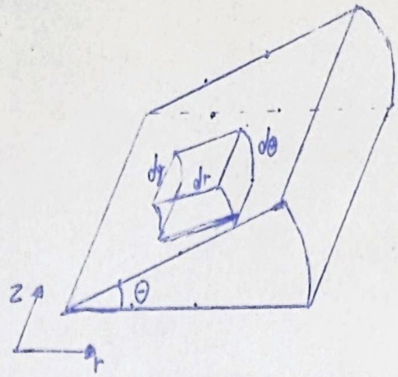
Lista 1 - PMT07

João Gabriel Clarindo



Conservação da Massa:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho \, d\forall + \oint_{sc} \rho(\vec{V}\cdot\vec{dA}) = 0$$

$$d\forall = dr \cdot r \cdot d\theta \cdot dz = r\, dr\, d\theta \cdot dz$$

$$\vec{V} = v_r \cdot \hat{e}_r + v_\theta \cdot \hat{e}_\theta + v_z \hat{e}_z$$

Termo transiente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \cdot d\forall = \frac{\partial(\rho \cdot d\forall)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}(r \cdot dr \cdot d\theta\, dz)$$

Termo convectivo:

Fluxo na direção r:

Saída:

$$(\rho \cdot v_r \cdot r \cdot d\theta \cdot dz)|(r + dr/2)$$

Entrada:

$$(\rho \cdot v_r \cdot r\, d\theta\, dz)|(r - dr/2)$$

Fluxo mássico líquido na direção r (Saída - Entrada):

$$\text{Saída - Entrada} \cong \frac{\partial(\rho v_r \cdot r\, d\theta\, dz)}{\partial r} dr = \frac{\partial(r \rho v_r)}{\partial r} dr\, d\theta\, dz$$

Fluxo na direção θ

Saída:

$(\rho \vartheta_\theta \cdot dr\, dz)\big|_{\theta + \frac{d\theta}{2}}$

Entrada

$(\rho \vartheta_\theta \cdot dr\, dz)\big|_{\theta - \frac{d\theta}{2}}$

Fluxo mássico na direção θ:

Saída - Entrada $\equiv \dfrac{\partial(\rho \vartheta_\theta \cdot dr\, dz)}{\partial \theta} d\theta = \dfrac{\partial(\rho \vartheta_\theta)}{\partial \theta} dr\, d\theta\, dz$

Fluxo mássico na direção z:

Saída:

$(\rho \vartheta_z \cdot r\, dr\, d\theta)\big|_{z + dz/2}$

Entrada:

$(\rho \vartheta_z \cdot r\, dr\, d\theta)\big|_{z - \frac{dz}{2}}$

Fluxo mássico líquido na direção z:

Saída - Entrada $\equiv \dfrac{\partial(\rho \vartheta_z \cdot r\, dr\, d\theta)}{\partial z} dz = \dfrac{\partial(\rho \vartheta_z)}{\partial z} r\, dr\, d\theta\, dz$

Somando os termos e igualando a 0:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \underbrace{r \cdot dr\, d\theta\, dz}_{= d\forall} + \frac{\partial(r \rho \vartheta_r)}{\partial r} dr\, d\theta\, dz + \frac{\partial(\rho \vartheta_\theta)}{\partial \theta} \cdot dr\, d\theta\, dz + \frac{\partial(\rho \vartheta_z)}{\partial z} r\, dr\, d\theta\, dz = 0$$

Dividindo por $d\forall$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho \vartheta_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho \vartheta_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho \vartheta_z)}{\partial z} = 0$$

Na notação vetorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Conservação de quantidade de movimento:

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \vec{V}\, dA + \oint_{SC} \rho \vec{V}(\vec{V}\cdot d\vec{A})$$

$$\vec{V} = v_r\,\hat{e}_r + v_\theta \cdot \hat{e}_\theta + v_z\,\hat{e}_z$$

$$d\forall = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$$

Face radial (em r e $r+dr$): $A_r = r \cdot d\theta\, dz$

Face tangencial (em θ e $\theta+d\theta$): $A_\theta = dr \cdot dz$

Face axial (e z e $z+dz$): $A_z = r \cdot dr\, d\theta$

Direção r:

1. termo transiente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho v_r\, d\forall = \frac{\partial(\rho v_r \cdot d\forall)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \cdot v_r)}{\partial t}(r\,dr\,d\theta\, dz)$$

dividindo por $d\forall$: $\dfrac{\partial(\rho v_r)}{\partial t}$

2. termo convectivo (Fluxo de momentum-r)

Faces radiais (r)

Momentum $r(\rho \cdot v_r)$ transportado pela velocidade v_r

Saída (em $r+dr$): $(\rho \cdot v_r \cdot v_r \cdot A_r)|_{r+dr} = (\rho v_r^2 \cdot r\, d\theta\, dz)|_{r+dr}$

Entrada (em r): $\rho v_r^2 \cdot r\, d\theta\, dz|_r$

Fluxo líquido:

$$\frac{\partial(r \rho v_r^2)}{\partial r}\, dr\, d\theta\, dz$$

Faces tangenciais (θ)

Momentum $r(\rho v_r)$ transportado pela velocidade v_θ

Saída (em $\theta + d\theta$): $(\rho\, v_r\, v_\theta \cdot A_\theta)|_{\theta+d\theta} = (\rho \cdot v_r\, v_\theta \cdot dr\, dz)|_{\theta+d\theta}$

Entrada (em θ): $(\rho\, v_r\, v_\theta \cdot dr\, dz)|_\theta$

Fluxo líquido:

$$\frac{\partial(\rho v_r\, v_\theta)}{\partial\theta} \cdot d\theta\, dr\, dz = \frac{1}{r}\,\frac{\partial(\rho v_r \cdot v_\theta)}{\partial\theta}\,(r\, dr\, d\theta\, dz)$$

Faces axiais (z)

Momentum $r(\rho v_r)$ transportado pela velocidade v_z

Saída (em $z + dz$): $(\rho\, v_r\, v_z \cdot A_z)|_{z+dz} = (\rho\, v_r \cdot v_z \cdot r\, dr\, d\theta)|_{z+dz}$

Entrada (em z): $(\rho\, v_r\, v_z \cdot r\, dr\, d\theta)|_z$

Fluxo líquido:

$$\frac{\partial(\rho\, v_r\, v_z)}{\partial z}\, dz\,(r\, dr\, d\theta) = \frac{\partial(r\,\rho\, v_r\, v_z)}{\partial z}\, dr\, d\theta\, dz$$

Soma do Fluxo convectivo:

$$\frac{1}{dV}\left[\frac{\partial(r\rho v_r^2)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_r\, v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(r\,\rho\, v_r \cdot v_z)}{\partial z}\right] dV = \frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\rho v_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_r\, v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\rho v_z v_r)}{\partial z}$$

3. Forças de superfície ($\sum F_s$)

Forças de tensão de cisalhamento e pressão

Forças nas faces r (direção r): Tensão normal σ_{rr}

Força em $(r+dr)$: $(\sigma_{rr} \cdot A_r)|_{r+dr} = (\sigma_{rr} \cdot r\, d\theta \cdot dz)|_{r+dr}$

Força em (r) : $-(\sigma_{rr} \cdot A_r)|_r = -(\sigma_{rr} \cdot r\, d\theta\, dz)|_r$

Força líquida: $\dfrac{\partial(r\, \sigma_{rr})}{\partial r}\, dr\, d\theta\, dz$

Forças nas faces θ (direção r): Tensão de cisalhamento $\tau_{\theta r}$

Força em $(\theta + d\theta)$: $(\tau_{\theta r} \cdot A_\theta)|_{\theta+d\theta} = (\tau_{\theta r} \cdot dr \cdot dz)|_{\theta + d\theta}$

Força em (θ) : $-(\tau_{\theta r} \cdot dr \cdot dz)|_\theta$

Força líquida: $\dfrac{\partial(\tau_{\theta r})}{\partial \theta}\, d\theta\, dr\, dz$

Forças nas faces z (direção r): tensão de cisalhamento τ_{zr}

Força em $(z+dz)$: $(\tau_{zr} \cdot A_z)|_{z+dz} = (\tau_{zr} \cdot dr\, d\theta)|_{z+dz}$

Força em (z) : $-(\tau_{zr} \cdot r \cdot dr\, d\theta)|_z$

Força líquida: $\dfrac{\partial(\tau_{zr})}{\partial z}\, dz\,(r\, dr\, d\theta) = \dfrac{\partial(r\, \tau_{zr})}{\partial z}\, dr\, d\theta\, dz$

4. Termos de curvatura

Como o volume de controle é curvo, as faces A_θ (em (θ) e $(\theta + d\theta)$) não são paralelas. Eles formam um ângulo $d\theta$. As tensões normais nessas faces. ($\sigma_{\theta\theta}$) têm uma componente que aponta para a ~~centro~~ origem (direção $-r$)

Força na face θ: $(\sigma_{\theta\theta} \cdot A_\theta) = \sigma_{\theta\theta}\, dr\, dz$

· Componente r desta força: $-\sigma_{\theta\theta}\, dr\, dz \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) \cong -\sigma_{\theta\theta}\, dr\, dz\, \frac{d\theta}{2}$

Força na face $\theta + d\theta$: $-\sigma_{\theta\theta}\, dr\, dz \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) \cong -\sigma_{\theta\theta}\, dr\, dz\, \frac{d\theta}{2}$

Força líquida de curvatura (de $\sigma_{\theta\theta}$): $-\sigma_{\theta\theta}\, dr\, dz\, d\theta = \underline{-\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}(r\, dr\, d\theta\, dz)}$

Da mesma forma, o fluxo de momentum θ $(\rho \cdot v_\theta^2)$ que passa pelas faces tangenciais, tem uma componente líquida na direção r ~~tangencial~~

Fluxo na entrada: $(\rho\, v_\theta^2\, dr\, dz)$

Componente r: $(\rho \cdot v_\theta^2\, dr\, dz) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) \cong \rho\, v_\theta^2\, dr\, dz\, \frac{d\theta}{2}$

Fluxo na saída: $(\rho\, v_\theta^2\, dr\, dz)$

Componente r: $\cong \rho\, v_\theta^2\, dr\, dz\, \frac{d\theta}{2}$

$-(\rho \cdot v_\theta^2 \cdot dr\, dz\, \frac{d\theta}{2}) - (\rho\, v_\theta^2\, dr\, dz\, \frac{d\theta}{2}) = -\rho v_\theta^2\, dr\, dz\, d\theta$

Termo de aceleração centrípeta: $-\frac{\rho v_\theta^2}{r}(r\, dr\, d\theta\, dz)$

5. Forças de Campo ($\sum F_B$)

$$(\rho \cdot \underbrace{g_r}_{\text{gravidade}}) \cdot d\forall = \rho \cdot g_r (r \cdot dr \, d\theta \, dz)$$

Montagem da equação:

Somando todos os termos e dividindo por $d\forall$:

Lado esquerdo - Taxa de variação de momentum:

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r \rho v_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_r v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z v_r)}{\partial z} + \frac{\rho v_\theta^2}{r}$$

Lado direito - Forças:

$$\rho g_r + \frac{1}{r}\frac{\partial(r \sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\tau_{\theta r})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\tau_{zr})}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}$$

Para um fluido newtoniano incompressível temos as seguintes relações:

$$\sigma_{rr} = -p + \tau_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + \tau_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)$$

$$\tau_{\theta r} = \mu \left[r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{zr} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

Substituindo as relações no lado esquerdo da equação e assumindo viscosidade constante, os termos pode ser agrupados em:

Termos de pressão:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r(-p))}{\partial r} - \frac{(-p)}{r} = \left(-\frac{p}{r} - \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{p}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

Termos viscosos:

$$\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]$$

Juntando todos os termos, obtemos a componente r da equação de Navier-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]$$

A obtenção da componente θ ocorre de forma análoga, agora com o termo de aceleração de Coriolis $\frac{v_r v_\theta}{r}$:

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) =$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right]$$

Para a componente axial z, não há termos de curvatura, uma vez que $\hat{e}_z$ é constante:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \cdot g_z + \mu\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

Na notação vetorial (Eq. de Cauchy):

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V}) = \vec{\nabla}\cdot\tau_{ij} + \rho\cdot\vec{g}$$

Aplicando as relações constitutivas para um fluido newtoniano:

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V}\vec{V}) = \vec{\nabla}\cdot(\mu\cdot\vec{\nabla}\vec{V}) - \vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \vec{A}$$