Universidade Federal de Minas Gerais - Departamento de Engenharia Eletrônica

ELT015 - LABORATÓRIO DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO II

IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLADORES DIGITAIS (Roteiro A)
AULA 3

Instrutor: Alexandre R. Mesquita

O objetivo desta terceira aula é estudar alguns aspectos práticos da discretização de controladores PID. Para tanto, os alunos criarão modelos do Simulink e executarão diversas simulações com o fim de comparar técnicas de discretização.

1. Projeto de Controlador Digital por Emulação

No projeto de controladores digitais, há duas possibilidades. Na primeira, a planta é discretizada e o controlador é projetado em tempo discreto. Na segunda, um controlador de tempo contínuo é projetado para o modelo de tempo contínuo da planta e um controlador digital que aproxima o controlador de tempo contínuo é encontrado. Este segundo método de projeto é comumente chamado de projeto por emulação e será adotado nesta prática.

Dada uma função de transferência de tempo contínuo $H(s)$, desejamos encontrar uma função de transferência $H_d(z)$ em tempo discreto cuja resposta em frequência seja idêntica à de $H(s)$ para um tempo de amostragem T:

$$H_d(z) = H_d(e^{j\omega T}) = H(j\omega) = H(s) \ .$$

Isto será possível se e só se

$$H_d(z) = H\left(\frac{1}{T}\ln(z)\right) \ .$$

Infelizmente $H\left(\frac{1}{T}\ln(z)\right)$ não é uma função de transferência racional e não pode ser realizada por um sistema de ordem finita a não ser de forma aproximada.

Consideremos inicialmente a aproximação de primeira ordem:

$$z = e^{sT} \approx 1 + sT \Rightarrow s \approx \frac{z-1}{T} \ .$$

Esta aproximação é conhecida como transformada retangular de avanço e possui o grande inconveniente de mapear pólos estáveis em tempo contínuo em pólos instáveis em tempo discreto.

Uma segunda possibilidade é a aproximação

$$z = e^{sT} = \frac{1}{e^{-sT}} \approx \frac{1}{1-sT} \Rightarrow s \approx \frac{1-z^{-1}}{T} \ .$$

Esta aproximação é conhecida como transformada retangular de atraso. Desta vez vemos que $\Re[s] < 0 \Rightarrow |z| < 1$ e, portanto, temos um mapeamento que preserva a estabilidade dos pólos de tempo contínuo. Além disso, como foi aplicada uma aproximação de Taylor de primeira ordem, temos que o erro dessa aproximação será proporcional a $|sT|^2$.

Consideremos uma terceira aproximação:

$$z = e^{sT} = \frac{e^{sT/2}}{e^{-sT/2}} \approx \frac{1+sT/2}{1-sT/2} \Rightarrow s \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \ .$$

Esta aproximação é conhecida como transformada bilinear ou método de Tustin. Além de esta transformação preservar a estabilidade dos pólos de tempo contínuo, note que $s = j\omega \Rightarrow |z| = 1$, ou seja, temos um mapeamento do eixo imaginário no círculo unitário (oscilações puras são mapeadas em oscilações puras).

Considere a divisão longa

$$\frac{1+sT/2}{1-sT/2} = 1 + sT + \frac{1}{2}(sT)^2 + \frac{1}{4}(sT)^3 + \ldots \quad .$$

Vemos que os três primeiros termos coincidem com os da série de Taylor de e^{sT}. Dessa forma, o erro de aproximação obtido com a transformada bilinear será proporcional a $|sT|^3$. Portanto, temos uma aproximação mais precisa que aquela fornecida pelas transformadas retangulares.

Note-se que estas aproximações funcionam bem para frequências ω tais que $\omega T <<$ 1 e que o erro cresce rapidamente para frequências com $\omega T > 1$.

Ao longo desta prática, avaliaremos este e outros aspectos relativos à implementação de controladores digitais.

2. Simulações do Controlador Discretizado

Tarefa 1. A primeira tarefa consiste na criação de um modelo do Simulink para simular o PID discretizado tal qual mostrado na Figura 1. Modifique o modelo da aula passada para criar um novo modelo como o da figura. Defina o tempo de amostragem $T_s = 0.02$ para os blocos a tempo discreto e utilize um script para definir as constantes:

$$K_{pp} = K_p\left(1 + \frac{T_s}{2T_i}\right)$$

$$\beta = \frac{2T_i - T_s}{2T_i + T_s}$$

$$\gamma = \alpha\frac{T_d}{T_s}$$

$$K_{pd} = \frac{K_p\gamma}{\alpha}$$

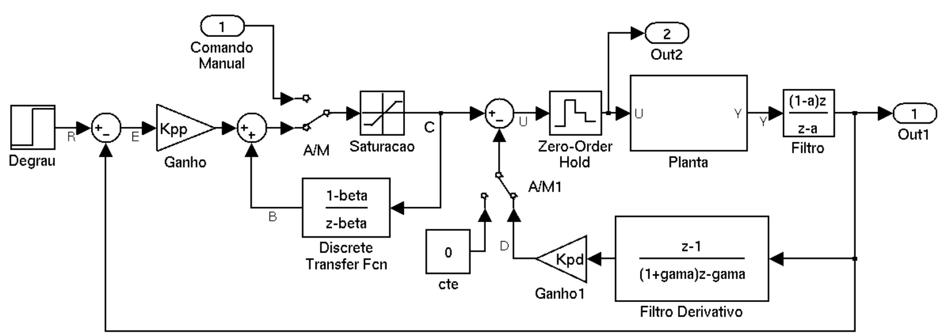

FIGURA 1. Diagrama de simulação para um sistema com controlador PID discreto

Por enquanto não utilizaremos o filtro digital, de forma que manteremos seu pólo em $a = 0$. Para um sistema de controle digital, faz-se necessário o uso de um filtro anti-aliasing. Modifique o modelo da planta para incluir um filtro RC com constante de tempo $RC = T_s/\pi$ como mostrado na Figura 2.

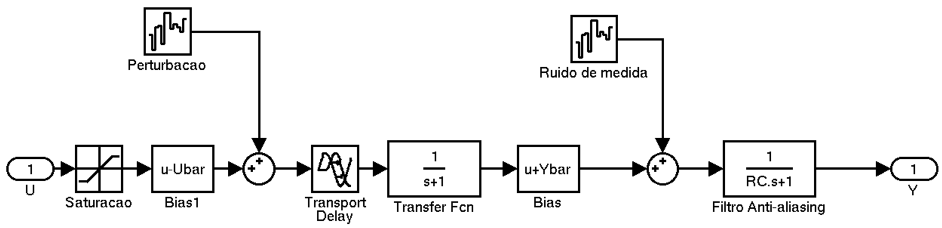

FIGURA 2. Modelo da planta a ser controlada

Tarefa 2. (*pode ser feita em casa*) Demonstre que a função de transferência $C(z)/E(z)$ corresponde à discretização da função de transferência $C(s)/E(s)$ do diagrama contínuo usando a transformada bilinear:

$$s \approx \frac{2}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Argumente por que as funções de *anti-windup* e transição automático/manual suave são preservadas.

Tarefa 3. Fixando a potência N_M do ruído em 10^{-9}, simule os controladores PID contínuo e discreto e compare seu desempenho traçando gráficos da variável de processo e da variável manipulada. Se sua implementação estiver correta, as duas respostas devem tornar-se idênticas para T_s pequeno o bastante.

Tarefa 4. A função de transferência $D(z)/Y(z)$ corresponde à discretização da função de transferência $D(s)/Y(s)$ usando a transformada retangular:

$$s \approx \frac{1-z^{-1}}{T_s} \quad .$$

Se o termo derivativo fosse discretizado utilizando-se a transformada bilinear, bastaria substituir a função de transferência no bloco Filtro Derivativo por

$$\frac{2(z-1)}{(1+2\gamma)z+(1-2\gamma)} \quad .$$

Aumente a potência do ruído de medida para 10^{-4} e gere gráficos para comparar o desempenho do controle com a discretização retangular do termo derivativo e discretização bilinear. **Justifique** o melhor desempenho da discretização retangular.

Tarefa 5. Em seguida, queremos analisar o efeito da taxa de amostragem sobre o desempenho do controlador. Mantenha a potência do ruído de medida em 10^{-4} e compare o desempenho do controlador para as taxas de amostragem 0.02 e 0.002 (lembre-se de atualizar o parâmetro RC do filtro anti-aliasing em função de T_s). **Explique** o resultado obtido.

Tarefa 6. Uma prática comum em controle digital é amostrar o sinal a uma certa frequência, filtrá-lo, e executar o controle a uma frequência menor. Isso pode ser motivado tanto por restrições de hardware quanto pela maior flexibilidade na implementação de filtros digitais em comparação com filtros analógicos.

Modifique o modelo do Simulink de modo que o controlador opere com uma taxa de amostragem $T_s = 0.02$ ao passo que o filtro digital e a amostragem da planta operem a uma taxa $T_{sa} = 0.002$. Não se esqueça de ajustar o filtro anti-aliasing para essa nova taxa.

Compare o desempenho do controle para valores do parâmetro a do filtro digital $0, 0.9$ e 0.98. Comente os resultados.

3. Implementação do Controlador Digital e Filtro

Tarefa 7. Escreva um script de Matlab que implementa o controlador PID discreto da tarefa anterior. O script deve calcular $D[k], E[k], B[k], C[k]$ e $U[k]$ em função dos valores anteriores dessas variáveis e das entradas $Y[k]$ e $R[k]$, isto é, ele deve computar as equações a diferença correspondentes às funções de transferência do controlador. Importe os sinais gerados no Simulink para validar seu controlador: injete em seu controlador os sinais $Y[k]$ e $R[k]$ provenientes do Simulink e compare o sinal de controle $U[k]$ obtido com aquele proveniente do Simulink. Não considere o filtro digital por enquanto.

Tarefa 8. Obtenha a equação a diferenças para implementar uma aproximação do filtro Butterworth de segunda ordem

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_b}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{\omega_b}\right) + 1} \quad ,$$

considerando que, aplicando a transformada bilinear, obtemos a aproximação discretizada

$$H(z) = \frac{\kappa^2(z^2 + 2z + 1)}{(z^2 - 2z + 1) + \sqrt{2}\kappa(z^2 - 1) + \kappa^2(z^2 + 2z + 1)}$$

onde $\kappa = \omega_b T_s/2$.

Tarefa 9. Para o modelo de Simulink utilizado nas tarefas anteriores, substitua os parâmetros pelos respectivos parâmetros para o seu modelo da torneira elétrica e o seu respectivo projeto de controle. Lembre-se de substituir o filtro digital pelo filtro Butterworth obtido. Utilize essa estrutura para escolher a taxa de amostragem T_s a ser utilizada. Explique as suas escolhas tendo em vista a banda de passagem do sistema em malha fechada.

Bibliografia

[1] CLARKE, D. PID algorithms and their computer implementation. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 6, n. 6, p. 305–316, 1984.