GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Fundamentos de Matemática

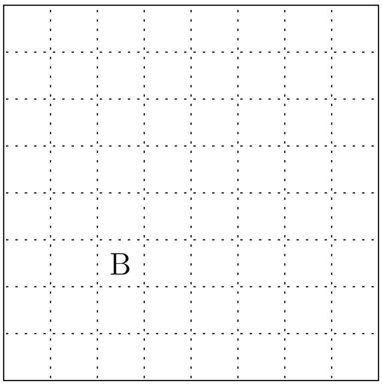
Lista de Exercícios

Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

07

O Princípio da Indução e Recursão

[01] Usando o algoritmo recursivo descrito em sala de aula, preencha o jardim abaixo com ladrilhos na forma de L. A letra B indica a posição da estátua de Bill.



[02] Mostre que se $n \in \mathbb{N}$, então $n < 2^n$.

[03] Mostre que se $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$ e $a < b$, então $a^n < b^n$.

[04] **(Sugerido por T. I. Ramsamujh)** Considere o seguinte predicado:

$P(n)$: se o máximo de dois inteiros positivos é n, então os inteiros são iguais.

Vamos "mostrar", usando o princípio da indução, que a sentença quantificada $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(n)}$ é verdadeira:

> *Observe que $P(1)$ é verdadeira, pois se o máximo de dois números inteiros positivos é 1, então os dois inteiros devem ser iguais a 1 e, portanto, eles são iguais. Suponha que $P(n)$ seja verdadeira. Vamos mostrar que $P(n+1)$ também é verdadeira. De fato: sejam u e v dois inteiros com máximo $n+1$. Então o máximo de $u-1$ e $v-1$ é n. Uma vez que $P(n)$ é verdadeira, segue-se que $u-1 = v-1$. Assim, $u = v$, de modo que $P(n+1)$ é verdadeira.*

Sejam $r = 999$ e $s = 1000$. Note que o máximo entre r e s é $n = s = 1000$. Pelo que acabamos de provar, $r = s$, isto é, $999 = 1000$, mas isso é um absurdo. Onde está o erro?

[05] **(Código de Gray)** Uma sequência de 2^n palavras de tamanho n formadas pela justaposição de zeros e uns é um *código de Gray* de tamanho n se duas palavras adjacentes na sequência sempre diferem exatamente por uma letra.

(a) Mostre que $(00, 01, 11, 10)$ é um código de Gray de tamanho $n = 2$.

(b) Dê um outro código de Gray de tamanho $n = 2$ diferente daquele dado no Item (a).

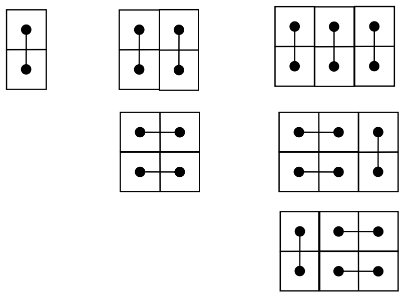
(c) Sem consultar o item seguinte, tente construir um código de Gray de tamanho $n = 3$.

(d) O algoritmo recursivo descrito a seguir gera códigos de Gray de tamanho arbitrário. Por quê?

> Passo 1. Seja $G_1 = (00, 01)$.
>
> Passo 2. Para cada $n = 2, 3, \ldots$, uma vez construído um código G_{n-1},
>
> (A) crie uma sequência de palavras justapondo a letra "0" à esquerda de cada palavra de G_{n-1};
>
> (B) crie uma sequência de palavras justapondo a letra "1" à esquerda de cada palavra de G_{n-1};
>
> (C) inverta o ordem que as palavras aparecem na sequência criada no Item (B);
>
> (D) defina G_n como a sequência formada pelas palavras da sequência construída no Item (A) seguida das palavras da sequência construída no Item (C).

(e) Use o algoritmo descrito no Item (d) para gerar um código de Gray de tamanho $n = 3$. Compare com sua resposta para o Item (c).

[06] Seja x_n o número de maneiras diferentes de se cobrir um jardim $2 \times n$ com dominós. As figuras abaixo mostram que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$. Obtenha uma fórmula recursiva para x_n. Justifique sua resposta!



[07] Prove que se $(x + 1/x)$ é um número inteiro, então $(x^n + 1/x^n)$ também é um número inteiro para todo inteiro positivo n. Dica: use o segundo princípio da indução.

[08] **(Representação de números inteiros positivos em binário)** Mostre que para todo número inteiro positivo n, existe inteiro $r \geq 0$ e inteiros $c_0, c_1, \ldots, c_r \in \{0, 1\}$ tais que

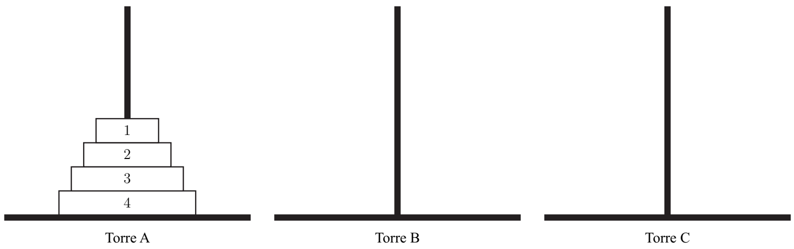
$$n = \sum_{i=0}^{r} c_i\, r^i = c_0 + c_1\, 2 + c_2\, 2^2 + \cdots + c_{r-1}\, 2^{r-1} + c_r\, 2^r.$$

Dica: use o segundo princípio da indução. Para o passo indutivo, considere os casos em que $n+1$ é par (isto é, $n+1 = 2\,k$, com k inteiro positivo menor do que $n+1$) e $n+1$ é ímpar (isto é, $n+1 = 2\,k+1$, com k inteiro positivo menor do que $n+1$).

[09] Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, 12 divide $n^4 - n^2$. Dica: use o segundo princípio da indução. Mais precisamente, para o predicado $P(n)$: 12 divide $n^4 - n^2$, mostre que $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$ e $P(6)$ são verdadeiras. Para o passo indutivo, escreva $m = n - 5$, de modo que $n + 1 = m + 6$. Use então que 12 divide $m^4 - m^2$ para mostrar que 12 divide $(n+1)^4 - (n+1)^2$.

[10] Considere a sequência (a_n) definida recursivamente por: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ para $n \geq 4$. Mostre que, para todo $n \geq 4$, $a_n < 2^n$. Dica: use o segundo princípio da indução.

[11] Usando o algoritmo recursivo apresentado em sala de aula, indique explicitamente os $2^4 - 1 = 15$ passos que resolvem o problema da Torre de Hanoi com $n = 4$ discos.

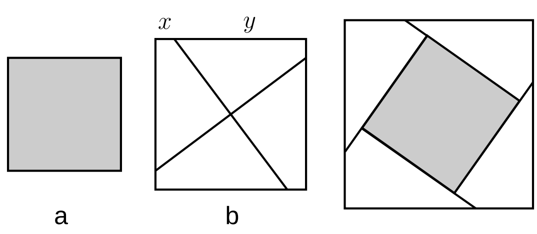


[12] Desenhe a árvore de recursão do algoritmo recursivo apresentado em sala de aula para determinar as permutações de uma lista quando ele é aplicado à lista (a, b, c, d).

[13] Quais valores podem ser formados usando-se selos de 5 e 8 centavos? Prove, por indução, que existe um natural k tal que para todo natural $n \geq k$, é possível encontrar uma coleção de selos de 5 e 8 centavos totalizando n centavos. Dica: gere uma tabela e tente descobrir um valor para k. Para mais detalhes e generalizações, consulte o Capítulo 6 do livro "*How to Guard an Art Gallery and Other Discrete Mathematical Adventures*" de T. S. Michael publicado pela The Johns Hopkins University Press.

[14] Verifique se os jardins 3×2^n, 6×2^n, $3^n \times 3^n$ e $6^n \times 6^n$ podem ou não, para todo $n \in \mathbb{N}$, serem preenchidos com peças no formato de L, isto é, .

[15] Dados dois quadrados, é possível cortá-los em um número finito de peças poligonais (todos os lados são segmentos de reta) e juntas todas as peças de maneira a construir um único quadrado. A figura abaixo mostra uma maneira de se fazer isto.



Se os quadrados tem lados de medida a e b, com $a \leq b$, então deixe o quadrado menor do jeito que ele está (não o corte), corte o quadrado maior em quatro peças e junte as peças como indicado (isto é, com $x = (\mathrm{b} - \mathrm{a})/2$ e $y = (\mathrm{a} + \mathrm{b})/2$).

(a) Verifique que este método funciona, isto é, verifique que quando você junta as peças nada fica faltando ou sobrando e que a figura resultante é de fato um quadrado.

(b) Prove que *qualquer* número de quadrados podem ser cortados e arranjados em um único quadrado.

(c) Faça três quadrados de lados 4, 5 e 6, respectivamente, de papel cores diferentes. Corte-os em pedaços poligonais e monte um único quadrado a partir das peças resultantes. Não, isto não é uma aula de artes, mas é instrutivo tentar uma experiência concreta sobre a relação entre demonstrações indutivas e construções explícitas.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 22/01/2014.