Tópicos especiais em Estatística Aplicada - 2023/2

EPC2

Aluno: João Gabriel Santos Custodio

1. Um experimento aleatório gera 5 possíveis resultados igualmente

prováveis. O espaço amostral é

{a,b,c,d,e}. Seja A o evento {a,b,c} e B o evento {d,e}. Determine:

1.1. P(A)

Resposta: Nesse caso, temos 1/5 de chance para cada resultado possível, portanto temos que: P(A) = 0.2+0.2+0.2 = 3(0.2) = 0.6.

1.2. P(B)

Resposta: Da mesmo forma: P(B) = 2(0.2) = 0.4

1.3. P(A')

Resposta: P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4

1.4. P(A ∩ B)

Resposta:

Os resultados possíveis para os eventos A e B não possuem igualdade, portanto $P(A \cap B) = 0$.

1.5. P(A ∪ B)

Resposta:

A união consiste em todos os resultados possíveis, logo é de imediato que $P(A \cup B) = 1$.

2. O último digito de um instrumento de medição tem a mesma

probabilidade de estar entre 0 e 9.

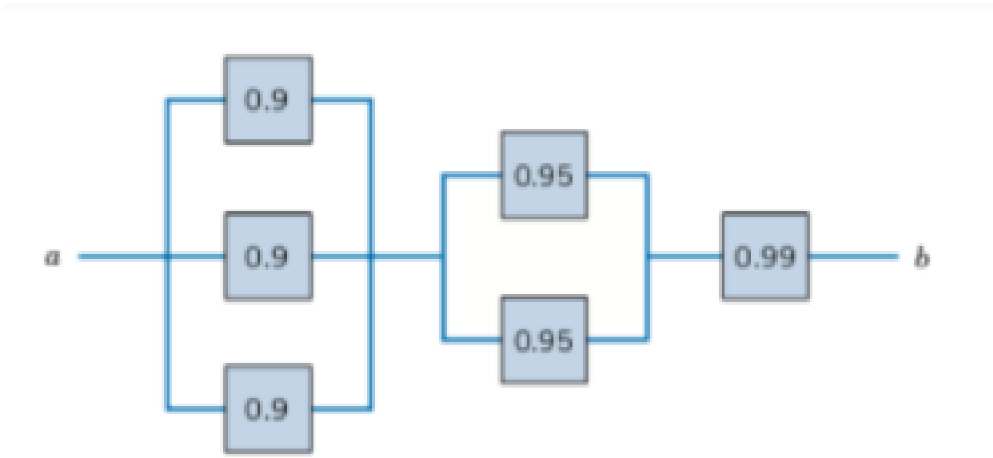
2.1. Qual a probabilidade do último digito ser 1?

Resposta: Como temos 10 possíveis digitos com a mesma probabilidade do evento acontecer, então para a probabilidade do último digito ser 1 é igual e 1/10 ou 0.1.

2.2. Qual a probabilidade do último digito ser maior ou igual a 8?

Resposta: Temos 2 possíveis valores que compreendem este evento, o número 8 e o 9, com 10 possíveis resultados então temos uma probabilidade do evento acontecer de 2/10 ou 0.2.

3. O circuito mostrado na Figura 1 opera apenas se houver um caminho de dispositivos funcionais da esquerda para a direita. A probabilidade de cada dispositivo funcionar é mostrada no gráfico. Suponha que os dispositivos falhem independentemente. Qual é a probabilidade de o circuito operar?



Resposta: Seguindo o fluxo de funcionamento, a probabilidade pode ser calculada sendo: P = 0.9*0.95*0.99 = 0.84

4. Um escritório possui 100 máquinas de calcular. Algumas são elétricas e outras manuais. Algumas são usadas e outras novas, conforme Tabela 1.

Tabela			
Máquinas	Elétricas(E)	Manuais(M)	Total de máquinas Novas e Usadas
Novas	40	30	70
Usadas	20	10	30
Total : elétricas e manuais	60	40	100

Tabela 1

4.1. Um usuário pega uma máquina ao acaso e descobre que é nova. Qual a probabilidade de ser elétrica?

Resposta: É evidente que temos 100 máquinas no total, 70 são novas e 40 são elétricas, logo a probabilidade de uma máquina nova ser elétrica é de 40/70 ou 57.14% de chance.

4.2. Um usuário pega uma máquina ao acaso e descobre que é elétrica. Qual a probabilidade de ser nova?

Resposta: Apenas 40 máquinas das 60 totais são elétricas, logo a probabilidade é de 40/60 ou 66.67% .

4.3. Mostre como o teorema de Bayes pode ser usado nos itens 4.1 e 4.2 .

Reposta: O teorema de Bayes é utilizado para calcular a probabilidade de um certo evento A que depende de um evento B, calculando para os eventos supracitados temos:

$$P(A \backslash B) = \frac{P(B \backslash A)P(A)}{P(B)} \text{ para } P(B) > 0$$

Para o item 4.1

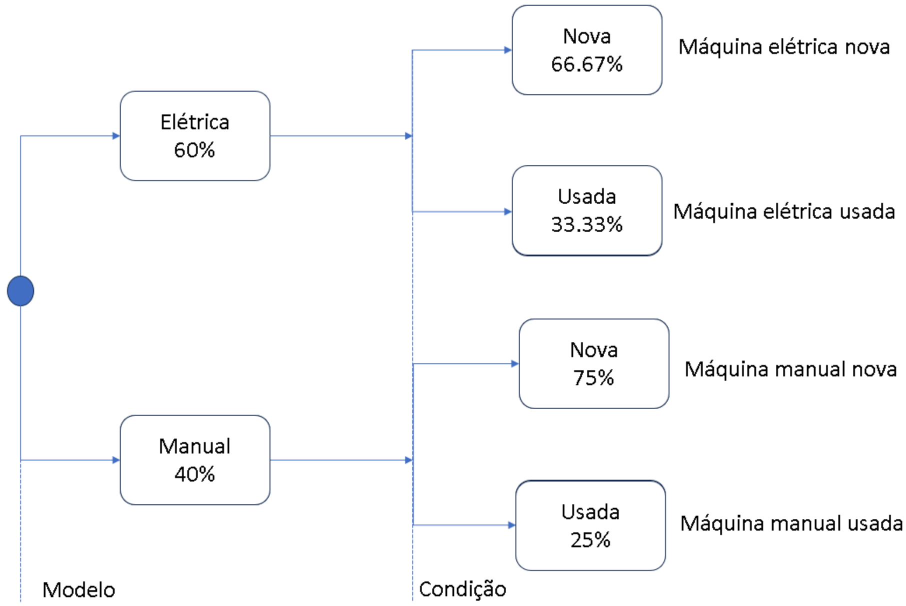
$$P(E \backslash N) = \frac{P(N \backslash E)P(E)}{P(N)} = \frac{\frac{40}{60} * 60}{70} = 57,14\%$$

Para o item 4.2

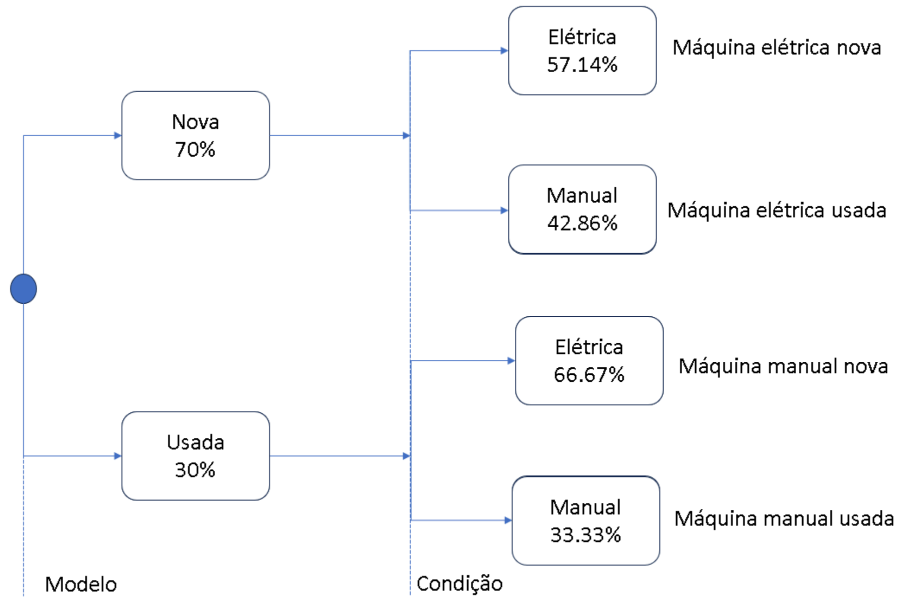
$$P(N \backslash E) = \frac{P(E \backslash N)P(N)}{P(E)} = \frac{\frac{40}{70} * 70}{60} = 66,67\%$$

4.4 Faça um diagrama de árvore para a tabela dada colocando nos ramos a probabilidade condicional e começando a árvore com a decisão da máquina de ser elétrica ou manual.

Resposta:

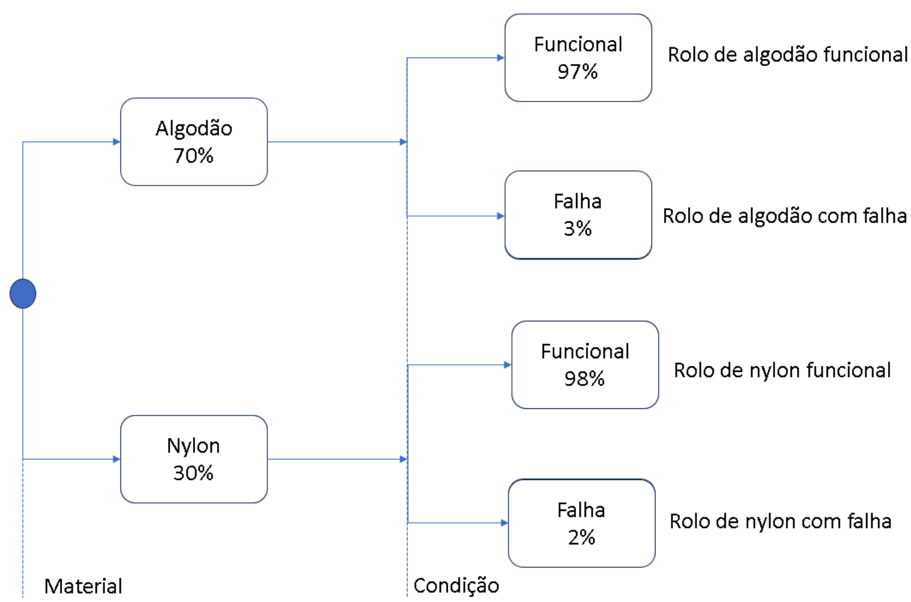


4.5. Repita o item 4.4 começando a árvore com a decisão da máquina ser nova ou usada.



5. Uma fábrica de tecidos usa 70% de rolos de algodão e 30% de rolos de nylon. Suponha que 2% dos rolos de tecido de nylon e 3% dos rolos de tecido de algodão apresentem falha. Qual a probabilidade de que um rolo selecionado randomicamente pelo fabricante tenha falha? Ilustre a solução com uma árvore de decisão.

Resposta:



Podemos calcular a probabilidade de um rolo aleatório ter alguma falha da seguinte forma:

$P(F) = 0.7 * 0.03 + 0.3 * 0.02 = 0.027 = 2.7\%$

6. Para cada cenário descrito abaixo, indique se a distribuição binomial é ou não um modelo razoável para a variável aleatória X e por quê. Informe que suposições foram feitas.

6.1. Seja X o número de acidentes que ocorrem em rodovias federais no período de 1 mês.

Resposta: O modelo não é razoavel, visto que o sucesso ou não nesse caso dependerá de muitos fatores que não são constantes, como a chuva, má condução do veículo, densidade de tráfego de veículos, visibilidade do local, entre outros. Portanto, fica evidente que o modelo não é razoável.

6.2. Em um lote de 50 transdutores de temperatura, uma amostra de tamanho 30 é selecionada sem reposição. Seja X o número de transdutores não conformes na amostra.

Resposta: Neste caso, como o paramêtro de sucesso é um equipamento que se repete e sempre tem a mesma probabilidade de estar funcionando ou não, conclui-se que o modelo é razoável.

6.3. Uma operação de enchimento tenta encher os vasilhames de detergente com o peso anunciado. Seja X o número de vasilhames que não são enchidos o suficiente.

Reposta: Como o paramêtro é um evento que se repete para um mesmo objeto, pode-se determinar uma probabilidade de sucesso ou falha e utilizar a distribuição binomial.

7. Obtenha a função de distribuição cumulativa de uma variável aleatória binomial com n=3 e p=0.25.

Resposta: Seja i o numero de repetições desejadas do resultado da variável aleatória:

$$P(X \geq i) = \sum_{x=i}^{3} \binom{3}{x} (0.25)^x (0.75)^{3-x}$$

8. Como nem todos os passageiros da companhia aérea comparecem, uma companhia aérea vende 125 bilhetes para um voo que comporta apenas 120 passageiros. A probabilidade de um passageiro não aparecer é de 0.10. Os passageiros se comportam de maneira independente.

8.1. Qual é a probabilidade de cada passageiro que aparecer conseguir

voar?

Seja n = 125, e x sendo iterado de 0 até 120:

$$P(X \leq 120) = \sum_{x=0}^{120} \binom{125}{x} (0.1)^x (0.9)^{125-x}$$

$$P(X \leq 120) = 1$$

Em análises desse tipo, é importante salientar que eventos futuros podem ser afetados por variáveis fora de controle da companhia aéria, como por exemplo uma empresa fretar todos as passagens, é um evento difícil de acontecer mas pode acontecer, a companhia não tem controle sobre isso.

8.2. Qual é a probabilidade de o voo partir com assentos vazios?

Reposta:

$$P(X < 120) = \sum_{x=0}^{119} \binom{125}{x} (0.1)^x (0.9)^{125-x} = 0.9999998538$$

$1 - P(X < 120) = 0.00000015$

Fica evidente que a probabilidade desse evento acontecer é incrivelmente pequena, logo, num cenário real uma companhia não teria preocupações com um evento dessa magnitude acontecer.

9. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme discreta nos números inteiros de 0 a 9. Determine a média, variância e desvio padrão da variável aleatória de Y=5X e compare com os resultados correspondentes para X.

Resposta:

Para X:

- Média: $\bar{X} = \frac{0+9}{2} = 4.5$
- Desvio padrão: $\sigma(X) = \sqrt{\frac{(9-0+1)^2-1}{12}} = 2.8723$
- Variância: $\sigma^2(X) = 8.25$

Para Y=5X:

- Média: $5\bar{X} = 5\frac{0+9}{2} = 22.5$
- Desvio padrão: $\sqrt{5}\,\sigma(X) = \sqrt{\frac{5(9-0+1)^2-1}{12}} = 14.3615$
- Variância: $5^2\sigma^2(X) = 206.25$

Comparando os resultados, nota-se que os valores todos seguem uma proporção com o fator 5 em comum.

10. O range de uma variável aleatória X é {0,1,2,3,x} sendo x desconhecido. Se cada valor for igualmente provável e a média de X for 6, determine x.

Resposta:

Para o range explicitado, temos 5 possíveis eventos com a mesma probabilidade de 0.2 (ou 1/5), logo f(x) = 0.2. Com isso, podemos escrever a seguinte expressão:

$$\text{average}(X) = \sum_{x} \text{xf}(x)$$

Considerando que average(X) = 6:

$$6 = 0.2 * (1 + 2 + 3 + x)$$
$$x = 24$$

Portanto, determina-se que x=24.