

# **Simulação de Sinais Cerebrais de Espectroscopia por Ressonância Magnética**

**Da Criação à Corrupção (Por Ruído)**

**João Victor Dell Agli Floriano**

**Fernando Fernandes Paiva**

**Curso:** Mestrado

**Período a que se refere:** 02/2024 a 12/2024

**Bolsa de Estudos:** CAPES

**Período de Vigência:** 01/08/2024 a 28/02/2026 (19 meses)

# 1 Resumo

## 2 Introdução

1. Descrever o que é "pencil"
2. Implementação do MPM sem ruído
3. Implementação do MPM com ruído
4. Separação de variáveis (s0, phi, omega, T2)
5. Testagem do L sem ruído
6. Testagem do SVD sem ruído
7. Testagem do L com ruído
8. Testagem do SVD com ruído
9. Testagem do comportamento das variáveis separadas com a introdução de ruído de valores de sigma variados

O termo "lápiz" (do inglês *pencil*), cunhado por Grantmacher [?] no contexto de *pencil* de matrizes, é uma ferramenta que combina matrizes quadradas linearmente a partir de um parâmetro  $\lambda$ , como descrito pela Equação 1.  $l$  é um inteiro não-negativo.

$$L(\lambda) = \sum_{i=0}^l \lambda^i A_i \quad (1)$$

No contexto de *pencil* de funções,  $f(t, \lambda)$  é *pencil* de  $g(t)$  e  $h(t)$  quando segue o formato descrito pela Equação 2.

$$f(t, \lambda) = g(t) + \lambda h(t) \quad (2)$$

O método "lápiz de matrizes", do inglês *Matrix Pencil Method* (MPM) é uma técnica numérica de estimativa de parâmetros de sinais, desenvolvido originalmente por Yingbo Hua e Tapan Sakar [2] como uma alternativa a métodos já existentes como o de Prony [1]. O mesmo consiste em modelar os sinais como uma soma de exponenciais complexas amortecidas, como na Equação 3. Partindo dessa ideia, é então aplicada uma série de

etapas, que inclui a utilização de outros métodos, como Decomposição em Valores Singulares (SVD, do inglês *Singular Value Decomposition*), para estimar os parâmetros dessa função modeladora.

$$y(n) = \sum_{k=1}^M R_k e^{i(\omega_k t + \phi_k) + \alpha_k} \quad (3)$$

## 3 Métodos

A implementação do MPM em seu trabalho original é descrita originalmente de duas maneiras: a sem ruído, implementada de maneira mais simplificada; e a que leva em conta a presença de ruído, que utiliza algoritmos mais complexos, como a Decomposição em Valores Singulares (SVD, do inglês *Singular Value Decomposition*).

### 3.1 Caso sem ruído

Assumindo um sinal  $x$  de tamanho  $N$ , para o caso sem ruído, define-se duas matrizes  $(N - L) \times L$ ,  $Y_1$  e  $Y_2$ , descritas pela Equação 4 e Equação 5.

$$Y_2 = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \dots & x(L) \\ x(2) & x(3) & \dots & x(L+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(N-L) & x(N-L+1) & \dots & x(N-1) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(L-1) \\ x(1) & x(2) & \dots & x(L) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(N-L-1) & x(N-L) & \dots & x(N-2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Sendo  $L$  o parâmetro de *pencil*, importante para etapas posteriores. É possível escrever  $Y_1$  e  $Y_2$  como a Equação 6 e a Equação 7, sendo  $Z_1$  descrito pela Equação 8,  $Z_2$  descrito pela Equação 9,  $Z_0$  descrito pela Equação 10, e enfim  $R$ , descrito pela Equação 11. Por enquanto, o parâmetro  $M$  pode ser considerado como igual a  $N$ , porém virá a assumir valores diferentes posteriormente.

$$Y_2 = Z_1 R Z_0 Z_2 \quad (6)$$

$$Y_1 = Z_1 R Z_2 \quad (7)$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{N-L-1} & z_2^{N-L-1} & \dots & z_M^{N-L-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{L-1} \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{L-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_M & \dots & z_M^{L-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$Z_0 = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_M) \quad (10)$$

$$R = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_M) \quad (11)$$

Considerando agora o *pencil*, descrito pela Equação 12: Reescrevendo-o a partir da Equação 6 e da Equação 7, obtém-se a Equação 13, que, reorganizada, rende a Equação 14.

$$Y_2 - \lambda Y_1 \quad (12)$$

$$Y_2 - \lambda Y_1 = Z_1 R Z_0 Z_2 - \lambda Z_1 R Z_2 \quad (13)$$

$$Y_2 - \lambda Y_1 = Z_1 R (Z_0 - \lambda I) Z_2 \quad (14)$$

Considerando  $\lambda = z_i$ , a matriz  $Z_0 - \lambda I$  é zero, fazendo com que o *pencil* seja igual a zero, transformando o problema é um problema de autovalores generalizados. Encontrando os autovalores generalizados do par  $\{Y_1, Y_2\}$ , encontra-se os polos  $z_i$ . É possível também encontrar  $z_i$  como resultado do problema de autovalores comuns da matriz  $Y_1^+ Y_2$ , como na Equação 15.  $Y_1^+$ , a matriz pseudoinversa de Moore-Penrose de  $Y_1$ , é definida pela Equação 16, no qual  $H$  denota o conjugado transposto.

$$Y_1^+ Y_2 - \lambda I = 0 \quad (15)$$

$$Y_1^+ = (Y_1^H Y_1)^{-1} Y_1^H \quad (16)$$

Encontrados os polos  $z_i$ , basta encontrar os resíduos  $R_i$  a partir de um problema de mínimos quadrados, descritos pela Equação 17.

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_M \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_M^{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_M \end{bmatrix} \quad (17)$$

### 3.2 Caso com ruído

No caso com ruído, é construída a matriz generalizada  $Y$ , descrita pela Equação 18, da qual é possível extrair  $Y_1$  e  $Y_2$  deletando a última e a primeira coluna, respectivamente.

$$Y = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & y(2) & \dots & y(L) \\ y(1) & y(2) & y(3) & \dots & y(L+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N-L-1) & y(N-L) & y(N-L+1) & \dots & y(N-1) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Como citado anteriormente, o parâmetro  $L$  viria a ser importante para filtragem do ruído, sendo escolhido entre  $N/3$  e  $N/2$ , intervalo no qual a variância dos parâmetros  $z_i$  por conta do ruído apresentou-se como mínima [2].

Após a construção, aplica-se uma decomposição em Valores Singulares (SVD) nessa matriz.

$$Y = U \Sigma V^H \quad (19)$$

A qual a matriz  $U$ , a matriz de vetores singulares à esquerda, contém os autovetores da matriz  $YY^H$ .  $V$ , chamada de matriz de vetores singulares à direita, contém os autovetores da matriz  $Y^H Y$ , e  $\Sigma$ , a matriz diagonal de valores singulares, contém os autovalores tanto de  $YY^H$  e  $Y^H Y$ .

Encontradas as submatrizes, o número  $M$  de polos a serem calculados é escolhido, sendo eles os  $M$  autovalores de  $\Sigma$  que mais contribuem para a matriz final. A sugestão de exclusão segue a Equação 20, sendo  $\sigma_c$  o valor singular analisado,  $\sigma_{max}$  o maior valor singular

e  $p$  o número de algarismos significativos. A partir disso, é possível filtrar os autovalores, separando os mais significativos de ruído.

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_{max}} = 10^{-p} \quad (20)$$

Encontrado o valor singular limite de filtragem, a matriz  $Y'$  é construída a partir de  $Y$  com menos valores singulares, e a partir dela,  $Y'_1$  e  $Y'_2$  são derivadas. Realizada essa etapa, basta calcular os autovalores generalizados do par  $\{Y'_2, Y'_1\}$ , ou o autovalor da matriz  $Y'^+_1 Y'_2$ , e os resíduos  $R_i$ , seguindo o procedimento descrito anteriormente, concluindo o processo do MPM. O sinal pode ser reconstruído com os polos  $z_i$  e resíduos  $R_i$  pela Equação 21.

$$y(kT_s) \approx \sum_{i=1}^M R_i z_i^k, \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad (21)$$

O algoritmo do MPM pode ser resumido então pelas seguintes etapas:

1. Calcular a matriz  $Y$ .
2. Calcular a SVD de  $Y$ .
3. Filtrar os valores singulares de acordo com o critério de seleção da Equação 20.
4. Reconstruir a matriz filtrada  $Y'$ .
5. Obter  $Y'_1$  e  $Y'_2$  a partir de  $Y'$ .
6. Calcular os autovalores generalizados do par  $\{Y'_2, Y'_1\}$  ou calcular os autovalores da matriz  $Y'^+_1 Y'_2$ .
7. Encontrar os resíduos por meio do problema de mínimos quadrados descrita pela Equação 17.

Essas etapas foram traduzidas em um algoritmo na linguagem *python*, implementado em uma biblioteca própria customizada. Para sua implementação, foram usadas funções já prontas da biblioteca *numpy*, como a função para o cálculo da pseudoinversa de Moore-Penrose, cálculo de autovalores e de resolução de mínimos quadrados. É importante ressaltar que, por se tratar de um algoritmo com características numéricas em múltiplas etapas, algumas adaptações e aproximações foram feitas de maneira a viabilizar seu funcionamento. Foi necessário aproximar valores de saída dos cálculos dos polos  $z_i$  e resíduos  $R_i$  para zero em casos os quais seus valores calculados eram significativamente baixos. Essa aproximação

foi feita a partir de um valor limite, definido a critérios do usuário, para o qual valores abaixo ou igual ao valor limite eram truncados. Além disso, para as funções externas, foi necessário se atentar ao seus parâmetros próprios de filtro, usados em etapas intermediárias de cálculos que utilizam o SVD. Nesse último caso, foi definido como filtro de corte o valor de  $10^{-7}$ .

### 3.3 Separação de variáveis

Com o intuito de melhorar o controle e entendimento dos parâmetros calculados pelo MPM, foi feita uma correspondência entre os polos  $z_i$  e resíduos  $R_i$  com os parâmetros originais que comp  o o sinal, nesse caso,  $S_{0,i}$ ,  $\phi_i$ ,  $\omega_i$  e  $T_{2,i}$ . Considerando que um sinal de MRS pode ser representado pela Equação 22, sua versão discreta pode ser escrita assumindo  $t = kT_s$ , sendo  $T_s$  o período de *sampling* do sinal, e  $k$  um inteiro representando o passo, como na Equação 23.

$$S = \sum_{i=1}^M S_{0,i} e^{j\omega_i t - \frac{t}{T_2}} e^{j\phi_i} \quad (22)$$

$$S = \sum_{i=1}^M S_{0,i} e^{j\phi_i} (e^{j\omega_i T_s - \frac{T_s}{T_2}})^k \quad (23)$$

Considerando que a aproximação feita por meio da Equação 21 é uma representação correta do sinal,   possível estabelecer uma equivalência entre os parâmetros originais e calculados, a partir da Equação 24.

$$\sum_{i=1}^M S_{0,i} e^{j\phi_i} (e^{j\omega_i T_s - \frac{T_s}{T_2}})^k = \sum_{i=1}^M R_i z_i^k \quad (24)$$

Essa equivalência demonstra que enquanto os polos  $z_i$  representam  $e^{j\omega_i T_s} e^{-\frac{T_s}{T_2}}$ , os resíduos representam a multiplicação  $S_{0,i} e^{j\phi_i}$ . Considerando a representação polar de um número complexo, na Equação 25, é possível visualizar uma maneira simples de cálculo dos parâmetros originais a partir de  $z_i$  e  $R_i$ , concluindo que  $e^{-\frac{T_s}{T_2}}$  corresponde ao módulo de  $z$ ,  $\omega_i T_s$  ao argumento de  $z$ ,  $S_{0,i}$  ao módulo de  $R$ , e  $\phi_i$  ao argumento de  $R$ . A Tabela 1 reúne as equivalências resultantes.

$$z = A e^{j\theta} \quad (25)$$

$S_0$	$\phi$	$\omega$	$T_2$
$ R $	$\arg(R)$	$-\frac{1}{T_s}\arg(z)$	$-\frac{T_s}{\log( z )}$

Tabela 1: Relação entre os parâmetros calculados e originais.

## 4 Resultados

## 5 Conclusão

## Referências

- [1] J.F. Hauer, C.J. Demeure, and L.L. Scharf. Initial results in prony analysis of power system response signals. *IEEE Transactions on Power Systems*, 5(1):80–89, 1990.
- [2] T.K. Sarkar and O. Pereira. Using the matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 37(1):48–55, 1995.