função $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ definida por $f(x) = 1/x$ é crescente? Justifique sua resposta!

(e) Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função real definida no intervalo $[a, b]$. Mostre que se f é crescente em $[a, b]$, então f é injetiva.

(f) Verdadeira ou falsa? Se $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $g\colon D \to \mathbb{R}$ são duas funções crescentes, então $f + g\colon D \to \mathbb{R}$ também é uma função crescente. Apresente uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

(g) Verdadeira ou falsa? Se $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $g\colon D \to \mathbb{R}$ são duas funções crescentes, então $f \cdot g\colon D \to \mathbb{R}$ também é uma função crescente. Apresente uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

(h) Verdadeira ou falsa? Se $f\colon D \to \mathbb{R}$ e $g\colon D \to \mathbb{R}$ são duas funções crescentes, então $f - g\colon D \to \mathbb{R}$ também é uma função crescente. Apresente uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

(i) Verdadeira ou falsa? Se $f\colon D \to \mathbb{R}$ é uma função crescente e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in D$, então $g(x) = 1/f(x)$ é uma função decrescente em D. Apresente uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

(j) Verdadeira ou falsa? Se f é uma função crescente em um intervalo $I = [a, b]$ e crescente em um intervalo $J = [c, d]$, então f é crescente no conjunto $I \cup J = [a, b] \cup [c, d]$. Apresente uma demonstração caso a sentença seja verdadeira e um contraexemplo caso ela seja falsa.

[07] (a) Diz-se que um ponto $p \in D$ é *ponto de mínimo global* de uma função $f\colon D \to C$ se p satisfaz a seguinte condição: para todo $x \in D$, $f(x) \geq f(p)$. Quando um ponto $p \in D$ *não é* ponto de mínimo global de uma função $f\colon D \to C$?

(b) Diz-se que um ponto $p \in D$ é *ponto de mínimo local* de uma função $f\colon D \to C$ se p satisfaz a seguinte condição: existe um intervalo aberto I tal que $p \in I$ e para todo $x \in D \cap I$, $f(x) \geq f(p)$. Quando um ponto $p \in D$ *não é* ponto de mínimo local de uma função $f\colon D \to C$?

[08] Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é *contínua* em um ponto $p \in \mathbb{R}$ se p satisfaz a seguinte condição: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$. Quando uma função *não é* contínua em um ponto $p \in \mathbb{R}$?

Respostas dos Exercícios

Atenção: as respostas apresentadas aqui não possuem justificativas. Você deve escrevê-las!

[01] (a) $S = \{-3, 5\}$. (b) $S = \{-2, 2\}$. (c) $S = \varnothing$. (d) $S = \{-1/4, 1/4\}$. (e) $S = \varnothing$. (f) $S = \{5/2\}$. (g) $S = \{-1, 2\}$. (h) $S = [0, +\infty)$. (i) $S = (-\infty, 0]$. (j) $S = (-3, 5)$. (k) $S = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. (l) $S = \mathbb{R}$. (m) $S = [-1/4, 1/4]$. (n) $S = \varnothing$. (o) $S = (-\infty, 5/2)$. (p) $S = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. (q) $S = \varnothing$. (r) $S = (0, +\infty)$.

[03] Para o Item (g), use o produto notável: se $s \in \mathbb{N}$, então $x^s - 1 = (x-1)(x^{s-1} + x^{s-2} + \cdots + x + 1)$.

[06] (f) Verdadeira. (g) Falsa. (h) Falsa. (i) Falsa. Como contraexemplo, considere $f(x) = x$ definida em $D = \mathbb{R} - \{0\}$. (j) Falsa.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 10/01/2013.