Integrais de funções racionais por frações parciais

Considere a função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções polinomiais reais com $Q(x) \neq 0$. Se o grau de $P(x)$ for menor que o grau de $Q(x)$, dizemos que $f(x)$ é uma fração racional própria. Caso contrário, $f(x)$ é denominada fração imprópria.

Caso 1 $Q(x)$ possui fatores lineares distintos.

Cada fator linear da forma $ax + b$ que aparece em $Q(x)$ temos uma fração parcial da forma:

$$\frac{A}{ax + b}$$

onde A é uma constante a determinar.

Exemplo: Calcular a integral

$$\int \frac{1}{x^2 - 4}\, dx$$

Passo 1: Fatorar o denominador

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Passo 2: Decompor em frações parciais Procuramos constantes A e B tais que

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}.$$

Multiplicando ambos os lados por $(x - 2)(x + 2)$, obtemos:

$$1 = A(x + 2) + B(x - 2) = (A + B)x + (2A - 2B).$$

Igualando coeficientes:

$$\{ A + B = 0, 2A - 2B = 1.$$

Daí $A = \frac{1}{4}$ e $B = -\frac{1}{4}$.

Passo 3: Reescrever a fração

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2}\right).$$

Passo 4: Integrar termo a termo

$$\int \frac{1}{x^2 - 4}\, dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2}\right) dx = \frac{1}{4}\left[\ln|x - 2| - \ln|x + 2|\right] + C.$$

Passo 5: Simplificar usando propriedades do logaritmo

$$\int \frac{1}{x^2 - 4}\, dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right| + C.$$

Caso 2 $Q(x)$ possui fatores lineares repetidos.

Cada fator linear da forma $ax+b$ que aparece n vezes em $Q(x)$ temos uma soma de n frações parciais da forma:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

onde A_1, A_2,...,A_n são constantes a determinar.

Exemplo: Calcular a integral

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\, dx$$

Passo 1: Fatorar o denominador

$$x^3-x^2-x+1=(x^2-1)(x-1)=(x-1)^2(x+1).$$

Passo 2: Decomposição em frações parciais

$$\frac{3x+5}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Multiplicando por $((x-1)^2(x+1))$ e igualando numeradores:

$$3x+5 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2.$$

Expandindo:

$$3x+5 = (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C).$$

Igualando coeficientes obtemos o sistema

$$\{ A+C=0, B-2C=3, A+B+C=5.$$

Da primeira equação $A=-C$. Substituindo nas outras duas:

$$\{ B-2C=3, B+2C=5.$$

Somando as duas:

$$2B=8 \Rightarrow B=4$$

Então

$$B-2C=3 \Rightarrow 4-2C=3 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

e

$$A=-\frac{1}{2}$$

Passo 3: Reescrever a fração

$$\frac{3x+5}{(x-1)^2(x+1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

Passo 4: Integrar termo a termo

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}, dx + 4\int \frac{1}{(x-1)^2}, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}, dx.$$

Calculando as primitivas:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}, dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1|, \qquad 4\int (x-1)^{-2}, dx = 4\left(-\frac{1}{x-1}\right) = -\frac{4}{x-1},$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}, dx = \frac{1}{2}\ln|x+1|.$$

Passo 5: Resposta final

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}, dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{4}{x-1} + C,$$

Caso 3 $Q(x)$ possui fatores irredutíveis distintos do segundo grau.

Cada fator irredutível do segundo grau da forma ax^2+bx+c que aparece uma vez em $Q(x)$ temos uma fração parcial da forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

onde A e B são constantes a determinar.

Exemplo: Calcular a integral

$$\int \frac{x+2}{x^3-1}\,dx$$

Passo 1: Fatorar o denominador

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

Passo 2: Decomposição em frações parciais

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Multiplicando por $(x-1)(x^2+x+1)$ e igualando coeficientes obtemos

$$A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)=x+2,$$

o que leva ao sistema

$$\{\,A+B=0, A+C-B=1, A-C=2.$$

Daí $A=1,\ B=-1,\ C=-1$

Passo 3: Reescrever a fração

$$\frac{x+2}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Passo 4: Integrar termo a termo

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1| + C_1,$$

e para o segundo termo escrevemos $x+1=\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}$, obtendo

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2.\end{aligned}$$

Passo 5: Resultado final

$$\int \frac{x+2}{x^3-1}\,dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\!\big(x^2+x+1\big) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\!\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Caso 4 $Q(x)$ possui fatores irredutíveis repetidos do segundo grau

A cada fator irredutível do segundo grau da forma ax^2+bx+c que aparece n vezes em $Q(x)$ temos uma soma de n frações parciais da forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + ... + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

onde A_1, A_2, ..., A_n e B_1, B_2, ..., B_n são constantes a determinar.
Exemplo: Calcular a integral

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$$

Passo 1: Decomposição em frações parciais

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+3} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Multiplicando ambos os lados por $(x^2+2x+3)^2$, obtemos

$$x^2+x+2 = (Ax+B)(x^2+2x+3) + (Cx+D).$$

Expandindo o lado direito:

$$x^2+x+2 = Ax^3+2Ax^2+3Ax+Bx^2+2Bx+3B+Cx+D.$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$x^2+x+2 = Ax^3+(2A+B)x^2+(3A+2B+C)x+(3B+D).$$

Como não há termo em x^3 no lado esquerdo, $A=0$. Substituindo $A=0$, obtemos:

$$x^2+x+2 = Bx^2+(2B+C)x+(3B+D).$$

Igualando coeficientes:

$$\{\, B = 1, 2B+C = 1, 3B+D = 2.$$

Resolvendo:

$$B=1,\quad C=-1,\quad D=-1.$$

Passo 2: Reescrever a fração

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{x^2+2x+3} - \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Passo 3: Integração de cada parcela
A integral original torna-se:

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx - \int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx.$$

Primeiro termo: completar o quadrado $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\!\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

Segundo termo: faça $v = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow dv = 2(x+1)\,dx$, então

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int v^{-2}\,dv = -\frac{1}{2v} + C = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} + C.$$

Portanto:

$$-\int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = +\frac{1}{2(x^2+2x+3)}.$$

Passo 4: Resultado final
Somando os dois resultados:

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2(x^2+2x+3)} + C.$$

Exercícios

1) Calcule as integrais:

a) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$ b) $\int \frac{x-1}{x^2+2x+10}\,dx$ c) $\int \frac{x^4+48x-1}{(x+7)(x^2+x+1)}\,dx$ d) $\int \frac{dx}{x(x+1)}$

e) $\int \frac{dx}{x^2+4}$ f) $\int \frac{x}{(x+2)(x-3)^2}$ g) $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$ h) $\int \frac{x^3+1}{x(x+4)}\,dx$