João Gabriel Clarindo

PMT07 - Lista de Exercícios 5

Demonstre que o esquema Crank-Nicolson ($f = 1/2$) possui uma limitação para o intervalo de tempo que garante a convergência.

Forma Geral da Equação discretizada para conservação de calor em regime transiente:

$$a_P \cdot T_P = a_E \left[f \cdot T_E + (1-f) \cdot T_E^0 \right] + a_W \cdot \left[f \cdot T_W + (1-f) \cdot T_W^0 \right] +$$
$$+ \left[a_P^0 - (1-f)(a_E + a_W - S_P \cdot \Delta x) \right] \cdot T_P^0 + S_C \Delta x$$

Onde:

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} \qquad a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w} \qquad a_P^0 = \rho \cdot C_P \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$a_P = f(a_E + a_W - S_P \cdot \Delta x) + a_P^0$$

Substituindo $f = 1/2$ na equação geral:

$$a_P \cdot T_P = a_E \left[\frac{1}{2} \cdot T_E + \frac{1}{2} \cdot T_E^0 \right] + a_W \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot T_W + \frac{1}{2} \cdot T_W^0 \right] +$$
$$+ \left[a_P^0 - \frac{1}{2} \cdot (a_E + a_W - S_P \cdot \Delta x) \right] \cdot T_P^0 + S_C \cdot \Delta x$$

onde $a_P = \frac{1}{2}(a_E + a_W - S_P \Delta x) + a_P^0$

O coeficiente que multiplica T_P^0 não pode ser negativo, ou seja:

$$a_P^0 - \frac{1}{2}(a_E + a_W - S_P \cdot \Delta x) \geq 0$$

Onde: $a_P^0 = \frac{\rho \cdot c_p \cdot \Delta x}{\Delta t}$

Considerando uma grade uniforme com h constante:

$$a_E = a_W = \frac{h}{\Delta x}$$

Substituindo os valores de a_P, a_E e a_W na desigualdade:

$$\frac{\rho \cdot C_p \cdot \Delta x}{\Delta t} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\Delta x} + \frac{h}{\Delta x} - S_p \cdot \Delta x\right) \geq 0$$

Rearranjando:

$$2 \cdot \frac{\rho \cdot C_p \cdot \Delta x}{\Delta t} \geq \frac{2h}{\Delta x} - S_p \cdot \Delta x$$

Multiplicando ambos os lados por Δx:

$$\frac{2 \cdot \rho \cdot C_p \cdot \Delta x^2}{\Delta t} \geq 2h - S_p \cdot \Delta x^2$$

Isolando Δt, obtém-se o critério de convergência para $f = \frac{1}{2}$:

$$\Delta t \leq \frac{2 \cdot \rho \cdot C_p \cdot \Delta x^2}{2h - S_p \cdot \Delta x^2}$$