PMT07 - Lista de Exercícios 3

João Gabriel Clarindo - 1907689

Solução Analítica

Equação da energia para condução 1D em R.P. com geração

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad \text{---} \quad (1)$$

Integrando:

$$\int \left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} \right) dx = \frac{dT}{dx} + \frac{\dot{q}}{k} \cdot x + C_1 = 0$$

Rearranjando.

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k} \cdot x + C_1 \quad \text{----} \quad (2)$$

Integrando novamente.

$$\int \left(\frac{dT}{dx} \right) dx = \int \left(-\frac{\dot{q}}{k} \cdot x + C_1 \right) dx$$

$$\Rightarrow T(x) = \frac{-\dot{q}}{2k} \cdot x^2 + C_1 x + C_2 \quad \text{----} \quad (3)$$

Condições de contorno:

$\rightarrow x = 0$ (Fluxo Constante)

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = q'' \quad \text{----} \quad (4)$$

$\rightarrow x = L$ (Convecção)

$$-k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h(T(L) - T_\infty) \quad \text{---} \quad (5)$$

Substituindo (2) em (4):

$$-k\left(\frac{-\dot{q}}{k}\cdot(0)+C_1\right)=q'' \Rightarrow \boxed{C_1=-\frac{q''}{k}}$$

Substituindo (2) e (3) em (5)

$$-k\cdot\left(\frac{-\dot{q}}{k}\cdot L+C_1\right)=h\left[\left(\frac{-\dot{q}}{2k}\cdot L^2+C_1\cdot L+C_2\right)-T_\infty\right] \quad \text{--- (6)}$$

$$+\dot{q}\cdot L+q''=\frac{-h\cdot\dot{q}}{2k}\cdot L^2-\frac{h\cdot q''}{k}\cdot L+h\cdot C_2-h\cdot T_\infty$$

Rearranjando:

$$h\cdot C_2=\dot{q}\cdot L+q''+\frac{h}{k}\left(\frac{\dot{q}\cdot L^2}{2}+q''\cdot L\right)+h\cdot T_\infty$$

$$C_2=\frac{\dot{q}\cdot L+q''}{h}+\frac{0{,}5\cdot\dot{q}\cdot L^2+q''\cdot L}{k}+T_\infty$$

Substituindo C_1 e C_2 na eq. (3)

$$\boxed{T(x)=\frac{\dot{q}}{2k}(L^2-x^2)+\frac{q''}{k}(L-x)+\frac{\dot{q}\cdot L+q''}{h}+T_\infty} \quad \text{--- (7)}$$

Sabendo que:

$L = 3m$

$q'' = 400 \ W/m^2$

$\dot{q} = 300 \ W/m^3$

$k = 30 \ W/m.K$

$h = 50 \ W/m^2.K$

$T_\infty = 20°C$

A equação (7) se torna:

$T(x) = 5(9 - x^2) + 13{,}33(3 - x) + 26 + 20$

$T(x) = -5x^2 - 13{,}33x + 131$ --- (8)

Resolvendo (8) para os pontos nodais

$T(0) = 131°C$

$T(0{,}5) = 123{,}083°C$

$T(1{,}5) = 99{,}75°C$

$T(2{,}5) = 66{,}417°C$

$T(3) = 46°C$

Solução Numérica

Eq de energia para a condução 1D em RP com geração

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

Rearranjando:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + \dot{q} = 0$$

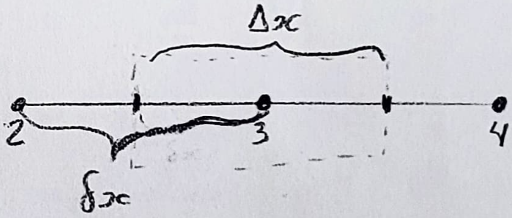
Comparando com a equação geral do problema de difusão 1D RP.

$$\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{dT}{dx}\right) + S = 0$$

$$\Gamma = k \qquad S = S_c + S_p \cdot T = \dot{q} \Rightarrow \begin{cases} S_c = \dot{q} = 300 \\ S_p = 0 \end{cases}$$

-Equação discretizada para o ponto nodal 3:

$$a_3 \cdot T_3 = a_4 \cdot T_4 + a_2 \cdot T_2 + b_3$$



$$a_4 = \frac{k}{\delta x} = 30 \qquad a_2 = \frac{k}{\delta x} = 30$$

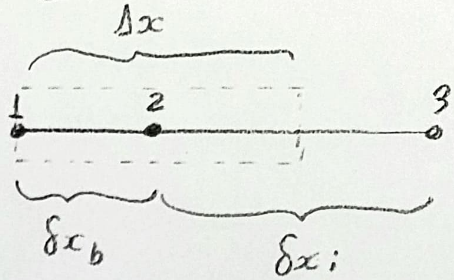
$$a_3 = a_4 + a_2 - S_p \cdot \Delta x$$

$$a_3 = 60$$

$$b_3 = S_c \cdot \Delta x = 300$$

$$60 \cdot T_3 = 30 \cdot T_4 + 30 \cdot T_2 + 300 \quad \ldots (8)$$

- Equação discretizada para o ponto nodal 2:



$$a_2 \cdot T_2 = a_3 \cdot T_3 + a_1 \cdot T_1 + b_2$$

Utilizando o segundo enfoque para a condisão de Neumann:

$$a_1 = 0$$

$$a_3 = \frac{h}{\delta x_i} = 30$$

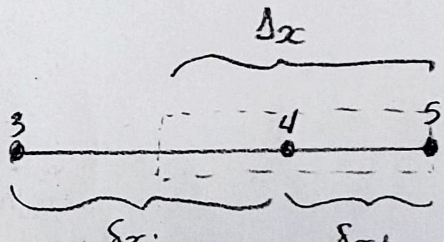
$$a_2 = a_3 - S_p \cdot \Delta x = 30$$

$$S_{CA} = \frac{q''}{\Delta x} = 400$$

$$b_2 = (S_{CA} + S_C) \cdot \Delta x = (400 + 300) \cdot 1 = 700$$

$$30 \cdot T_2 = 30 \cdot T_3 + 700 \quad --- (9)$$

- Equação discretizada para o ponto nodal 4:



$$a_4 \cdot T_4 = a_5 \cdot T_5 + a_3 \cdot T_3$$

Utilizando o segundo enfoque para a condiçéo de Robin:

$$a_5 = 0$$

$$a_3 = \frac{h}{\delta x_i} = 30$$

$$S_{CA} = \frac{T_\infty}{\left(\frac{1}{h} + \frac{\delta x_b}{h}\right) \cdot \Delta x} = 545,45$$

$$S_{PA} = \frac{-S_{CA}}{T_\infty} = -27,2727$$

$$a_4 = a_3 - (S_{PA} + S_P) \cdot \Delta x = 57,2727$$

$$b_4 = (S_{CA} + S_C) \cdot \Delta x = 845,45$$

$$57,27 \cdot T_4 = 30 \cdot T_3 + 845,45 = 0 \quad --- (10)$$

Equações discretizadas obtidas

$$\begin{cases} 30 \cdot T_2 - 30 \cdot T_3 = 700 \\ 60 \cdot T_3 - 30 \cdot T_4 - 30 \cdot T_2 = 300 \\ -30 \cdot T_3 + 57{,}27 \cdot T_4 = 845{,}45 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 30 & -30 & 0 \\ -30 & 60 & -30 \\ 0 & -30 & 57{,}27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 300 \\ 845{,}45 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$T_2 = 124{,}33\,°C$

$T_3 = 101\,°C$

$T_4 = 67{,}67\,°C$

Obtendo-se T_1 e T_5 numericamente:

$$q''_{b_W} = \frac{-k \cdot (T_2 - T_1)}{\delta b} \Rightarrow T_1 = T_2 + \frac{q''_{b} \cdot (\delta x)_b}{k_b} \Rightarrow T_1 = 131\,°C$$

$$q''_{b_E} = h(T_5 - T_\infty) = \frac{k\,(T_4 - T_5)}{\delta x_b} \Rightarrow T_5 = \left(\frac{k}{\delta x_b} \cdot T_4 + h \cdot T_\infty\right) \cdot \left(\frac{k}{\delta x_b} + h\right)^{-1}$$

$\Rightarrow T_5 = 46\,°C$ //

Comparação resultados:

	Analítico (°C)	Numérico (°C)
T_1	131	131
T_2	123,08	124,33
T_3	99,75	101
T_4	66,42	67,67
T_5	46	46