

Mínimos quadrados

1. A resistência de um certo fio (de uma certa substância), $f(x)$, varia com o diâmetro desse fio, x . A partir de uma experiência registaram-se os seguintes valores:

x_j	1.5	2.0	3.0	4.0
f_j	4.9	3.3	2.0	1.5

Foram sugeridos, para ajustar os valores de $f(x)$ no sentido dos mínimos quadrados, uma reta, uma parábola e o modelo linear $M(x, c_1, c_2) = \frac{c_1}{x} + c_2x$

- (a) Calcule a reta, a parábola e o modelo $M(x)$.
 - (b) Qual dos modelos escolheria? Justifique a sua resposta.
2. Um sistema simples de comunicações pode ser representado por um transmissor e um recetor. O transmissor recebe um símbolo, m , e modula o sinal a transmitir, $s_m(t)$, num canal com ruído. O recetor recebe o sinal modulado com o ruído adicionado, $y(t)$, e prevê qual foi o símbolo transmitido. Neste sistema simples, suponha que o transmissor apenas transmite dois sinais

$$s_1(t) = 0.2\alpha_1 \sin(20\pi t) + 0.2\beta_1 \sin(22\pi t)$$

$$s_2(t) = 0.2\alpha_2 \sin(20\pi t) + 0.2\beta_2 \cos(20\pi t)$$

- (a) Transmitindo o primeiro sinal ($s_1(t)$) e fazendo uma análise ao transmissor, observaram-se os seguintes valores:

t_i	0.11	0.52	0.79
s_{1i}	-3.1127	0.0625	3.0351

Determine os valores de α_1 e β_1 , no sentido dos mínimos quadrados.

- (b) Suponha que $\alpha_1 = -10$, $\beta_1 = -10$, $\alpha_2 = 10$ e $\beta_2 = 10$. Sabendo que o recetor recebeu o sinal indicado na tabela seguinte, determine qual foi o sinal transmitido (isto é, aquele que se ajusta melhor ao sinal recebido, no sentido dos mínimos quadrados).

t_i	0.1	0.45	0.63
$y(t_i)$	1.9963	-2.0100	1.2742

3. Pretende-se ajustar o modelo linear seguinte no sentido dos mínimos quadrados.

$$M(x; c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{-x} + c_2 x + c_3$$

à função $f(x)$ dada pela tabela

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	1.4	0	0.75

- (a) Determine os coeficientes do modelo apresentado e apresente uma estimativa para $f(0.5)$.
- (b) Sem efetuar cálculos, indique o resíduo nesta aproximação. Justifique.

4. Considere as seguintes observações relativas à função f

x_i	-3	0	2	5
f_i	-10	a	0	b

Determine a e b sabendo que a aproximação polinomial de grau 1 dos mínimos quadrados é $p_1(x) = -4 + 2x$.

5. **[MATLAB]** A docente responsável pela UC de Métodos Numéricos registou, para 8 alunos, os resultados obtidos num teste e a respetiva classificação final obtida.

teste	1.2	1.75	1.1	2.0	0.5	0.8	1.0	1.5
classificação final	16	18	16	19	10	11	14	16

Determine, no sentido dos mínimos quadrados, os modelos a seguintes, a para cada um deles o resíduo associado e a classificação previsível para um aluno que tenha neste teste uma classificação de 1.6. Faça ainda a representação gráfica dos pontos e dos modelos obtidos e justifique qual deles aproxima melhor os dados.

- (a) Uma reta;
- (b) Um polinómio de grau três;
- (c) $M = c_1 e^x + c_2 \frac{1}{x}$;
- (d) $N(x) = c_1 + c_2 x + \frac{c_3}{x}$.