

Cálculo de Programas

Algebra of Programming

Lic./Mest.Int. em Engenharia Informática (3º ano)
Lic. Ciências da Computação (2º ano)
UNIVERSIDADE DO MINHO

2023/24 - Ficha nr.º 3

- | | |
|--|--|
| <p>1. Recorde a propriedade universal do combinador $[f, g]$,</p> | <p><i>Recall the universal property of the $[f, g]$ combinator,</i></p> |
|--|--|

$$k = [f, g] \equiv \begin{cases} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{cases}$$

da qual, como sabe, podem ser derivadas todas as outras que aparecem no respectivo grupo, no formulário.

Use esta lei para demonstrar a lei

from which, as you know, all the others appearing in the corresponding group of the reference sheet can be derived.

Use this property to prove the law

$$[i_1, i_2] = id$$

conhecida por *reflexão*-+.

known as +-reflexion.

2. Demonstre a igualdade

Prove the equality

$$[\underline{k}, \underline{k}] = \underline{k} \tag{F1}$$

recorrendo à propriedade universal acima e a uma lei que qualquer função constante \underline{k} satisfaz. (Ver no formulário.)

using the universal property given above and a law that any constant function \underline{k} satisfies. (Check the reference sheet.)

3. Seja dada a função $\text{coswap} = [i_2, i_1]$. Faça um diagrama que explique o tipo de coswap e mostre que $\text{coswap} \cdot \text{coswap} = id$.

Let function $\text{coswap} = [i_2, i_1]$ be given. Draw a diagram explaining the type of coswap and show that $\text{coswap} \cdot \text{coswap} = id$ holds.

4. Considere a função

Let function

$$\alpha = [\langle \text{FALSE}, id \rangle, \langle \text{TRUE}, id \rangle] \tag{F2}$$

Determine o tipo de α e mostre, usando a propriedade *universal*+, que α se pode escrever em Haskell da forma seguinte:

be given. Infer the type of α and show, using the +-universal law, that α can be written in pointwise Haskell as follows:

$$\alpha (\text{Left } a) = (\text{FALSE}, a)$$

$$\alpha (\text{Right } a) = (\text{TRUE}, a)$$

5. O combinador funcional *soma* define-se por: $f + g = [i_1 \cdot f, i_2 \cdot g]$. Identifique no formulário os nomes das propriedades que se seguem e demonstre-as usando o cálculo de programas.

The sum of two functions f and g is defined by $f + g = [i_1 \cdot f, i_2 \cdot g]$. Check the names of the three laws that are given below in the reference sheet and prove them using the algebra of programming.

$$id + id = id \quad (\text{F3})$$

$$(f + g) \cdot i_1 = i_1 \cdot f \quad (\text{F4})$$

$$(f + g) \cdot i_2 = i_2 \cdot g \quad (\text{F5})$$

6. Deduza o tipo mais geral da função $\alpha = (id + \pi_1) \cdot i_2 \cdot \pi_2$ e represente-o através de um diagrama.

Infer the most general type of function $\alpha = (id + \pi_1) \cdot i_2 \cdot \pi_2$ and draw it in a diagram of compositions.

7. Considere o isomorfismo

Consider the isomorphism

$$(A + B) + C \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{coassocr}} \\ \cong \\ \xleftarrow{\text{coassocl}} \end{array} A + (B + C)$$

onde $\text{coassocr} = [id + i_1, i_2 \cdot i_2]$. Calcule a sua conversa resolvendo em ordem a coassocl a equação,

where $\text{coassocr} = [id + i_1, i_2 \cdot i_2]$. Find its converse coassocl by solving the equation,

$$\text{coassocl} \cdot \text{coassocr} = id$$

isto é, a equação

that is, the equation

$$\text{coassocl} \cdot \underbrace{[id + i_1, i_2 \cdot i_2]}_{\text{coassocr}} = id$$

Finalmente, exprima coassocl sob a forma de um programa em Haskell *não recorra* ao combinador “either”.

Finally express coassocl in pointwise Haskell code not using the “either” combinator.

8. Recorra às leis dos coprodutos para mostrar que a definição que conhece da função factorial,

Show by coproduct laws that the usual definition of the factorial function,

$$fac\ 0 = 1$$

$$fac\ (n + 1) = (n + 1) * fac\ n$$

é equivalente à equação seguinte

is equivalent the following equation,

$$fac \cdot [0, succ] = [1, mul \cdot \langle succ, fac \rangle]$$

onde

where

$$succ \ n = n + 1$$

$$mul \ (a, b) = a * b$$

9. No cálculo de programas, as definições condicionais do tipo

Conditional expressions of pattern

$$h \ x = \text{if } p \ x \text{ then } f \ x \text{ else } g \ x$$

são escritas usando o combinador ternário

are expressed in the algebra of programming by the ternary combinator

$$p \rightarrow f, g$$

conhecido pelo nome de *condicional de McCarthy*, cuja definição

known as the McCarthy conditional, whose definition

$$p \rightarrow f, g = [f, g] \cdot p? \quad (\text{F6})$$

vem no formulário. Baseie-se em leis desse formulário para demonstrar a chamada 2ª-lei de fusão do condicional:

can be found in reference sheet. Use this reference sheet to prove the so-called 2nd fusion-law of conditionals:

$$(p \rightarrow f, g) \cdot h = (p \cdot h) \rightarrow (f \cdot h), (g \cdot h)$$

10. **Questão prática** — Este problema não irá ser abordado em sala de aula. Os alunos devem tentar resolvê-lo em casa e, querendo, publicarem a sua solução no canal **#geral** do Slack, com vista à sua discussão com colegas. Dão-se a seguir os requisitos do problema.

Open assignment — This assignment will not be addressed in class. Students should try to solve it at home and, wishing so, publish their solutions in the **#geral** Slack channel, so as to trigger discussion among other colleagues. The requirements of the problem are given below.

Problem requirements: The solution given for a previous problem,

$$store \ c = take \ 10 \cdot nub \cdot (c:) \quad (\text{F7})$$

calls the standard function

$$nub \ (Eq \ a) \Rightarrow [a] \rightarrow [a]$$

available from the *Data.List* library in Haskell.

After inspecting the standard implementation of this function, define f so that

$$nub = [nil, cons] \cdot f.$$

is an alternative to the standard definition, where $nil _ = []$ and $cons \ (h, t) = h : t$. Check that $store \ c$ (F7) works properly once the standard nub is replaced by yours.

Important: Structure your solution across the $f \cdot g$, $\langle f, g \rangle$, $f \times g$, $[f, g]$ and $f + g$ combinators available from library *Cp.hs*. Use **diagrams** to plan your solution. Solutions should avoid re-inventing functions over lists already available in the Haskell standard libraries.

□