

**JOÃO GABRIEL SANTOS CUSTODIO, SAMUEL DE ALMEIDA MARINHO, VINICIUS ROBASKI
MONDADORI**

TRABALHO DE ALGORITMOS NUMÉRICOS

**Trabalho apresentado ao Curso de
Algoritmos Numéricos, Universidade
Federal do Espírito Santos.**

Professor: Thomas Walter Rauber

**VITORIA, ES
22 DE AGOSTO DE 2021**

SUMÁRIO

1	Introdução	7
1.1	Aplicações Práticas de Técnicas Numéricas de Solução de Equações Diferenciais Ordinárias	7
1.2	objetivo	7
2	Objetivos	9
2.1	Objetivos principais	9
2.2	Tarefas requisitadas.	9
2.3	Problema prático.	10
3.	Metodologia	12
4	RESULTADOS	14

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - questão 1.	Erro! Indicador não definido.
Figura 2 - questão 2.	Erro! Indicador não definido.
Figura 3 - questão 3 função a).	Erro! Indicador não definido.
Figura 4 - questão 3 função b).	16
Figura 4 - questão 3 função b).	16
Figura 4 - questão 3 função b).	16
Figura 4 - questão 3 função b).	16
Figura 5 - questão 3 função c).	Erro! Indicador não definido.
Figura 6 - questão 4 função a).	Erro! Indicador não definido.
Figura 7 - questão 4 função c).	Erro! Indicador não definido.
Figura 8- questão 4 função b).	Erro! Indicador não definido.
Figura 9 - questão 5 função a).	Erro! Indicador não definido.
Figura 10 - questão 5 função b).	Erro! Indicador não definido.
Figura 11 - questão 5 função c).	Erro! Indicador não definido.
Figura 12 - questão 6 função a).	Erro! Indicador não definido.
Figura 13 - questão 6 função b).	Erro! Indicador não definido.
Figura 14 - questão 6 função c).	21
Figura 16 - questão 7 e 8 função a).	22
Figura 17 - questão 7 e 8 função c).	23

RESUMO

TRABALHO DE ALGORITMOS NUMÉRICOS

Objetivo: A partir do uso da ferramenta Octave, desenvolver um código que resolve questões que necessitam do uso de ferramentas matemáticas para a resolução das Equações Diferenciais Ordinárias.

Resultados: Com o uso de funções – descritas posteriormente - conseguimos resolver os problemas dados e determinar qual é mais eficaz comparando os erros respectivamente.

1 INTRODUÇÃO

1.1 APLICAÇÕES PRÁTICAS DE TÉCNICAS NUMÉRICAS DE SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

O trabalho proposto tem como principal objetivo mostrar ao aluno outros meios de resolver um problema, neste caso uma EDO. Foram apresentados vários tipos de métodos e conceitos para uma resolução de uma EDO e com isso o aluno teve uma base do que iria fazer.

Este trabalho como apresentado no resumo tem o intuito de promover soluções de equações diferenciais ordinárias através de aplicações de técnicas numéricas no ambiente do Octave. Muitas das vezes algumas EDOs podem surgir de forma que sua resolução fique demorada e de certa forma complexa, para facilitar o nosso trabalho foi sugerido que criássemos um código no Octave e que se possível rodasse em Matlab também, para que nos ajudasse a resolver esses problemas.

1.2 OBJETIVO

Este trabalho objetiva:

1. Desenvolver e implementar códigos no ambiente Octave;
2. Criar funções para resolução de problemas propostos;
3. Aplicar vários métodos de resolução de uma EDO;
4. Trabalhar com plotagem de gráficos e tabelas;
5. Implementar as soluções encontradas em um problema prático de circuitos;
6. Resolução de problemas usando técnicas numéricas;

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVOS PRINCIPAIS

Como foi exposto na introdução esse trabalho visa a implementação de técnicas numéricas para resolução de problemas, foi dado então alguns PVI (problema de valor inicial) para que pudéssemos resolver ele no ambiente do Octave. Dado esse início foi pedido algumas tarefas em cima de cada PVI dado sendo essas listadas abaixo.

2.2 TAREFAS REQUISITADAS.

1. Determine a solução analítica $y(x)$ de cada PVI. Ajuda: Para facilitar o cálculo, pode usar o pacote simbólico do Octave. Veja o exemplos na pasta edo do software, especialmente o script **EulerGraficamente.m** que ilustra a definição simbólica de um PVI, a obtenção analítica da solução $y(x)$, a apresentação em tabela dos valores exatos e aproximados pelo método de Euler.
2. Converta a solução em uma função não-simbólica. Veja o exemplo que usa **matlabFunction**.
3. Discretize a variável independente a partir de x_0 , calcule o valor da função analítica e desenhe. O número de passos deve ser $n = 10$ e o passo deve ser $h = 1/10$. O intervalo de discretização do eixo x do desenho deve ser mais fino que o passo h para evitar efeitos de discretização, por exemplo $\Delta x = h/10$.
4. Calcule as aproximações da solução analítica, usando os seguintes métodos:
 - Euler
 - Euler Melhorado
 - Euler Modificado
 - Fehlberg RK(1) 2
 - Fehlberg RK(4) 5
 - Dormand-Prince com passo fixo
 - Dormand-Prince com passo adaptativo

5. Insira os pontos (x_i, y_i) de cada método no gráfico junto com a função verdadeira $y(x)$.
6. Gere um no gráfico de erros de cada método relativo à função verdadeira $y(x)$, com eixo y logarítmico, (função Octave **semilog** em vez de plot).
7. 7. Mostre uma tabela com os valores de cada método (exceto os com passo adaptativo) .
8. Mostre uma tabela com os erros de cada método (exceto os com passo adaptativo). Ajuda: Considere script de exemplo **plot_e_tabela_demo.m** que gera uma tabela.

2.3 PROBLEMA PRÁTICO.

O objetivo do circuito da fig. 1 é providenciar uma fonte de corrente elétrica contínua (DC), a partir de uma fonte primária de corrente elétrica alternada (AC). A partir disso foi dado o seguinte requerimento:

1. Use todos os métodos de resolução de uma EDO da parte teórica deste trabalho para determinar a tensão $V_c(t)$. Considere somente um único passo do instante de tempo t_n para o próximo instante de tempo t_{n+1} para estimar $V_c(t_{n+1})$, dados a tensão atual $V_c(t_n)$.

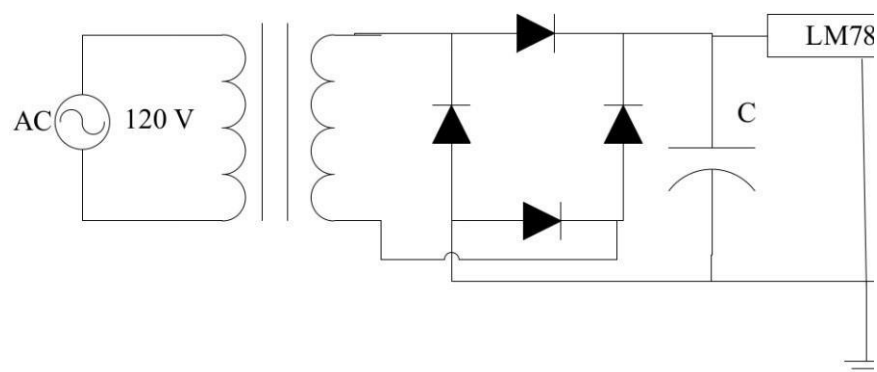


Figura 1:: Circuito para implementar uma corrente elétrica contínua.

3. METODOLOGIA

Através do estudo da linguagem de programação utilizada no software GNU Octave, utilizando funções e técnicas de programação como uso do “for”, “plot” e outras ferramentas de estilização no momento que plotamos gráficos como o “title” “legend”, conseguimos desenvolver um código que resolve todos os problemas propostos.

Além disso, como já supracitado, usamos funções para o código principal não ficar com muitas linhas, fazendo o código demorar mais para ser usado. Essas funções são: Euler.m, EulerMelhorado.m, EulerModificado, Fehlberg12, Fehlberg45, RungeKutta_Dormad_Price_ode45.

Com isso, usando as técnicas de programação e o material estudado para a resolução dos problemas propostos solucionamos todas as questões.

4 RESULTADOS

A seguir os resultados para cada questão proposta, usamos as seguintes PVI:

a) $\{y' / y = \ln(x + 1), y(x_0) = y_0\}$, com $x_0 = 0, y_0 = 1$

b) $\{y' / y = x^2 - 1, y(x_0) = y_0\}$, com $x_0 = 0, y_0 = 1$

c) $\{y' = 1 - y/x, y(x_0) = y_0\}$, com $x_0 = 1, y_0 = 1$

Questão 1: Determine a solução analítica $y(x)$ de cada PVI:

Verificacao da solucao analitica: Resultado tem que ser verdadeiro:

verificacao_igualdade = (sym)

$$0 = \frac{\frac{x}{(x+1)^2} + \log(x+1) - 1}{x+1} e^{x(\log(x+1) - 1)} - \frac{x(\log(x+1) - 1)}{(x+1)^2} e^{x(\log(x+1) - 1)} + e^{x(\log(x+1) - 1)}$$

f =

@(x, y) eval (RHS)

sol = (sym)

$$y(x) = (x + 1) e^{x(\log(x + 1) - 1)}$$

PVIstr = PVI: y'=y*log(x+1), y(0.00)=1.00

Verificacao da solucao analitica: Resultado tem que ser verdadeiro:

verificacao_igualdade = (sym) True

f =

@(x, y) eval (RHS)

sol = (sym)

$$y(x) = e^{\frac{x^2 x^2 - 3}{3}}$$

PVIstr = PVI: y'=y*(x**2 -1), y(0.00)=1.00

Verificacao da solucao analitica: Resultado tem que ser verdadeiro:

verificacao_igualdade = (sym) True

f =

@(x, y) eval (RHS)

sol = (sym)

$$y(x) = -\frac{x}{2}$$

PVIstr = PVI: y'=1-(y/x), y(0.00)=1.00

Questão 2: Converta a solução em uma função não-simbólica:

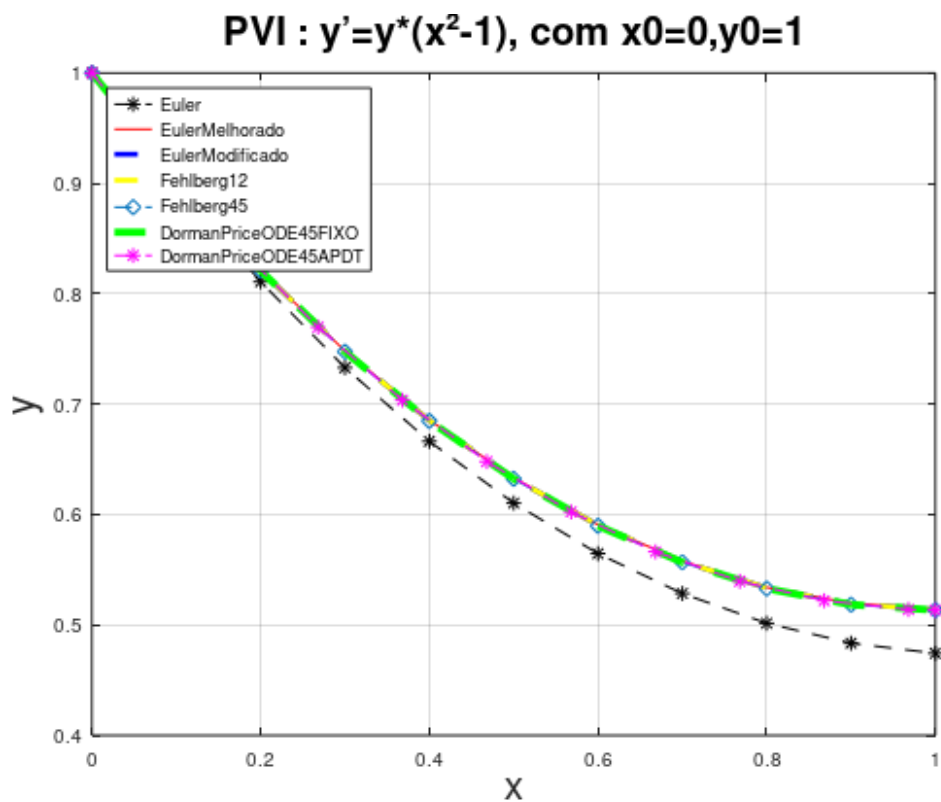
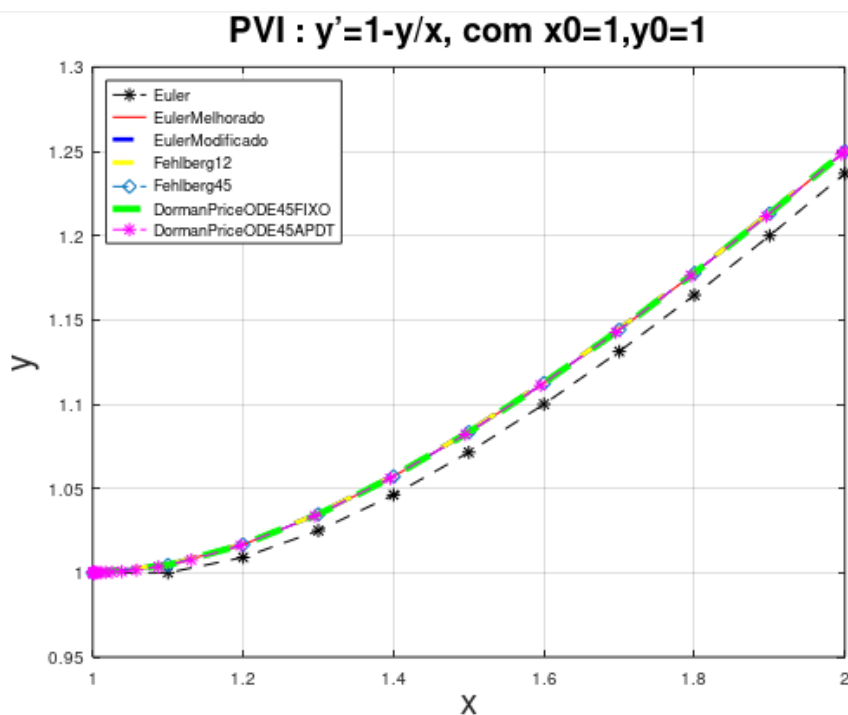


Figura 1 - questão 3 função b).



Questão 4: Calcule as aproximações da solução analítica, usando os seguintes métodos:

- Euler
- Euler Melhorado
- Euler Modificado
- Fehlberg RK(1) 2
- Fehlberg RK(4) 5
- Dormand-Prince com passo fixo
- Dormand-Prince com passo adaptativo

Solução da Questão 4 : Calcule as aproximações da solução analítica, usando os seguintes métodos:

Funcao: $y(x) = (x + 1) \cdot \exp(x \cdot (\log(x + 1) - 1))$

Euler

X	0.000000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000	0.600000	0.700000	0.800000	0.900000	1.000000
Y	1.000000	1.000000	1.009531	1.027937	1.054906	1.090401	1.134613	1.187940	1.250976	1.324506	1.409520

Euler Melhorado

X	0.000000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000	0.600000	0.700000	0.800000	0.900000	1.000000
Y	1.000000	1.004766	1.018801	1.041697	1.073347	1.113897	1.163717	1.223391	1.293712	1.375692	1.470580

Euler Modificado

X	0.000000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000	0.600000	0.700000	0.800000	0.900000	1.000000
Y	1.000000	1.004879	1.018990	1.041936	1.073615	1.114178	1.163997	1.223657	1.293951	1.375893	1.470728

Fehlberg RK(1)2

X	0.000000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000	0.600000	0.700000	0.800000	0.900000	1.000000
Y	1.000000	1.004879	1.018990	1.041935	1.073615	1.114178	1.163997	1.223658	1.293953	1.375896	1.470732

Fehlberg RK(4)5

X	0.000000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000	0.600000	0.700000	0.800000	0.900000	1.000000
Y	1.000000	1.004853	1.018963	1.041929	1.073647	1.114268	1.164167	1.223931	1.294360	1.376470	1.471518

Dormand-Prince - Passo fixo

X	0.000000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000	0.600000	0.700000	0.800000	0.900000	1.000000
Y	1.000000	1.004853	1.018963	1.041929	1.073647	1.114268	1.164167	1.223931	1.294360	1.376470	1.471518

Dormand-Prince - Passo adaptativo

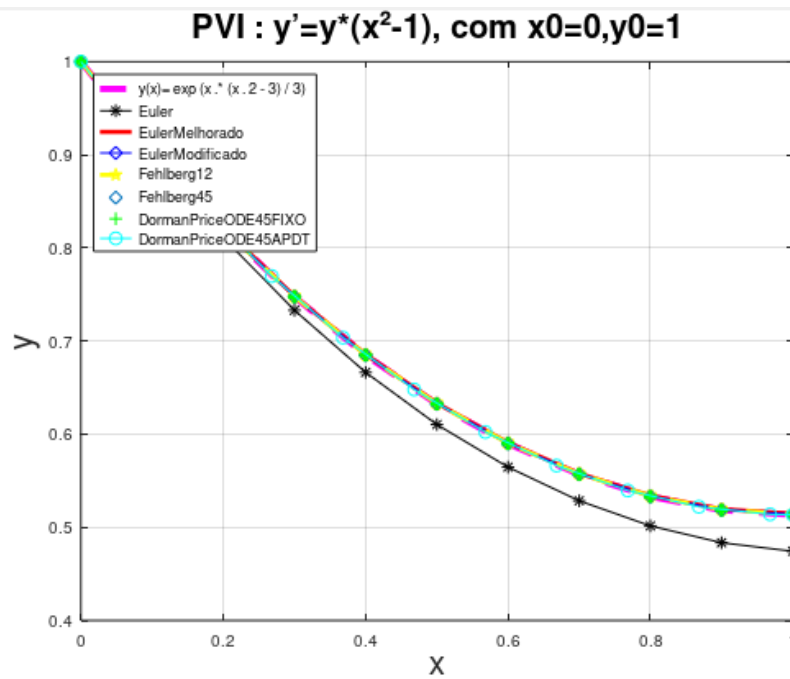
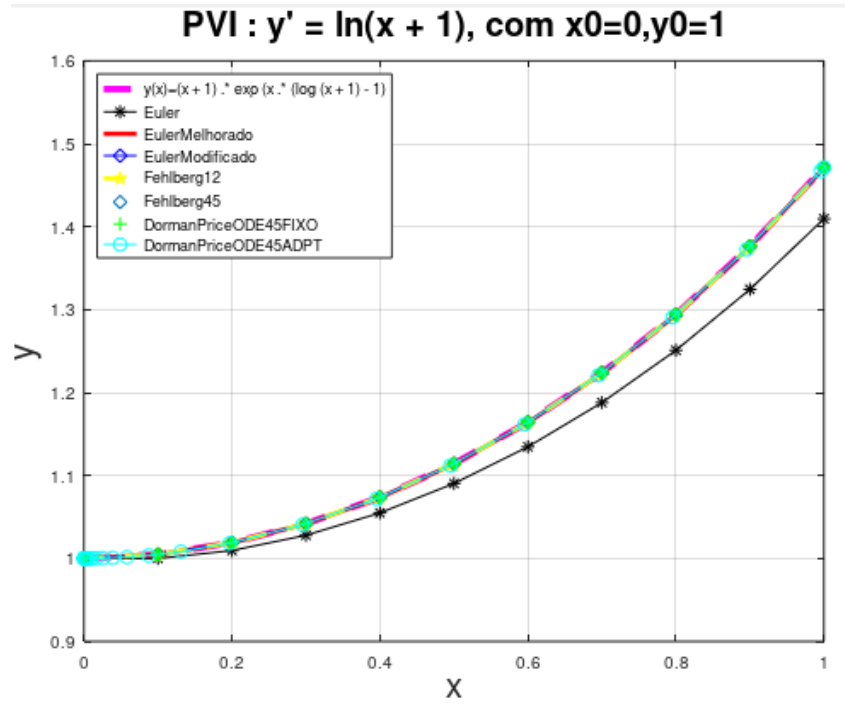
X	0.000000	0.000100	0.000250	0.000475	0.000812	0.001319	0.002078	0.003217	0.004926	0.007489	0.011333	0.017100	0.025749	0.038724	0.058186	0.087379	0.131168	0.196852	0.295378	0.395378	0.495378	0.595378	0.695378	0.795378	0.895378	0.995378	1.000000
Y	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000001	1.000002	1.000005	1.000012	1.000028	1.000064	1.000145	1.000329	1.000741	1.001662	1.003718	1.008283	1.018383	1.040675	1.071987	1.112190	1.161649	1.220941	1.290856	1.372401	1.466819	1.471518

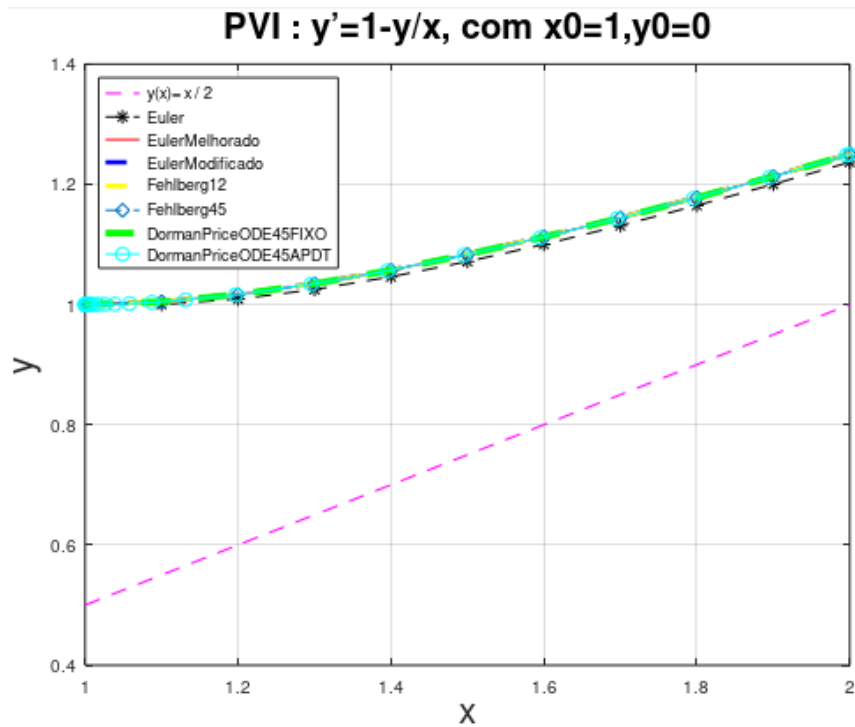
Funcao: $y(x) = \exp(x \cdot (x^2 - 3) / 3)$												
Euler												
X	0.000000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000	0.600000	0.700000	0.800000	0.900000	1.000000	
Y	1.000000	0.900000	0.810900	0.733054	0.666346	0.610373	0.564595	0.528461	0.501509	0.483455	0.474269	
Euler Melhorado												
X	0.000000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000	0.600000	0.700000	0.800000	0.900000	1.000000	
Y	1.000000	0.905450	0.821471	0.748252	0.685640	0.633291	0.590797	0.557791	0.534039	0.519535	0.514600	
Euler Modificado												
X	0.000000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000	0.600000	0.700000	0.800000	0.900000	1.000000	
Y	1.000000	0.905238	0.821131	0.747845	0.685207	0.632857	0.590371	0.557368	0.533605	0.519064	0.514051	
Fehlberg RK(1)2												
X	0.000000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000	0.600000	0.700000	0.800000	0.900000	1.000000	
Y	1.000000	0.905237	0.821130	0.747843	0.685205	0.632855	0.590368	0.557365	0.533602	0.519061	0.514048	
Fehlberg RK(4)5												
X	0.000000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000	0.600000	0.700000	0.800000	0.900000	1.000000	
Y	1.000000	0.905139	0.820917	0.747516	0.684774	0.632337	0.589783	0.556735	0.532947	0.518404	0.513417	
Dormand-Prince - Passo fixo												
X	0.000000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.500000	0.600000	0.700000	0.800000	0.900000	1.000000	
Y	1.000000	0.905139	0.820917	0.747516	0.684774	0.632337	0.589783	0.556735	0.532947	0.518404	0.513417	
Dormand-Prince - Passo adaptativo												
X	0.000000	0.068129	0.168129	0.268129	0.368129	0.468129	0.568129	0.668129	0.768129	0.868129	0.968129	1.000000
Y	1.000000	0.934238	0.846585	0.769739	0.703632	0.647956	0.602297	0.566254	0.539529	0.522024	0.513933	0.513417

Funcao: $y(x) = x / 2$

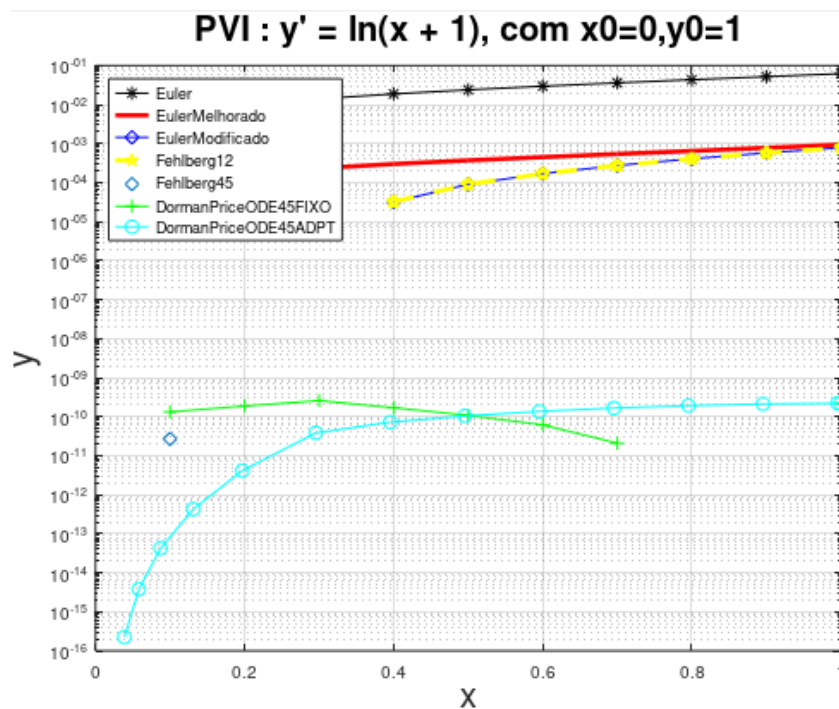
Euler																					
X	1.000000	1.100000	1.200000	1.300000	1.400000	1.500000	1.600000	1.700000	1.800000	1.900000	2.000000										
Y	1.000000	1.000000	1.009091	1.025000	1.046154	1.071429	1.100000	1.131250	1.164706	1.200000	1.236842										
Euler Melhorado																					
X	1.000000	1.100000	1.200000	1.300000	1.400000	1.500000	1.600000	1.700000	1.800000	1.900000	2.000000										
Y	1.000000	1.004545	1.016667	1.034615	1.057143	1.083333	1.112500	1.144118	1.177778	1.213158	1.250000										
Euler Modificado																					
X	1.000000	1.100000	1.200000	1.300000	1.400000	1.500000	1.600000	1.700000	1.800000	1.900000	2.000000										
Y	1.000000	1.004762	1.017015	1.035044	1.057619	1.083836	1.113017	1.144639	1.178297	1.213672	1.250506										
Fehlberg RK(1)2																					
X	1.000000	1.100000	1.200000	1.300000	1.400000	1.500000	1.600000	1.700000	1.800000	1.900000	2.000000										
Y	1.000000	1.004760	1.017012	1.035040	1.057615	1.083833	1.113013	1.144635	1.178293	1.213668	1.250502										
Fehlberg RK(4)5																					
X	1.000000	1.100000	1.200000	1.300000	1.400000	1.500000	1.600000	1.700000	1.800000	1.900000	2.000000										
Y	1.000000	1.004545	1.016667	1.034615	1.057143	1.083333	1.112500	1.144118	1.177778	1.213158	1.250000										
Dormand-Prince - Passo fixo																					
X	1.000000	1.100000	1.200000	1.300000	1.400000	1.500000	1.600000	1.700000	1.800000	1.900000	2.000000										
Y	1.000000	1.004545	1.016667	1.034615	1.057143	1.083333	1.112500	1.144118	1.177778	1.213158	1.250000										
Dormand-Prince - Passo adaptativo																					
X	1.000000	1.000100	1.000250	1.000475	1.000813	1.001319	1.002078	1.003217	1.004926	1.007489	1.011333	1.017100	1.025749	1.038724	1.058186	1.087379	1.131168	1.196852	1.295378	1.39	
5378	1.495378	1.595378	1.695378	1.795378	1.895378	1.995378	2.000000														
Y	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000001	1.000002	1.000005	1.000012	1.000028	1.000063	1.000144	1.000323	1.000722	1.001600	1.003511	1.007605	1.016189	1.033677	1.05	
6015	1.082053	1.111094	1.142609	1.176182	1.211489	1.248268	1.250000														

Questão 5: Insira os pontos (xi,yi) de cada método no gráfico junto com a função verdadeira y(x).





Questão 6: Gere um no gráfico de erros de cada método relativo à função verdadeira $y(x)$, com eixo y logarítmico.



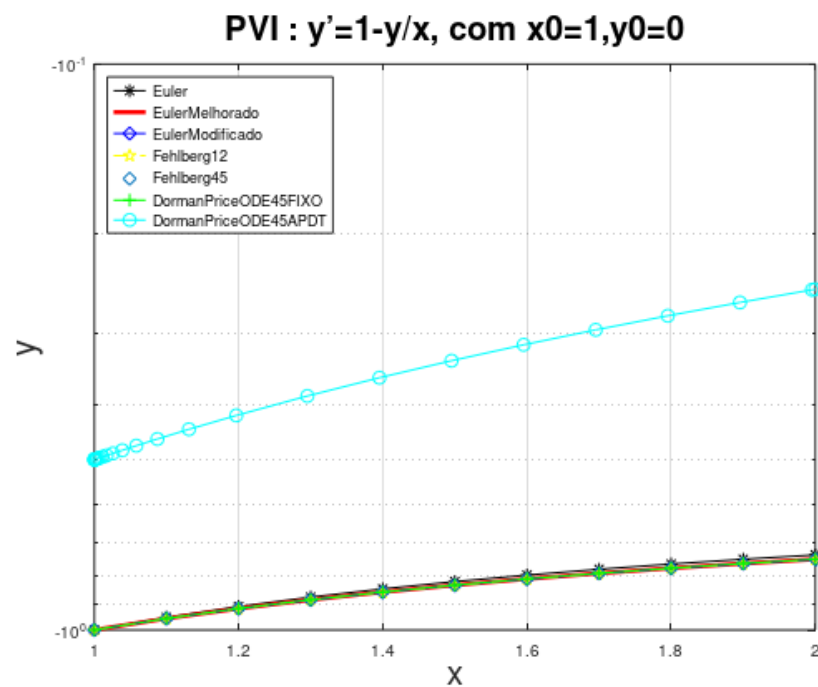
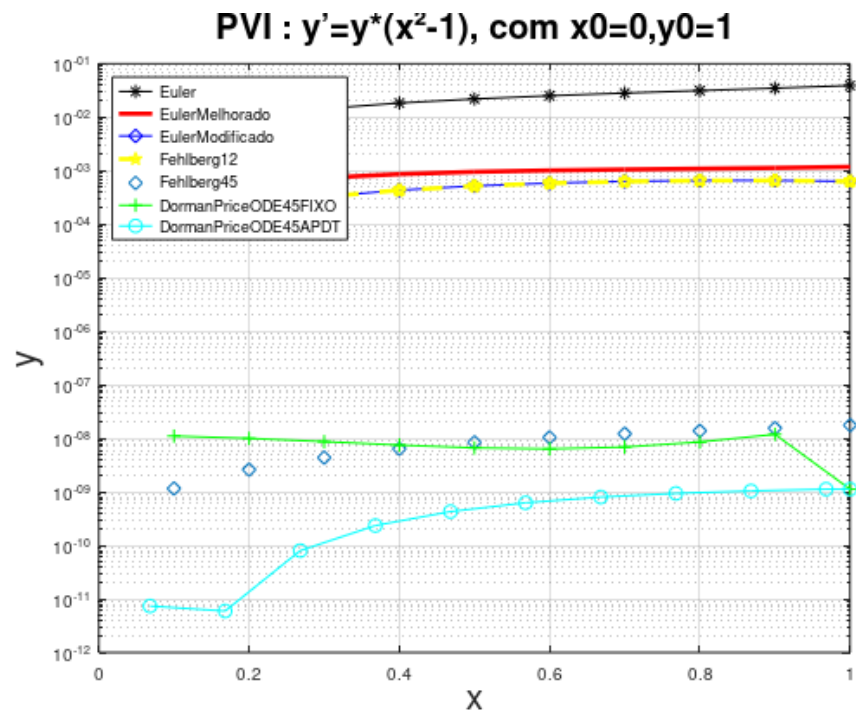


Figura 22 - questão 6 função c).

Questão 7 e 8: Mostre uma tabela com os valores e erros de cada método:

Solução da Questão 7 e 8: Mostre uma tabela com os valores de cada método e seus erros respectivamente:

PVI: ==> Funcao: $y(x) = (x + 1) \cdot \exp(x \cdot (\log(x + 1) - 1))$

X	Valor Ex.	Euler	Euler Mel.	Euler Mod.	Fehl12	Fehl45	ODE45 fixo
0.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.100000	1.004853	1.000000	1.004766	1.004879	1.004879	1.004853	1.004853
0.200000	1.018963	1.009531	1.018801	1.018990	1.018990	1.018963	1.018963
0.300000	1.041929	1.027937	1.041697	1.041936	1.041935	1.041929	1.041929
0.400000	1.073647	1.054906	1.073347	1.073615	1.073615	1.073647	1.073647
0.500000	1.114268	1.090401	1.113897	1.114178	1.114178	1.114268	1.114268
0.600000	1.164167	1.134613	1.163717	1.163997	1.163997	1.164167	1.164167
0.700000	1.223931	1.187940	1.223391	1.223657	1.223658	1.223931	1.223931
0.800000	1.294360	1.250976	1.293712	1.293951	1.293953	1.294360	1.294360
0.900000	1.376470	1.324506	1.375692	1.375893	1.375896	1.376470	1.376470
1.000000	1.471518	1.409520	1.470580	1.470728	1.470732	1.471518	1.471518

Erros

0.000000	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00
0.100000	0.000000e+00	4.852935e-03	8.742633e-05	2.608110e-05	2.572818e-05	2.685896e-11	1.320462e-10
0.200000	0.000000e+00	9.432415e-03	1.628845e-04	2.689664e-05	2.640717e-05	6.520584e-11	1.879206e-10
0.300000	0.000000e+00	1.399179e-02	2.322041e-04	6.993726e-06	6.537900e-06	2.732787e-10	2.582177e-10
0.400000	0.000000e+00	1.874052e-02	3.002401e-04	3.197081e-05	3.224491e-05	6.001146e-10	1.694593e-10
0.500000	0.000000e+00	2.386697e-02	3.713868e-04	9.034817e-05	9.029838e-05	1.053029e-09	1.079470e-10
0.600000	0.000000e+00	2.955403e-02	4.499525e-04	1.700581e-04	1.695360e-04	1.643274e-09	6.143130e-11
0.700000	0.000000e+00	3.599108e-02	5.404638e-04	2.744091e-04	2.732501e-04	2.385524e-09	2.090572e-11
0.800000	0.000000e+00	4.338388e-02	6.479417e-04	4.080863e-04	4.060997e-04	3.297347e-09	2.142664e-11
0.900000	0.000000e+00	5.196386e-02	7.781760e-04	5.772600e-04	5.742200e-04	4.398611e-09	7.355805e-11
1.000000	0.000000e+00	6.199749e-02	9.380216e-04	7.897964e-04	7.854306e-04	5.710731e-09	2.201113e-10

Figura 15 - questão 7 e 8 função a).

PVI: ==> Funcao: $y(x) = \exp(x \cdot (x^2 - 3) / 3)$

X	Valor Ex.	Euler	Euler Mel.	Euler Mod.	Fehl12	Fehl45	ODE45 fixo
0.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.100000	0.905139	0.900000	0.905450	0.905238	0.905237	0.905139	0.905139
0.200000	0.820917	0.810900	0.821471	0.821131	0.821130	0.820917	0.820917
0.300000	0.747516	0.733054	0.748252	0.747845	0.747843	0.747516	0.747516
0.400000	0.684774	0.666346	0.685640	0.685207	0.685205	0.684774	0.684774
0.500000	0.632337	0.610373	0.633291	0.632857	0.632855	0.632337	0.632337
0.600000	0.589783	0.564595	0.590797	0.590371	0.590368	0.589783	0.589783
0.700000	0.556735	0.528461	0.557791	0.557368	0.557365	0.556735	0.556735
0.800000	0.532947	0.501509	0.534039	0.533605	0.533602	0.532947	0.532947
0.900000	0.518404	0.483455	0.519535	0.519064	0.519061	0.518404	0.518404
1.000000	0.513417	0.474269	0.514600	0.514051	0.514048	0.513417	0.513417

Erros

0.000000	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00
0.100000	0.000000e+00	5.139081e-03	3.109192e-04	9.841922e-05	9.820277e-05	1.155067e-09	1.104874e-08
0.200000	0.000000e+00	1.001695e-02	5.543747e-04	2.136905e-04	2.130096e-04	2.598544e-09	9.989167e-09
0.300000	0.000000e+00	1.446208e-02	7.362634e-04	3.290516e-04	3.278014e-04	4.369798e-09	8.692792e-09
0.400000	0.000000e+00	1.842811e-02	8.658829e-04	4.333856e-04	4.315650e-04	6.369688e-09	7.492382e-09
0.500000	0.000000e+00	2.196398e-02	9.544610e-04	5.203819e-04	5.180593e-04	8.432707e-09	6.638539e-09
0.600000	0.000000e+00	2.518863e-02	1.013931e-03	5.872244e-04	5.845113e-04	1.040125e-08	6.351588e-09
0.700000	0.000000e+00	2.827391e-02	1.056044e-03	6.331040e-04	6.301393e-04	1.218653e-08	6.876483e-09
0.800000	0.000000e+00	3.143781e-02	1.091805e-03	6.576822e-04	6.546274e-04	1.381555e-08	8.549943e-09
0.900000	0.000000e+00	3.494937e-02	1.131143e-03	6.594523e-04	6.564996e-04	1.547893e-08	1.190032e-08
1.000000	0.000000e+00	3.914792e-02	1.182655e-03	6.337574e-04	6.311523e-04	1.761054e-08	1.123154e-09

Figura 16 - questão 7 e 8 função b).

PVI: ==> Funcao: $y(x) = x / 2$

X	Valor Ex.	Euler	Euler Mel.	Euler Mod.	Fehl12	Fehl45	ODE45 fixo
1.000000	0.500000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1.100000	0.550000	1.000000	1.004545	1.004762	1.004760	1.004545	1.004545
1.200000	0.600000	1.009091	1.016667	1.017015	1.017012	1.016667	1.016667
1.300000	0.650000	1.025000	1.034615	1.035044	1.035040	1.034615	1.034615
1.400000	0.700000	1.046154	1.057143	1.057619	1.057615	1.057143	1.057143
1.500000	0.750000	1.071429	1.083333	1.083836	1.083833	1.083333	1.083333
1.600000	0.800000	1.100000	1.112500	1.113017	1.113013	1.112500	1.112500
1.700000	0.850000	1.131250	1.144118	1.144639	1.144635	1.144118	1.144118
1.800000	0.900000	1.164706	1.177778	1.178297	1.178293	1.177778	1.177778
1.900000	0.950000	1.200000	1.213158	1.213672	1.213668	1.213158	1.213158
2.000000	1.000000	1.236842	1.250000	1.250506	1.250502	1.250000	1.250000

Erros

1.000000	0.000000e+00	5.000000e-01	5.000000e-01	5.000000e-01	5.000000e-01	5.000000e-01	5.000000e-01
1.100000	0.000000e+00	4.500000e-01	4.545455e-01	4.547619e-01	4.547602e-01	4.545455e-01	4.545455e-01
1.200000	0.000000e+00	4.090909e-01	4.166667e-01	4.170149e-01	4.170122e-01	4.166667e-01	4.166667e-01
1.300000	0.000000e+00	3.750000e-01	3.846154e-01	3.850437e-01	3.850404e-01	3.846154e-01	3.846154e-01
1.400000	0.000000e+00	3.461538e-01	3.571429e-01	3.576190e-01	3.576153e-01	3.571429e-01	3.571429e-01
1.500000	0.000000e+00	3.214286e-01	3.333333e-01	3.338364e-01	3.338325e-01	3.333333e-01	3.333333e-01
1.600000	0.000000e+00	3.000000e-01	3.125000e-01	3.130165e-01	3.130125e-01	3.125000e-01	3.125000e-01
1.700000	0.000000e+00	2.812500e-01	2.941176e-01	2.946387e-01	2.946346e-01	2.941176e-01	2.941176e-01
1.800000	0.000000e+00	2.647059e-01	2.777778e-01	2.782973e-01	2.782933e-01	2.777778e-01	2.777778e-01
1.900000	0.000000e+00	2.500000e-01	2.631579e-01	2.636721e-01	2.636681e-01	2.631579e-01	2.631579e-01
2.000000	0.000000e+00	2.368421e-01	2.500000e-01	2.505063e-01	2.505024e-01	2.500000e-01	2.500000e-01

Figura 17 - questão 7 e 8 função c).

REFERÊNCIAS

- [1] Capacitor. Capacitor — Wikipédia, a enciclopédia livre. <https://pt.wikipedia.org/wiki/Capacitor>, 2021. [Online; acessado 10-July-2021]. 9
- [2] A. Kaw and E.E. Kalu. Numerical Methods with Applications: Abridged. Lulu.com, 2009. https://books.google.de/books?id=bCI_AgAAQBAJ.
- [3] Lista de Métodos de Runge-Kutta. Lista de métodos de Runge-Kutta — Wikipédia, a enciclopédia livre. https://pt.wikipedia.org/wiki/Lista_de_m%C3%A9todos_Runge-Kutta, 2021. [Online; acessado 10-July-2021].
- [4] Lista de Métodos de Runge-Kutta (em inglês). Lista de métodos de Runge-Kutta (em inglês) — Wikipédia, a enciclopédia livre. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Runge%E2%80%93Kutta_methods, 2021. [Online; acessado 10-July-2021].
- [5] Métodos de Runge-Kutta. Métodos de Runge-Kutta — Wikipédia, a enciclopédia livre. https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta, 2021. [Online; acessado 10-July-2021].
- [6] Retificador de onda completa. Retificador de onda completa — Wikipédia, a enciclopédia livre. https://pt.wikipedia.org/wiki/Retificador_de_onda_completa, 2021. [Online; acessado 10-July-2021].
- [7] Sistema Autônomo. Sistema autônomo — Wikipédia, a enciclopédia livre. https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_aut%C3%B4nomo_%28matem%C3%A1tica%29, 2021. [Online; acessado 10-July-2021].