- Variáveis aleatórias bidimensionais

Def.: Seja S o espaço amostral associado a um experimento $\mathcal{E}$. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são funções que associam um número $X_1(e), X_2(e), \ldots, X_n(e)$ a cada resultado "e", então chamamos $[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ de variável aleatória n-dimensional ou vetor aleatório n-dimensional (v.a.). Se $n=2$, então temos um v.a. bidimensional.

Se $[X_1, X_2]$ possui valores ou em número finito, ou em número infinito enumerável, então $[X_1, X_2]$ é um v.a. bidimensional discreto. Se os possíveis valores de $[X_1, X_2]$ formam um conjunto não-enumerável então temos um v.a. bidimensional contínuo.

A continuação vamos definir

$$\vec{X} = [X_1, X_2]$$

$$p_X = p$$

$$f_X = f$$

Def.: Se $\vec{X} = [X_1, X_2]$ é um v.a. discreto, então a cada resultado $[X_1 = x_1, X_2 = x_2]$ associamos um número

$$p(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

que satisfaz

a) $p(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall\, x_1, x_2$

b) $\displaystyle\sum_{x_1} \sum_{x_2} p(x_1, x_2) = 1.$

A função p é chamada de função de probabilidade bivariada

Def. Se $\vec{X} = [X_1, X_2]$ é um v.a. contínuo, então associamos a cada resultado $[X_1 = x_1, X_2 = x_2]$ um valor f que satisfaz

a) $f(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = 1$$

A função f é chamada de função de densidade conjunta.

Def.: Seja $\vec{X} = [X_1, X_2]$ um v.a. discreto. A distribuição marginal de X_1 é dada por

$$p_1(x_1) = \sum_{x_2} p(x_1, x_2) \qquad \forall\, x_1$$

e a distribuição marginal de X_2 é dada por

$$p_2(x_2) = \sum_{x_1} p(x_1, x_2) \qquad \forall\, x_2$$

Se $\vec{X} = [X_1, X_2]$ é um v.a. contínuo, então a distribuição marginal de X_1 é

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_2, \qquad \forall\, x_1$$

e a dist. marginal de X_2 é

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,dx_1 \qquad \forall\, x_2$$

Def.: Se $\vec{X} = [X_1, X_2]$ é um v.a. discreto, então dizemos que X_1 e X_2 são independentes se e somente se

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1) \cdot p_2(x_2) \qquad \forall\, x_1, x_2.$$

Se $\vec{X}$ é um v.a. contínuo, então dizemos que X_1 e X_2 são independentes se e somente se

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \qquad \forall\, x_1, x_2$$

Def.: A probabilidade condicional de um v.a. discreto $\vec{X} = [X_1, X_2]$ pode ser escrito como

$$p_{X_2|x_1}(x_2) = \frac{p(x_1, x_2)}{p_1(x_1)} \qquad \forall\, x_1, x_2$$

ou

$$p_{X_1|x_2}(x_1) = \frac{p(x_1, x_2)}{p_2(x_2)} \qquad \forall\, x_1, x_2$$

Se $\vec{X} = [X_1, X_2]$ é um v.a. contínuo, as densidades condicionais são

$$f_{X_2|x_1}(x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} \qquad \forall\, x_1, x_2$$

e

$$f_{X_1|x_2}(x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)} \qquad \forall\, x_1, x_2$$

Ex.: Um aparelho é examinado em relação a quatro características para um controle de qualidade. Cada característica é classificada como boa, defeito menor e defeito maior. Seja X_1: número de defeitos menores, e X_2: número de defeitos maiores. Observe que os possíveis valores de X_1 são $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, e os possíveis valores de X_2 são $\{0, 1, \ldots, 4 - x_1\}$. Considere a seguinte tabela:

$X_2 \backslash X_1$	0	1	2	3	4
0	1/30	1/30	2/30	3/30	1/30
1	1/30	1/30	3/30	4/30	
2	1/30	2/30	3/30		
3	1/30	3/30			
4	3/30				

$\leftarrow p(X_1, X_2)$

a) Obtenha as distribuições marginais p_1 e p_2.

$$p_1(x_1) = \sum_{x_2} p(x_1, x_2) \quad \forall x_1$$

$p_1(x_1=0)$

$X_2 \backslash X_1$	0	1	2	3	4	$p_2(x_2)$
$p_2(x_2=0) \rightarrow$ 0	1/30	1/30	2/30	3/30	1/30	8/30
1	1/30	1/30	3/30	4/30		9/30
2	1/30	2/30	3/30			6/30
3	1/30	3/30				4/30
4	3/30					3/30
$p_1(x_1)$	7/30	7/30	8/30	7/30	1/30	

$$p_1(x_1=0) = \sum_{x_2} p(0, x_2) = p(0,0) + p(0,1) + p(0,2) + p(0,3) + p(0,4)$$

$p_1(x_1=1)$

x_1	$p_1(x_1)$
0	7/30
1	7/30
2	8/30
3	7/30
4	1/30

b) Calcule a probabilidade do aparelho ter um defeito maior, dado que possui um defeito menor.

$$p_{X_2|X_1=1}(X_2=1)$$

$$= p_{X_2|1}(1) = \frac{p(x_1, x_2)}{p_1(x_1)} = \frac{p(1,1)}{p_1(1)}$$

$$= \frac{1/\cancel{30}}{7/\cancel{30}} = \frac{1}{7}$$

c) O número de defeitos menores é independente do número de defeitos maiores?

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1) \cdot p_2(x_2) \quad \forall x_1, x_2$$

$$\Rightarrow \quad 1/30 \neq 7/30 \cdot 8/30$$

$$\Rightarrow \quad 1/30 \neq 56/30$$

Logo, X_1 não é independente de X_2.