PMT 07 - Lista de Exercícios 2

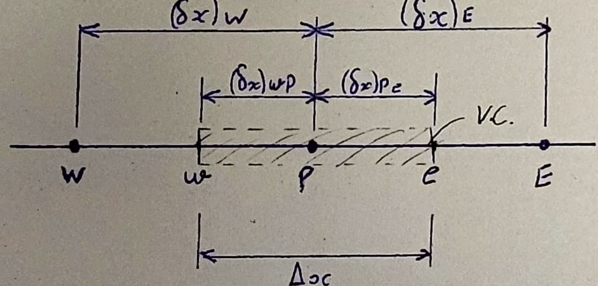
João Gabriel Clarindo

Partindo da Equação:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + S = 0$$

Obter a sua discretização

1º Passo: Geração da grade



P → Ponto nodal

W → Vizinho oeste de P

E → Ponto nodal vizinho leste de P

w → Face do lado oeste do volume de controle

e → Face do lado leste do V.C.

2º Passo: Discretização

Fazendo a integração da equação governante no volume de controle, temos:

$$\int_{V.C.} \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)dV + \int_{V.C.} S\, dV = 0$$

$$dV = A \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int_{V.C.} \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)A \cdot dx + \int_{VC} S \cdot A\, dx = 0$$

Assumindo Área A constante no volume de controle:

$$\int_{x_w}^{x_e} \frac{d}{dx}\left(k \cdot A \frac{dT}{dx}\right) dx + \int_{x_w}^{x_e} S \cdot A \, dx = 0$$

Integrando os termos:

$$\left[k \cdot A \frac{dT}{dx}\right]_{x_w}^{x_e} + \bar{S} \cdot A \cdot x \Big|_{x_w}^{x_e} = 0$$

$$\left(k A \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(k A \frac{dT}{dx}\right)_w + \bar{S} A (x_e - x_w) = 0$$

Como A é constante, podemos escrever:

$$\left(k \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(k \frac{dT}{dx}\right)_w + \bar{S} \Delta x = 0 \Rightarrow k_e \left(\frac{dT}{dx}\right)_e - k_w \left(\frac{dT}{dx}\right)_w + \bar{S} \Delta x = 0$$

Para transformar a equasão em uma equasão algébrica, as seguintes aproximasõe são feitas:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_E} \qquad \left(\frac{dT}{dx}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{(\delta x)_w}$$

O termo fonte, em casos onde é funsão da variável dependente, pode ser aproximado por uma expressão linear:

$$\bar{S} \Delta x = S_u + S_p \cdot T_P$$

Substituindo as aproximações na equação integrada:

$$k_e\left(\frac{T_E - T_P}{(\delta x)_E}\right) - k_w\left(\frac{T_P - T_W}{(\delta x)_W}\right) + (S_u + S_P \cdot T_P) = 0$$

Rearranjando:

$$\frac{k_e \cdot T_E}{(\delta x)_E} - \frac{k_e \cdot T_P}{(\delta x)_E} - \frac{k_w \cdot T_P}{(\delta x)_w} + \frac{k_w \cdot T_W}{(\delta x)_w} + S_u + S_P \cdot T_P = 0$$

Isolando os termos de temperatura nos pontos nodais:

$$T_E \cdot \left(\frac{k_e}{(\delta x)_E}\right) + T_P\left(-\frac{k_e}{(\delta x)_E} - \frac{k_w}{(\delta x)_w} + S_P\right) + T_W\left(\frac{k_w}{(\delta x)_W}\right) + S_u = 0$$

Rearranjando:

$$\left(\frac{k_e}{(\delta x)_E} + \frac{k_w}{(\delta x)_W} - S_P\right) T_P = \left(\frac{k_e}{(\delta x)_E}\right) \cdot T_E + \left(\frac{k_w}{(\delta x)_W}\right) \cdot T_W + S_u = 0$$

A equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$a_P \cdot T_P = a_E \cdot T_E + a_W \cdot T_W + S_u$$

Onde:

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_E}, \quad a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_W} \quad e \quad a_P = a_E + a_W - S_P$$

Regra #2 - Coeficientes Positivos

Os coeficientes vizinhos a_W e a_E devem ser sempre positivos. Isso garante que um aumento do valor da propriedade ϕ transportada por difusão nos pontos nodais vizinhos provoque um aumento de ϕ no ponto nodal central.

No exemplo desenvolvido nessa lista, a propriedade transportada é a temperatura. Na discretização para a difusão os coeficientes são:

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_E} \quad e \quad a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w}$$

Como k é uma propriedade física e δx uma propriedade geométrica, os coeficientes a_W e a_E são inerentemente positivos.

Regra #3 - Valor Negativo do coeficiente angular do Termo-Fonte ($S_P \leq 0$)

Quando o termo-fonte é linearizado como $S_u + S_P \cdot T_P$, o coeficiente S_P deve ser negativo para respeitar a regra #2.

O coeficiente do ponto nodal central está definido como:

$$a_P = a_W + a_E - S_P$$

Um S_P for positivo poderia levar a um a_P negativo, violando a regra #2.