Projetos no domínio da frequência

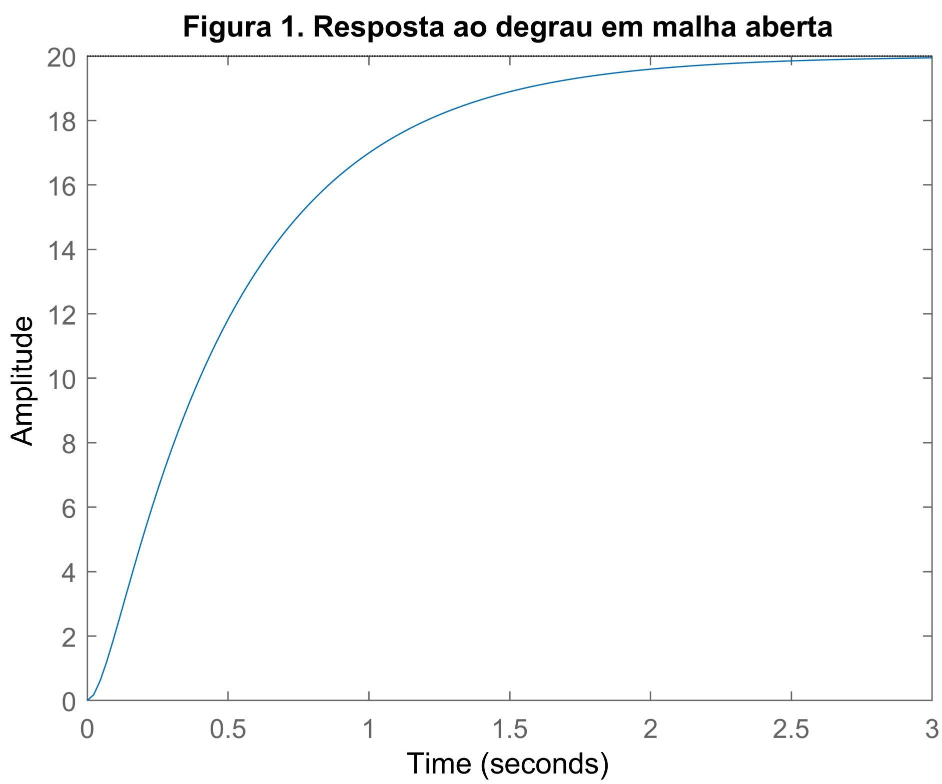
Projeto do controlador avanço-atraso

Este live script visa apresentar e discutir os projetos de compensadores avanço e atraso de fase, avaliando-os em simulação.

Definição do modelo e especificações de projeto.

Seja a FT de MA $G(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$, assumindo os parâmetros abaixo:

```
K=20;
T1=0.5;
T2=0.05;
G=tf(K,conv([T1 1],[T2 1]));
figure;step(G);
title('Figura 1. Resposta ao degrau em malha aberta');
```



Especificações de projeto:

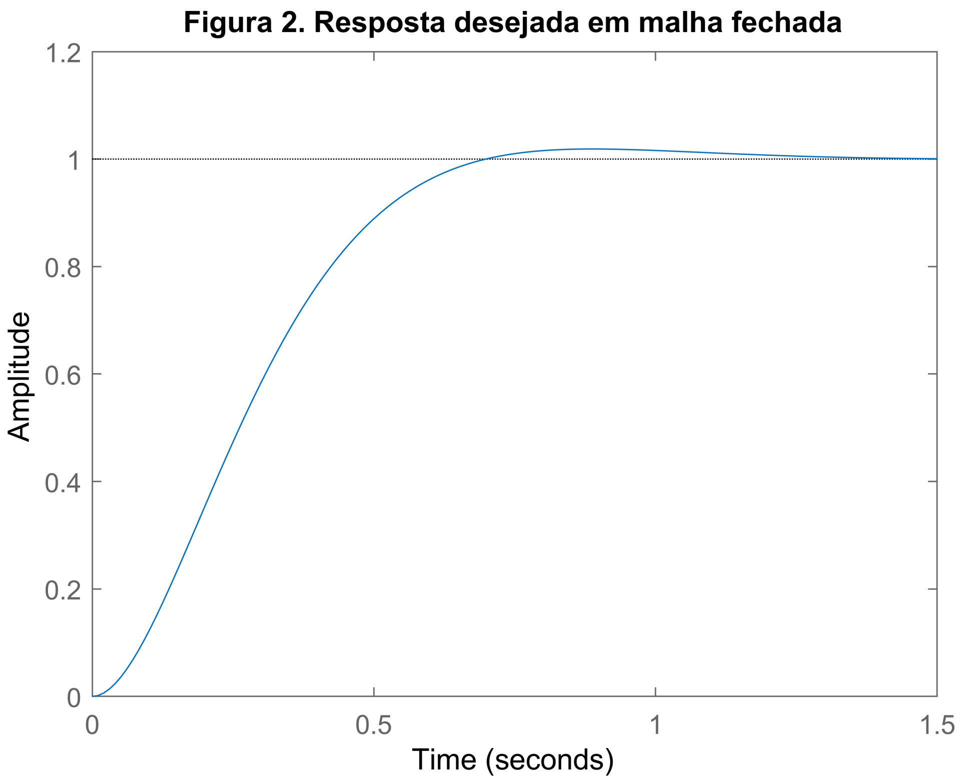
Erro em regime $\leq$1%

Tempo de estabelecimento $\leq$1 segundo.

Sobreelevação $\leq$4%, o que corresponde a $\zeta \geq 0.7$.

A resposta deste modelo será dada pelo modelo de referência $M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{32.6}{s^2 + 8.96s + 32.6}$

```
UPe=4;
tse=1;
M=tf(32.6,[1 8.96 32.6]);
figure;step(M);
title('Figura 2. Resposta desejada em malha fechada');
```



Como o modelo é tipo 1 e os compensadores avanço e atraso não têm polo na origem (como o PI), deve-se obter um ganho para atender o erro em regime. Esse ganho também deve conseguir uma resposta rápida.

Como o erro em regime é dado por $E = \frac{1}{K_c K}$, onde Ké o ganho de G(s), obtemos o ganho do controlador K_c de

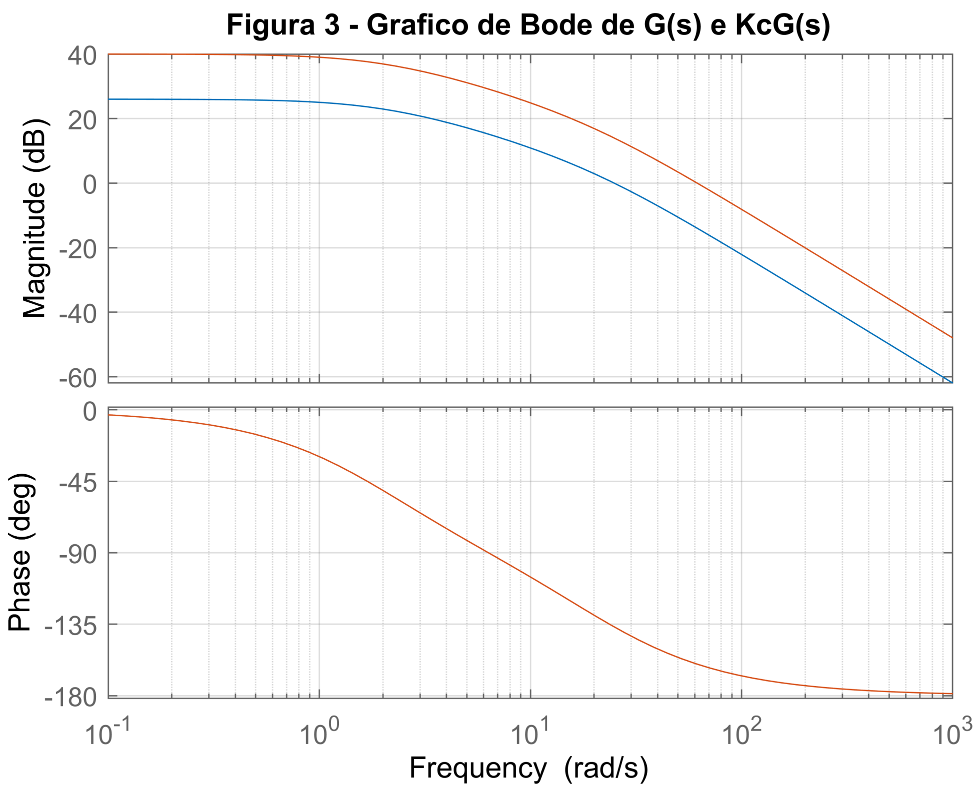
```
Kc=1/(K*0.01)
```

```
Kc = 5
```

IMPORTANTE: talvez esse ganho garante o erro em regime especificado, mas talvez precise ser aumentado para atender ao tempo de estabelecimento especificado ts.

Observe abaixo o gráfico de Bode de $G(s)$ e de $K_c G(s)$.

```
figure
bode(G,Kc*G);
title('Figura 3 - Grafico de Bode de G(s) e KcG(s)');grid
```



A margem de fase de G(s) é 43 graus, sendo reduzida para 19 graus com a adição do ganho Kc.

O gráfico de bode com o ganho Kc é agora utilizado para o projeto dos compensadores.

Projeto do compensador atraso

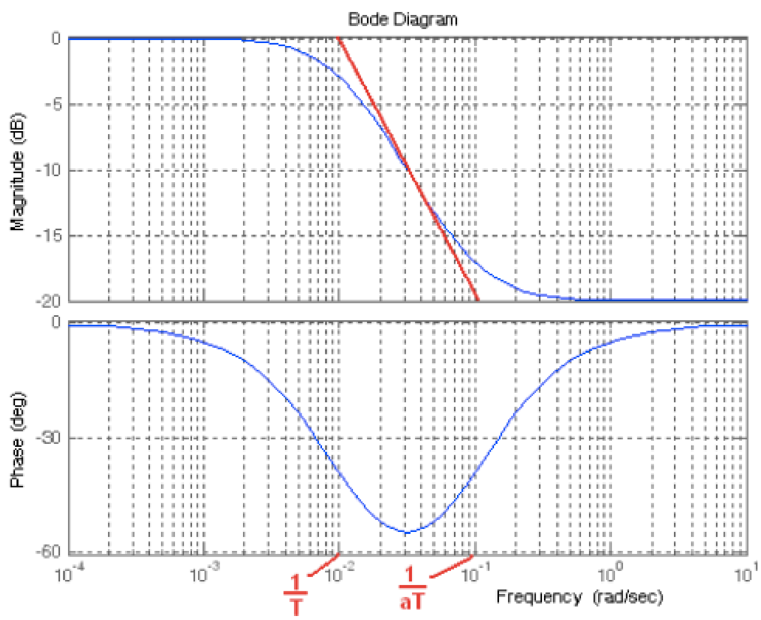
O compensador é dado por $C(s) = \frac{1}{a}\frac{1+aTs}{1+Ts}$, como $a < 1$.

Como o polo está em uma frequência mais baixa, $s = -1/T$, ele atrasa a fase antes que o zero em $s = -1/aT$ avance a fase.

Para aumentar a margem de fase, a curva de módulo deve ser reduzida de forma que cruze em 0dB na frequência onde a margem de fase seja a desejada.

O projeto do compensador atraso é mostrado na figura abaixo, para $a = 0.1$ e $T = 100$.

Usa-se o gráfico de Bode de malha aberta de Kc*g2 mostrado na Figura 3 para ver quanto o módulo deve ser reduzido.



O ganho começa com 0dB e atinge o máximo de - 20dB. O valor mínimo da fase do controlador é -55 .

O zero do controlador está em 1/aT=0.1rad/s. O polo está em 1/T=0.01rad/s. O ganho começa a diminuir 20dB/dec a partir de 0.01rad/s (gráfico assintótico).

Nesta mesma frequência a fase já diminuiu 45 graus.

Em aproximadamente 0.1rad/s (polo) a inclinação da curva de módulo passa a ser 0, e a fase continua em -45graus, devido à fase somada pelo zero e subtraída pelo polo.

Uma década após o polo (1rad/s), a fase volta a ser 0 graus e o módulo se mantém em -20dB.

Um menor valor de **a** faz a curva de módulo diminuir, aumentando a Margem de Fase.

Os passos de projeto são:

1) Escolha a nova frequência ω_g' onde o módulo dever cruzar por 0 dB para se ter a margem de fase desejada MF'.

2) Calcule o valor de a<1 tal que $20log_{10}a = -|G(j\omega_g'|dB$, ou seja, $a = 10^{\frac{-|G(j\omega_g'|}{20}}$.

3) Calcule T de modo que o zero do atraso em $\frac{1}{aT}$ esteja uma década antes da frequência ω_g', ou seja,

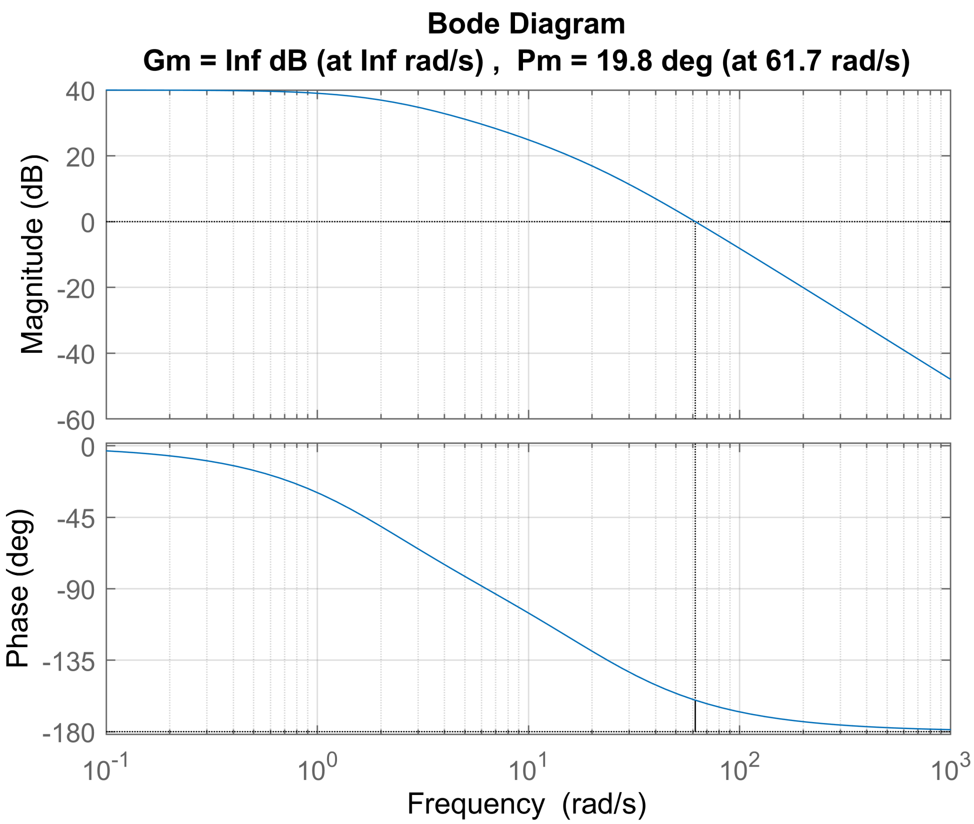
$$\frac{1}{aT} = \frac{\omega_g'}{10}$$

Problemas de projeto: se a atenuação necessária no módulo for muito grande, isto pode inviabilizar o projeto deste controlador.

Seguimos estes passos agora usando o gráfico de Bode de Kc*G.

A margem de fase é 15 graus. Suponha que se deseje uma nova margem de fase de 45 graus.

```
figure;margin(Kc*G);grid;
```



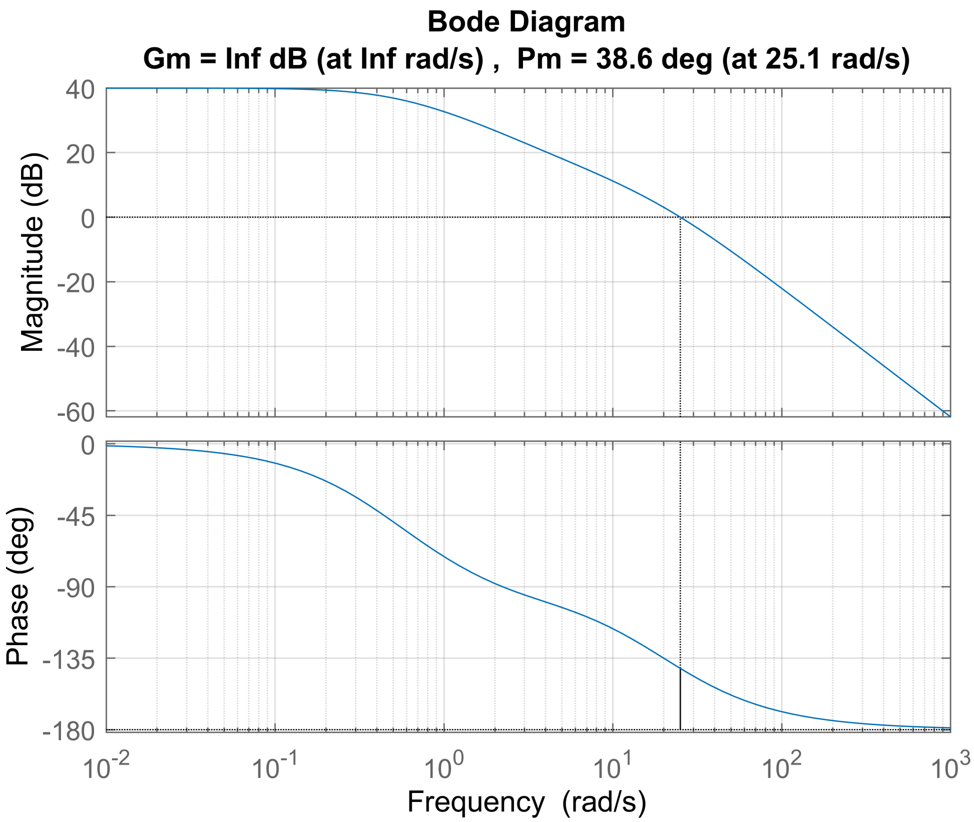
Para que a curva de módulo cruze por 0 dB na frequência wgl rad/s, o módulo deve ser reduzido em 20*log10(bode(Kc*G,wgl)).

Vamos escolher wgl=25rad/s para obter MF=45 graus.

```
wgl=25; % escolher valor
modulo=20*log10(bode(Kc*G,wgl))
```

```
modulo = 13.9475
```

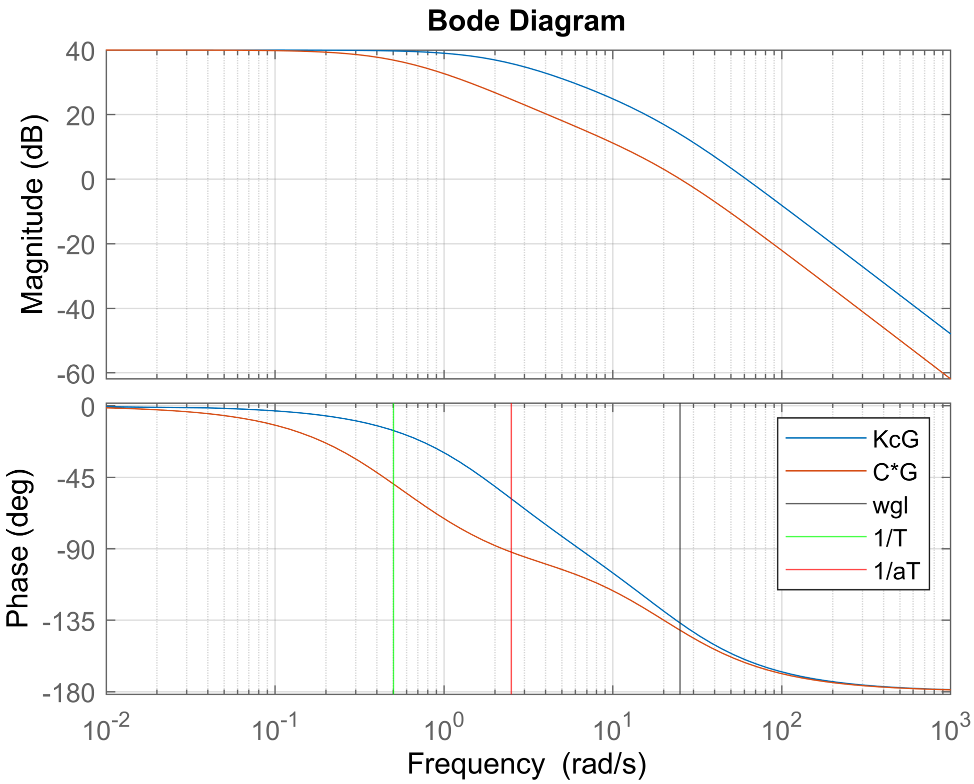
```
a=10^(-modulo/20);
T=10/(a*wgl);
C=tf(Kc*[a*T 1],[T 1]);
figure;
margin(C*G);grid;
```



Observa-se que a Margem de Fase obtida foi menor de 45 graus.

Deve-se especificar uma margem de fase desejada MFd sempre um pouco maior que a desejada. Pode-se observar no gráfico de Bode abaixo que a fase sempre atrasa um pouco em wgl devido ao atraso do polo em $s = -1/T$, de modo que não se consegue a MF o que foi especificada.

```
figure;bode(Kc*G,C*G);grid;
xline(wgl);
xline(1/T,'g');
xline(1/(a*T),'r');legend('KcG','C*G','wgl','1/T','1/aT');
```



Usaremos agora a função atraso (projat).

[c1,a1, T1]=projat(G,Kc,MFd);

Esta função executa os passos do projeto do compensador de atraso de fase.

Deve-se fornecer a FT G, o ganho Kc para atender o erro em regime, e a margem de fase desejada.

A frequência onde ocorre o cruzamento da curva de módulo por 0dB (wgl) será calculada a partir dela.

O valor de a1 é calculado encontrando o módulo que deve ser reduzido para passar por 0dB em wgl.

Logo, a1=10^(-modulo/20), sendo modulo= 20*log10(bode(Kc*G,wgl)).

T1 é calculado de modo que o polo esteja uma década antes de wgl. O compensador vem em c1, na forma $C_1(s) = K_c \dfrac{1 + aTs}{1 + Ts}$.

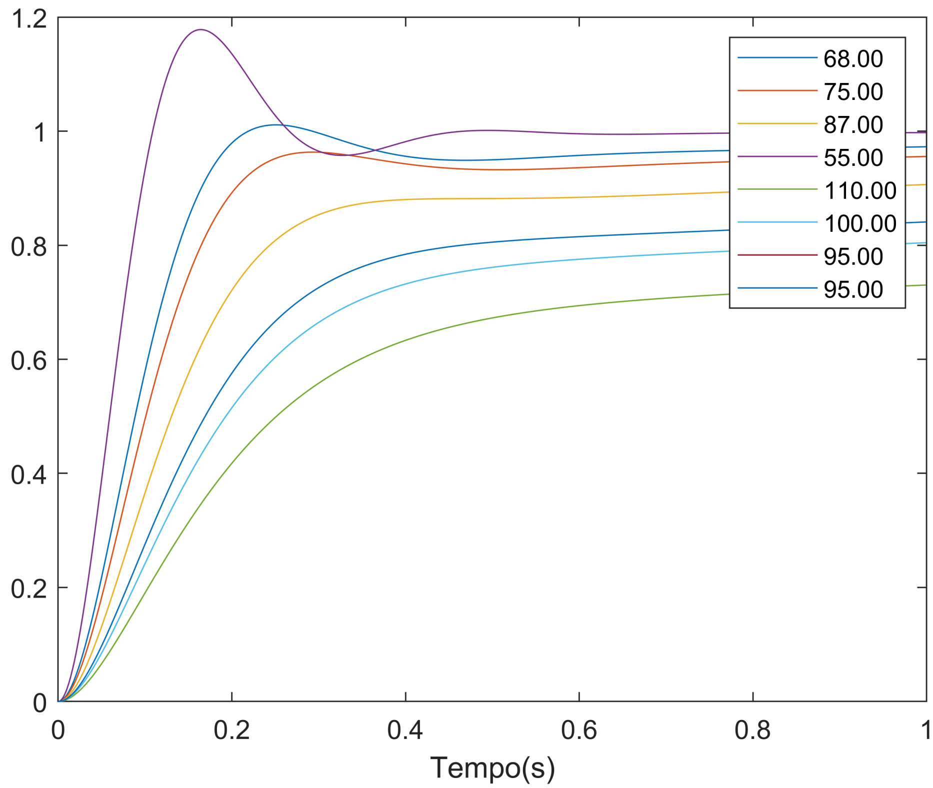
Inicialização:

```
leg={};
UP=[];
MFD=[];
TS=[];
MF=[];
Y=[];
```

```
t=((1:1000)-1)/1000;
k1=1;
```

Varie o valor da margem de fase desejada MFd e observe o efeito na resposta ao degrau.

```
MFd=95; % Escolher valor
MFD=[MFD;MFd];
[C,a1, T1]=projat(G,Kc*20,MFd);
leg{k1}=num2str(MFd,'%3.2f');k1=k1+1;
M1=feedback(C*G,1);
y=step(M1,t);
Y=[Y y];
figure;
plot(t,Y);legend(leg);
xlabel('Tempo(s)');
```




```
S=stepinfo(M1);
UP=[UP; floor(S.Overshoot)];
TS=[TS; S.SettlingTime];
[~,mf]=margin(C*G);
MF=[MF; floor(mf)];
Tabela1=table(MFD,MF,UP,TS)
```

Tabela1 = 8×4 table

	MFD	MF	UP	TS
1	68	65	1	1.2893
2	75	71	0	1.9309

	MFD	MF	UP	TS
3	87	81	0	3.6612
4	55	49	17	0.3951
5	110	107	0	13.1646
6	100	97	0	8.1339
7	95	91	0	6.3110
8	95	91	0	6.3110

Recorde os valores especificados de UP e ts:

```
UPe
```

```
UPe = 4
```

```
tse
```

```
tse = 1
```

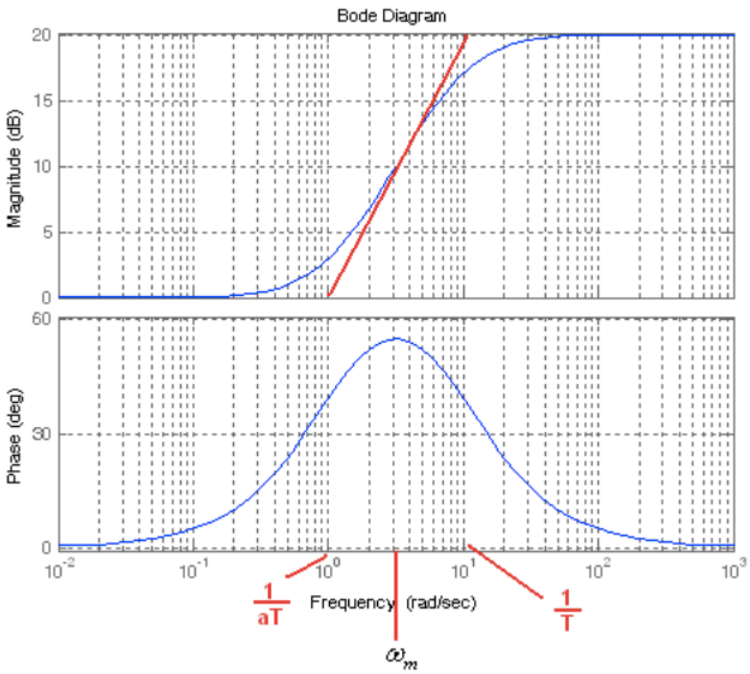
Projeto do compensador avanço

O compensador avanço é dado por $C(s) = \frac{1}{a}\frac{1 + aTs}{1 + Ts}$, com $a > 1$.

Como o zero está em uma frequência mais baixa, $s = -1/aT$, ele avança a fase antes que o polo em $s = -1/T$ atrase a fase.

Para aumentar a margem de fase, a curva de fase deve ser aumentada próximo à frequência onde o módulo cruza em 0dB, de modo que a margem de fase atual mais a adicionada seja igual à desejada.

O projeto do compensador atraso é mostrado na figura abaixo, para $a = 10$ e $T = 1$.



O ganho começa com 0dB e atinge o máximo de 20dB. O valor máximo da fase do controlador e̊ 55 .

O zero do controlador está em 1/aT=1rad/s. O polo está em 1/T=10rad/s.

O ganho começa aumentar 20dB/dec a partir de 1rad/s (gráfico assintótico).

Nesta mesma frequência a fase já aumentou 45 graus. Em aproximadamente 10rad/s (polo) a inclinação da curva de módulo passa a ser 0, e a fase continua em 45graus, devido a ̀fase somada pelo zero e subtraída pelo polo. Uma década após o polo (100rad/s), a fase volta a ser 0 graus e o módulo se mantém em 20dB.

A frequência ω_m na qual o avanço de fase máximo é a média entre $1/aT$ e $1/T$.

$$\log_{10}\omega_m = \frac{1}{2}\left(\log_{10}\frac{1}{aT} + \log_{10}\frac{1}{T}\right) \quad \text{ou} \quad \log_{10}\omega_m = \log_{10}\frac{1}{\sqrt{aT}}$$

Assim,

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

O avanço de fase ϕ_m é dado por

$$\angle G_c(j\omega) = \phi(j\omega) = tg^{-1}\omega aT - tg^{-1}\omega T$$

Substituindo $\omega = \omega_m$ nesta expressão e manipulando, vem

$$sen\phi_m = \frac{a-1}{a+1}$$

ou

$$a = \frac{1+\operatorname{sen}\phi_m}{1-\operatorname{sen}\phi_m}$$

Módulo adicionado pelo controlador:

$$M(j\omega) = 20\log_{10}\omega aT - 20\log_{10}\omega T$$
$$M\left(j\frac{1}{aT}\right) = 0$$
$$M\left(j\frac{1}{T}\right) = 20\log_{10} a$$
$$M\left(j\frac{1}{\sqrt{a}T}\right) = 10\log_{10} a$$

Logo, na frequência ω_m adiciona-se ϕ_m graus à margem de fase e $10log_{10}a$ ao módulo.

Usa-se o gráfico de Bode de malha aberta de Kc*g2 mostrado na Figura 3 para ver quanta fase deve ser adicionada.

Os passos de projeto são:

1) Desenhe o gráfico de Bode com o ganho Kc para atender o erro em regime.

2) Verifique a fase ϕ_m que deve ser adicionada à curva de fase, de modo que $MF + \phi_m$ seja igual a MF', a margem de fase desejada.

3) Calcular **a** de $a = \dfrac{1 + sen\phi_m}{1 - sen\phi_m}$

4) Verificar a quantidade de módulo adicionada pelo controlador, igual a $10log_{10}a$.

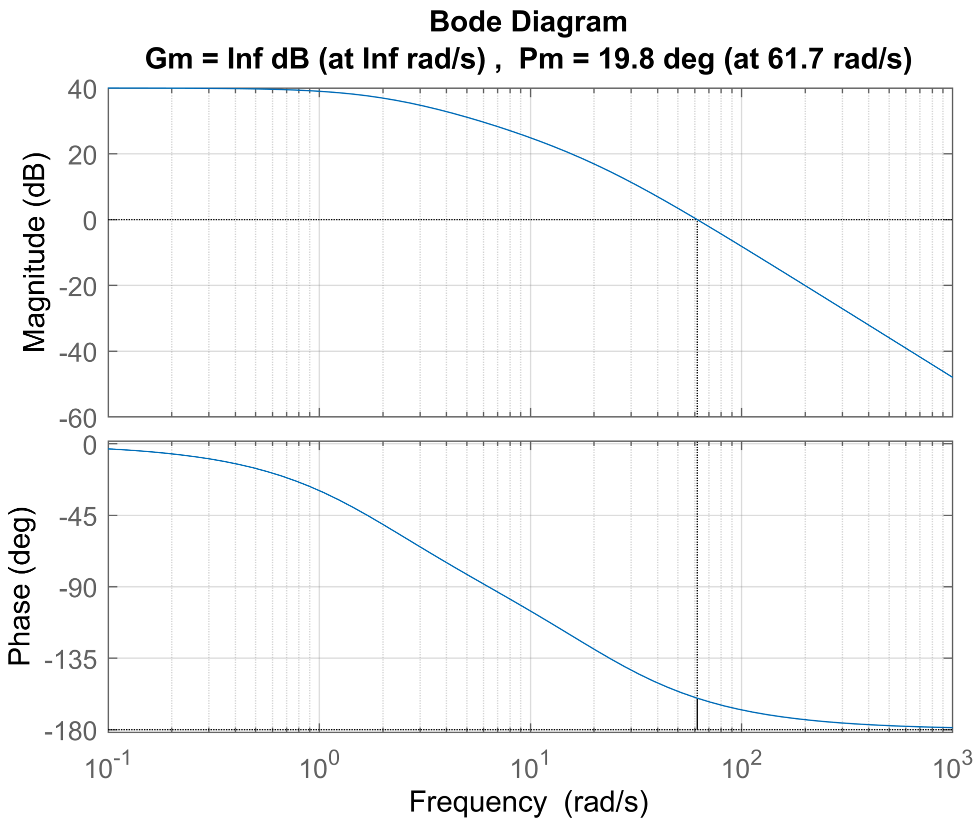
5) Obter do gráfico de Bode a frequência ω_m tal que $|G(j\omega_m)| = -10log_{10}a$.

6) Obter T de $T = \dfrac{1}{\omega_m\sqrt{a}}$.

Problemas de projeto: quando a fase a ser adicionada for grande, isto resulta em um valor de a também grande, o que pode inviabilizar o projeto deste controlador.

O script a seguir executa estes passos de projeto, usando a FT Kc*G(s).

```
figure;margin(Kc*G);grid;
```



A margem de fase é 20 graus. Suponha que se deseje uma nova margem de fase de 45 graus.

Deve-se adicionar fi=25 graus.

```
fi=30; % escolher valor
fi1=fi*pi/180;
a=(1+sin(fi1))/(1-sin(fi1))
```

```
a = 3
```

```
modulo=10*log10(a)
```

```
modulo = 4.7712
```

```
wm=82; % rad/s
T=1/(wm*sqrt(a))
```

```
T = 0.0070
```

```
C=tf(Kc*[a*T 1],[T 1])
```

```
C =

   0.1056 s + 5
  --------------
  0.007041 s + 1
```

```
Continuous-time transfer function.
```

```
figure;margin(C*G);grid;
```

No gráfico de Bode abaixo observa-se que ao adicionar a fase $\phi_m$em $\omega_m = 82rad/s$, o módulo aumenta um pouco, cruzando 0dB um pouco mais à frente.

Isso faz com que a Margem de Fase conseguida seja um pouco menor. Melhor aumentar um pouco mais ϕ_m.

```
figure;bode(Kc*G,C*G);grid;
```

Vamos testar diferentes valores de ϕ_m e verificar seu efeito.

Inicialização:

```
leg={};
UP=[];
Wm=[];
TS=[];
MF=[];
A1=[];
Fi=[];
Y=[];
t=((1:1000)-1)/4000;
k1=1;
```

Escolha de diferentes valores de fi (ϕ_m). Usaremos para isso a função projav.

[c1,a1, T1, wm]=projav(G,Kc,fi);

Esta função executa os passos do projeto do compensador de avanço de fase.

Deve se fornecer a FT G, o ganho Kc para atender o erro em regime, e a fase fi que se quer adicionar.

A função retorna o compensador na forma $C_1(s) = K_c\dfrac{1+aTs}{1+Ts}$ e a frequência wm na qual a fase fi foi adicionada.

```
fi=35;% Escolher valores
[C1,a1, T1, wm]=projav(G,Kc,fi);
Fi=[Fi;fi];
Wm=[Wm;wm];
A1=[A1;a1];
leg{k1}=num2str(fi,'%4.3f');k1=k1+1;
M1=feedback(C1*G,1);
y=step(M1,t);
Y=[Y y];
```

```
figure;
plot(t,Y);legend(leg);
xlabel('Tempo(s)');
```

```
S=stepinfo(M1);
UP=[UP; floor(S.Overshoot)];
TS=[TS; S.SettlingTime];
[~,mf]=margin(C1*G);
MF=[MF; floor(mf)];
Tabela2=table(Fi,A1,Wm,MF,UP,TS)
```

Tabela2 = 5×6 table

	Fi	A1	Wm	MF	UP	TS
1	80	130.6461	210.5687	65	4	0.0073
2	75	57.6955	154.1958	65	3	0.0177
3	65	20.3465	131.9508	70	2	0.0233
4	55	10.0590	100.0000	64	7	0.0567
5	35	3.6902	82.6857	49	23	0.0663

Lembramos os valores especificados de UP e ts:

```
UPe
```

UPe = 4

```
tse
```

tse = 1

Compensador avanço e atraso

Passos:

1) Projete o atraso para melhora a MF

2) Projete o avanço para melhorar a MF usando o projeto do atraso

3) Junte os dois compensadores

```
C1=projat(G,Kc,45);
C2=projav(G,Kc,40);
C21=projav(C1*G,1,35);
C3=C1*C21;
M1=feedback(C1*G,1);
M2=feedback(C2*G,1);
M3=feedback(C3*G,1);
figure;
step(M1,M2,M3);legend('AT','AV','AT-AV');
```

Claramente, o compensador avanço-atraso ficou melhor do que o avanço ou atraso sozinhos.