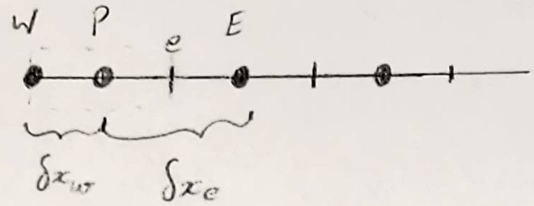
PMT07 - Lista de exercícios 6

João Gabriel Clarinde - 1907689



Condição de Neumann na fronteira esquerda $(x=0)$

$$\rho c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + S$$

Integrando sobre o VC e sobre o intervalo de tempo Δt:

$$\int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e S \, dx \, dt$$

Termo transiente:

Assumindo $\rho \cdot c_p$ constante e temperatura uniforme no VC:

$$\rho \cdot c_p \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} \, dt \, dx = \rho \cdot c_p (T_P - T_P^0)$$

Termo difusivo:

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\,dt = \int_t^{t+\Delta t}\left[\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e - \left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right]\cdot dt$$

Sabendo que, de acordo com a lei de Fourier:

$$\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = -q''_b \quad --- \quad \text{(Condisão de contorno)}$$

Aproximando o termo difusivo em e através de um perfil linear e substituindo a condição de contorno:

$$\int_t^{t+\Delta t}\left[k_e\frac{(T_E - T_P)}{\delta x_e} + q''_b\right]dt =$$

A Integral de T no tempo é considerada:

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P\,dt = \left[f\cdot T_P + (1-f)\cdot T_P^0\right]\cdot\Delta t$$

Considerando o esquema totalmente implícito $(f=1)$:

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P\cdot dt = T_P\cdot\Delta t$$

Resolvendo a integral do termo difusivo considerando k e q''_b constantes no tempo:

$$\int_t^{t+\Delta t}\left[k_e\frac{(T_E - T_P)}{\delta x_e} + q''_b\right] = \underline{\frac{k_e}{\delta x_e}T_E\cdot\Delta t - \frac{k_e}{\delta x_e}\cdot T_P\cdot\Delta t + q''_b\cdot\Delta t}$$

Termo Fonte:

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e S\,dx\,dt = \int_t^{t+\Delta t} (S_c + S_p \cdot T_P)\,\Delta x \cdot dt$$

para um esquema totalmente implícito:

$$\int_t^{t+\Delta t} (S_c + S_p T_P)\,\Delta x \cdot dt = \underline{\{S_c + S_p \cdot [T_P]\}\,\Delta x\,\Delta t}$$

Agrupando os termos:

$$\rho c_p (T_p - T_p^0) = \frac{k_e}{\delta x_e} \cdot T_E\,\Delta t - \frac{k_e}{\delta x} T_P \cdot \Delta t + q_b'' \cdot \Delta t + (S_c + S_p \cdot T_P)\,\Delta x \cdot \Delta t$$

Rearranjando:

$$\frac{\rho c_p}{\Delta t} \cdot T_p - S_p \cdot \Delta x\, T_P + \frac{k_e}{\delta x_e} \cdot T_P = \frac{k_e}{\delta x_e} \cdot T_E + q_b'' + S_c \cdot \Delta x + \frac{\rho \cdot c_p}{\Delta t} \cdot T_P^0$$

Forma geral (Segundo Enfoque):

$$a_P \cdot T_P = a_E \cdot T_E + a_P^0 \cdot T_P^0 + b$$

$$a_P = a_E - S_p \cdot \Delta x + a_P^0$$

$$a_E = \frac{k_e}{\delta x_e}$$

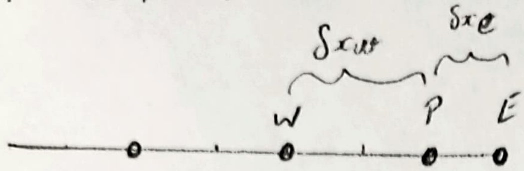
$$a_P^0 = \frac{\rho \cdot c_p^0}{\Delta t}$$

$$b = S_c \cdot \Delta x + q_b''$$

Considerando as condições de contorno ($q_b'' = 0$, $S_c = 0$ e $S_p = 0$)

$b = 0$

Na fronteira direita ($x=L$):



Para o esquema totalmente implícito:

$$a_P \cdot T_P = a_E \cdot T_E + a_W \cdot T_W + b$$

onde:

$$a_W = \frac{k_w}{\delta x_w} \qquad a_E = \frac{k_e}{\delta x_e} \qquad a_P^0 = \frac{\rho \cdot C_p \cdot \Delta x}{\Delta t}$$

$$a_P = a_E + a_W - S_P \cdot \Delta x + a_P^0$$

$$b = a_P^0 \cdot T_P^0 + S_C \cdot \Delta x$$

Condição de Dirichlet utilizando o segundo enfoque:

$$a_P \cdot T_P = a_W \cdot T_W + b$$

$$a_P = \frac{k_e}{\delta x_e} + a_W - S_P \cdot \Delta x + a_P^0$$

$$a_W = \frac{k_w}{\delta x_w} \qquad a_P^0 = \frac{\rho \cdot C_p \cdot \Delta x}{\Delta t}$$

$$b = a_P^0 \cdot T_P^0 + S_C \cdot \Delta x + \frac{k_e}{\delta x_e} \cdot T_E$$