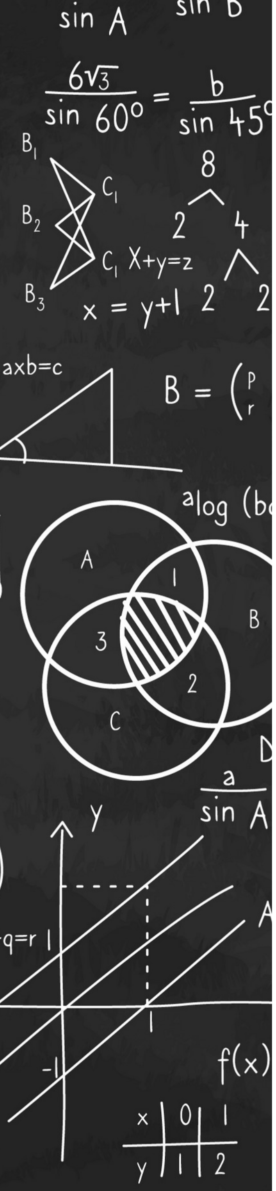

Fundamentos de Lógica

Aula 6
Demonstrações

Brasília
2024

DEMONSTRAÇÃO

→ Demonstração:

→ argumento válido que estabelece a verdade de uma sentença matemática;

→ pode utilizar

- Hipóteses de um teorema (se existirem);
- Axiomas assumidos como verdade;
- Teoremas, anteriormente, demonstrados.

→ Formal ou Informal

DEMONSTRAÇÃO

TERMINOLOGIAS:

→ Teorema:
- afirmação que foi provada verdadeira utilizando outras afirmações já demonstradas;

→ Conjectura:
- afirmação que ainda não foi provada ou validada;
- sentença que, inicialmente, é proposta como verdadeira, usualmente com base em alguma evidência parcial, etc.

→ Axioma:
- afirmações simples que não precisam de demonstrações;
- podem ser premissas do teorema;

DEMONSTRAÇÃO

→ Lema:
- teorema menos importante que auxilia na demonstração de outros resultados;

→ Corolário:
- teorema que pode ser estabelecido diretamente de um teorema que já foi demonstrado;

→ Conclusão :
- passo final de uma demonstração;
- inferida a partir de regras de inferência, juntamente, com as definições dos termos unindo os passos da demonstração

DEMONSTRAÇÃO

TEOREMA + LÓGICA PROPOSICIONAL (IMPLICAÇÃO) :

Dado

$$P \Rightarrow Q,$$

se P for verdadeiro e provarmos que Q, também, é verdadeiro temos que P=>Q é um teorema.

Ou seja,

$$\boxed{\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)}$$

DEMONSTRAÇÃO

TEOREMA + LÓGICA PROPOSICIONAL (IMPLICAÇÃO) :

Dado

$$P \Rightarrow Q,$$

se P for verdadeiro e provarmos que Q, também, é verdadeiro temos que $P \Rightarrow Q$ é um teorema.

Ou seja,

$$\boxed{\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)}$$

EXEMPLO:

$P(x)$: x^2 é par → predicado

$Q(x)$: x é par

$\forall\, x \in \mathbf{Z}: P(x) \Rightarrow Q(x) \longrightarrow$ Teorema

DEMONSTRAÇÃO

CONTRAEXEMPLO:

- obter um x pertencente ao domínio tal que P é verdadeira e Q e falsa.

DEMONSTRAÇÃO

CONTRAEXEMPLO:

- obter um x pertencente ao domínio tal que P é verdadeira e Q e falsa.

EXEMPLO:

Conjectura: Todos os gatos são feios.

→ Hipótese: P(x): x é gato

→ Tese: Q(x) : x é feio

Contraexemplo: Nina é uma gata bonita.

Logo, a conjectura é falsa

DEMONSTRAÇÃO

CONTRAEXEMPLO:

- obter um x pertencente ao domínio tal que P é verdadeira e Q e falsa.

EXEMPLO:

Conjectura: Todos os gatos são feios.

→ Hipótese: P(x): x é gato

→ Tese: Q(x) : x é feio

Contraexemplo: Nina é uma gata bonita.

Logo, a conjectura é falsa

Demonstração Informal

DEMONSTRAÇÃO

Para demonstrar um teorema

$$\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$$

O objetivo é mostrar que

$$P(c) \Rightarrow Q(c)$$

E então aplicar a regra da generalização universal.

Ou seja, o foco é mostrar que uma sentença condicional é verdadeira, ou seja, mostrar que Q é verdadeira se P for verdadeira

DEMONSTRAÇÃO INFORMAL

* Quando utiliza-se um contraexemplo para mostrar que uma conjectura é falsa

EXEMPLOS:

1)Todos os animais que vivem no oceano são peixes.

2) Todo inteiro menor do que 10 é maior do que 5.

3) Para todo inteiro positivo n, $n! < n^2$

DEMONSTRAÇÃO INFORMAL

* Quando utiliza-se um contraexemplo para mostrar que uma conjectura é falsa

EXEMPLOS:

1)Todos os animais que vivem no oceano são peixes.

Contraexemplo: A baleia é mamífero e vive no oceano

2) Todo inteiro menor do que 10 é maior do que 5.

3) Para todo inteiro positivo n, $n! \leq n^2$

DEMONSTRAÇÃO INFORMAL

* Quando utiliza-se um contraexemplo para mostrar que uma conjectura é falsa

EXEMPLOS:

1)Todos os animais que vivem no oceano são peixes.

Contraexemplo: A baleia é mamífero e vive no oceano

2) Todo inteiro menor do que 10 é maior do que 5.

Contraexemplo:
$2 < 10$ e 2 não é maior do que 5

3) Para todo inteiro positivo n, $n! \leq n^2$

DEMONSTRAÇÃO INFORMAL

* Quando utiliza-se um contraexemplo para mostrar que uma conjectura é falsa

EXEMPLOS:

1)Todos os animais que vivem no oceano são peixes.

Contraexemplo: A baleia é mamífero e vive no oceano

2) Todo inteiro menor do que 10 é maior do que 5.

Contraexemplo:
$2 < 10$ e 2 não é maior do que 5

3) Para todo inteiro positivo n, $n! \leq n^2$

$n=1 \rightarrow 1! = 1 = 1^2$
$n=2 \rightarrow 2! = 2 * 1 = 2 < 2^2 = 4$
$n=3 \rightarrow 3! = 3 * 2 * 1 = 6 < 3^2 = 9$
$N=4 \rightarrow 4! = 4 * 3 * 2 * 1= 24 > 4^2 = 16 \rightarrow$ Contraexemplo

DEMONSTRAÇÃO INFORMAL

EXEMPLO:

Se x é um inteiro maior do que 1, então $x^2 = 2x$

* demonstração em aula

DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

TIPOS DE DEMONSTRAÇÃO:

1 – POR EXAUSTÃO OU EXAUSTIVA

2 – DIRETA

3 – CONDICIONAL

4 – INDIRETA OU POR REDUÇÃO AO ABSURDO

Obs: Na Matemática temos também a demonstração por Contraposição

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

→ Prova-se que a afirmação é verdadeira para todos os possíveis valores de x no domínio

EXEMPLOS:

1) Se x é um inteiro entre 1 e 5, então $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

* demonstração em aula

2) Para qualquer inteiro positivo menor do que 5, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro ($n^2 < 10 + 5n$)

Sua Vez!

* exercicio

3) Para qualquer inteiro positivo, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro ($n^2 < 10 + 5n$)

Sua Vez!

* exercicio

DEMONSTRAÇÃO POR EXAUSTÃO

→ Prova-se que a afirmação é verdadeira para todos os possíveis valores de x no domínio

EXEMPLOS:

1) Se x é um inteiro entre 1 e 5, então $(x-1)^2 = x^2 – 2x +1$

* demonstração em aula

2) Para qualquer inteiro positivo menor do que 5, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro ($n^2 < 10 + 5n$)

Sua Vez!

* exercicio => ok!! conjectura é válida

3) Para qualquer inteiro positivo, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 com 5 vezes o inteiro ($n^2 < 10 + 5n$)

Sua Vez!

* exercicio => n = 7 contra-exemplo

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

* estabelece-se uma sequência de demonstrações partindo de P e chegando em Q.

EXEMPLO:

Se x é um inteiro, então $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

* demonstração em aula

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

* estabelece-se uma sequência de demonstrações partindo de P e chegando em Q.

$$\boxed{\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)}$$

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

* estabelece-se uma sequência de demonstrações partindo de P e chegando em Q.

$$\boxed{\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)}$$

EXEMPLOS:

NA MATEMÁTICA:

1) Se x é um inteiro, então $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

2) Se x é um inteiro par e y é um inteiro par, então o produto xy é um inteiro par

DEMONSTRAÇÃO INDIRETA

* estabelece-se uma sequência de demonstrações partindo de P e chegando em Q.

$$\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x) \iff \sim Q(x) \Rightarrow \sim P(x)$$

EXEMPLOS:

NA MATEMÁTICA:

1) Se x é um inteiro se x^2 é par, então x é par

DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO

* estabelece-se uma sequência de demonstrações partindo de P e chegando em Q.

$$\boxed{\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x) \iff P \wedge \sim Q \Rightarrow 0}$$

ABSURDO
*afirmação falsa

EXEMPLOS:

NA MATEMÁTICA:

1) Dados x e y números inteiros, temos que se x e y são ímpares então x+y é par

DEMONSTRAÇÃO EM LÓGICA MATEMÁTICA

TIPOS DE DEMONSTRAÇÃO:

1 – DIRETA

2 – CONDICIONAL

3 – INDIRETA

DEMONSTRAÇÃO DIRETA

$\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)$

EXEMPLOS:

NA LÓGICA MATEMÁTICA: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \Rightarrow Q$

1) (UEM) Se tenho dinheiro, então não irei trabalhar. Se meu chefe ligar, então irei trabalhar. Meu chefe ligou. Logo, Eu não tenho dinheiro.

Sua
Vez!

DEMONSTRAÇÃO CONDICIONAL

$$\boxed{\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)}$$

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \Rightarrow P \rightarrow Q \qquad (1)$$

- Método condicional : consistem em adicionar P como hipótese e provar Q

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, P \Rightarrow Q \qquad (2)$$

DEMONSTRAÇÃO CONDICIONAL

$$\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)$$

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \Rightarrow P \rightarrow Q \qquad (1)$$

- Método condicional : consistem em adicionar P como hipótese e provar Q

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, P \Rightarrow Q \qquad (2)$$

Obs: Validade do argumento (1) depende da condicional associada, abaixo, ser uma tautologia.

$$(A_1 \land A_2 \land A_3 \land \ldots \land A_n) \rightarrow (P \rightarrow Q) \qquad (a)$$

Obs$_2$: Validade do argumento (2) depende da condicional associada, abaixo, ser uma tautologia.

$$(A_1 \land A_2 \land A_3 \land \ldots \land A_n \land P \rightarrow Q \qquad (b)$$

Tabelas verdades de (a) e (b) devem ser equivalentes

DEMONSTRAÇÃO CONDICIONAL

Obs$_3$:

$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ (a)

V V

$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n$ todos V (conjunção)

$P \rightarrow Q$ V V = V

V F = F

F V = V

F F = V

V → V = V

V → F = F

F → V = V

F → F = V

$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge P) \rightarrow Q$ (b)

V V

$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge P$ todos (conjunção)

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

V → V = V

V → F = F

F → V = V

F → F = V

DEMONSTRAÇÃO CONDICIONAL

$$\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)$$

EXEMPLOS:

NA LÓGICA MATEMÁTICA:

1) (UEM) Se eu estudo ou sou um gênio, então eu passarei nesta disciplina.
Se eu passar nesta disciplina, então estarei inscrito na próxima disciplina.
Portanto, se eu não estiver inscrito na próxima disciplina, então eu não sou um gênio.

DEMONSTRAÇÃO CONDICIONAL

$\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)$

EXEMPLOS:

NA LÓGICA MATEMÁTICA:

1) (UEM) Se eu estudo ou sou um gênio, então eu passarei nesta disciplina.
Se eu passar nesta disciplina, então estarei inscrito na próxima disciplina.
Portanto, se eu não estiver inscrito na próxima disciplina, então eu não sou um gênio.

Pelo método condicional:
Se eu estudo ou sou um gênio, então eu passarei nesta disciplina.
Se eu passar nesta disciplina, então estarei inscrito na próxima disciplina.
Eu não estou inscrito na próxima disciplina.
Portanto, eu não sou um gênio.

Sua Vez! demonstre

DEMONSTRAÇÃO INDIRETA

$$\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)$$

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \Rightarrow Q \qquad (1)$$

- Define-se ~Q como hipótese

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \sim Q \Rightarrow C \qquad (2)$$

em que C é uma contradição.

DEMONSTRAÇÃO INDIRETA

$$\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)$$

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \Rightarrow Q \qquad (1)$$

- Define-se ~Q como hipótese

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \sim Q \Rightarrow C \qquad (2)$$

em que C é uma contradição.

Obs: a validade depende de (1) e (2) serem equivalentes

DEMONSTRAÇÃO INDIRETA

$$\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)$$

Por que podemos fazer isso?

$$\sim Q \rightarrow C \Leftrightarrow Q \qquad \text{(sempre)}$$

C	Q	~Q	~Q → C
F	V	F	V
F	F	V	F

Como

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \Rightarrow Q$$

Podemos escrever

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \Rightarrow \sim Q \rightarrow C$$

Por definição de condicional

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \sim Q \Rightarrow C$$

DEMONSTRAÇÃO INDIRETA

$\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)$

EXEMPLOS:

NA LÓGICA MATEMÁTICA:

1) (UEM) Se chove, então não faz calor.
Se tem sol, então faz calor.
Portanto, não é verdade que chove e tem sol.

DEMONSTRAÇÃO INDIRETA

$$\boxed{\forall x \in D: P(x) \Rightarrow Q(x)}$$

EXEMPLOS:

NA LÓGICA MATEMÁTICA:

1) (UEM) Se chove, então não faz calor.
Se tem sol, então faz calor.
Portanto, não é verdade que chove e tem sol.

Pelo método indireto:

Se chove, então não faz calor.
Se tem sol, então faz calor.
Chove e tem sol
Portanto, contradição

Sua Vez! demonstre