Integrais Impróprias: Tipos I e II

1. Conceito e Definições

Uma **integral imprópria** é aquela em que o intervalo de integração é infinito ou em que o integrando apresenta descontinuidade (ou tende ao infinito) em algum ponto do intervalo.

Existem dois tipos principais:

Tipo I - Intervalo Infinito

Ocorre quando o intervalo de integração é infinito, isto é, quando pelo menos um dos limites é $\pm\infty$ do tipo

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad ou \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx.$$

Nesse caso, define-se a integral como um limite:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx.$$

Se o limite existe (é finito), a integral **converge**; caso contrário, **diverge**.

Tipo II - Descontinuidade

Ocorre quando a função tem um ponto de descontinuidade ou tende ao infinito em algum ponto c do intervalo $[a, b]$ do tipo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

onde $f(x)$ é infinita em $x = c$. Definimos, separando nos limites apropriados:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)\,dx.$$

Se ambos os limites existem (finitos), a integral **converge**; caso contrário, **diverge**.

2. Exemplos Resolvidos

Exemplo 1 - Integral Imprópria Tipo I:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

Primeiro, substituímos o limite superior infinito por t:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-2}\,dx.$$

Calculando a primitiva:

$$\int x^{-2}\,dx = -x^{-1} = -\frac{1}{x}.$$

Logo,

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1.$$

Tomando o limite:

$$\lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

A integral converge e o valor é 1.

Exemplo 2 - Integral Imprópria Tipo II:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

A função $\frac{1}{\sqrt{x}}$ é infinita em $x = 0$. Assim,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x^{-1/2}\,dx.$$

Calculando a primitiva:

$$\int x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2}.$$

Logo,

$$\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2(1^{1/2} - t^{1/2}) = 2(1 - \sqrt{t}).$$

Tomando o limite:

$$\lim_{t\to 0^+} 2(1 - \sqrt{t}) = 2.$$

A integral converge e o valor é 2.

3. Exercícios Propostos

Calcule (ou verifique a convergência/divergência) das seguintes integrais impróprias:

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \quad (p > 0)$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

7. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

Resumo

Tipo I:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx.$$

Tipo II:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx.$$

Uma integral imprópria **converge** se todos os limites envolvidos são finitos; caso contrário, **diverge**.