NOTAS DE AULA

Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Prof. Dr. Antonio Carlos Schneider Beck Filho (UFSM)
Prof. Dr. Júlio Carlos Balzano de Mattos (UFPel)

Sistemas de Numeração

Os dados encontrados nos sistemas digitais podem ser classificados em uma das seguintes categorias:

- números usados em cálculos aritméticos;
- letras do alfabeto, usadas no processamento de dados;
- símbolos discretos usados para diversos propósitos.

Todos os dados são representados no formato BINÁRIO porque o uso deste formato facilita o projeto de circuitos eletrônicos.

REPRESENTAÇÃO POSICIONAL

Na notação posicional o valor de um algarismo é determinado pela sua posição dentro do número.

Cada posição possui um determinado peso:

$$1999 = 1x1000 + 9x100 + 9x10 + 9x1$$
$$1x10^3 + 9x10^2 + 9x10^1 + 9x10^0$$

Os sistemas atuais formam os números pela seguinte fórmula:

$$a = \sum_{i=-m}^{n} \left(x_i \quad B^i\right)$$

B → representa a base do sistema de numeração $B \geq 2$
a → representa o número
x_i → representam os algarismos $(0 \leq x_i \leq B)$
n → representa o número de posições utilizadas

Exemplo: B = 10 → sistema decimal.

O algarismo x_i tem peso B^i, determinado pela sua posição. Para i com valores positivos, têm-se pesos maiores que a unidade. Para i = 0, têm-se exatamente o peso unitário (B_0 = 1).

Para valores negativos de i, têm-se pesos menores que a unidade (fracionárias).

Dígito (algarismo) mais à esquerda – dígito **mais** significativo.

Dígito (algarismo) mais à direita – dígito **menos** significativo.

Exemplo:

+ significativo ←――――――――→ **- significativo**

1999

NÚMEROS BINÁRIOS

O sistema de números binários é um sistema que possui a base 2 com dois dígitos 0 e 1.

$0_2 = 0_{10}$

$$\overset{4}{1}\;\overset{3}{1}\;\overset{2}{0}\;\overset{1}{1}\;\overset{0}{0}_2 \quad = \quad 1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 0x2^0 = 26_{10}$$

$1_2 = 1_{10}$

$10_2 = 2_{10}$

DECIMAL	BINÁRIO
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000
17	10001
18	10010
19	10011
20	10100
21	10101
22	10110
23	10111
24	11000
25	11001
26	11010
27	11011
28	11100
29	11101
30	11110
31	11111

CONVERSÃO ENTRE BINÁRIO E DECIMAL/DECIMAL E BINÁRIO

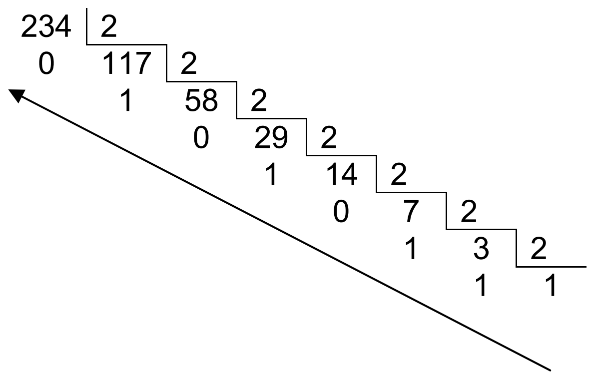
BINÁRIO para DECIMAL

$$\overset{4}{1}\overset{3}{0}\overset{2}{0}\overset{1}{1}\overset{0}{1}_2$$

$10011_2 = 2^4x1 + 2^3x0 + 2^2x0 + 2^1x1 + 2^0x1 = 19_{10}$

DECIMAL para BINÁRIO

$234_{10} = 11101010_2$



SOMA E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS BINÁRIOS

O procedimento para adição e subtração de números binários é semelhante ao que se usa para números decimais.

9 + 1 = 10 (vai-um)

10 – 9 = 9 (vem-um)

SOMA

Para a soma de dois números basta usar as seguintes regras:

0 + 0 = 0
0 + 1 =1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 0 e vai-um
1 + 1 + 1 = 1 e vai-um

Exemplo:

$1001_2 + 1011_2 = 10100_2$

```
  1001
+ 1011
 10100
```

SUBTRAÇÃO

Para a subtrair de dois números basta usar as seguintes regras:

0-0=0
0-1=1 e vem-um
1-0=1
1-1=0

Exemplo:

$1010_2 – 110_2 = 100_2$

```
  1010
-  110
   100
```

$11100_2 – 1010_2 = 10010_2$

```
 11100
- 1010
 10010
```

Exercícios:

1. Faça as seguintes operações matemáticas e conversões abaixo:
   a. $100110101_2 + 11010101_2 =$
   b. $1100011_2 + 0111001_2 =$
   c. $111101111_2 + 111101111_2 =$
   d. $1000111110101101_2 + 000100111101101_2 =$
   e. $100000_2 – 1_2 =$
   f. $111010_2 – 100100_2 =$
   g. $111111111_2 – 100000000_2 =$
   h. $1110_2 = (\quad)_{10}$
   i. $111001_2 = (\quad)_{10}$
   j. $10000111_2 = (\quad)_{10}$
   k. $10111{,}010_2 = (\quad)_{10}$
   l. $107 = (\quad)_2$
   m. $26870 = (\quad)_2$
   n. $342 = (\quad)_2$
   o. $48{,}180 = (\quad)_2$

NÚMEROS OCTAIS E HEXADECIMAIS

Além do sistema decimal (base 10) e do binário (base 2), outros sistemas são de grande importância por proverem representações compactas de números grandes e se "encaixam" melhor com o sistema binário do que o sistema decimal.

- Sistema Octal (base 8)
- Sistema Hexadecimal (base 16)

SISTEMA DECIMAL – cada dígito representa um valor de 0 a 9.

SISTEMA OCTAL – cada dígito representa um valor de 0 a 7.

SISTEMA BINÁRIO – cada dígito representa um valor de 0 a 1.

SISTEMA HEXADECIMAL – cada dígito representa um valor de 0 a F(15).

Tabela com as representações dos números de 0 a 31 (decimal) em binário, octal e hexadecimal:

DECIMAL	BINÁRIO	OCTAL	HEXADECIMAL
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14
21	10101	25	15
22	10110	26	16
23	10111	27	17
24	11000	30	18
25	11001	31	19
26	11010	32	1A
27	11011	33	1B
28	11100	34	1C
29	11101	35	1D
30	11110	36	1E
31	11111	37	1F

CONVERSÃO ENTRE BASES NUMÉRICAS

(Método da Substituição Direta)

BINÁRIO para OCTAL

Para converter um número binário em octal, separam-se os dígitos em grupos de 3 (três).

$$\underbrace{001}_{1}\underbrace{010}_{2}\underbrace{011}_{3}\underbrace{100}_{4} = 1234_8$$

$$2^3 = 8$$

OCTAL para BINÁRIO

$$\underbrace{7}_{111}\underbrace{6}_{110}\underbrace{5}_{101} = 111110101_2$$

BINÁRIO para HEXADECIMAL

$$\underbrace{0010}_{2}\underbrace{1001}_{9}\underbrace{1100}_{C} = 29C_{16}$$

$$2^4 = 16$$

HEXADECIMAL para BINÁRIO

$$FED_{16} = 1111\ 1110\ 1101_2$$
$$FE1_{16} = 1111\ 1110\ 0001_2$$

OCTAL para HEXADECIMAL

- passar primeiro para binário

$$712_8 = \underbrace{0001}_{1}\underbrace{1100}_{\mathrm{C}}\underbrace{1010}_{\mathrm{A}} = 1\mathrm{CA}_{16}$$

HEXADECIMAL para OCTAL

- passar primeiro para binário

$$A1F_8 = \underbrace{101}_{5}\underbrace{000}_{0}\underbrace{011}_{3}\underbrace{111}_{7} = 5037_8$$

HEXADECIMAL para DECIMAL

$$1A6_{16} = 1X16^{2} + 10X16^{1} + 6X16^{0} = 422_{10}$$

OCTAL para DECIMAL

$$713_{8} = 7x8^{2} + 1x8^{1} + 3x8^{0} = 459_{10}$$

CONVERSÃO DE NÚMEROS DE UMA BASE B PARA BASE 10

(Método Polinomial)

$$\overset{4}{1}\overset{3}{1}\overset{2}{0}\overset{1}{0}\overset{0}{1}_2 = 1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 0x1^0{}_{10} = 25_{10}$$

ou

$$2^4 + 2^3 + 2^0 = 25_{10}$$

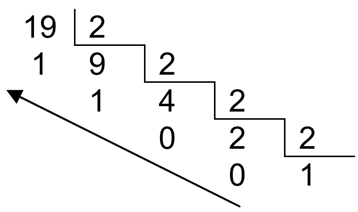
$$\overset{2}{3}\overset{1}{1}\overset{0}{2}_4 = 3x4^2 + 1x4^1 + 2x4^0 = 54_{10}$$

$$\overset{3}{F}\,\overset{2}{A}\overset{1}{C}\,\overset{0}{A}_{16} = 15x16^3 + 10x16^2 + 12x16^1 + 10x16^0 = 64202_{10}$$

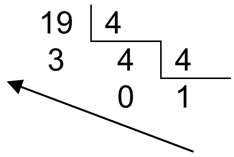
CONVERSÃO DE UM NÚMERO DE BASE 10 PARA UMA BASE B QUALQUER

(Método das Divisões Sucessivas)

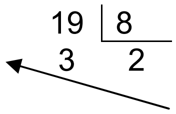
$19_{10} = 10011_2$



$19_{10} = 103_4$



$19_{10} = 23_8$



CONVERSÃO ENTRE DUAS BASES QUAISQUER

B	$\rightarrow$	10	$\rightarrow$	B
Base qualquer		Base 10		Base qualquer

EXERCÍCIOS:

Converta os seguintes números para as bases indicadas:

1. 101110110_2 = ___________________$_{10}$
2. 1056_8 = ___________________$_{10}$
3. $FDE6_{16}$ = ___________________$_{10}$
4. 1056_8 = ___________________$_{2}$
5. 1111101011_2 = ___________________$_{8}$
6. 111011011_2 = ___________________$_{16}$
7. 7663_8 = ___________________$_{16}$
8. $FA1_{16}$ = ___________________$_{2}$
9. $123D_{16}$ = ___________________$_{8}$
10. 156_{10} = ___________________$_{2}$
11. 876_{10} = ___________________$_{8}$
12. 9874_{10} = ___________________$_{16}$
13. 111_{10} = ___________________$_{4}$
14. 1453_{10} = ___________________$_{16}$
15. 111110011_2 = ___________________$_{16}$
16. 1111110_2 = ___________________$_{3}$
17. 16_8 = ___________________$_{2}$
18. 1022_3 = ___________________$_{10}$
19. 1677_8 = ___________________$_{5}$
20. 134_{16} = ___________________$_{2}$

EXERCÍCIOS (respostas):

Converta os seguintes números para as bases indicadas:

1. $101110110_2 = 374_{10}$
2. $1056_8 = 558_{10}$
3. $FDE6_{16} = 64998_{10}$
4. $1056_8 = 1000101110_2$
5. $1111101011_2 = 1753_8$
6. $111011011_2 = 1DB_{16}$
7. $7663_8 = FB3_{16}$
8. $FA1_{16} = 111110100001_2$
9. $123D_{16} = 11075_8$
10. $156_{10} = 10011100_2$
11. $876_{10} = 1554_8$
12. $9874_{10} = 2692_{16}$
13. $111_{10} = 1233_4$
14. $1453_{10} = 5AD_{16}$
15. $111110011_2 = 1F3_{16}$
16. $1111110_2 = 11200_3$
17. $16_8 = 1110_2$
18. $1022_3 = 35_{10}$
19. $1677_8 = 12314_5$
20. $134_{16} = 100110100_2$

CONVERSÃO DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Se o número for fracionário, a conversão se fará em duas etapas distintas, pois os algoritmos de conversão são diferentes:

- Parte Inteira: da forma que foi exposto acima (múltiplas divisões inteiras);
- Parte Fracionária: consiste de uma série de multiplicações sucessivas do número fracionário a ser convertido pela base; a parte inteira do resultado da primeira multiplicação será o valor da primeira casa fracionária e a parte fracionária será de novo multiplicada pela base; e assim por diante, até o resultado dar zero ou até chegarmos ao número de casas decimais desejado ou disponível.

Por exemplo, vamos converter $15,65_{10}$ para a base 2, com 5 e com 10 algarismos fracionários:

$$N_{10} = a_n \,.\, b^n + \dots + a_2 \,.\, b^2 + a_1 \,.\, b^1 + a_0 \,.\, b^0 + \underbrace{a_{-1} \,.\, b^{-1} + \dots + a_{-n} \,.\, b^{-n} +}_{\text{parte fracionária}}$$

B → 10

$$1001,01_2 = 1 \,.\, 2^3 + 0 \,.\, 2^2 + 0 \,.\, 2^1 + 1 \,.\, 2^0 + \underbrace{0 \,.\, 2^{-1} + 1 \,.\, 2^{-2}}_{0,25} = 9,25_{10}$$

10 → B

$$15,65_{10} = 1111,10100_2$$

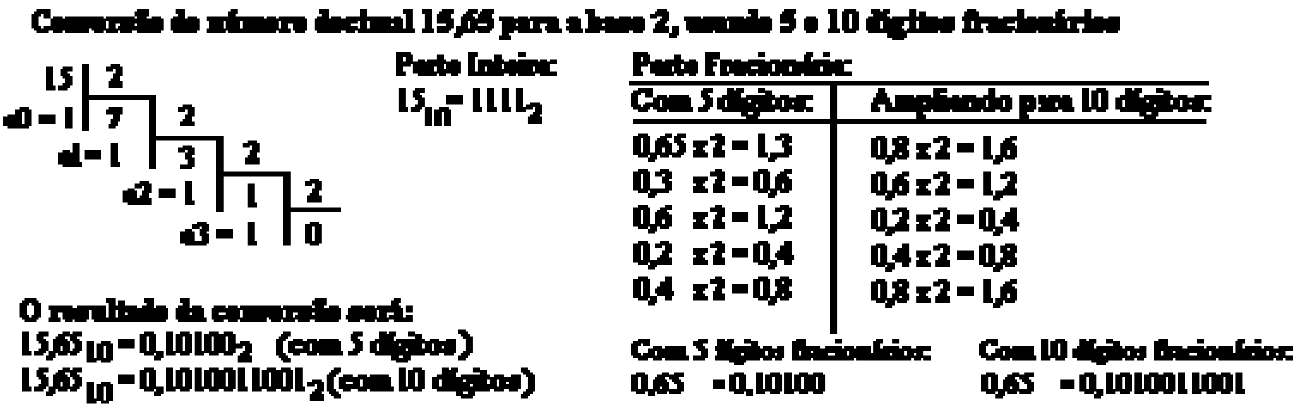
parte inteira

$$\begin{array}{rrrr} 15 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & \\ \cline{2-2} 1 & 7 & \multicolumn{1}{|l}{2} & \\ \cline{3-3} & 1 & 3 & \multicolumn{1}{|l}{2} \\ \cline{4-4} & & 1 & 1 \end{array}$$

parte fracionária

$$\begin{array}{l} 0,65 \times 2 = \mathbf{1},3 \\ 0,30 \times 2 = \mathbf{0},6 \\ 0,60 \times 2 = \mathbf{1},2 \\ 0,20 \times 2 = \mathbf{0},4 \\ 0,40 \times 2 = \mathbf{0},8 \end{array}$$

Outro exemplo:



Números binários fracionários (números à direita da virgula) são expressos como potências negativas do número da base. Para determinar o valor decimal do número binário, basta multiplicar cada "bit" por seu peso posicional e somar os resultados.

Por exemplo, o número binário 0.11012 pode ser expresso com segue:

$$1*2^{-1} + 1*2^{-2} + 0*2^{-3} + 1*2^{-4} =$$

$$1*0.5 + 1*0.25 + 0*0.125 + 1*0.0625 =$$

$$0.5 + 0.25 + 0.0625 =$$

$$0.8125_{10}$$