Sistema Massa-Mola Composto

Amadeus Mazzini, João Gabriel
UFPR - Cálculo Numérico
amadeus.mazzini@ufpr.br
joaobotelho@ufpr.br

RESUMO

Esse artigo apresenta uma simulação, discusão e análise teórica do Sistema Massa-Mola Composto, realizado para disciplina de Cálculo Numérico. Utilizando um modelo de equação diferencial ordinária (problema de valor inicial) e aplicando o método de Runge-Kutta de ordem 4 para analisar o movimento e comportamentos de forma simples, com amortecimento, sem linearidade e com atrito, exibindo pontos e entradas específicas que demonstrem diferenças de comportamento e conclusões interessantes sobre sistemas.

PALAVRAS CHAVE. Massa-mola, PVI, Runge-Kutta.

1. Introdução

O sistema Massa-Mola Composto é formado por dois blocos e duas molas, da forma que uma Mola 1 é ligada a uma parede em sua extremidade esquerda e a um Bloco 1 em sua extremidade direita. Uma segunda Mola 2 é ligada ao Bloco 1 e a um outro Bloco 2, e o sistema pode ser esquematizado na figura abaixo.

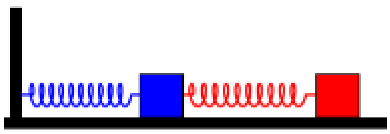


Figura 1: Sistema Massa-Mola Composto

Iremos simular e observar alguns aspectos desta dinâmica. Se quiser testar por conta própria o comportamento do sistema, vá até o seguinte repositório do GitHub: `github.com/JoaoGabriel27/Double-Spring`, lá é apresentado o código em Linguagem Julia para a simulação numérica.

2. Fundamentação teórica

2.1. Método de Runge-Kutta

Os métodos de Runge–Kutta [6] formam uma família importante de metódos iterativos para a resolução numérica (aproximação) de soluções de equações diferenciais ordinárias. Para este artigo iremos utilizar um membro da família de métodos Runge–Kutta que costuma receber o nome de "RK4"ou simplesmente "o método Runge–Kutta". Seja um problema de valor inicial (PVI) especificado como segue:

$$y'(t) = f(t, y)$$

$$y(t_0) = y_0$$

Então o método RK4 para este problema é dado pelas seguintes equações:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$

Onde t_{n+1} é a aproximação por RK4 de $y(t_{n+1})$ e

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$
$$k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$
$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

Então, o próximo valor y_{n+1} é determinado pelo valor atual y_n somado com o produto do tamanho do intervalo h e uma inclinação estimada. A inclinação é uma média ponderada de inclinações:

- k_1 é a inclinação no início do intervalo;
- k_2 é a inclinação no ponto médio do intervalo, usando a inclinação k_1 para determinar o valor de y no ponto $t_n + \frac{h}{2}$ através do método de Euler;
- k_3 é novamente a inclinação no ponto médio do intervalo, mas agora usando a inclinação k_2 para determinar o valor de y;
- k_4 é a inclinação no final do intervalo, com seu valor y determinado usando k_3.

Ao fazer a média das quatro inclinações, um peso maior é dado para as inclinações no ponto médio:

Inclinação = $\frac{k_1+2k_2+2k_3+k_4}{6}$

O método RK4 é um método de quarta ordem, significando que o erro por passo é da ordem de h^5, enquanto o erro total acumulado tem ordem h^4.

Note que as fórmulas acima são válidas tanto para funções escalares quanto para funções vetoriais (ou seja, quando y pode ser um vetor e f um operador).

2.2. Lei de Hooke em Sistema Massa-Mola Simples

A lei de Hooke [1] descreve a força restauradora da mola. De acordo com essa lei, quando uma força é aplicada sobre uma mola, ela é capaz de deforma-la, consequentemente, a mola produz uma força contrária à força externa, chamada de força elástica. Essa força torna-se maior de acordo com a deformação da mola. Veja a fórmula utilizada para o cálculo da força elástica em um sistema simples Massa-Mola:

$$F_{el} = -kL$$

F_{el} = Força Elástica
k = Constante Elástica
L = Deformação da Mola

2.3. Lei de Hooke em Sistema Massa-Mola Duplo

Considerando o sistema apresentado na Figura 1 iremos iniciar um processo [4] para adquirir um par de equações diferenciais de segunda orderm. Considerando as seguintes váriaveis:

Valores referentes aos Blocos 1 e 2 respectivamente:

x_1,x_2 = Posição do Bloco
v_1,v_2 = Velocidade do Bloco
F_1,F_2 = Força aplicada sobre o Bloco
m_1,m_2 = Massa do Bloco
w_1,w_2 = Comprimento do Bloco
μ_1,μ_2 = Coefientes de atrito

Valores referentes as Molas 1 e 2 respectivamente:

L_1,L_2 = Deformação da Mola
k_1,k_2 = Constante Elástica da Mola
R_1,R_2 = Comprimento de descanço da Mola
δ_1,δ_2 = Coeficientes de amortecimento
β_1 e γ_1, β_2 e γ_2 = Coeficientes de Não-Linearidade.

As Forças aplicadas sobre os blocos são:

$$F_1 = -k_1L_1 + k_2L_2$$

$$F_2 = -k_2L_2$$

A deformação da mola é medida baseada na posição dos blocos:

$$L_1 = x_1 - R_1$$

$$L_2 = x_2 - x_1 - w_1 - R_2$$

Se assumirmos que não há forças de amortecimento presentes, então a Lei de Newton implica que as duas equações que representam os movimentos dos dois pesos são:

- $m_1x_1'' = -k_1(x_1 - R_1) + k_2(x_2 - x_1 - w_1 - R_2)$ **(1)**
- $m_2x_2'' = -k_2((x_2 - x_1 - w_1 - R_2))$ **(2)**

Assim, temos um par de equações diferenciais lineares de segunda ordem acopladas.

2.4. Colisões Elásticas em uma Dimensão

Eventualmente, para determinados valores selecionados, ocorrerá o choque entre os dois blocos. Considerando isso, o modelo partirá do presuposto que as colisões serão elásticas [3], ou seja, a energia cinética total do sistema será conservada. Sabendo disso, se dois blocos estão envolvidos em uma colisão elástica, a velocidade do primeiro será dada por:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_2 + m_1}v_{2i}$$

E a do segundo por:

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_2 + m_1} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v_{2i}$$

3. Metodologia e Análise

3.1. Modelo Linear Simples

Primeiramente consideraremos o modelo Linear Simples, ou seja, as deformações sofridas são diretamente proporcionais à força a que ela é submetida. Neste caso ela obedece a Lei de Hooke. Logo, para aplicar o método de Runge-Kutta e adquirir uma solução numérica da equação diferencial, é necessário converter as equações de segunda ordem apresentadas anteriormente em um conjunto de equações de primeira ordem. Definimos variáveis para as velocidades v_1, v_2. Então, existem quatro variáveis x_1, x_2, v_1, v_2 e uma equação diferencial de primeira ordem para cada uma:

$$x_1' = v_1$$

$$x_2' = v_2$$

$$v_1' = -\frac{k_1}{m_1}(x_1 - R_1) + \frac{k_2}{m_1}(x_2 - x_1 - w_1 - R_2)$$

$$v_2' = -\frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1 - w_1 - R_2)$$

Esta é a forma necessária para aplicar Runge-Kutta de ordem 4, onde y é um vetor de funções:

$$y = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} \text{ e } y_0 = \begin{bmatrix} g_1(t_0) \\ \vdots \\ g_m(t_0) \end{bmatrix}$$

Nesse caso

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{ e } y' = \frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_1''(t) \\ x_2''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix}$$

Como no Runge-Kutta queremos termos com relação a primeira derivada, utilizaremos:

$$y' = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = f(t, y)$$

E assim basta aplicar uma resolução numérica.

3.2. Modelo Linear com Amortecimento Viscoso

Iremos introduzir no sistema uma força de amortecimento viscoso [2], que é proporcional à velocidade. O amortecimento do primeiro peso depende da própria velocidade e da velocidade relativa em relação ao segundo bloco. Já o segundo bloco só depende da velocidade relativa . O amortecimento é acrescentado somando os termos $-\delta_1 v_1 + \delta_2(v_2 - v_1)$ a equação (1) e $-\delta_2(v_2 - v_1)$ em (2) . O modelo se torna:

- $m_1 x_1'' = -\delta_1 v_1 + \delta_2(v_2 - v_1) - k_1(x_1 - R_1) + k_2(x_2 - x_1 - w_1 - R_2)$
- $m_2 x_2'' = -\delta_2(v_2 - v_1) - k_2(x_2 - x_1 - w_1 - R_2)$

Logo as quatro relacões apresentadas no Modelo Simples se tornam:

$$x_1' = v_1$$
$$x_2' = v_2$$
$$v_1' = \frac{-\delta_1}{m_1} v_1 + \frac{\delta_2}{m_1}(v_2 - v_1) - \frac{k_1}{m_1}(x_1 - R_1) + \frac{k_2}{m_1}(x_2 - x_1 - w_1 - R_2)$$
$$v_2' = \frac{-\delta_2}{m_2}(v_2 - v_1) - \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1 - w_1 - R_2)$$

E o processo para solução numérica é o mesmo.

3.3. Modelo Linear com Atrito

Agora introduzimos no sistema o atrito que é uma força que se opõe ao movimento de objetos que estão sob a ação de uma força. Ela age paralelamente à superfície de contato e em sentido contrário à força aplicada sobre o bloco. O atrito é acrescentado multiplicando o sinal de v_1 na expressão $(-\mu_1 \cdot m_1 \cdot g)$ e somando a equação (1) e semelhantemente, multiplicando o sinal de v_2 na expressão $(-\mu_2 \cdot m_2 \cdot g)$ e somando em (2) Logo as quatro relações tornam-se:

$$x_1' = v_1$$
$$x_2' = v_2$$
$$v_1' = \begin{cases} -\mu_1 g - \frac{k_1}{m_1}(x_1 - R_1) + \frac{k_2}{m_1}(x_2 - x_1 - w_1 - R_2), & \text{se } v_1 \text{ é positivo} \\ \mu_1 g - \frac{k_1}{m_1}(x_1 - R_1) + \frac{k_2}{m_1}(x_2 - x_1 - w_1 - R_2), & \text{se } v_1 \text{ é negativo} \end{cases}$$
$$v_2' = \begin{cases} -\mu_2 g - \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1 - w_1 - R_2), & \text{se } v_2 \text{ é positivo} \\ \mu_2 g - \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1 - w_1 - R_2), & \text{se } v_2 \text{ é negativo} \end{cases}$$

Agora basta aplicar a solução numérica.

3.4. Modelo Sem Linearidade

Os resultados de uma simulação não linear serão mais fiéis a realidade, porque é assim que o mundo funciona. A análise linear é usada, em geral, pela sua simplicidade e rapidez. Se considerarmos que as forças de restauração não são lineares, ou seja, as molas apresentam diferentes valores de k dependendo da força aplicada, devemos modificar o modelo da forma que a força restauradora não seja da forma $-kx$ (Lei de Hooke). Utilizaremos como referência a equação de Duffin [5], que é uma equação diferencial não linear de segunda ordem usada em modelos oscilatórios amortecidos como o apresentado nesse artigo. A equação é dada por:

$$x'' + \beta x' + \alpha x + \gamma x^3 = \lambda \cos(\omega t)$$

$$\text{Onde } \alpha x = kL \quad \text{e} \quad \lambda \cos(\omega t) = \text{Força Externa} = 0$$

A equação descreve o movimento amortecido do oscilador com um potencial mais complexo do que um simples oscilador harmônico (que corresponde ao caso onde $\beta = \gamma = 0$) e é um exemplo de um sistema dinâmico que exibe um comportamento caótico. Logo, a não linearidade será aplicada adicionando constantes fornecidas $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ ao sistema, onde a expressão $\beta_1 v_1 + \beta_2(v_2 - v_1) + \gamma_1(x_1 - R_1)^3 + \gamma_2(x_2 - x_1 - w_1 - R_2)^3$ será somada a equação (1) e $-\beta_2(v_2 - v_1) + \gamma_2(x_2 - x_1 - w_1 - R_2)^3$ somado a equação (2), logo o modelo torna-se:

$$x_1' = v_1$$

$$x_2' = v_2$$

$$v_1' = -\frac{\beta_1}{m_1} v_1 + \frac{\beta_2}{m_1}(v_2 - v_1) - \frac{k_1}{m_1}(x_1 - R_1) + \frac{\gamma_1}{m_1}(x_1 - R_1)^3 + \frac{k_2}{m_1}(x_2 - x_1 - w_1 - R_2) - \frac{\gamma_2}{m_1}(x_2 - x_1 - w_1 - R_2)^3$$

$$v_2' = -\frac{\beta_2}{m_2}(v_2 - v_1) - \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1 - w_1 - R_2) + \frac{\gamma_2}{m_2}(x_2 - x_1 - w_1 - R_2)^3$$

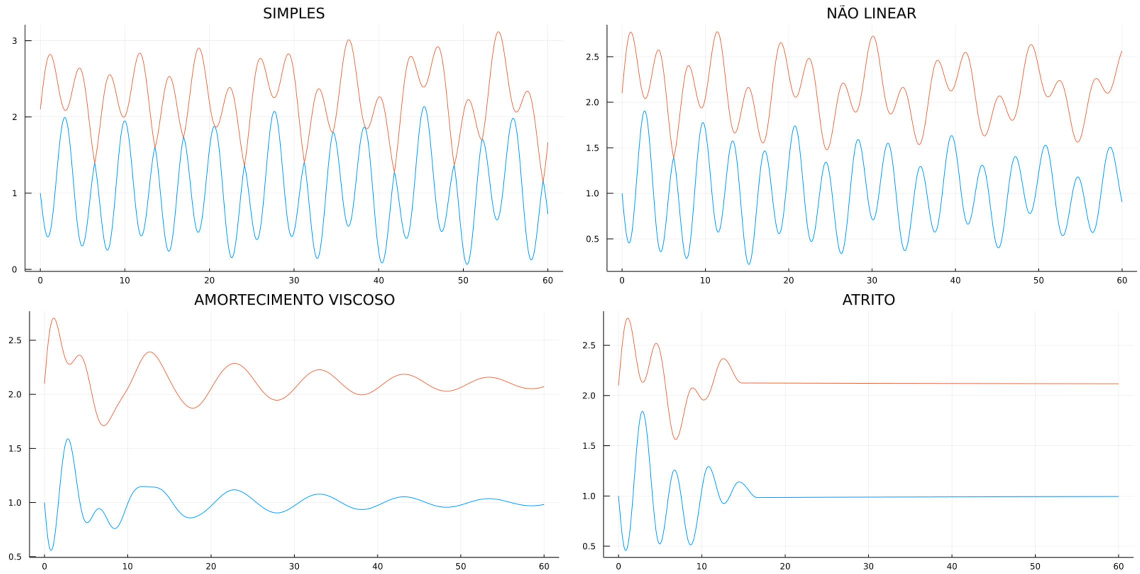
Basta aplicar a solução numérica.

3.5. Comparações de Valores

Os gráficos das posições em função do tempo dos diferentes sistemas serão apresentados em dois casos com $5 \cdot 10^3$ iterações, cada um usando o mesmo conjunto de variáveis, para que assim, as notórias diferenças sejam expostas e comparadas.

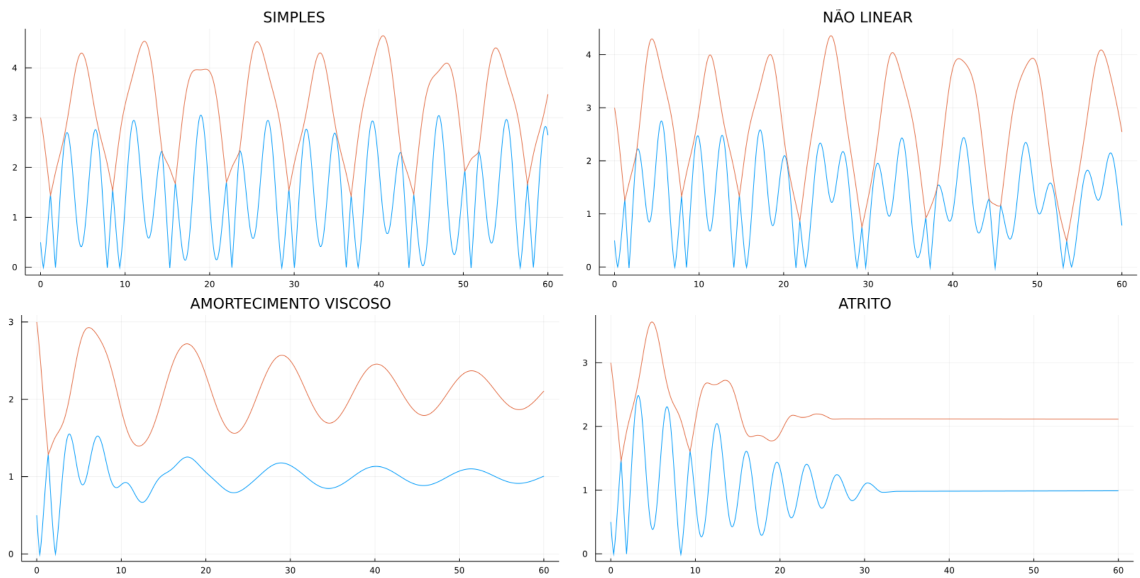
Caso 1

	Bloco 1	Bloco 2
m	1	1
k	1.0	1.0
v_0	-1	1
x_0	1.0	2.1
w	0.1	0.1
R	1	1
δ	0.2	0.2
μ	0.01	0.01
β	0.009	0.009
γ	$-1/6$	$-1/6$



Caso 2

	Bloco 1	Bloco 2
m	1	2
k	2.0	1.0
v_0	-2	-1
x_0	0.5	3
w	0.1	0.1
R	1	1
δ	0.2	0.2
μ	0.01	0.01
β	0.009	0.009
γ	$-1/6$	$-1/6$



É possivel observar que no momento das colisões , os blocos não colidem exatamente no mesmo ponto do gráfico. Isso se deve ao fato de que o método de Runge-Kutta é uma aproximação numérica. É possível observar que aumentando o número de iterações, melhor a aproximação fica. Note que o modelo pode chegar a ter o comportamento alterado significativamente dependendo do número N de iterações.

	Bloco 1	Bloco 2
m	1	1
k	2.0	2.0
v_0	3	-3
x_0	1	2.1
w	0.1	0.1

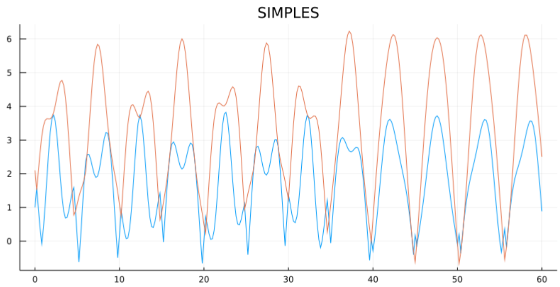


Figura 2: N=300

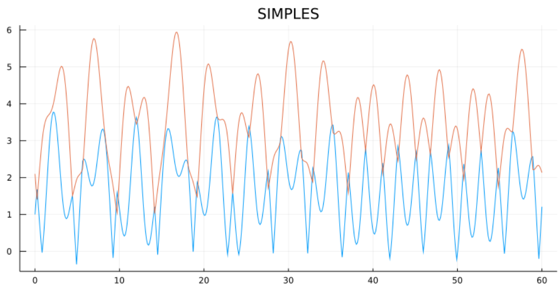


Figura 3: N=500

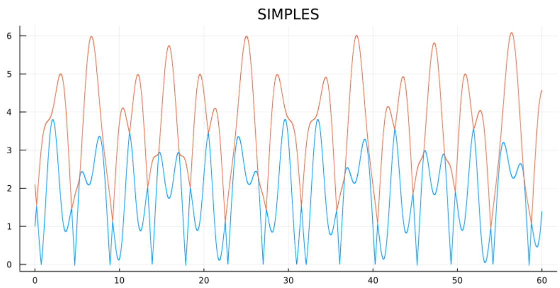


Figura 4: N=10^6

4. Considerações finais

O estudo do comportamento dos blocos depende de vários fatores que modificam drásticamente o modo que o sistema opera. Acessando o link do GitHub: `https://github.com/JoaoGabriel27/Double-Spring` é possivel alterar os valores das variáveis no código em Julia e experimentar infinitas possibilidades, assim como analisar GIFs do movimento e gráficos do movimento em função do tempo como os apresentados previamente, assim como novos gráficos de Movimento $\times$ Movimento como o abaixo.

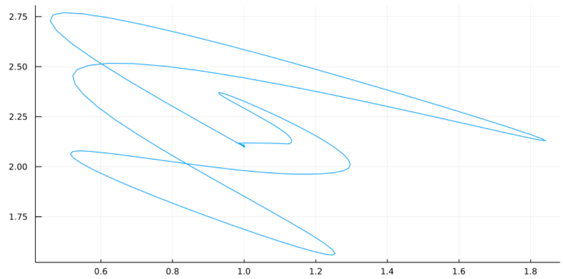


Figura 5: Gráfico Movimento x Movimento com Atrito

Dessa forma é possivel modificar o sistema e o método de análise da forma que for necessário.

Referências

[1] ESCOLA, B. Lei de hooke. `https://brasilescola.uol.com.br/fisica/lei-de-hooke.htm`. Acessado: 19/06/2021.

[2] FAY, T. H. (2003). Coupled spring equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34:65–79.

[3] LUMEN. Collisions. `https://courses.lumenlearning.com/boundless-physics/chapter/collisions/`. Acessado: 26/06/2021.

[4] Neumann, E. (2001). Double spring. `https://www.myphysicslab.com/springs/double-spring-en.html`. Acessado: 19/06/2021.

[5] WIKIPEDIA (2021). Duffing equation. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Duffing_equation&oldid=1010312640`. Acessado: 21/06/2021.

[6] WIKIPEDIA (2021). Método de runge-kutta. `https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta&oldid=60174960`. Acessado: 19/06/2021.