Cálculo de Programas
Algebra of Programming

UNIVERSIDADE DO MINHO
Lic. em Engenharia Informática (3º ano)
Lic. Ciências da Computação (2º ano)

2023/24 - Ficha *(Exercise sheet)* nr. 8

1. Considere o functor — *Consider functor*

$$\begin{cases} \mathsf{T}\ X = X \times X \\ \mathsf{T}\ f = f \times f \end{cases}$$

e as funções — *and functions*

$$\mu = \pi_1 \times \pi_2$$
$$u = \langle id, id \rangle.$$

Demonstre a propriedade: — *Prove the following property:*

$$\mu \cdot \mathsf{T}\ u = id = \mu \cdot u$$

---

2. Sejam dados os functores elementares seguintes: — *Consider the following basic functors:*

$$\begin{cases} \mathsf{F}\ X = \mathbb{Z} \\ \mathsf{F}\ f = id \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathsf{G}\ X = X \\ \mathsf{G}\ f = f \end{cases}$$

Mostre que H e K definidos por — *Show that* H *and* K *defined by*

$$\mathsf{H}\ X = \mathsf{F}\ X + \mathsf{G}\ X$$
$$\mathsf{K}\ X = \mathsf{G}\ X \times \mathsf{F}\ X$$

são functores. — *are functors.*

---

3. Mostre que, sempre que F e G são functores, então a sua composição $\mathsf{H} = \mathsf{F} \cdot \mathsf{G}$ é também um functor. — *Show that wherever* F *and* G *are functors, then their composition* $\mathsf{H} = \mathsf{F} \cdot \mathsf{G}$ *is also a functor.*

---

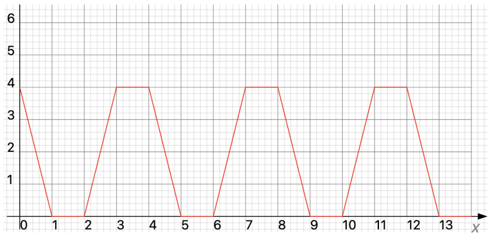
4. Mostre que a lei da recursividade mútua generaliza a mais do que duas funções, neste caso três: — *Show that the mutual recursion law generalizes to more than two functions (three, in the following case):*

$$\begin{cases} f \cdot \mathsf{in} = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \langle f, g \rangle, j \rangle \\ g \cdot \mathsf{in} = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \langle f, g \rangle, j \rangle \\ j \cdot \mathsf{in} = l \cdot \mathsf{F}\ \langle \langle f, g \rangle, j \rangle \end{cases} \equiv \langle \langle f, g \rangle, j \rangle = (\!| \langle \langle h, k \rangle, l \rangle |\!) \tag{F1}$$

---

5. A figura representa a função $\pi_1 \cdot aux$, para aux definida ao lado:

The figure plots $\pi_1 \cdot aux$, for aux defined aside:



$$
\begin{array}{l}
aux = \mathsf{for}\ loop\ (4, -2)\ \mathbf{where} \\
\quad loop\ (a, b) = (2 + b, 2 - a)
\end{array}
$$

Partindo da definição do combinador $\mathsf{for}\ b\ i = (\!|\ [\underline{i}\ , b]\ |\!)$, para $\mathsf{F} = id + f$ e $\mathsf{in} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$, resolva em ordem a f e g a equação

Starting from the definition of $\mathsf{for}\ b\ i = (\!|\ [\underline{i}\ , b]\ |\!)$, for $\mathsf{F} = id + f$ and $\mathsf{in} = [\underline{0}\ , \mathsf{succ}]$, solve for f and g the equation

$$\langle f, g \rangle = aux$$

por aplicação da lei de recursividade mútua, entregando as definições de f e g em notação *pointwise*.

by the mutual recursion law, delivering the definitions of f and g in pointwise *notation.*

---

6. As seguintes funções mutuamente recursivas testam a paridade de um número natural:

The following mutually recursive functions test the parity of a natural number:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
impar\ 0 = \textsc{False} \\
impar\ (n + 1) = par\ n
\end{array}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{array}{l}
par\ 0 = \textsc{True} \\
par\ (n + 1) = impar\ n
\end{array}
\right.
$$

Assumindo o functor $\mathsf{F}\ f = id + f$, mostre que esse par de definições é equivalente ao sistema de equações

Assuming the functor $\mathsf{F}\ f = id + f$, show that this pair of definitions is equivalent to the system of equations

$$
\left\{
\begin{array}{l}
impar \cdot \mathsf{in} = h \cdot \mathsf{F}\ \langle impar, par \rangle \\
par \cdot \mathsf{in} = k \cdot \mathsf{F}\ \langle impar, par \rangle
\end{array}
\right.
$$

para um dado h e k (deduza-os). De seguida, recorra às leis da recursividade mútua e da troca para mostrar que

for a given h and k (calculate these). Then use the mutual recursion and exchange laws to show that

$$imparpar = \langle impar, par \rangle = \mathsf{for}\ \mathsf{swap}\ (\textsc{False}, \textsc{True})$$

---

7. A seguinte função em Haskell lista os primeiros n números naturais por ordem inversa:

The following Haskell function lists the n first natural numbers in reverse order:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
insg\ 0 = [\,] \\
insg\ (n + 1) = (n + 1) : insg\ n
\end{array}
\right.
$$

Mostre que $insg$ pode ser definida por recursividade mútua tal como se segue:

Show that $insg$ can be defined by mutual recursion as follows:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
insg\ 0 = [\,] \\
insg\ (n + 1) = (fsuc\ n) : insg\ n
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
fsuc\ 0 = 1 \\
fsuc\ (n + 1) = fsuc\ n + 1
\end{array}
\right.
$$

A seguir, usando a lei de recursividade mútua, derive:

Then, using the law of mutual recursion, derive:

$$
\begin{array}{l}
insg = \pi_2 \cdot insgfor \\
insgfor = \mathsf{for}\ \langle (1+) \cdot \pi_1, \mathsf{cons} \rangle\ (1, [\,])
\end{array}
$$

---

8. Considere o par de funções mutuamente recursivas

Consider the pair of mutually recursive functions

$$
\left\{ \begin{array}{l} f_1\ [\,] = [\,] \\ f_1\ (h : t) = h : (f_2\ t) \end{array} \right.
\qquad
\left\{ \begin{array}{l} f_2\ [\,] = [\,] \\ f_2\ (h : t) = f_1\ t \end{array} \right.
$$

Mostre por recursividade mútua que $\langle f_1, f_2 \rangle$ é um catamorfismo de listas (onde $\mathsf{F}\ f = id + id \times f$) e desenhe o respectivo diagrama. Que faz cada uma destas funções f_1 e f_2?

Show by mutual recursion that $\langle f_1, f_2 \rangle$ is a list catamorphism (for $\mathsf{F}\ f = id + id \times f$) and draw the corresponding diagram. What do functions f_1 and f_2 actually do?

---

9. **Questão prática** — Este problema não irá ser abordado em sala de aula. Os alunos devem tentar resolvê-lo em casa e, querendo, publicarem a sua solução no canal **#geral** do Slack, com vista à sua discussão com colegas.

Open assignment *— This assignment will not be addressed in class. Students should try to solve it at home and, whishing so, publish their solutions in the* ***#geral*** *Slack channel, so as to trigger discussion among other colleagues.*

Problem definition*: Page* UNZIP IN ONE PASS? *of* STACK OVERFLOW *addresses the question as to whether*

$$\mathsf{unzip}\ xs = (\mathsf{map}\ \pi_1\ xs, \mathsf{map}\ \pi_2\ xs)$$

can do one traversal only. The answer is affirmative:

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{unzip}\ [\,] = ([\,], [\,]) \\
\mathsf{unzip}\ ((a, b) : xs) = (a : as, b : bs)\ \mathbf{where}\ (as, bs) = \mathsf{unzip}\ xs
\end{array}
$$

What is missing from STACK OVERFLOW *is the explanation of how the two steps of* unzip *merge into one.*

Show that the banana-split *law is what needs to be known for the one traversal version to be derived from the two traversal one.*

□