Sistemas Realimentados - 2023/1

Nome: João Gabriel Santos Custodio

Data de entrega limite: 6/4

Trabalho 1

Referências para ler para este trabalho

- Manual rápido do Matlab
- Resposta transitória e estacionária

Resposta transitória e de regime de sistemas dinâmicos

Definições:

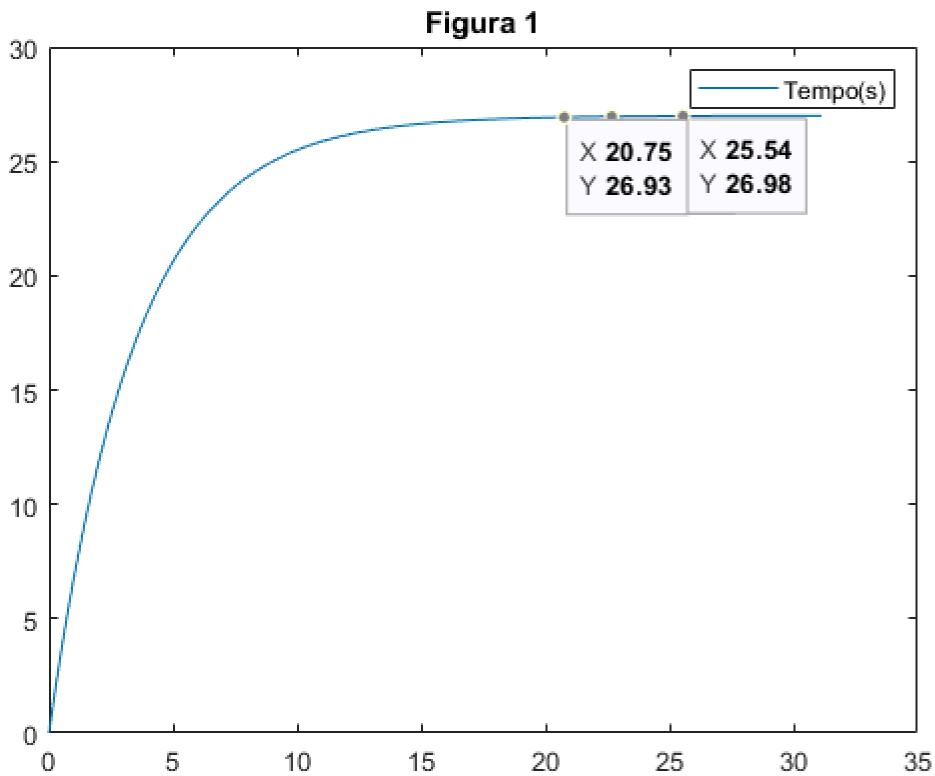
```
datetime('now')
```

```
ans = datetime
   06-Apr-2023 23:21:49
```

```
I=14;
[tau,zeta,wn,teta,p] = init(I);
g1=tf(p,[tau 1]);
g2=tf(wn^2,[1 2*zeta*wn wn^2]);
g0=tf(p,[tau 1],'InputDelay',teta);
g3=tf(p^3,poly(-[p p p]));
[y0,t0]=step(g0);
[y1,t1]=step(g1);
[y2,t2]=step(g2);
```

1) Obtenha a constante de tempo, o tempo de estabilização e o ganho do sistema cuja resposta ao degrau unitário é mostrada na figura 1.

```
figure;
plot(t1,y1);legend('Tempo(s)');title('Figura 1');
```



Resposta:

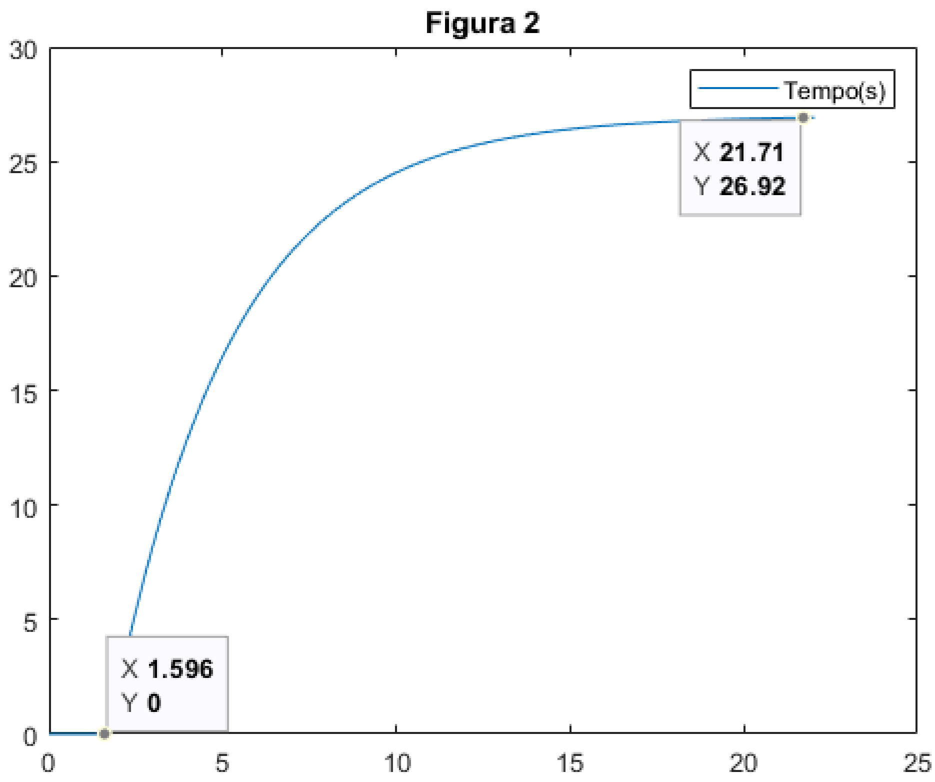
Constante de tempo T: 5T = 20   T = 4

Tempo de estabilização = 20 segundos

Ganho do sistema = 27

2) Obtenha a constante de tempo, o tempo morto, o tempo de estabilização e o ganho do sistema cuja resposta degrau unitário é mostrada na figura 2.

```
figure;
plot(t0,y0);legend('Tempo(s)');title('Figura 2');
```



Resposta:

Constante de Tempo: T = 4.

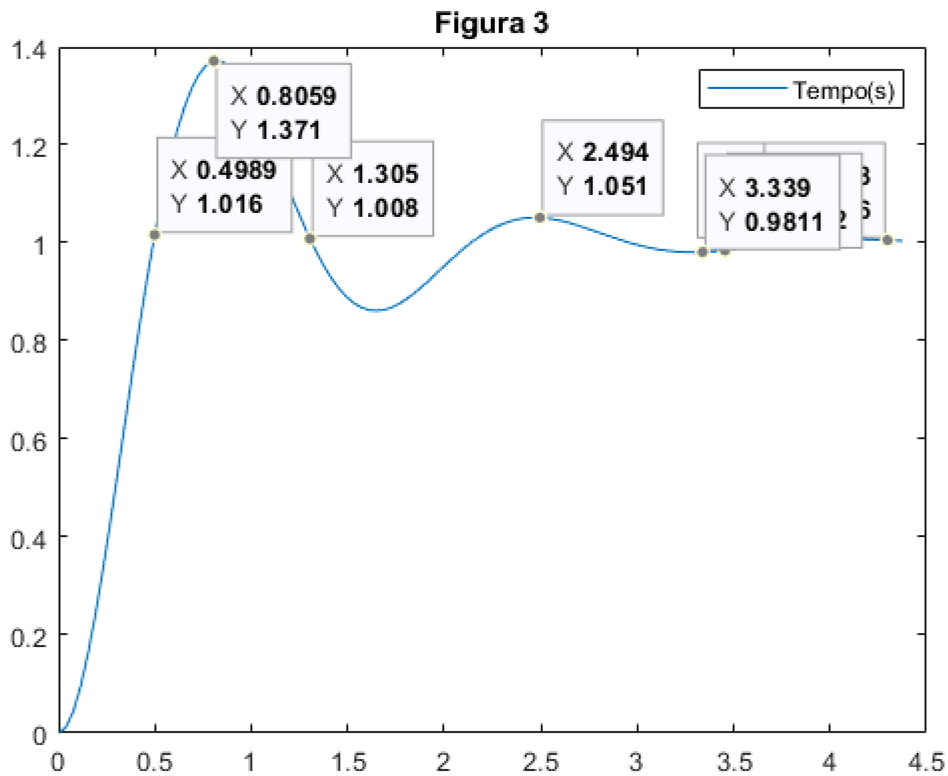
Tempo morto = 1,596 segundos.

Tempo de estabilização = 20 segundos.

Ganho do sistema = 21,71.

3) Obtenha o tempo de subida, a sobre-elevação (0 a 100%), o tempo de estabilização, o ganho do sistema cuja resposta ao degrau unitário é mostrada na figura 3.

```
figure;
plot(t2,y2);legend('Tempo(s)');title('Figura 3');
```



Resposta:

Tempo de subida = 0,4985 segundos.

Sobre-elevação = ((1,371 - 1,006)/1,006) * 100% = 36,28%.

Tempo de estabilização = 3,33 segundos.

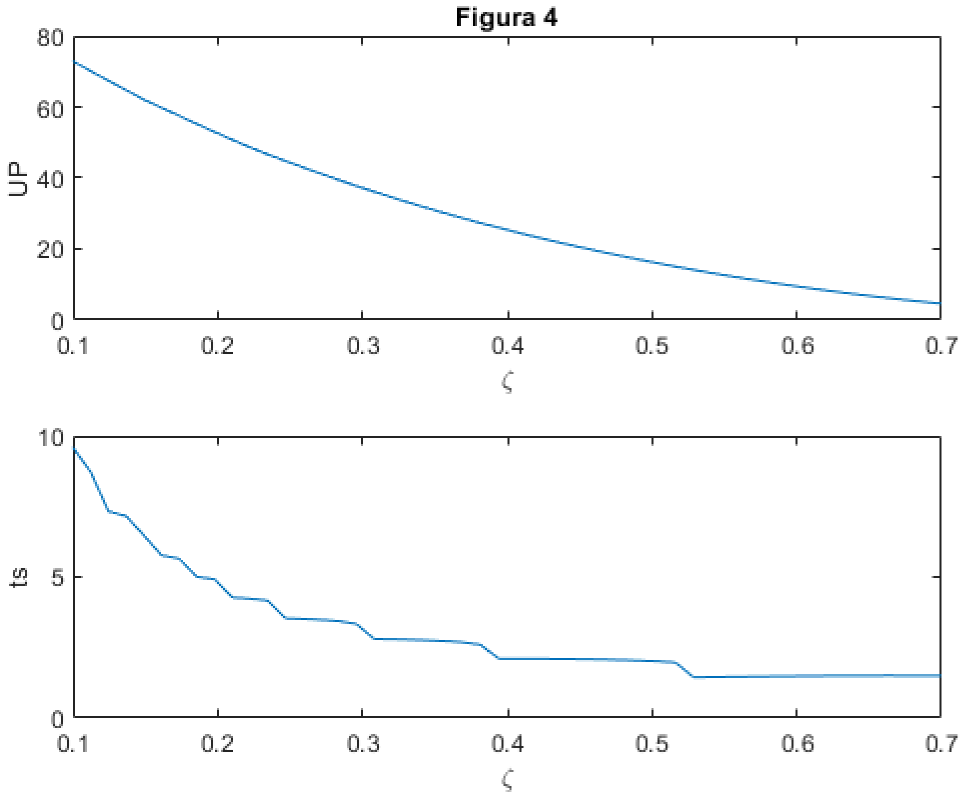
Ganho do sistema = 1.

4) Na figura 4 mostra-se o efeito do amortecimento ζ na sobreelevação (UP) e tempo de estabilização (ts).

A relação UP com ζ é dada por $\mathrm{UP} = 100 e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$, e a relação de ts com ζ é dada aproximadamente por $\mathrm{ts} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$, $0 < \zeta < 0.9$.

```
z=linspace(0.1,0.7,50);
ts=[];UP=[];
for i=1:50
    m=tf(wn^2,[1 2*z(i)*wn wn^2]);
    S=stepinfo(m);
    ts(i,1)=S.SettlingTime;
    UP(i,1)=S.Overshoot;
end
figure;
```

```
subplot(211);plot(z,UP);xlabel('\zeta');ylabel('UP');title('Figura 4')
subplot(212);plot(z,ts);xlabel('\zeta');ylabel('ts')
```



Explique, observando as figuras, como ζ se relaciona com UP e ts, e obtenha a faixa de valores de ζ para os quais a sobre-elevação esteja entre 40 e 50%, verificando a que faixa de valores de tempo de estabelecimento isso corresponde.

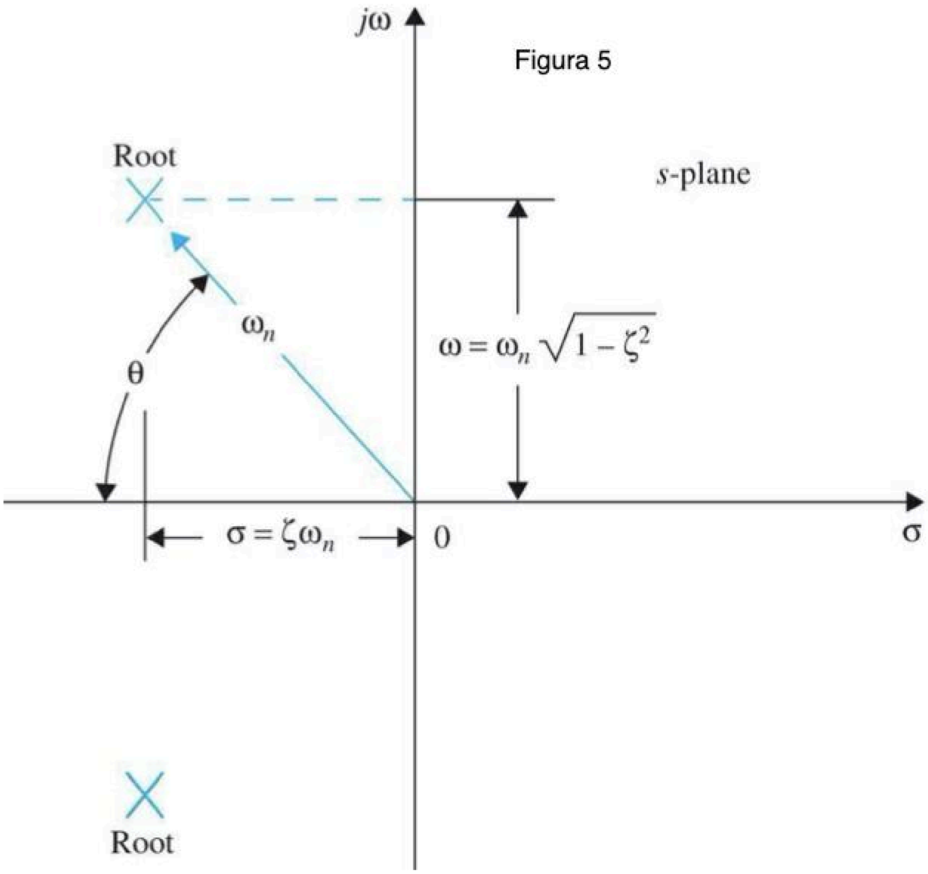
Resposta:

Como o script faz com que os valores do amortecimento aumentem, espera-se que o tempo de acomodação e o tempo de sobre-elevação diminua, e de fato observando o gráfico

temos isso sendo verificado, ou seja, quanto maior o valor do amortecimento, menor o tempo de acomodação e sobre-elevação.

Observando o gráfico, verifica-se que para os valores de ζ entre 0,21 e 0,28 temos a sobre-elevação na faixa de 40 e 50%.

Seja a localização do par de polos complexos de uma FT de um protótipo de segunda ordem mostrada na figura 5.



5) Use a expressão que relaciona de ts com ζ e ω_n para explicar onde devem estar os polos de malha fechada para um menor tempo de estabilização.

Resposta:

$$\text{ts} = \frac{4}{\zeta\,\omega_n}$$

A equação acima relaciona o tempo de estabilização com o ζ e ω_n. Note que temos uma relação inversamente proporcional, portanto, quanto maior o produto $\zeta\omega_n$ menor será o tempo de estabilização. Dessa forma, para maximizar o produto $\zeta\omega_n$ necessitamos de uma relação triangular para formarmos um triângulo retângulo com angulos de 45°, portanto segue e relação:

$$\zeta\,\omega_n = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$\zeta^2 = 1 - \zeta^2$$
$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Uma vez que sabemos o valor de ζ, basta escolher o maior valor possível de ω_n e a região com os menores valores de tempo de estabilização serão varridos por esse ω_n.

6) Sabendo que $\zeta = \cos(\theta)$, em que região do plano complexo devem estar os polos para que UP seja menor que 5%?

Resposta:

$\mathrm{UP} = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$, quermos que UP<5%

$$100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} < 5$$
$$e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} < 0,05$$
$$-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2} - 2,9957$$
$$\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2} > 2,9957$$
$$\zeta^2\pi^2/(1-\zeta^2) > 8,9744$$
$$\zeta^2(\pi^2 + 8,9744) > 8,9744$$
$$\zeta^2 > \frac{8,9744}{\pi^2 + 8,9744}$$
$$\zeta_+ > \sqrt{\frac{8,9744}{\pi^2 + 8,9744}}$$
$$\zeta_+ > 0.6901 \approx 0.69$$
$$\text{Como } \zeta = \cos\theta$$
$$\cos(\theta) > 0.69$$
$$A \text{ inequação acima } \acute{e} \text{ válida para os seguintes valores de } \theta \text{ no eixo das abscissas:}$$

```
acosd(0.69)
```

```
ans = 46.3699
```

$$-\arccos(0,69) < \theta < \arccos(0,69)$$
$$-46,37 < \theta < 46,37$$

Portanto, na região com os valores de θ entre o intervalo de [-46,37;46,37] temos que UP com valor inferior à 5%.

7) A figura 6 mostra a resposta ao impulso do sistema de segunda ordem do item 3. Explique como obter a resposta ao impulso a partir de G(s) usando a transformada de Laplace.

```
figure;impulse(g2);title('Figura 6')
```

Resposta:

Para obter a reposta ao impulso a partir de G(s) que é um sistema de segunda ordem, podemos aplicar a transformada inversa de Laplace em G(s). Como a reposta ao impulso de g(t) é igual ao próprio g(t), sendo assim G(s) é a transformada de laplace da resposta ao impulso.

Com isso, podemos verificar com o código em Matlab abaixo:

```
%para fazer a transformada inversa de laplace, precisamos escrever G2(s) na
%forma simbolica
g2
```

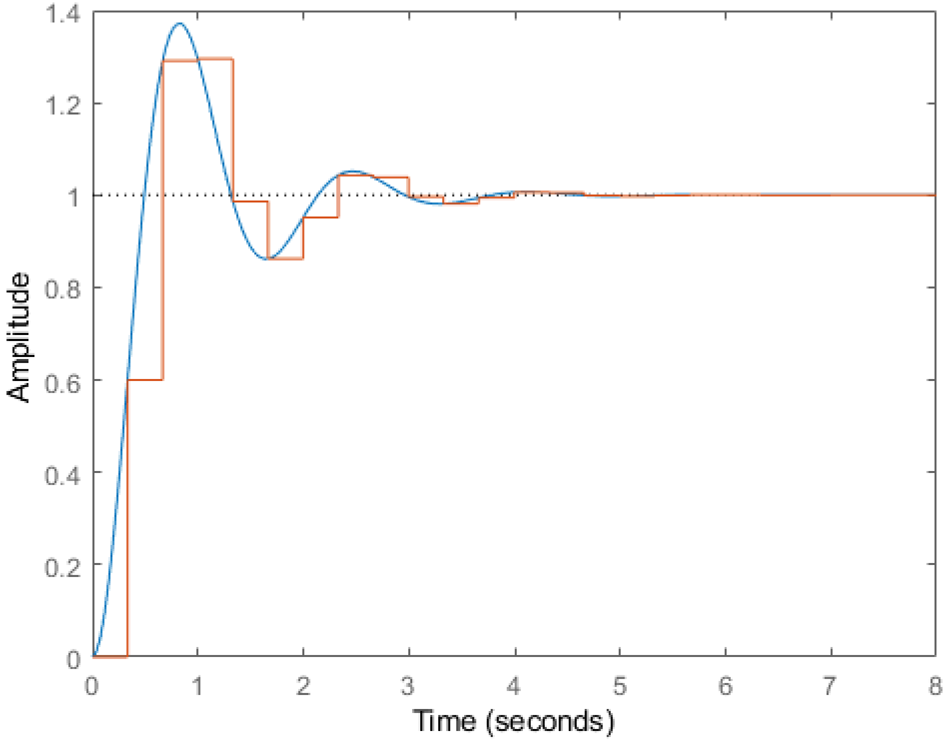
```
g2 =

        16
  ----------------
  s^2 + 2.4 s + 16

Continuous-time transfer function.
```

```
syms s t;
g2t = ilaplace(16/(s^2+2.4*s+16)); %retorna a função simbolica da transformada inversa de lapla
figure();
fplot(g2t, [0 6])
ylim([-1.5 3])
title('Resposta ao impulso de g2')
grid on;
```

8) Observe a resposta ao degrau do item 3) e escolha um tempo de amostragem de 10% do valor do tempo de estabilização medido. Discretize o modelo g2 usado com o comando c2d e plote no mesmo gráfico a resposta ao degrau dos sistemas contínuo e discreto.

```
 % Coloque aqui os comandos para discretizar g2 e plotar respostas
figure
hold on;
amostragem = 0.1*3.33;
g2d = c2d(g2, amostragem); %Retorna G2 discretizada no tempo de amostragem supracitado
step(g2);
step(g2d);
title('Figura 7')
```

Figura 7



Seja o sistema massa-mola-amortecedor mostrado na figura 7 e a equação diferencial que gere seu comportamento. Xé o deslocamento em metros e Fa força aplicada em Newtons.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)$$

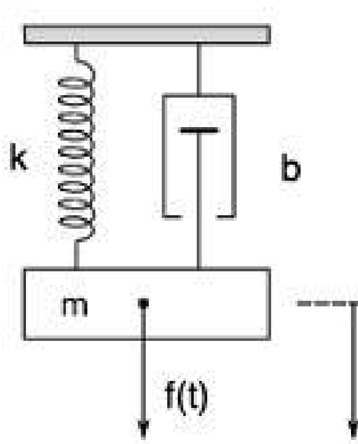


Figura 8

9) Obtenha a função de transferência $G(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)}$ e faça sua simulação ao degrau com os parâmetros M,K,B definidos abaixo. Qual o deslocamento máximo da massa e qual seu tempo de estabelecimento?

Resposta:

```
M=I;
K=M*wn^2
```

```
K = 224
```

```
B=2*M*zeta*wn;
G_F = tf(1,[M B K])
```

```
G_F =

           1
  --------------------
  14 s^2 + 33.6 s + 224

Continuous-time transfer function.
```

```

figure()
step(G_F)
title('Figura 9');
grid on
```

```
stepinfo(G_F)
```

```
ans = struct with fields:
        RiseTime: 0.3309
    SettlingTime: 2.8075
     SettlingMin: 0.0038
     SettlingMax: 0.0061
       Overshoot: 37.1410
      Undershoot: 0
            Peak: 0.0061
        PeakTime: 0.8059
```

10) Seja o diagrama de blocos mostrado abaixo.

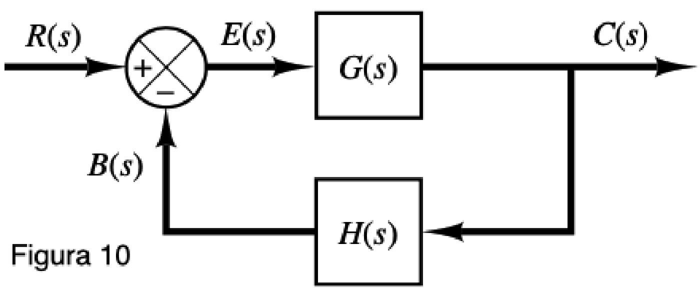


Figura 10

Obtenha:

$$\frac{E(s)}{R(s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}$$

Do diagrama de blocos, temos as seguintes relações:

i) C(s) = E(s)G(s)

ii) E(s) = R(s) - B(s)

iii) B(s) = H(s)C(s)

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

11) Seja o sistema massa-mola-amortecedo do item 7. Obtenha o modelo em variáveis de estado definido pelas matrizes [A,B,C,D] de modo que $x_1(t)$ seja a posição e $x_2(t)$ seja a velocidade. Aplique então um degrau e plote os dois estados, explicando seu comportamento. Dica: veja o comando tf2ss.

```
figure
title('Figura 11')
[A,B,C,D] = tf2ss()
```

12) Seja gma definida abaixo.

```
gma=tf(wn^2*[1/p 1],[1 2*zeta*wn 0])
```

```
gma =

  0.5926 s + 16
  -------------
   s^2 + 2.4 s

Continuous-time transfer function.
```

Obtenha seus polos e zeros de malha aberta e de malha fechada.

Resposta:

Para malha aberta:

$\text{Polos}:$
$s^2 + 2,4s = 0$
$s_1 = -2,4$
$s_2 = 0$
$\text{Zeros}:$
$0.5926s + 16 = 0$
$s = -26,9997$

Para malha fechada:

$$\text{gmf} = \frac{\text{gma}}{1 + \text{gma}}$$

```
gmf = gma/(1+gma)
```

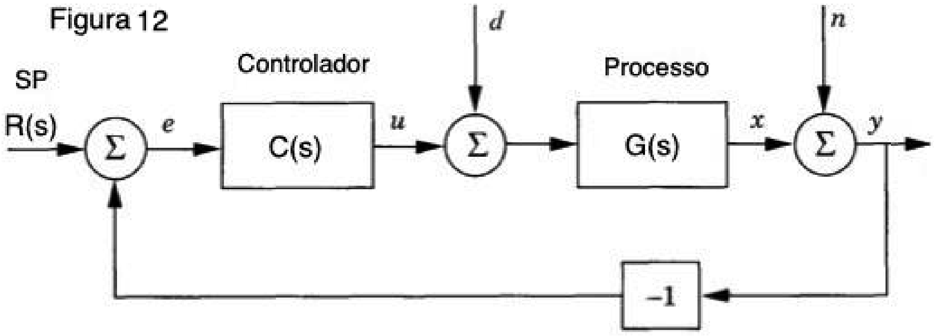
```
gmf =

    0.5926 s^3 + 17.42 s^2 + 38.4 s
  ------------------------------------
  s^4 + 5.393 s^3 + 23.18 s^2 + 38.4 s

Continuous-time transfer function.
```

$\text{Zeros}:$
$0,5926s^3 + 17,42s^2 + 38,4s = 0$
$s_1 = -2,4$
$s_2 = -26,995$
$s_3 = 0$
$\text{Polos}:$
$s^4 + 5,393s^3 + 23,18s^2 + 38,4s = 0$
$s_1 = -2,66$
$s_2 = 0$
$s_3 - 1,64 - 3,4i$
$s_4 = -1,64 + 3,4i$

Análise do erro em regime. Seja o diagrama de blocos mostrado abaixo com G(s) definida abaixo.

```
G=tf(p^2,poly(-[p p]))
```

```
G =

        729
  ----------------
  s^2 + 54 s + 729

Continuous-time transfer function.
```



13. Qual o erro em regime para uma entrada degrau unitário caso $C(s) = K$?

Resposta: Considerando que não temos disturbios.

Primeiro devemos calcular a função de transferência de malha fechada:

$$T = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Para a entrada ao degrau, a sua transformada de laplace é:

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

O erro "e" é:

$$E(s) = U(s) - T(s)$$

O erro em regime é dado pelo limite de s tendendo a 0 de sE(s), dessa forma temos:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\mathrm{E}(s) = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{1}{s} - \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}\right)$$

Mas C(s) = K, portanto

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\mathrm{E}(s) = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{1}{s} - \frac{K * G(s)}{1 + K * G(s)}\right)$$

```
syms K_ K_p K_i K_soma
limit(s*(1/s +(K_*(729/(s^2+54*s+729))/(1+K_*729/(s^2+54*s+729)))))
```

ans = 1

Para C(s) = K, uma constante qualquer, o erro em regime da entrada ao degrau é igual a 1.

14. Repita o item 11 para $C(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$

Resposta:

Substituindo para o novo controlador, temos:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s} - \frac{\left(K_p + \frac{K_I}{s}\right) * G(s)}{1 + \left(K_p + \frac{K_I}{s}\right) * G(s)}\right)$$

```
K_soma = K_p + K_i/s;
limit(s*(1/s +(K_soma*(729/(s^2+54*s+729))/(1+K_soma*729/(s^2+54*s+729)))))
```

```
ans = 1
```

Para C(s) = K, uma constante qualquer, o erro em regime da entrada ao degrau é igual a 1.

15. Caso um distúrbio $d(t) = 1$ afete a malha de controle, como verificar seu efeito no erro E(s) para um dado controlador C(s)?

Ilustre aplicando o degrau em $d(t) = 1$ e plotando $y(t)$, com $r(t) = 0$. Use $C(s) = K$, onde K garante estabilidade.

Resposta:

A

16. Verifique os valores de K para estabilidade de $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG_3(s)}{1+KG_3(s)}$ (g3 foi definida em init).

Resposta:

```
g3
```

```
g3 =

             19683
  ----------------------------
  s^3 + 81 s^2 + 2187 s + 19683

Continuous-time transfer function.
```

$$\text{gmf} = \frac{\text{g3} * K}{1 + \text{g3} * K}$$

$$\text{Para verificar a estabilidade, devemos calcular pelo método de Routh:}$$

s^3
s^2
s^1
s^0