unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São João da Boa Vista

ATIVIDADE – AULA 04

AERODINÂMICA COMPUTACIONAL

João Raphael Cioffi

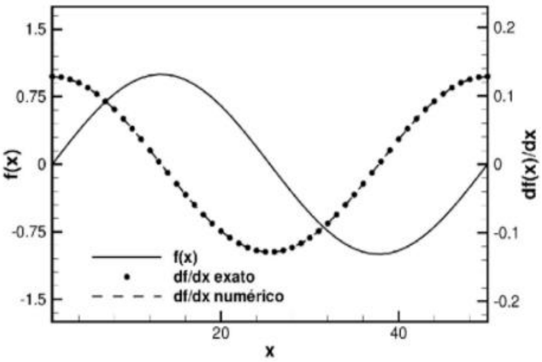
R.A.: 172490881

Prof. Dr. Luiz Augusto Camargo Aranha Schiavo

1) Implemente no python os seguintes esquemas de diferenças finitas para derivada primeira. Valide calculando a derivada da um sen(x), x=[0,2pi]. Utilize condição de contorno periódica na fronteira.

$$\frac{u_{j+1}-u_j}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \qquad \frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{1}{6\Delta x}(u_{j-2}-6u_{j-1}+3u_j+2u_{j+1})+O(\Delta x^3).$$



Dica: escreva cada esquema numérico dentro de uma função separada.
Ex.:

```
def esquema1(f,x):
    ...
    return dfdx
```

RESOLUÇÃO:

A partir do script, pôde-se chegar no seguinte resultado para cada esquema:

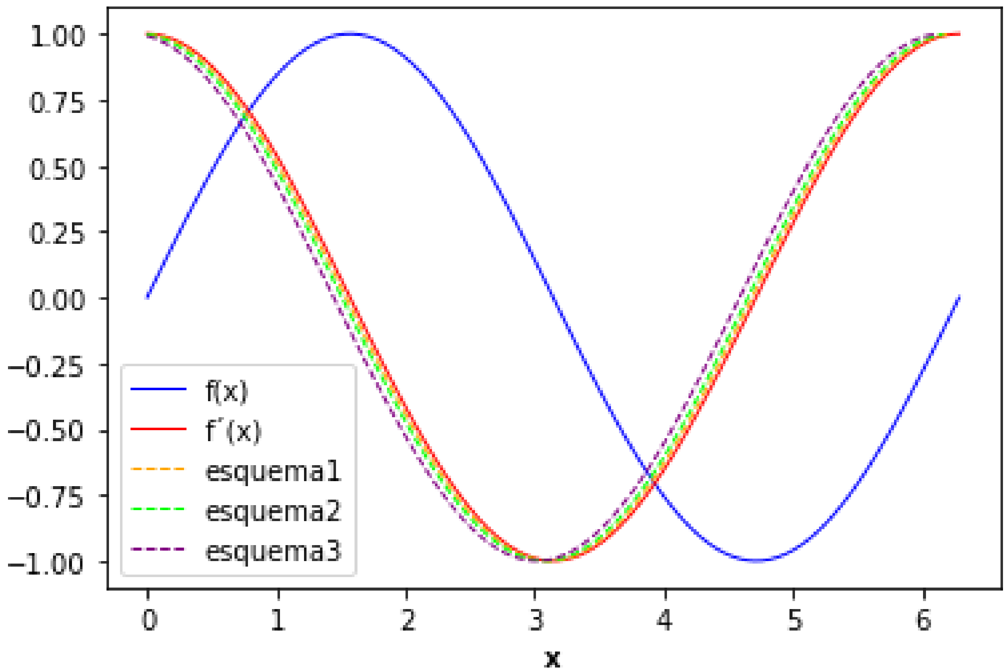


Figura 01 - Plot gerado para o exercício 01.

[02] Partindo-se da expansão em série de Taylor:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j - \frac{1}{\Delta x}\left(d u_{j-3} + c.u_{j-2} + b.u_{j-1} + a\cdot u_j\right) = ER$$

$\Rightarrow$ Multiplicando-se ambos os lados da igualdade por Δx:

$$\Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j - \frac{1}{\Delta x}\left(d u_{j-3} + c.u_{j-2} + b.u_{j-1} + a.u_j\right)\Delta x = ER.\Delta x$$

$\Rightarrow$ Montando a tabela:

	u_j	$\Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_j$	$\Delta x^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_j$	$\Delta x^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$	$\Delta x^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$
$\Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_j$	0	1	0	0	0
$-du_{j-3}$	$-d(1)$	$-d(-3)$	$-\frac{d(-3)^2}{2!}$	$-\frac{d}{3!}(-3)^3$	$-\frac{d}{4!}(-3)^4$
$-cu_{j-2}$	$-c(1)$	$-c(-2)$	$\frac{-c(-2)^2}{2!}$	$-\frac{c(-2)^2}{3!}$	$-\frac{c}{4!}(-2)^4$
$-bu_{j-1}$	$-b(1)$	$-b(-1)$	$-\frac{b(-1)^2}{2!}$	$-\frac{b(-1)^3}{3!}$	$-\frac{b(-1)^4}{4!}$
$-au_j$	$-a$	0	0	0	0
$\sum$	0	0	0	0	0

$$\frac{27}{8}d + \frac{1}{6}c + \frac{1}{84}.b$$

Logo:
$$\begin{cases} -d-c-b-a=0 \\ 1+3d+2c+b=0 \\ -9d/2-2c-b/2=0 \\ 9d/2+4c/3+b/6=0 \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

⇒ Montando o sistema (I) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1/2 & -2 & -9/2 \\ 0 & 1/6 & 4/3 & 9/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

⇒ Resolvendo o sistema linear:

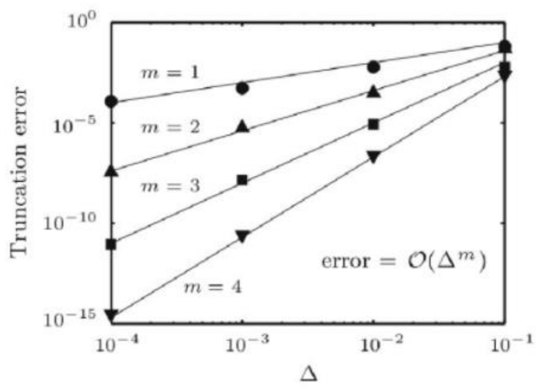
$$\boxed{\begin{aligned} a &= 11/6 \\ b &= -3 \\ c &= 3/2 \\ d &= -1/3 \end{aligned}}$$

⇒ Reescrevendo, teremos:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j - \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{11}{6}u_j - 3u_{j-1} + \frac{3}{2}u_{j-2} - \frac{1}{3}u_{j-3}\right] = \frac{\Delta x^4}{4}\left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_j$$

Ou seja, o método possui precisão de 4ª ordem, sendo a característica física a difusão por haverem derivadas de ordem par.

3) Escreva um código em python para traçar um gráfico de Erro vs espaçamento de malha. Utilize os esquemas da questão anterior da questão 1.



RESOLUÇÃO:

A partir do script, pôde-se chegar no seguinte resultado para cada esquema:

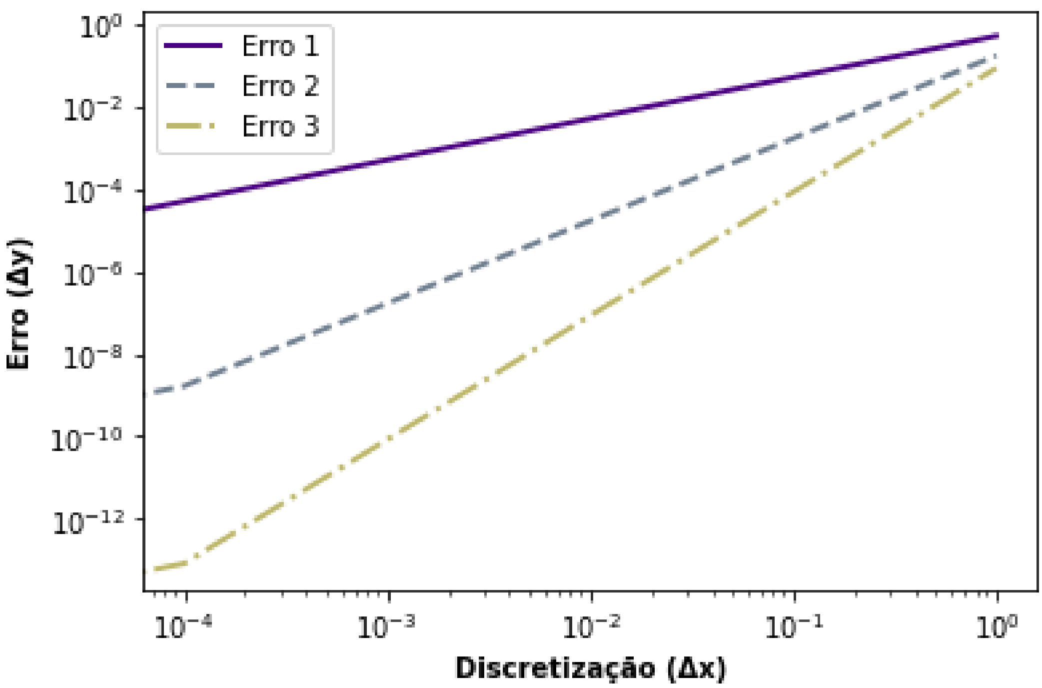


Figura 02 - Plot gerado para o exercício 02.