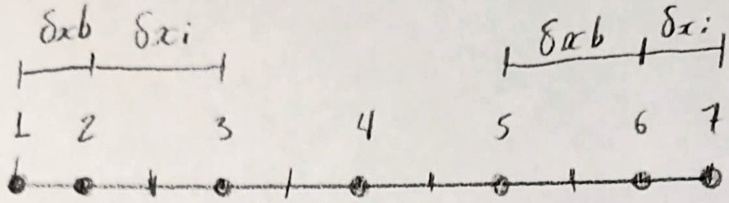
PMT07 - Lista de Exercícios 4

João Gabriel Clarindo

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dT}{dx}\right) = 0$$ Condução 1D em RP sem geração

Prática 3.



5 Volumes de controle

7 Pontos nodais

$T(0) = 150°C$

$T(x = 1\,m) = 50°C$

Pontos nodais internos: #3, #4 e 5#

$$\left(k \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(k \frac{dT}{dx}\right)_w = 0$$

$$k_e \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} - k_w \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} = 0$$

Sabendo que $k_e = k_w$ (k constante) e $\delta x_e = \delta x_w$ (malha uniforme)

$$\frac{k}{\delta x} \cdot T_E - \frac{k}{\delta x} T_P - \frac{k}{\delta x} \cdot T_P + \frac{k}{\delta x} \cdot T_W = 0$$

$$\frac{2k}{\delta x} T_P - \frac{k}{\delta x} \cdot T_E - \frac{k}{\delta x} T_W = 0$$

$$\Rightarrow a_P \cdot T_P + a_E \cdot T_E + a_W \cdot T_W$$

onde:

$$a_E = a_W = \frac{k}{\delta x} \quad \text{e} \quad a_P = a_W + a_E$$

Pontos nodais

#3 $a_3 \cdot T_3 = a_4 T_4 + a_2 T_2$

#4 $a_4 \cdot T_4 = a_5 \cdot T_5 + a_3 \cdot T_3$

#5 $a_5 \cdot T_5 = a_6 \cdot T_6 + a_4 \cdot T_4$

Parâmetros do problema

$$\begin{cases} k = 25 \ W/mK \\ \delta x = 0,2 \end{cases}$$

Substituindo os valores nas equações:

#3 $250 \cdot T_3 = 125 \cdot T_4 + 125 \cdot T_2$

#4 $250 \, T_4 = 125 \, T_5 + 125 \, T_3$

#5 $250 \, T_5 = 125 \, T_6 + 125 \, T_4$

Pontos de Fronteira:

- $x = 0$: extremidade esquerda (Dirichlet)

$$\left(k \cdot \frac{dT}{dx}\right)_i - \left(k \frac{dT}{dx}\right)_b = 0$$

$$k_i \frac{(T_3 - T_2)}{\delta x_i} - k_b \frac{(T_2 - T_1)}{\delta x_b} = 0$$

$$\frac{k_i}{\delta x_i} \cdot T_3 - \frac{k_i}{\delta x_i} \cdot T_2 - \frac{k_b}{\delta x_b} T_2 + \frac{k_b}{\delta x_b} \cdot T_1 = 0$$

Sendo $\frac{\delta x_i}{2} = \delta x b$ e $h_i = h_b$

$$\left(\frac{h}{\delta x} + \frac{h}{\left(\frac{\delta x}{2}\right)}\right) \cdot T_2 = \frac{h}{\delta x} T_3 + \frac{h}{\left(\frac{\delta x}{2}\right)} \cdot T_1 = 0$$

Utilizando o 2º Enfoque:

$$a_p \cdot T_p = a_E T_E + b$$

$$a_2 \cdot T_2 = a_3 \cdot T_3 + b$$

onde:

$$a_3 = \frac{h}{\delta x} \quad , \quad a_2 = a_3 + \frac{h}{\left(\frac{\delta x}{2}\right)} \quad e \quad b = \frac{h}{\left(\frac{\delta x}{2}\right)} \cdot T_1$$

Substituindo os valores de h e δx:

#2 $375 \cdot T_2 = 125 \cdot T_3 + 37\,500$

Extremidade da direita ($x = L$)

$a_6 T_6 = a_5 T_5 + b$ onde:

$$a_6 = a_5 + \frac{h}{\left(\frac{\delta x}{2}\right)} \quad , \quad a_5 = \frac{h}{\delta x} \quad e \quad b = \frac{h}{\left(\frac{\delta x}{2}\right)} \cdot T_7$$

#6 $375 \cdot T_6 = 125 \cdot T_5 + 12\,500$

Sistema linear de equações algébricas

$$\begin{array}{l} \#2 \\ \#3 \\ \#4 \\ \#5 \\ \#6 \end{array} \begin{cases} 375 \cdot T_2 = 125 \cdot T_3 + 37500 \\ 250 \cdot T_3 = 125 \cdot T_4 + 125 \cdot T_2 \\ 250 \cdot T_4 = 125 \cdot T_5 + 125 \cdot T_3 \\ 250 \cdot T_5 = 125 \cdot T_6 + 125 \cdot T_4 \\ 375 \cdot T_6 = 125 \cdot T_5 + 12\,500 \end{cases}$$

Forma Matricial

$[A] \cdot [T] = [B]$

$$\begin{bmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37\,500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12\,500 \end{bmatrix}$$

Solução do sistema

↳ Algoritmo TDMA

Passo 1: Calcular P_2 e Q_2

$$P_2 = \frac{b_2}{a_2} = \frac{125}{375} = \frac{1}{3}$$

$$Q_2 = \frac{d_2}{a_2} = \frac{37500}{375} = 100$$

Passo 2: Calcular os pares (P_i, Q_i) com: de 3 a $(N-1)$:

$$P_3 = \frac{b_3}{a_3 - c_3 \cdot P_2} = \frac{125}{250 - 125\left(\frac{1}{3}\right)} = 0,6$$

$$Q_3 = \frac{d_3 + c_3 \cdot Q_2}{a_3 - c_3 \cdot P_2} = \frac{0 + 125 \cdot 100}{250 - 125 \cdot 0,\frac{1}{3}} = 60$$

$$P_4 = \frac{b_4}{a_4 - c_4 \cdot P_3} = \frac{125}{250 - 125 \cdot 0,6} = 0,714$$

$$Q_4 = \frac{d_4 + c_4 \cdot Q_3}{a_4 - c_4 \cdot P_3} = \frac{0 + 125 \cdot 60}{250 - 125 \cdot 0,6} = 42,857$$

$$P_5 = \frac{b_5}{a_5 - c_5 \cdot P_4} = \frac{125}{250 - 125 \cdot 0,714} = 0,778$$

$$Q_5 = \frac{d_5 + c_5 \cdot Q_4}{a_5 - c_5 \cdot P_4} = \frac{0 + 125 \cdot 42,857}{250 - 125 \cdot 0,714} = 33,326$$

$$P_6 = \frac{b_6}{a_6 - c_6 \cdot P_5} = 0$$

$$Q_6 = \frac{d_6 + c_6 \cdot Q_5}{a_6 - c_6 \cdot P_5} = \frac{12\,500 + 0 \cdot 33{,}326}{375 - 0 \cdot 0{,}778} = 60$$

Passo 3:

$T_6 = Q_6 = 60°C$

Passo 4:

$T_5 = P_5 \cdot T_6 + Q_5 \Rightarrow T_5 = 80°C$

$T_4 = P_4 \cdot T_5 + Q_4 \Rightarrow T_4 = 100°C$

$T_3 = P_3 \cdot T_4 + Q_3 \Rightarrow T_3 = 120°C$

$T_2 = T_2 \cdot T_3 + Q_2 \Rightarrow T_2 = 140°C$