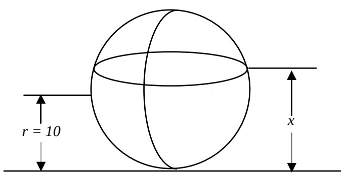
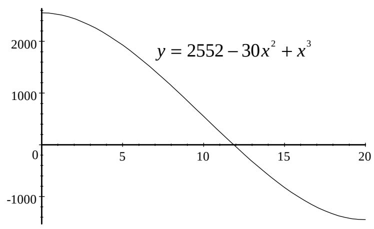
Equações não lineares

1. Um certo equipamento de 20000 euros vai ser pago durante 6 anos. O pagamento anual é de 4000 euros. A relação entre o custo do equipamento P, o pagamento anual A, o número de anos n e a taxa de juro i é a seguinte:
$$A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$
Utilize o método que não recorre à derivada para determinar a taxa de juro utilizada nos cálculos. O valor da taxa de juro pertence ao intervalo $[0.05, 0.15]$. Use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.005$. Use seis casas decimais nos cálculos.

2. Uma bola esférica de raio $r = 10$ cm feita de uma substância cuja densidade é $\rho = 0.638$, foi colocada num recipiente com água.



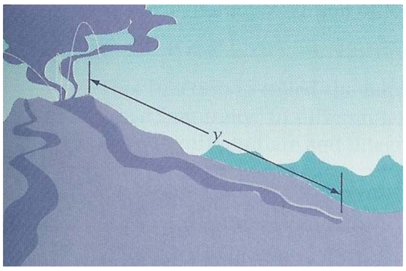


Usando o método iterativo de Newton, calcule a distância x da parte submersa da bola sabendo que
$$f(x) \equiv \frac{\pi\left(x^3 - 3x^2r + 4r^3\rho\right)}{3} = 0.$$
Faça duas iterações e apresente o erro relativo no final deste processo iterativo.

3. **[MATLAB]** O volume v de um líquido num tanque esférico de raio r está relacionado com a profundidade h do líquido da seguinte forma:
$$v = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3}.$$
   (a) Calcule a profundidade h, num tanque de raio $r = 1$ para um volume de 0.5. Utilize para aproximação inicial o valor 0.25.

(b) Repita os cálculos, nas mesmas condições da alínea anterior, mas utilizando para aproximação inicial o valor 2.5. Comente os resultados e analise a viabilidade da solução encontrada.

4. **[MATLAB]** A figura representa um vulcão em erupção. A relação entre a distância y (milhas) percorrida pela lava e o tempo t (horas) é dada por:



$$y = 7\ (2 - 0.9^t).$$

Existe uma aldeia no sopé da montanha a uma distância de $y = 10$. O gabinete de proteção civil advertiu os moradores da aldeia de que a lava chegaria às suas casas em menos de 6 horas. Calcule o instante de tempo em que a lava do vulcão atinge a aldeia e apresente o resultado com dez casas decimais. Repita considerando `FunctionTolerance`$= 10^{-15}$. Que diferença observa nas duas situações?

5. Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_1^n = 4 \\ -x_2 - x_2^m - x_1 = 8 \end{cases}$$

em que n e m são parâmetros.

Considere $m = 3$ e $n = 2$. Resolva o sistema utilizando para aproximação inicial o ponto $x_1 = (1, -2)^T$. Para o critério de paragem use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ (ou no máximo duas iterações). Use seis casas decimais nos cálculos.

6. Num coletor solar, um balanço de energia na placa absorvente e na placa de vidro produz o seguinte sistema de equações não lineares nas temperaturas absolutas da placa absorvente (x_1) e da placa de vidro (x_2)

$$\begin{cases} x_1^4 + 0.068x_1 - x_2^4 - 0.058x_2 &= 0.015 \\ x_1^4 + 0.058x_1 - 2x_2^4 - 0.117x_2 &= 0 \end{cases}.$$

Considerando a seguinte aproximação inicial $(x_1, x_2)_1 = (0.3, 0.3)$, implemente uma iteração do método de Newton. Apresente uma estimativa do erro relativo da aproximação calculada. Use quatro casas decimais nos cálculos.

7. **[MATLAB]** Existe um par de valores que anula as primeiras derivadas parciais da função de duas variáveis

$$f(x, y) = -e^{-x} + y^2 - 2x + 2y.$$

A partir da aproximação inicial $(x, y)_1 = (-1, 1)$, determine esse par.

8. **[MATLAB]** Determine um dos pontos de interseção da circunferência

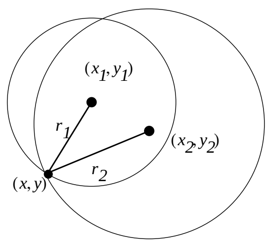
$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

com a hipérbole

$$x_1^2 - x_2^2 = 1.$$

Considere os valores iniciais $(x_1, x_2)_1 = (1.5, 0.5)$, e considere `FunctionTolerance`$= 10^{-10}$. Será possível encontrar mais pontos de interseção? Procure um exemplo e explique o processo que seguiu.

9. **[MATLAB]** Em problemas de navegação, é necessário encontrar a posição de um ponto (x, y), através dos valores das distâncias r_1 e r_2 a dois pontos de posição conhecida (x_1, y_1) e (x_2, y_2), como mostra a figura.



(a) Formule o problema como um sistema de equações não lineares em função das coordenadas do ponto (x, y).

(b) Considerando $(x_1, y_1) = (10, 10)$, $(x_2, y_2) = (10, -10)$, $r_1 = 14$ e $r_2 = 16$, calcule as coordenadas do ponto (x, y) inicial $(x, y)_1 = (0, 0)$. Encontre o segundo ponto de interseção das duas circunferências.

10. **[MATLAB]** A concentração de um poluente num lago depende do tempo t e é dada por

$$C(t) = 70e^{\beta t} + 20e^{\omega t}.$$

Efetuaram-se duas medições da concentração que foram registadas na seguinte tabela

t	1	2
$C(t)$	27.5702	17.6567

Determine β e ω considerando a aproximação inicial $(\beta, \omega)_1 = (-1.9, -0.15)$.

11. **[MATLAB]** Pensei em dois números. O produto dos dois somado ao segundo ao cubo é igual a três e o logaritmo neperiano do segundo adicionado à metade do primeiro é um.

    (a) Formule o problema como um sistema de equações.

    (b) Resolva-o utilizando para aproximação inicial o ponto $(1.9, 1.1)$, apresentando o resultado com sete casas decimais.