2 Sistemas de equações lineares

Método de Eliminação de Gauss com Pivotagem Parcial: transformar $Ax = b$ em $Ux = c$, ($(A|I)$ em $(U|J)$ para a inversa), U matriz triangular superior (multiplicador não superior a 1 em valor absoluto).

- Solução do sistema linear: resolver $Ux = c$ por substituição inversa
- cálculo do determinante de A: $det(A) = (-1)^r \times U_{ii},\ i = 1\ldots, n$, r: n$^{\text{O}}$ de trocas de linhas
- cálculo da inversa da matriz A: resolver os n sistemas, em que os termos independentes são as colunas de J, por substituição inversa

Método iterativo de Gauss-Seidel

- Equação iterativa: $(\mathcal{D} - \mathcal{L})x^{(k+1)} = \mathcal{U}x^{(k)} + b$ ou $x^{(k+1)} = (\mathcal{D} - \mathcal{L})^{-1}\mathcal{U}x^{(k)} + (\mathcal{D} - \mathcal{L})^{-1}b$
- Matriz iteração: $C_{GS} = (\mathcal{D} - \mathcal{L})^{-1}\mathcal{U}$
- Critério de paragem: $\frac{\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} \leq \varepsilon_1$
- Condições suficientes de convergência: (i) A, estrita e diagonalmente dominante, (ii) A simétrica e definida positiva, (iii) $\|C_{GS}\|_p < 1$, para qualquer norma p

3 Equações não lineares

- método da secante

  $$x_{k+1}| = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

- método de Newton

  $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- critério de paragem

  $$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} \leq \varepsilon_1 \text{ e } |f(x_{k+1})| \leq \varepsilon_2$$

- $J(x_k)\Delta x_k = -f(x_k)$ (EGPP), $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$
- critério de paragem: $\frac{\|\Delta x_k\|}{\|x_{k+1}\|} \leq \varepsilon_1$ e $\|f(x_{k+1})\| \leq \varepsilon_2$

4 Polinómio interpolador de Newton

- Polinómio interpolador de Newton de grau menor ou igual a n:

  $$p_n(x) = f_0 + (x-x_0)[x_0, x_1] + \cdots + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n]$$

- Majorante do erro de truncatura

  1. Se $f(x)$ for dada por uma expressão $|e_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)|\ \frac{1}{(n+1)!}M_{n+1}$, em que $\left|\left[f^{(n+1)}(x)\right]_{[a,b]}\right| \leq M_{n+1}$.
  2. Se $f(x)$ for dada por um conjunto discreto de pontos,

     $|e_n(x)| \leq |(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)|\ |(\text{dd de ordem } n + 1)|$, em que

     $(\text{dd de ordem } n + 1) = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_z]$

- $f^n(x) \approx ddn \times n!$

5 'Splines' cúbicas

$$s_3^i(x) = \frac{M_{i-1}}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{M_i}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3$$

$$+ \left[\frac{f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{M_{i-1}(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) + \left[\frac{f_i}{x_i - x_{i-1}} - \frac{M_i(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1})$$

M = segunda derivada

- Equação dos nós interiores da 'spline' cúbica

  $$(x_i - x_{i-1})M_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})M_i + (x_{i+1} - x_i)M_{i+1} = \frac{6}{x_{i+1} - x_i}(f_{i+1} - f_i)$$
  $$- \frac{6}{x_i - x_{i-1}}(f_i - f_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

- 'Spline' cúbica natural: $M_0 = 0$ e $M_n = 0$

- 'Spline' cúbica completa:

$$2(x_1 - x_0)M_0 + (x_1 - x_0)M_1 = \frac{6}{x_1 - x_0}(f_1 - f_0) - 6f'(x_0),$$

$$2(x_n - x_{n-1})M_n + (x_n - x_{n-1})M_{n-1} = 6f'(x_n) - \frac{6}{x_n - x_{n-1}}(f_n - f_{n-1}).$$

- Limite superior do erro de truncatura: $|f(x) - s_3(x)| \le \frac{5}{384}h^4 M_4$, $|f'(x) - s_3'(x)| \le \frac{1}{24}h^3 M_4$, com $h = \max\limits_{0 \le i \le n-1}(x_{i+1} - x_i)$ e $\max\limits_{\xi \in [a,b]} \left|f^{iv}(\xi)\right| \le M_4$

6 Aproximação dos mínimos quadrados

Modelo polinomial: $p_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \cdots + c_n P_n(x)$

Polinómios ortogonais: $P_{i+1}(x) = (x - B_i)\, P_i(x) \; - \; \mathbb{C}_i\, P_{i-1}(x)$, $i = 0, \ldots, n-1$, $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$, $B_i = \frac{\sum_{j=1}^m x_j\, P_i^2(x_j)}{\sum_{j=1}^m P_i^2(x_j)}$, para todo o i, $\mathbb{C}_0 = 0$, e $\mathbb{C}_i = \frac{\sum_{j=1}^m P_i^2(x_j)}{\sum_{j=1}^m P_{i-1}^2(x_j)}$

Coeficientes do polinómio: $c_i = \frac{\sum_{j=1}^m f_j\, P_i(x_j)}{\sum_{j=1}^m P_i^2(x_j)}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$

Modelo linear não polinomial: $M(x; c_1, \ldots, c_n) = c_1 \Phi_1(x) + c_2 \Phi_2(x) + \cdots + c_n \Phi_n(x)$

Sistema das equações normais:

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \Phi_1^2(x_j) & \sum_{j=1}^m \Phi_2(x_j)\Phi_1(x_j) & \cdots & \sum_{j=1}^m \Phi_n(x_j)\Phi_1(x_j) \\ \sum_{j=1}^m \Phi_1(x_j)\Phi_2(x_j) & \sum_{j=1}^m \Phi_2^2(x_j) & \cdots & \sum_{j=1}^m \Phi_n(x_j)\Phi_2(x_j) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \sum_{j=1}^m \Phi_1(x_j)\Phi_n(x_j) & \sum_{j=1}^m \Phi_2(x_j)\Phi_n(x_j) & \cdots & \sum_{j=1}^m \Phi_n^2(x_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m f_j \Phi_1(x_j) \\ \sum_{j=1}^m f_j \Phi_2(x_j) \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^m f_j \Phi_n(x_j) \end{pmatrix}$$

7 Integração numérica

- Fórmulas compostas

  Trapézio: $T(h) = \dfrac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right]$

  Simpson: $S(h) = \dfrac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$

  Três oitavos: $3/8(h) = \dfrac{3h}{8}\left[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + \cdots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n\right],$

- erros de truncatura

  $e_{CT} \leq \left|-\dfrac{h^2}{12}(b-a)\right| M_2$, $e_{CS} = \left|-\dfrac{h^4}{180}(b-a)\right| M_4$, $e_{C3/8} = \left|-\dfrac{h^4}{80}(b-a)\right| M_4$

  com $M_1 \leq |f'(\eta)|$, $M_2 \leq |f''(\eta)|$, $M_4 \leq |f^{(iv)}(\eta)|, \eta \in [a, b]$

8 Equações diferenciais com condições iniciais (método de Runge-Kutta de segunda ordem)

- EDO de primeira ordem

  $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(p+q)$, $p = h\,f(x_i, y_i)$, $q = h\,f(x_{i+1}, y_i + p)$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$

- Sistema de EDO de primeira ordem (a sequência de cálculos deverá sempre ser todos os p's, todos os q's, todos os y's)

  $y_{1,i+1} = y_{1i} + \frac{1}{2}(p_1 + q_1)$, $y_{2,i+1} = y_{2,i} + \frac{1}{2}(p_2 + q_2)$, $y_{n,i+1} = y_{n,i} + \frac{1}{2}(p_n + q_n)$

  $p_1 = h\,f_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \ldots, y_{n,i})$ e $q_1 = h\,f_1(x_{i+1}, y_{1,i} + p_1, y_{2,i} + p_2, , \ldots, y_{n,i} + p_n)$.

  $p_2 = h\,f_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, , \ldots, y_{n,i})$ e $q_2 = h\,f_2(x_{i+1}, y_{1,i} + p_1, y_{2,i} + p_2, \ldots, y_{n,i} + p_n)$

  $p_n = h\,f_n(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \ldots, y_{n,i})$ e $q_n = h\,f_n(x_{i+1}, y_{1,i} + p_1, y_{2,i} + p_2, \ldots, y_{n,i} + p_n)$

- EDO de ordem superior (transformar equação diferencial de ordem n com condições iniciais num sistema de n equações diferenciais com condições iniciais)

  $y = y_1, \quad y_2 = y_1', \quad \ldots, \quad y_3 = y_2', \quad y_n = y_{n-1}', \quad y_n' = y^{(n)}$

Equações diferenciais com condições de fronteira (método das diferenças finitas)

- derivadas na equação diferencial (diferenças centrais)

  $y_i' \approx \frac{1}{2h}\,(y_{i+1} - y_{i-1})$, $y_i'' \approx \frac{1}{h^2}\,(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$, $y_i''' \approx \frac{1}{2h^3}\,(y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2})$

- derivadas nas condições de fronteira, na fronteira inferior (diferenças descendentes)

  $y_0' \approx \frac{1}{h}\,(y_1 - y_0)$, $y_0'' \approx \frac{1}{h^2}\,(y_2 - 2y_1 + y_0)$

- derivadas nas condições de fronteira, na fronteira superior (diferenças ascendentes)

  $y_n' \approx \frac{1}{h}\,(y_n - y_{n-1})$, $y_n'' \approx \frac{1}{h^2}\,(y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2})$