Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Problema de Empacotamento

Diogo Paiva (A100760), João Magalhães (A100740),
Jorge Rodrigues (A101758), Rodrigo Gomes (A100555)

Investigação Operacional 2022/23

Índice

Índice de figuras

Formulação

O presente relatório visa apresentar uma resposta ótima a um problema de empacotamento a uma dimensão com contentores de diferentes capacidades, tendo como base os conteúdos de programação linear lecionados no âmbito da disciplina de Investigação Operacional. Sendo '101758' o maior número de estudante dos elementos do grupo, de acordo com as instruções dadas, os dados do nosso problema são os seguintes:

CONTENTORES

CAPACIDADE	QUANTIDADE
11	ILIMITADA
10	2
7	6

ITENS

COMPRIMENTO	QUANTIDADE
1	2
2	15
3	10
4	10
5	6

A medida de eficiência que iremos adotar prende-se com a soma dos comprimentos dos contentores usados para transportar todos os itens. Pretendemos, portanto, apurar o valor mínimo que esta soma pode tomar, tratando-se assim de um problema de minimização.

As variáveis de decisão deste modelo serão as combinações possíveis para a distribuição dos diferentes itens por cada um dos três tipos de contentores. Iremos considerar a inexistência de espaço por ocupar no contentor e a existência de um, dois, ou três espaços livres. Achamos espectável que a solução seja dada no domínio de zero ou um espaço livre, no entanto, as restantes possibilidades foram adicionadas por precaução e de modo a obter com certeza a solução ótima na primeira execução do modelo.

Modelo

Nas tabelas que se seguem encontram-se as disposições consideradas, seguindo o esquema:

- xij: identifica a disposição de itens de índice *i* para o contentor de tipo *j*.

  Para o contentor $j = 1$, constam $i = 1$, $i = 2$, … $i = 37$;

  Para o contentor $j = 2$, constam $i = 1$, $i = 2$, … $i = 31$;

  Para o contentor $j = 3$, constam $i = 1$, $i = 2$, … $i = 20$;

  1 referencia os contentores de capacidade 11, 2 referencia os contentores de capacidade 10 e 3 corresponde aos de capacidade 7.

Tabela 1 Distribuição de itens de tamanho 1 a 5 em contentor de capacidade 11, sem espaço livre.

Tam. / Disp.	**X11**	**X21**	**X31**	**X41**	**X51**	**X61**	**X71**	**X81**	**X91**	**X101**	**X111**	**X121**	**X131**	**X141**
1	1	1	2	2	1	2	1	1	1	-	-	-	2	1
2	3	2	2	1	3	-	1	1	-	1	3	-	-	-
3	-	2	-	1	-	3	1	-	2	3	-	2	-	-
4	1	-	-	1	1	-	-	2	1	-	-	-	1	-
5	-	-	1	-	-	-	1	-	-	-	1	1	1	2

Tabela 2 Distribuição de itens de tamanho 1 a 5 em contentor de capacidade 11, com 1 espaço livre.

Tam. / Disp.	**X151**	**X161**	**X171**	**X181**	**X191**	**X201**	**X211**	**X221**	**X231**	**X241**	**X251**	**X261**
1	1	-	-	1	2	-	-	-	1	2	2	-
2	1	1	1	-	-	-	3	-	-	1	4	5
3	1	1	-	3	-	-	-	2	-	2	-	-
4	1	-	2	-	2	-	1	1	1	-	-	-
5	-	1	-	-	-	2	-	-	1	-	-	-

Tabela 3 Distribuição de itens de tamanho 1 a 5 em contentor de capacidade 11, com 2 espaços livres.

Tam. / Disp.	**X271**	**X281**	**X291**	**X301**	**X311**	**X321**	**X331**	**X341**	**X351**	**X361**	**X371**
1	2	2	1	1	2	2	-	-	-	-	1
2	1	-	1	2	2	2	-	-	2	1	-
3	-	1	2	-	1	1	3	-	-	1	-
4	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	2
5	1	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-

Tabela 4 Distribuição de itens de tamanho 1 a 5 em contentor de capacidade 10, sem espaço livre.

Tam. / Disp.	X12	X22	X32	X42	X52	X62	X72	X82	X92	X102	X112
1	1	-	-	1	2	-	-	-	1	2	2
2	1	1	1	-	-	-	3	-	-	1	1
3	1	1	-	3	-	-	-	2	-	2	-
4	1	-	2	-	2	-	1	1	1	-	-
5	-	1	-	-	-	2	-	-	1	-	1

Tabela 5 Distribuição de itens de tamanho 1 a 5 em contentor de capacidade 10, com 1 espaço livre.

Tam. / Disp.	X122	X142	X152	X162	X172	X182	X192	X202	X212	X222
1	2	1	1	2	2	-	-	-	-	1
2	-	1	2	2	2	-	-	2	1	-
3	1	2	-	1	1	3	-	-	1	-
4	1	-	1	-	-	-	1	-	1	2
5	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-

Tabela 6 Distribuição de itens de tamanho 1 a 5 em contentor de capacidade 10, com 2 espaços livres.

Tam. / Disp.	X232	X242	X252	X262	X272	X282	X292	X302	X312
1	1	1	-	-	2	-	2	-	1
2	1	-	-	-	-	4	3	2	2
3	-	1	1	-	2	-	-	-	1
4	-	1	-	2	-	-	-	1	-
5	1	-	1	-	-	-	-	-	-

Tabela 7 Distribuição de itens de tamanho 1 a 5 em contentor de capacidade 7, sem espaço livre.

Tam. / Disp.	X13	X23	X33	X43	X53	X73	X83
1	-	-	2	1	1	2	-
2	1	-	-	-	1	1	2
3	-	1	-	2	-	1	1
4	-	1	-	-	1	-	-
5	1	-	1	-	-	-	-

Tabela 8 Distribuição de itens de tamanho 1 a 5 em contentor de capacidade 7, com 1 espaço livre.

Tam. / Disp.	X93	X103	X113	X123	X133	X143	X153
1	-	1	1	-	2	-	2
2	-	1	-	1	-	3	2
3	2	1	-	-	-	-	-
4	-	-	-	1	1	-	-
5	-	-	1	-	-	-	-

Tabela 9 Distribuição de itens de tamanho 1 a 5 em contentor de capacidade 7, com 2 espaços livres.

Tam. / Disp.	X163	X173	X183	X193	X203
1	-	2	-	1	1
2	1	-	-	-	2
3	1	1	-	-	-
4	-	-	-	1	-
5	-	-	1	-	-

Restrições

O problema figura 3 tipos de restrições, sendo estas respetivas ao tipo de variáveis utilizadas, à quantidade máxima de itens de cada tipo e ao número máximo de contentores de cada capacidade. Assim sendo, as restrições do modelo são as seguintes:

- Variáveis:

$$xij \in \mathbb{N}^0, \qquad para\ todo\ i\ e\ j\ \ que\ façam\ sentido\ no\ problema$$

- Itens (representadas por Ix, com x = 1,2,3,4,5, sendo ‘x’ o comprimento do item)

```
/* Item com comprimento = 1 */
I1: 1 x11  + 1 x21  + 2 x31  + 2 x41  + 1 x51  + 2 x61  + 1 x71  + 1 x81  + 1 x91
  + 2 x131 + 1 x141 + 1 x151 + 1 x181 + 2 x191 + 1 x231 + 2 x241 + 2 x251 + 2 x271
  + 2 x281 + 1 x291 + 1 x301 + 2 x311 + 2 x321 + 1 x371 + 1 x12  + 1 x42  + 2 x52
  + 1 x92  + 2 x102 + 2 x112 + 2 x122 + 1 x142 + 1 x152 + 2 x162 + 2 x172 + 1 x222
  + 1 x232 + 1 x242 + 2 x272 + 2 x292 + 1 x312 + 2 x33  + 1 x43  + 1 x53  + 2 x73
  + 1 x103 + 1 x113 + 2 x133 + 2 x153 + 2 x173 + 1 x193 + 1 x203 = 2;

/* Item com comprimento = 2 */
I2: 3 x11  + 2 x21  + 2 x31  + 1 x41  + 3 x51  + 1 x71  + 1 x81  + 1 x101 + 3 x111
  + 1 x151 + 1 x161 + 1 x171 + 3 x211 + 1 x241 + 4 x251 + 5 x261 + 1 x271 + 1 x291
  + 2 x301 + 2 x311 + 2 x321 + 2 x351 + 1 x361 + 1 x12  + 1 x22  + 1 x32  + 3 x72
  + 1 x102 + 1 x112 + 1 x142 + 2 x152 + 2 x162 + 2 x172 + 2 x202 + 1 x212 + 1 x232
  + 4 x282 + 3 x292 + 2 x302 + 2 x312 + 1 x13  + 1 x53  + 1 x73  + 2 x83  + 1 x103
  + 1 x123 + 3 x143 + 2 x153 + 1 x163 + 2 x203 = 15;

/* Item com comprimento = 3 */
I3: 2 x21  + 1 x41  + 3 x61  + 1 x71  + 2 x91  + 3 x101 + 2 x121 + 1 x151 + 1 x161
  + 3 x181 + 2 x221 + 2 x241 + 1 x281 + 2 x291 + 1 x311 + 1 x321 + 3 x331 + 1 x361
  + 1 x12  + 1 x22  + 3 x42  + 2 x82  + 2 x102 + 1 x122 + 2 x142 + 1 x162 + 1 x172
  + 3 x182 + 1 x212 + 1 x242 + 1 x252 + 2 x272  + 1 x312 + 1 x23  + 2 x43  + 1 x73
  + 1 x83  + 2 x93  + 1 x103 + 1 x163 + 1 x173 = 10;

/* Item com comprimento = 4 */
I4: 1 x11  + 1 x41  + 1 x51  + 2 x81  + 1 x91  + 1 x131 + 1 x151 + 2 x171 + 2 x191
  + 1 x211 + 1 x221 + 1 x231 + 1 x281 + 1 x301  + 1 x341 + 1 x361 + 2 x371 + 1 x12
  + 2 x32  + 2 x52  + 1 x72  + 1 x82  + 1 x92  + 1 x122 + 1 x152 + 1 x192 + 1 x212
  + 2 x222 + 1  x242 + 2 x262 + 1 x302 + 1 x23  + 1 x53  + 1 x123 + 1 x133 + 1 x193 = 10;

/* Item com comprimento = 5 */
I5: 1 x31  + 1 x71  + 1 x111 + 1 x121 + 1 x131 + 2 x141 + 1 x161 + 2 x201 + 1 x231
  + 1 x271 + 1 x341 + 1 x351 + 1 x22  + 2 x62  + 1 x92  + 1 x112 + 1 x192 + 1 x202
  + 1 x232 + 1 x252 + 1 x13  + 1 x33  + 1 x113 + 1 x183 = 5;
```

Figura 1 Restrições do modelo linear relativas aos itens.

- Contentores (representados por Cx, com x = 1,2,3, sendo ‘x’ a identificação do contentor)

```
/* Restrições de quantidade de contentores */
/* Contentor de capacidade = 11 existe em quantidades ilimitadas, portanto não possui restrições*/

/* Contentor com capacidade = 10 */
C2: 1 x12  + 1 x22  + 1 x32  + 1 x42  + 1 x52  + 1 x62  + 1 x72  + 1 x82  + 1 x92
  + 1 x102 + 1 x112 + 1 x122 + 1 x142 + 1 x152 + 1 x162 + 1 x172 + 1 x182 + 1 x192
  + 1 x202 + 1 x212 + 1 x222 + 1 x232 + 1 x242 + 1 x252 + 1 x262 + 1 x272 + 1 x282
  + 1 x292 + 1 x302 + 1 x312 <= 2;

/* Contentor com capacidade = 7 */
C3: 1 x13  + 1 x23  + 1 x33  + 1 x43  + 1 x53  + 1 x73  + 1 x83  + 1 x93  + 1 x103
  + 1 x113 + 1 x123 + 1 x133 + 1 x143 + 1 x153 + 1 x163 + 1 x173 + 1 x183 + 1 x193
  + x203 <= 6;
```

Figura 2 Restrições do modelo linear relativas aos contentores.

Função Objetivo

Tendo em conta o propósito do problema, a função objetivo corresponderá a uma expressão matemática que traduza a minimização da capacidade total tos contentores utilizados, correspondente ao somatório da quantidade de cada contentor utilizada, multiplicada pela respetiva capacidade.

Sendo a quantidade de cada contentor utilizada dada por q1, q2 e q3 (correspondente às capacidades 11, 10 e 7, respetivamente), podemos obter o valor dessas variáveis com o somatório do número de vezes que cada disposição de itens é utilizada, ou seja:

```
/* Variáveis de contagem de quantidade de contentores*/
/* Conta o número de contentores de capacidade 11*/
q1= 1 x11  + 1 x21  + 1 x31  + 1 x41  + 1 x51  + 1 x61  + 1 x71  + 1 x81  + 1 x91
  + 1 x101 + 1 x111 + 1 x121 + 1 x131 + 1 x141 + 1 x151 + 1 x161 + 1 x171 + 1 x181
  + 1 x191 + 1 x201 + 1 x211 + 1 x221 + 1 x231 + 1 x241 + 1 x251 + 1 x261 + 1 x271
  + 1 x281 + 1 x291 + 1 x301 +  1 x311 + 1 x321 + 1 x331 + 1 x341 + 1 x351 + 1 x361
  + 1 x371;

/* Conta o número de contentores de capacidade 10*/
q2= 1 x12  + 1 x22  + 1 x32  + 1 x42  + 1 x52  + 1 x62  + 1 x72  + 1 x82  + 1 x92
  + 1 x102 + 1 x112 + 1 x122 + 1 x142 + 1 x152 + 1 x162 + 1 x172 + 1 x182 + 1 x192
  + 1 x202 + 1 x212 + 1 x222 + 1 x232 + 1 x242 + 1 x252 + 1 x262 + 1 x272 + 1 x282
  + 1 x292 + 1 x302 + 1 x312;

/* Conta o número de contentores de capacidade 7*/
q3= 1 x13  + 1 x23  + 1 x33  + 1 x43  + 1 x53  + 1 x73  + 1 x83  + 1 x93  + 1 x103
  + 1 x113 + 1 x123 + 1 x133 + 1 x143 + 1 x153 + 1 x163 + 1 x173 + 1 x183 + 1 x193
```

Figura 3 Variáveis de contagem de quantidade de contentores utilizada

Utilizando estas variáveis auxiliares, é possível escrever a função objetivo de forma bastante sucinta:

```
/* Função objetivo */
minimize : 11q1 + 10q2 + 7q3;
```

Figura 4 Função objetivo

Solução Ótima

Recorrendo ao LPSolve para resolver este problema linear obtivemos o sequente output:

Variables	MILP ...	MILP ...	MILP ...	MILP ...	result
	133	130	129	128	128
q1	9	9	8	6	6
q2	2	1	2	2	2
q3	2	3	3	6	6
x11	0	0	0	0	0
x21	0	0	0	0	0
x31	0	0	0	0	0
x41	0	0	0	0	0
x51	0	0	0	0	0
x61	0	0	0	0	0
x71	0	0	0	0	0
x81	0	1	2	2	2
x91	0	0	0	0	0
x131	0	0	0	0	0
x141	1	0	0	0	0
x151	0	0	0	0	0
x181	0	0	0	0	0
x191	0	0	0	0	0
x231	0	0	0	0	0
x241	0	0	0	0	0
x251	0	0	0	0	0
x271	0	0	0	0	0
x281	0	0	0	0	0

Variables	MILP ...	MILP ...	MILP ...	MILP ...	result
x281	0	0	0	0	0
x291	0	0	0	0	0
x301	0	0	0	0	0
x311	0	0	0	0	0
x321	0	0	0	0	0
x371	0	0	0	0	0
x12	0	0	0	0	0
x42	0	0	0	0	0
x52	0	0	0	0	0
x92	0	0	0	0	0
x102	0	0	0	0	0
x112	0	0	0	0	0
x122	0	0	0	0	0
x142	0	0	0	0	0
x152	0	0	0	0	0
x162	0	0	0	0	0
x172	0	0	0	0	0
x222	0	0	0	0	0
x232	0	0	0	0	0
x242	0	0	0	0	0
x272	0	0	0	0	0
x292	0	0	0	0	0
x312	0	0	0	0	0

Variables	MILP ...	MILP ...	MILP ...	MILP ...	result
x33	0	0	0	0	0
x43	0	0	0	0	0
x53	0	0	0	0	0
x73	0	0	0	0	0
x103	0	1	0	0	0
x113	1	0	0	0	0
x133	0	0	0	0	0
x153	0	0	0	0	0
x173	0	0	0	0	0
x193	0	0	0	0	0
x203	0	0	0	0	0
x101	3	1	2	2	2
x111	2	3	3	2	2
x161	0	0	0	0	0
x171	3	2	0	0	0
x211	0	0	0	0	0
x261	0	0	0	0	0
x351	0	0	0	0	0
x361	0	0	0	0	0
x22	0	0	0	0	0
x32	2	1	2	2	2
x72	0	0	0	0	0
x202	0	0	0	0	0

Variables	MILP ...	MILP ...	MILP ...	MILP ...	result
x202	0	0	0	0	0
x212	0	0	0	0	0
x282	0	0	0	0	0
x302	0	0	0	0	0
x13	0	0	0	3	3
x83	0	0	0	0	0
x123	0	0	0	0	0
x143	0	0	0	0	0
x163	1	0	0	0	0
x121	0	2	1	0	0
x221	0	0	0	0	0
x331	0	0	0	0	0
x82	0	0	0	0	0
x182	0	0	0	0	0
x252	0	0	0	0	0
x23	0	2	2	2	2
x93	0	0	0	1	1
x341	0	0	0	0	0
x192	0	0	0	0	0
x262	0	0	0	0	0
x201	0	0	0	0	0
x62	0	0	0	0	0
x183	0	0	1	0	0

Figura 5 Output LPSolve de resolução do modelo linear

Traduzindo a solução da linguagem matemática, concluímos que a distribuição ótima dos itens passa por utilizar seis contentores de capacidade 11, dois de capacidade 10 e seis de capacidade 7, respeitando as seguintes distribuições:

- Contentores de capacidade 11:
  - Duas distribuições x81: Um item de comprimento 1; Um item de comprimento 2; Dois itens de comprimento 4.
  - Duas distribuições x101: Um item de comprimento 2; Três itens de comprimento 3.
  - Duas distribuições x111: Três itens de comprimento 2; Um item de comprimento 5.

- Contentores de capacidade 10:
  - Duas distribuições x32: Um item de comprimento 2; Dois itens de comprimento 4.

- Contentores de capacidade 7:
  - Três distribuições x13: Um item de comprimento 2; Um item de comprimento 5.
  - Duas distribuições x23: Um item de comprimento 3; Um item de comprimento 4.
  - Uma distribuição x93: Dois itens de comprimento 3.

Tendo em consideração os valores obtidos para as variáveis q1,q2 e q3, o valor da função objetivo obtido é $11 \times q1 + 10 \times q2 + 7 \times q3 = 11 \times 6 + 10 \times 2 + 7 \times 6 = 128$, equivalendo à soma dos comprimentos dos contentores usados na solução. Dado que os itens ocupam um total de 127 unidades de espaço e que esse valor não pode ser obtido por nenhuma combinação linear de constantes 11,10 e 7, 128 é o valor mínimo de comprimento total que os contentores podem ter, se transportarem todos os itens.

Validação do modelo

De modo a validar solução obtida, inserimos no modelo linear cinco variáveis auxiliares de contagem de itens por comprimento, de nomes fx, com x = 1,2,3,4,5, sendo que x referencia o comprimento do item. A formulação destas variáveis passa pela soma da quantidade de itens que existe de um certo comprimento em cada distribuição, com omissão das cujo valor é zero.

```
/* Variáveis de contagem de quantidade de itens*/
/* Conta o número de itens de comprimento 1*/
f1= 1 x11   + 1 x21   + 2 x31   + 2 x41   + 1 x51   + 2 x61   + 1 x71   + 1 x81   + 1 x91
  + 2 x131 + 1 x141 + 1 x151 + 1 x181 + 2 x191 + 1 x231 + 2 x241 + 2 x251 + 2 x271
  + 2 x281 + 1 x291 + 1 x301 + 2 x311 + 2 x321 + 1 x371 + 1 x12   + 1 x42   + 2 x52
  + 1 x92   + 2 x102 + 2 x112 + 2 x122 + 1 x142 + 1 x152 + 2 x162 + 2 x172 + 1 x222
  + 1 x232 + 1 x242 + 2 x272 + 2 x292 + 1 x312 + 2 x33   + 1 x43   + 1 x53   + 2 x73
  + 1 x103 + 1 x113 + 2 x133 + 2 x153 + 2 x173  + 1 x193 + 1 x203;

/* Conta o número de itens de comprimento 2*/
f2= 3 x11   + 2 x21   + 2 x31   + 1 x41   + 3 x51   + 1 x71   + 1 x81   + 1 x101 + 3 x111
  + 1 x151 + 1 x161 + 1 x171 + 3 x211 + 1 x241 + 4 x251 + 5 x261 + 1 x271 + 1 x291
  + 2 x301 + 2 x311 + 2 x321 + 2 x351 + 1 x361 + 1 x12   + 1 x22   + 1 x32   + 3 x72
  + 1 x102 + 1 x112 + 1 x142 + 2 x152 + 2 x162 + 2 x172 + 2 x202 + 1 x212 + 1 x232
  + 4 x282 + 3 x292 + 2 x302 + 2 x312 + 1 x13   + 1 x53   + 1 x73   + 2 x83   + 1 x103
  + 1 x163 + 1 x173;

/* Conta o número de itens de comprimento 3*/
f3= 2 x21   + 1 x41   + 3 x61   + 1 x71   + 2 x91   + 3 x101 + 2 x121 + 1 x151 + 1 x161
  + 3 x181 + 2 x221 + 2 x241 + 1 x281 + 2 x291 + 1 x311 + 1 x321 + 3 x331 + 1 x361
  + 1 x12   + 1 x22   + 3 x42   + 2 x82   + 2 x102 + 1 x122 + 2 x142 + 1 x162 + 1 x172
  + 3 x182 + 1 x212 + 1 x242 + 1 x252 + 2 x272  + 1 x312 + 1 x23  + 2 x43  + 1 x73
  + 1 x83   + 2 x93   + 1 x103 + 1 x163 + 1 x173;

/* Conta o número de itens de comprimento 4*/
f4= 1 x11   + 1 x41   + 1 x51   + 2 x81   + 1 x91   + 1 x131 + 1 x151 + 2 x171 + 2 x191
  + 1 x211 + 1 x221 + 1 x231 + 1 x281 + 1 x301 + 1 x341 + 1 x361 + 2 x371 + 1 x12
  + 2 x32   + 2 x52   + 1 x72   + 1 x82   + 1 x92   + 1 x122 + 1 x152 + 1 x192 + 1 x212
  + 2 x222 + 1 x242 + 2 x262 + 1 x302 + 1 x23   + 1 x53   + 1 x123 + 1 x133 + 1 x193;

/* Conta o número de itens de comprimento 5*/
f5= 1 x31   + 1 x71   + 1 x111 + 1 x121 + 1 x131 + 2 x141 + 1 x161 + 2 x201 + 1 x231
  + 1 x271 + 1 x341 + 1 x351 + 1 x22   + 2 x62   + 1 x92   + 1 x112 + 1 x192 + 1 x202
  + 1 x232 + 1 x252 + 1 x13   + 1 x33   + 1 x113 + 1 x183;
```

Figura 6 Variáveis de contagem de quantidade de itens distribuídos por comprimento

Como é possível verificar pela Figura 7, o resultado obtido pelo LPSolve para as variáveis de contagem de itens corresponde à quantidade total existente. Juntando isso ao nosso conhecimento de que não excedemos a quantidade máxima de contentores ($q1 < \infty$, $q2 <= 2$ e $q3 <=6$) e de que a função objetivo toma o valor mínimo, consideramos o modelo linear por nós elaborado correto e válido.

f1	2	2	2	2	2
f2	15	15	15	15	15
f3	10	10	10	10	10
f4	10	10	10	10	10
f5	5	5	5	5	5

Figura 7 Resultados LPSolve obtidos para as variáveis fx